Sujets et corrigés des DS
de mathématiques et d'informatique

BCPST1A lycée Hoche 2014-2015

Sébastien Godillon

Table des matières

DS n$^{\text{o}}$ 1 de mathématiques

durée : 3 heures

Exercice 1

Dans un haras, un test génétique de couleur de robe (alezane, baie ou noire) est pratiqué sur les chevaux de trait de deux races différentes : comtoise et percheronne. On considère les deux propositions suivantes :

$\mathcal{P}$: «Il existe un percheron dont l'échantillon d'ADN est porteur du gène noir.»
$\mathcal{Q}$: «Si l'analyse est pratiquée sur un comtois, alors son échantillon d'ADN est porteur du gène alezan et du gène bai.»

On note H l'ensemble des chevaux analysés du haras ; A, B et N les sous-ensembles de chevaux dont les échantillons d'ADN sont porteurs des gènes alezan, bai et noir (respectivement) ; et enfin C et P les sous-ensembles de chevaux de races comtoise et percheronne (respectivement). On pourra utiliser la lettre h pour désigner un cheval analysé (c'est-à-dire un élément générique de H).

1. Réécrire les propositions $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ en langage mathématique à l'aide de quantificateurs et d'opérateurs logiques.
2. Réécrire la proposition $\mathcal{Q}$ en langage mathématique à l'aide d'opérations sur des ensembles.
3. Donner, en français, la négation de $\mathcal{P}$ et la négation de $\mathcal{Q}$.
4. Donner, en français, la contraposée et la réciproque de $\mathcal{Q}$.
5. Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse (les justifications ne sont pas demandées) :
   (a) Pour prouver que $\mathcal{P}$ est vraie, il est suffisant de prouver que tous les échantillons d'ADN du haras sont porteurs du gène noir.
   (b) Pour prouver que $\mathcal{P}$ est fausse, il est nécessaire de prouver l'existence d'un percheron dont l'échantillon d'ADN n'est pas porteur du gène noir.
   (c) Pour prouver que $\mathcal{Q}$ est fausse, il est suffisant de prouver que tous les échantillons d'ADN des comtois sont porteurs du gène noir.
   (d) Pour prouver que $\mathcal{Q}$ est vraie, il est nécessaire de prouver que tous les échantillons d'ADN neutres (c'est-à-dire porteurs d'aucun gène : ni alezan, ni bai, ni noir) ont été prélevés sur des percherons.

Exercice 2

On considère la série harmonique $(H_m)_{m\geqslant 1}$ définie pour tout nombre entier $m \geqslant 1$ par :

$$H_m = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{m-1} + \frac{1}{m} = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k}.$$

On propose de démontrer que la suite $(H_m)_{m\geqslant 1}$ diverge vers $+\infty$.

1. Démontrer que la suite $(H_m)_{m\geqslant 1}$ est strictement croissante.
2. Pour tout nombre entier $m \geqslant 1$, on pose l'entier $N_m = \left\lfloor \frac{\ln(m)}{\ln(2)} \right\rfloor$.
   (a) Montrer que $\lim_{m\to+\infty} N_m = +\infty$.
   (b) Montrer que $\forall m \geqslant 1,\ \frac{m}{2} < 2^{N_m} \leqslant m$ et en déduire que $\forall m \geqslant 1,\ H_m \geqslant H_{2^{N_m}}$.
   (c) Démontrer qu'il est suffisant de prouver que la suite $(H_{2^n})_{n\geqslant 0}$ tend vers $+\infty$ pour prouver que la suite $(H_m)_{m\geqslant 1}$ tend vers $+\infty$.
3. Pour cette question, on fixe un nombre entier $n \geqslant 0$.

(a) Donner le nombre d'éléments de l'ensemble $E_n = \{k \in \mathbb{N} \; / \; k \geqslant 2^n + 1 \text{ et } k \leqslant 2^{n+1}\}$.

(b) Montrer que $\forall k \in E_n,\ \frac{1}{k} \geqslant 2^{-(n+1)}$.

(c) En déduire que :

$$\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} \geqslant \frac{1}{2}.$$

4. Démontrer que $\forall n \geqslant 0,\ H_{2^n} \geqslant 1 + \frac{n}{2}$.
5. Conclure.

Exercice 3

On considère les nombres réels $\alpha = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$ et $\beta = \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ (on rappelle que pour tout nombre réel y, on note $\sqrt[3]{y}$ l'unique solution de l'équation $x^3 = y$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$). On propose de simplifier l'expression de α et β.

1. (a) Calculer $\alpha\beta$ et $\alpha^3 + \beta^3$.
   (b) Vérifier que $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.
   (c) En déduire une expression simple de $(\alpha+\beta)^3$ en fonction de α et β.
2. On pose $u = \alpha + \beta$ et on considère la fonction polynomiale $P : x \mapsto P(x) = x^3 + 3x - 4$.
   (a) A l'aide de la question précédente, montrer que u est une racine de P, c'est-à-dire que $P(u) = 0$.
   (b) Trouver une racine évidente de P.
   (c) Trouver trois nombres réels a, b et c tels que $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$.
   (d) Résoudre l'équation $P(x) = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
   (e) En déduire la valeur de u.
3. On considère la fonction polynomiale $Q : x \mapsto Q(x) = (x-\alpha)(x-\beta)$.
   (a) A l'aide des questions précédentes, développer et simplifier $Q(x)$ pour tout nombre réel x.
   (b) En déduire que α et β sont solutions de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
   (c) Déterminer des expressions plus simples de α et β.

Exercice 4

On considère l'équation (E) d'inconnue $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ définie par :

$$\sqrt{\cos(x)} + \sqrt{\sin(x)} = 1. \tag{E}$$

On propose de résoudre cette équation de deux manières différentes. Les questions **A)** et **B)** suivantes sont donc totalement indépendantes.

A) Première méthode :

1. Vérifier que $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ (a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.
2. Démontrer que l'équation (E) est équivalente à l'équation (E') suivante :

$$\sqrt{\cos(x)\sin(x)}\left(2\cos(x) + 3\sqrt{\cos(x)\sin(x)} + 2\sin(x)\right) = 0. \tag{E'}$$

3. Justifier que $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}],\ 2\cos(x) + 3\sqrt{\cos(x)\sin(x)} + 2\sin(x) > 0$.
4. En déduire les solutions de l'équation (E).

B) Deuxième méthode :

1. Démontrer que $\forall a \in]0,1[,\ \sqrt{a} > a^2$.
2. En déduire que $\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[,\ \sqrt{\cos(x)} + \sqrt{\sin(x)} > 1$.
3. Retrouver les solutions de l'équation (E).

Corrigé du DS n$^{\circ}$ 1 de mathématiques

Exercice 1

Dans un haras, un test génétique de couleur de robe (alezane, baie ou noire) est pratiqué sur les chevaux de trait de deux races différentes : comtoise et percheronne. On considère les deux propositions suivantes :

> $\mathcal{P}$: *«Il existe un percheron dont l'échantillon d'ADN est porteur du gène noir.»*
> $\mathcal{Q}$: *«Si l'analyse est pratiquée sur un comtois, alors son échantillon d'ADN est porteur du gène alezan et du gène bai.»*

On note H l'ensemble des chevaux analysés du haras ; A, B et N les sous-ensembles de chevaux dont les échantillons d'ADN sont porteurs des gènes alezan, bai et noir (respectivement) ; et enfin C et P les sous-ensembles de chevaux de races comtoise et percheronne (respectivement). On pourra utiliser la lettre h pour désigner un cheval analysé (c'est-à-dire un élément générique de H).

1. *Réécrire les propositions $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ en langage mathématique à l'aide de quantificateurs et d'opérateurs logiques.*

   ▶ On a en langage mathématique avec des quantificateurs et des opérateurs logiques :

$$\mathcal{P} \iff \boxed{\exists h \in P, \quad h \in N} \quad \Big(\iff \exists h \in H, \quad h \in P \text{ et } h \in N\Big)$$
$$\mathcal{Q} \iff \boxed{\forall h \in H, \quad h \in C \Longrightarrow (h \in A \text{ et } h \in B)} \quad \Big(\iff \forall h \in C, \quad h \in A \text{ et } h \in B\Big)$$

   Attention : la proposition «$h \in A \cap B$» est équivalente à «$h \in A$ et $h \in B$» mais elle utilise une opération sur des ensembles (l'intersection $\cap$) et non un opérateur logique (le «et») comme demandé par l'énoncé.

2. *Réécrire la proposition $\mathcal{Q}$ en langage mathématique à l'aide d'opérations sur des ensembles.*

   ▶ On a en langage mathématique avec des opérations sur des ensembles :

$$\mathcal{Q} \quad \Big(\iff \forall h \in C, \quad h \in A \cap B\Big) \iff \boxed{C \subset A \cap B}$$

3. *Donner, en français, la négation de $\mathcal{P}$ et la négation de $\mathcal{Q}$.*

   ▶ On a en langage mathématique :

$$\begin{aligned}
\text{non}\,(\mathcal{P}) &\iff \forall h \in P, \quad \text{non}\,(h \in N)\\
&\iff \forall h \in P, \quad h \notin N \quad \Big(\iff \forall h \in H, \quad h \notin P \text{ ou } h \notin N\Big)\\
\text{non}\,(\mathcal{Q}) &\iff \exists h \in H, \quad \text{non}\,(h \in C \Longrightarrow (h \in A \text{ et } h \in B))\\
&\iff \exists h \in H, \quad h \in C \text{ et non}\,(h \in A \text{ et } h \in B)\\
&\iff \exists h \in H, \quad h \in C \text{ et } (h \notin A \text{ ou } h \notin B) \quad \Big(\iff \exists h \in C, \quad h \notin A \text{ ou } h \notin B\Big)
\end{aligned}$$

   Ecrire les négations de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ en langage mathématique n'est pas demandé, mais ça aide pour les traduire ensuite en français.

   On en déduit donc en français que la négation de $\mathcal{P}$ est «Aucun échantillon d'ADN des percherons n'est porteur du gène noir.», et la négation de $\mathcal{Q}$ est «Il existe un échantillon d'ADN qui, d'une part, a été prélevé sur un comtois et, d'autre part, n'est pas porteur du gène alezan ou n'est pas porteur du gène bai (ou n'est pas porteur des deux gènes).».

4. *Donner, en français, la contraposée et la réciproque de $\mathcal{Q}$.*

▶ La contraposée de $\mathcal{Q}$ est donnée en langage mathématique par :

$$\begin{aligned} & \forall h \in H, \quad \text{non}\,(h \in A \text{ et } h \in B) \Longrightarrow \text{non}\,(h \in C) \\ \Longleftrightarrow \quad & \forall h \in H, \quad (h \notin A \text{ ou } h \notin B) \Longrightarrow h \notin C \end{aligned}$$

ce qui donne en français : «Si un échantillon d'ADN n'est pas porteur du gène alezan ou n'est pas porteur du gène bai (ou n'est pas porteur des deux gènes), alors l'analyse n'a pas été pratiquée sur un comtois.». La réciproque de $\mathcal{Q}$ est donnée en langage mathématique par :

$$\forall h \in H, \quad (h \in A \text{ et } h \in B) \Longrightarrow h \in C$$

ce qui donne en français : «Si un échantillon d'ADN est porteur du gène alezan et du gène bai, alors l'analyse a été pratiquée sur un comtois.»

5. *Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse (les justifications ne sont pas demandées) :*

   (a) *Pour prouver que $\mathcal{P}$ est vraie, il est suffisant de prouver que tous les échantillons d'ADN du haras sont porteurs du gène noir.*

   ▶ $\boxed{\text{Vraie}}$.

   (b) *Pour prouver que $\mathcal{P}$ est fausse, il est nécessaire de prouver l'existence d'un percheron dont l'échantillon d'ADN n'est pas porteur du gène noir.*

   ▶ $\boxed{\text{Vraie}}$.

   En toute rigueur, les propositions 5(a) et 5(b) sont fausses si l'ensemble des percherons est vide (dans ce cas, la proposition $\mathcal{P}$ est toujours fausse). Mais la première phrase de l'énoncé sous-entend qu'il existe au moins un percheron.

   (c) *Pour prouver que $\mathcal{Q}$ est fausse, il est suffisant de prouver que tous les échantillons d'ADN des comtois sont porteurs du gène noir.*

   ▶ $\boxed{\text{Fausse}}$.

   (d) *Pour prouver que $\mathcal{Q}$ est vraie, il est nécessaire de prouver que tous les échantillons d'ADN neutres (c'est-à-dire porteurs d'aucun gène : ni alezan, ni bai, ni noir) ont été prélevés sur des percherons.*

   ▶ $\boxed{\text{Vraie}}$.

Exercice 2

On considère la série harmonique $(H_m)_{m \geqslant 1}$ définie pour tout nombre entier $m \geqslant 1$ par :

$$H_m = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{m-1} + \frac{1}{m} = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k}.$$

On propose de démontrer que la suite $(H_m)_{m \geqslant 1}$ diverge vers $+\infty$.

1. *Démontrer que la suite $(H_m)_{m \geqslant 1}$ est strictement croissante.*

▶ On a pour un entier $m \geqslant 1$ fixé :

$$H_{m+1} - H_m = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{m} + \frac{1}{m+1}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{m}\right) = \frac{1}{m+1} > 0.$$

Inutile de perdre du temps à justifier que $\frac{1}{m+1} > 0$ quand $m \geqslant 1$, c'est évident.

Par conséquent $H_{m+1} > H_m$ pour tout $m \geqslant 1$ et donc $\boxed{\text{la suite } (H_m)_{m \geqslant 1} \text{ est strictement croissante}}$.

2. Pour tout nombre entier $m \geqslant 1$, on pose l'entier $N_m = \left\lfloor \frac{\ln(m)}{\ln(2)} \right\rfloor$.

(a) Montrer que $\lim_{m \to +\infty} N_m = +\infty$.

▶ D'après la définition de la partie entière, on a pour tout entier $m \geqslant 1$:

$$N_m \leqslant \frac{\ln(m)}{\ln(2)} < N_m + 1$$

ce qui peut aussi s'écrire :

$$\frac{\ln(m)}{\ln(2)} - 1 < N_m \leqslant \frac{\ln(m)}{\ln(2)}. \qquad (\star)$$

Or $\lim_{m \to +\infty} \frac{\ln(m)}{\ln(2)} - 1 = +\infty$ car $\lim_{m \to +\infty} \ln(m) = +\infty$ et $\ln(2) > 0$. D'après le théorème de comparaison, on en déduit que $\boxed{N_m \text{ tend vers } +\infty \text{ quand } m \text{ tend vers } +\infty}$.

Attention de ne pas oublier de préciser que $\ln(2) > 0$. Par contre, il est inutile de justifier que le membre de droite des inégalités $(\star)$ tend aussi vers $+\infty$ quand $m \to +\infty$.

(b) Montrer que $\forall m \geqslant 1$, $\frac{m}{2} < 2^{N_m} \leqslant m$ et en déduire que $\forall m \geqslant 1$, $H_m \geqslant H_{2^{N_m}}$.

▶ En multipliant les inégalités $(\star)$ par $\ln(2) > 0$, on obtient pour tout entier $m \geqslant 1$:

$$\begin{array}{ccccc} \ln(m) - \ln(2) & < & N_m \ln(2) & \leqslant & \ln(m) \\ \ln\left(\frac{m}{2}\right) & < & \ln(2^{N_m}) & \leqslant & \ln(m). \end{array}$$

Puis en utilisant le fait que la fonction exponentielle est strictement croissante, on a pour tout entier $m \geqslant 1$:

$$\begin{array}{ccccc} \exp\left(\ln\left(\frac{m}{2}\right)\right) & < & \exp(\ln(2^{N_m})) & \leqslant & \exp(\ln(m)) \\ \frac{m}{2} & < & 2^{N_m} & \leqslant & m. \end{array}$$

Les justifications nécessaires et suffisantes ici sont $\ln(2) > 0$ et $x \mapsto \exp(x)$ strictement croissante. Elles doivent apparaître explicitement.

En utilisant l'inégalité à droite ci-dessus, et la croissance de la suite $(H_m)_{m \geqslant 1}$ démontrée à la question 1, on en déduit que $\boxed{H_m \geqslant H_{2^{N_m}} \text{ pour tout entier } m \geqslant 1}$.

(c) Démontrer qu'il est suffisant de prouver que la suite $(H_{2^n})_{n \geqslant 0}$ tend vers $+\infty$ pour prouver que la suite $(H_m)_{m \geqslant 1}$ tend vers $+\infty$.

▶ Supposons que la suite $(H_{2^n})_{n \geqslant 0}$ tende vers $+\infty$, c'est-à-dire que $\lim_{n \to +\infty} H_{2^n} = +\infty$. Puisque $\lim_{m \to +\infty} N_m = +\infty$ d'après le résultat de la question 2(a), on obtient avec le changement de variable $n = N_m$ que $\lim_{m \to +\infty} H_{2^{N_m}} = +\infty$. Et puisque $\forall m \geqslant 1$, $H_{2^{N_m}} \leqslant H_m$ d'après le résultat de la question 2(b), on en déduit que $\lim_{m \to +\infty} H_m = +\infty$ (en utilisant le théorème de comparaison). Finalement, on a montré que :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} H_{2^n} = +\infty \Longrightarrow \lim_{m \to +\infty} H_m = +\infty}.$$

La condition «$(H_{2^n})_{n \geqslant 0}$ tend vers $+\infty$» est donc suffisante pour prouver que «$(H_m)_{m \geqslant 1}$ tend vers $+\infty$».

Attention à la rédaction ici. Il ne s'agit pas de démontrer que la proposition «$(H_{2^n})_{n \geqslant 0}$ tend vers $+\infty$» est vraie (questions suivantes) mais de démontrer que si elle est vraie alors «$(H_m)_{m \geqslant 1}$ tend vers $+\infty$» est aussi vraie, c'est-à-dire que l'implication ci-dessus est vraie.

3. Pour cette question, on fixe un nombre entier $n \geqslant 0$.

(a) Donner le nombre d'éléments de l'ensemble $E_n = \{k \in \mathbb{N} \ / \ k \geqslant 2^n + 1 \text{ et } k \leqslant 2^{n+1}\}$.

▶ L'ensemble $E_n = \{k \in \mathbb{N} \ / \ k \geqslant 2^n + 1 \text{ et } k \leqslant 2^{n+1}\}$ peut aussi s'écrire (en décrivant ses éléments par une liste croissante) :

$$E_n = \{2^n + 1, \ 2^n + 2, \ 2^n + 3, \ 2^n + 4, \ \ldots, 2^{n+1}\}.$$

Or $2^{n+1} = 2^n 2^1 = 2^n \times 2 = 2^n + 2^n$. Donc :

$$\begin{aligned} E_n &= \{2^n+1,\ 2^n+2,\ 2^n+3,\ 2^n+4,\ \dots, 2^n+2^n\} \\ &= \{2^n+k \ / \ k \in \{1,2,3,\dots,2^n\}\}. \end{aligned}$$

On en déduit que E_n a le même nombre d'éléments que $\{1,2,3,\dots,2^n\}$, c'est-à-dire $\boxed{2^n}$ éléments.

On verra bientôt en cours qu'on peut tout simplement dire qu'entre 2^n+1 et 2^{n+1}, il y a exactement $2^{n+1} - (2^n+1) + 1 = 2 \times 2^n - 2^n = 2^n$ éléments.

(b) *Montrer que $\forall k \in E_n,\ \frac{1}{k} \geqslant 2^{-(n+1)}$.*

▶ Soit $k \in E_n$. On a en particulier $0 < k \leqslant 2^{n+1}$, donc en inversant cette inégalité : $\boxed{\frac{1}{k} \geqslant \frac{1}{2^{n+1}}}$. On en déduit le résultat pour tout $k \in E_n$ car $\frac{1}{2^{n+1}} = \left(2^{n+1}\right)^{-1} = 2^{-(n+1)}$.

(c) *En déduire que $\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} \geqslant \frac{1}{2}$.*

▶ En utilisant les résultats des deux questions précédentes, on obtient :

$$\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} = \sum_{k \in E_n} \frac{1}{k} \underbrace{\geqslant}_{\text{question 3(b)}} \sum_{k \in E_n} 2^{-(n+1)} = 2^{-(n+1)} \sum_{k \in E_n} 1 \underbrace{=}_{\text{question 3(a)}} 2^{-(n+1)} \times 2^n.$$

Or $2^{-(n+1)} \times 2^n = 2^{-n-1+n} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$. Finalement, on a bien l'inégalité : $\boxed{\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} \geqslant \frac{1}{2}}$.

Inutile de quantifier l'entier n dans les questions 3(a), 3(b) et 3(c) puisqu'il est fixé par l'énoncé pour toute la question 3.

4. *Démontrer que $\forall n \geqslant 0,\ H_{2^n} \geqslant 1 + \frac{n}{2}$.*

▶ On procède par récurrence. Pour $n = 0$ on a $H_{2^0} = H_1 = 1$ et $1 + \frac{0}{2} = 1$. Donc la proposition «$H_{2^n} \geqslant 1 + \frac{n}{2}$» est vraie au rang $n = 0$. On suppose maintenant la proposition «$H_{2^n} \geqslant 1 + \frac{n}{2}$» vraie pour un certain rang $n \geqslant 0$ fixé. On cherche à démontrer qu'elle est également vraie au rang $n+1$. On a :

$$\begin{aligned} H_{2^{n+1}} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}} \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) + \left(\frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^n+2} + \frac{1}{2^n+3} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}}\right) \\ &= H_{2^n} + \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

Or $H_{2^n} \geqslant 1 + \frac{n}{2}$ d'après l'hypothèse de récurrence, et on a démontré $\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} \geqslant \frac{1}{2}$ à la question précédente. Donc :

$$H_{2^{n+1}} \geqslant 1 + \frac{n}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{n+1}{2}.$$

Ainsi, la proposition «$H_{2^n} \geqslant 1 + \frac{n}{2}$» est héréditaire pour tout entier $n \geqslant 0$. On conclut par récurrence que $\boxed{H_{2^n} \geqslant 1 + \frac{n}{2} \text{ pour tout entier } n \geqslant 0}$.

5. *Conclure.*

▶ On vient de démontrer $\forall n \geqslant 0,\ 1 + \frac{n}{2} \leqslant H_{2^n}$. Or $\lim_{n \to +\infty} 1 + \frac{n}{2} = +\infty$, donc $\lim_{n \to +\infty} H_{2^n} = +\infty$ (en utilisant le théorème de comparaison). De plus on a démontré à la question 2(c) que l'implication

$$\lim_{n \to +\infty} H_{2^n} = +\infty \Longrightarrow \lim_{m \to +\infty} H_m = +\infty$$

est vraie. Par conséquent, $\boxed{\text{la suite } (H_m)_{m \geqslant 1} \text{ diverge vers } +\infty}$.

Inutile de perdre du temps à détailler le calcul de la limite $\lim_{n\to+\infty} 1+\frac{n}{2} = +\infty$ qui est évident.

Exercice 3

On considère les nombres réels $\alpha = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$ et $\beta = \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ (on rappelle que pour tout nombre réel y, on note $\sqrt[3]{y}$ l'unique solution de l'équation $x^3 = y$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$). On propose de simplifier l'expression de α et β.

1. (a) *Calculer $\alpha\beta$ et $\alpha^3+\beta^3$.*

► On a $\forall y > 0,\ \sqrt[3]{y} = y^{1/3}$ et $\forall y < 0,\ \sqrt[3]{y} = -(-y)^{1/3}$. Comme $2+\sqrt{5} > 0$ et $2-\sqrt{5} < 0$, on obtient $\alpha = (2+\sqrt{5})^{1/3}$ et $\beta = -(-2+\sqrt{5})^{1/3}$, puis :

$$\begin{aligned}
\alpha\beta &= -(2+\sqrt{5})^{1/3}(-2+\sqrt{5})^{1/3} = -\left[(2+\sqrt{5})(-2+\sqrt{5})\right]^{1/3} \\
&= -\left[(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)\right]^{1/3} = -\left[(\sqrt{5})^2 - 2^2\right]^{1/3} = -[1]^{1/3} = \boxed{-1} \\
\alpha^3+\beta^3 &= \left[(2+\sqrt{5})^{1/3}\right]^3 + \left[-(-2+\sqrt{5})^{1/3}\right]^3 = (2+\sqrt{5})^{3/3} - (-2+\sqrt{5})^{3/3} \\
&= (2+\sqrt{5}) - (-2+\sqrt{5}) = \boxed{4}.
\end{aligned}$$

Attention : $y^{1/3} = \exp\left(\frac{1}{3}\ln(y)\right)$ est défini seulement pour $y > 0$, alors que $\sqrt[3]{y}$ est défini pour tout $y \in \mathbb{R}$. On peut également faire les calculs en gardant la notation $\sqrt[3]{y}$ et sans utiliser la notation $y^{1/3}$ (dans ce cas, il n'y a pas de problème de signe).

(b) *Vérifier que $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ (a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.*

► Soient a et b deux nombres réels. On a en développant :

$$\begin{aligned}
(a+b)^3 &= (a+b)^{1+2} = (a+b)^1(a+b)^2 = (a+b)(a^2+2ab+b^2) \\
&= \boxed{a^3+2a^2b+ab^2+ba^2+2bab+b^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}.
\end{aligned}$$

(c) *En déduire une expression simple de $(\alpha+\beta)^3$ en fonction de α et β.*

► En utilisant le résultat précédent on a :

$$(\alpha+\beta)^3 = \alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3 = \left(\alpha^3+\beta^3\right) + 3\alpha\beta(\alpha+\beta).$$

Puis en utilisant les résultats de la question 1(a) on obtient :

$$(\alpha+\beta)^3 = \boxed{4-3(\alpha+\beta)}.$$

N'oubliez pas d'utiliser vos résultats des questions précédentes. Quand l'énoncé demande de simplifier, il faut le faire au maximum.

2. *On pose $u = \alpha+\beta$ et on considère la fonction polynomiale $P : x \mapsto P(x) = x^3+3x-4$.*

(a) *A l'aide de la question précédente, montrer que u est une racine de P, c'est-à-dire que $P(u) = 0$.*

► D'après le résultat de la question précédente : $u^3 = 4-3u$ et donc $\boxed{P(u) = u^3+3u-4 = 0}$.

(b) *Trouver une racine évidente de P.*

► On a $P(1) = 1^3+3\times 1-4 = 0$ donc $\boxed{1 \text{ est une racine de } P}$.

N'oubliez pas de justifier rapidement pourquoi 1 est racine de P.

(c) *Trouver trois nombres réels a, b et c tels que $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = (x-1)(ax^2+bx+c)$.*

▶ **Analyse :** On suppose qu'il existe un triplet $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = (x-1)(ax^2+bx+c)$. On a alors en développant :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = x^3+3x-4 &= (x-1)(ax^2+bx+c) \\ &= ax^3+bx^2+cx-ax^2-bx-c \\ &= ax^3+(b-a)x^2+(c-b)x-c.\end{aligned}$$

On en déduit que $a=1$, $b-a=0$, $c-b=3$ et $c=4$, c'est-à-dire $(a,b,c)=(1,1,4)$.
Synthèse : On pose $a=1$, $b=1$ et $c=4$. On a alors en développant :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \quad (x-1)(ax^2+bx+c) &= (x-1)(x^2+x+4) \\ &= x^3+x^2+4x-x^2-x-4 \\ &= x^3+3x-4 = P(x).\end{aligned}$$

D'où le résultat avec $\boxed{(a,b,c)=(1,1,4)}$.

La synthèse est suffisante, on peut faire l'analyse sur un brouillon et ne pas l'écrire sur sa copie. Par contre, la synthèse est nécessaire : elle doit apparaître explicitement.

(d) *Résoudre l'équation $P(x)=0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.*

▶ D'après le résultat précédent, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}P(x)=0 &\iff (x-1)(x^2+x+4)=0 \\ &\iff x=1 \quad \text{ou} \quad x^2+x+4=0.\end{aligned}$$

Pour la deuxième proposition, on reconnait un polynôme de degré 2 de discriminant $\Delta = 1^2-4\times 1\times 4 = -15 < 0$. L'équation $x^2+x+4=0$ n'a donc pas de solution réelle, et $\boxed{\text{l'équation } P(x)=0 \text{ admet pour unique solution } x=1}$.

(e) *En déduire la valeur de u.*

▶ D'après le résultat de la question 2(a), u est solution de l'équation $P(x)=0$. Or on vient de démontrer que cette équation n'a qu'une seule solution qui est 1. Par conséquent, $\boxed{\alpha+\beta=u=1}$.

3. *On considère la fonction polynomiale $Q : x \mapsto Q(x) = (x-\alpha)(x-\beta)$.*

(a) *A l'aide des questions précédentes, développer et simplifier $Q(x)$ pour tout nombre réel x.*

▶ On a pour tout $x \in \mathbb{R}$ (en développant) :

$$Q(x) = (x-\alpha)(x-\beta) = x^2-\alpha x-\beta x+\alpha\beta = x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta.$$

Or $\alpha+\beta=u=1$ d'après le résultat de la question précédente, et $\alpha\beta=-1$ d'après un des résultats de la question 1(a). Donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \boxed{Q(x)=x^2-x-1}.$$

(b) *En déduire que α et β sont solutions de l'équation $x^2-x-1=0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.*

▶ α est solution de l'équation $Q(x)=0$ car $Q(\alpha)=(\alpha-\alpha)(\alpha-\beta)=0\times(\alpha-\beta)=0$. Puisque $Q(x)=x^2-x-1$ pour tout $x\in\mathbb{R}$ d'après le résultat précédent, $\boxed{\alpha \text{ est bien solution de l'équation } x^2-x-1=0}$. On obtient $\boxed{\text{de même pour } \beta}$.

(c) *Déterminer des expressions plus simples de α et β.*

▶ On commence par résoudre l'équation $x^2-x-1=0$ d'inconnue $x\in\mathbb{R}$. On reconnait un polynôme de degré 2 de discriminant $\Delta=(-1)^2-4\times 1\times(-1)=5$. Cette équation a donc exactement deux solutions : $x_1 = \frac{-(-1)-\sqrt{\Delta}}{2\times 1} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{-(-1)+\sqrt{\Delta}}{2\times 1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. D'après le résultat précédent, ces deux solutions correspondent à α et β, il suffit donc de les identifier. Or $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0 < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\beta = \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} < 0 < \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} = \alpha$. Par conséquent :

$$\boxed{\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}} \quad \text{et} \quad \boxed{\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}}.$$

Attention de bien justifier l'identification. A priori, on a seulement démontré que $\{\alpha, \beta\} = \{x_1, x_2\}$ mais on ne sait pas si $(\alpha, \beta) = (x_1, x_2)$ ou si $(\alpha, \beta) = (x_2, x_1)$.

Exercice 4

On considère l'équation (E) d'inconnue $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ définie par :

$$\sqrt{\cos(x)} + \sqrt{\sin(x)} = 1. \tag{E}$$

*On propose de résoudre cette équation de deux manières différentes. Les questions **A)** et **B)** suivantes sont donc totalement indépendantes.*

A) *Première méthode :*

1. *Vérifier que $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ (a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.*

► Soient a et b deux nombres réels. On a en utilisant le résultat de la question 1(b) de l'exercice 3 et en développant :

$$\begin{aligned} (a+b)^4 &= (a+b)(a+b)^3 = (a+b)(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3) \\ &= a^4+3a^3b+3a^2b^2+ab^3+a^3b+3a^2b^2+3ab^3+b^4 \\ &= \boxed{a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4}. \end{aligned}$$

On pourra bientôt s'épargner ces calculs pénibles à l'aide de la formule du binôme de Newton.

2. *Démontrer que l'équation (E) est équivalente à l'équation (E') suivante :*

$$\sqrt{\cos(x)\sin(x)}\left(2\cos(x) + 3\sqrt{\cos(x)\sin(x)} + 2\sin(x)\right) = 0. \tag{E'}$$

► L'équation est bien définie pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ car $\cos(x) \geqslant 0$ et $\sin(x) \geqslant 0$. On a donc pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ en élevant l'équation (E) à la puissance 4 (d'après le résultat précédent) :

$$\begin{aligned} (E) &\iff \left(\sqrt{\cos(x)} + \sqrt{\sin(x)}\right)^4 = 1^4 \\ &\iff \left(\sqrt{\cos(x)}\right)^4 + 4\left(\sqrt{\cos(x)}\right)^3\sqrt{\sin(x)} + 6\left(\sqrt{\cos(x)}\right)^2\left(\sqrt{\sin(x)}\right)^2 \ldots \\ &\qquad \cdots + 4\sqrt{\cos(x)}\left(\sqrt{\sin(x)}\right)^3 + \left(\sqrt{\sin(x)}\right)^4 = 1 \\ &\iff \cos^2(x) + 4\cos(x)\sqrt{\cos(x)}\sqrt{\sin(x)} + 6\cos(x)\sin(x) \ldots \\ &\qquad \cdots + 4\sqrt{\cos(x)}\sqrt{\sin(x)}\sin(x) + \sin^2(x) = 1 \\ &\iff 2\sqrt{\cos(x)\sin(x)}\left(2\cos(x) + 3\sqrt{\cos(x)\sin(x)} + 2\sin(x)\right) \ldots \\ &\qquad \cdots + \left(\cos^2(x) + \sin^2(x)\right) = 1 \end{aligned}$$

Le plus important ici est de bien organiser ces calculs pour ne pas perdre de temps.

Or $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ (d'après le théorème de Pythagore), donc on obtient pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ que l'équation (E) est équivalente à :

$$\boxed{\sqrt{\cos(x)\sin(x)}\left(2\cos(x) + 3\sqrt{\cos(x)\sin(x)} + 2\sin(x)\right) = 0}. \tag{E'}$$

3. *Justifier que* $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}],\ 2\cos(x) + 3\sqrt{\cos(x)\sin(x)} + 2\sin(x) > 0.$

▶ On raisonne par disjonction des cas de $x \in [0, \frac{\pi}{2}] = \{0\} \cup]0, \frac{\pi}{2}[\cup \{\frac{\pi}{2}\}$.

Premier cas : $x = 0$. Alors $\cos(x) = 1$ et $\sin(x) = 0$, donc :

$$2\cos(x) + 3\sqrt{\cos(x)\sin(x)} + 2\sin(x) = 2 + 0 + 0 = 2 > 0.$$

Deuxième cas : $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Alors $\cos(x) > 0$ et $\sin(x) > 0$, donc :

$$2\cos(x) + 3\sqrt{\cos(x)\sin(x)} + 2\sin(x) > 0 + 0 + 0 = 0.$$

Troisème cas : $x = \frac{\pi}{2}$. Alors $\cos(x) = 0$ et $\sin(x) = 1$, donc :

$$2\cos(x) + 3\sqrt{\cos(x)\sin(x)} + 2\sin(x) = 0 + 0 + 2 = 2 > 0.$$

Dans tous les cas on a $\boxed{2\cos(x) + 3\sqrt{\cos(x)\sin(x)} + 2\sin(x) > 0}$, donc cette inégalité est vraie $\boxed{\text{pour tout } x \in [0, \frac{\pi}{2}]}$.

4. *En déduire les solutions de l'équation (E).*

▶ Pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, l'équation (E') est équivalente à :

$$\sqrt{\cos(x)\sin(x)} = 0 \quad \text{ou} \quad 2\cos(x) + 3\sqrt{\cos(x)\sin(x)} + 2\sin(x) = 0.$$

D'après le résultat précédent $2\cos(x) + 3\sqrt{\cos(x)\sin(x)} + 2\sin(x) \neq 0$ pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. De plus on a :

$$\begin{aligned}\sqrt{\cos(x)\sin(x)} = 0 &\iff \cos(x) = 0 \quad \text{ou} \quad \sin(x) = 0 \\ &\iff x = \frac{\pi}{2} \quad \text{ou} \quad x = 0.\end{aligned}$$

Par conséquent, l'équation (E') d'inconnue $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ admet deux solutions : $\boxed{0 \text{ et } \frac{\pi}{2}}$. Et puisque l'équation (E) est équivalente à l'équation (E') (voir question 2), l'ensemble des solutions est le même.

B) *Deuxième méthode :*

1. *Démontrer que* $\forall a \in]0, 1[,\ \sqrt{a} > a^2.$

▶ Pour tout $a > 0$, on a :

$$\sqrt{a} > a^2 \iff a > a^4 \iff 1 > a^3$$

(pour la première équivalence : le sens direct est vrai car $x \mapsto x^2$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et la réciproque est vraie car $x \mapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, pour la deuxième équivalence : on simplifie par $a > 0$). Or pour $a \in]0, 1[$, $a^3 < 1$ est toujours vraie car $x \mapsto x^3$ est strictement croissante (sur $\mathbb{R}$). Finalement, $\boxed{\sqrt{a} > a^2 \text{ pour tout } a \in]0, 1[}$.

> *Il y a de nombreuses manières de démontrer cette inégalité. Mais quelle que soit la méthode choisie, les justifications doivent être précises.*

2. *En déduire que* $\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[,\ \sqrt{\cos(x)} + \sqrt{\sin(x)} > 1.$

▶ Soit $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Puisque $\cos(x) \in]0, 1[$ et $\sin(x) \in]0, 1[$, on a en utilisant le résultat de la question précédente : $\sqrt{\cos(x)} + \sqrt{\sin(x)} > \cos^2(x) + \sin^2(x)$. Or le membre de droite est égal à 1 (d'après le théorème de Pythagore). D'où $\boxed{\sqrt{\cos(x)} + \sqrt{\sin(x)} > 1 \text{ pour tout } x \in]0, \frac{\pi}{2}[}$.

> *N'oubliez pas de justifier que* $\cos(x) \in]0, 1[$ *et* $\sin(x) \in]0, 1[$ *pour pouvoir utiliser la question précédente.*

3. *Retrouver les solutions de l'équation (E).*

▶ D'après le résultat précédent, l'équation (E) d'inconnue $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ n'a pas de solution dans $]0, \frac{\pi}{2}[$. Il reste donc à vérifier les cas $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{2}$. Or on a :

$$\begin{cases} x = 0 & \Longrightarrow \cos(x) = 1 \text{ et } \sin(x) = 0 & \Longrightarrow & \sqrt{\cos(x)} + \sqrt{\sin(x)} = 1 + 0 = 1 \\ x = \frac{\pi}{2} & \Longrightarrow \cos(x) = 0 \text{ et } \sin(x) = 1 & \Longrightarrow & \sqrt{\cos(x)} + \sqrt{\sin(x)} = 0 + 1 = 1 \end{cases}.$$

Par conséquent, l'équation (E) d'inconnue $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ admet deux solutions : $\boxed{0 \text{ et } \frac{\pi}{2}}$.

DS n$^{\text{o}}$ 2 de mathématiques

durée : 3 heures

Exercice 1

Soit un $n \in \mathbb{N}^\star$ fixé pour tout l'exercice. On rappelle que les racines n-ièmes de l'unité sont les solutions de l'équation $z^n = 1$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$. On propose de calculer la somme et le produit des racines n-ièmes de l'unité.

1. (a) Résoudre l'équation $z^n = 1$ en exprimant les solutions sous forme exponentielle.
   (b) En déduire la liste des racines n-ièmes de l'unité sous forme algébrique pour $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ et $n = 4$.
2. On pose $w_n = e^{2i\pi/n}$.
   (a) Montrer que $w_n = 1 \Longleftrightarrow n = 1$.
   (b) Montrer que w_n est une racine n-ième de l'unité.
   (c) Donner la liste des racines n-ièmes de l'unité en fonction de w_n.
3. (a) Calculer $\sum_{k=0}^{n-1}(w_n)^k$.
   (b) En déduire la somme des racines n-ièmes de l'unité.
   (c) Vérifier le résultat précédent pour $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ et $n = 4$ (sous forme algébrique).
4. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(w_n)^k}$.
5. (a) Montrer que $\prod_{k=0}^{n-1}(w_n)^k$ est une racine 2-ième de l'unité.
   (b) Que peut-on en déduire pour le produit des racines n-ièmes de l'unité ?
   (c) Calculer $\prod_{k=0}^{n-1}(w_n)^k$ dans le cas où n est impair, c'est-à-dire si $n = 2\ell - 1$ avec $\ell \in \mathbb{N}^\star$.
   (d) Calculer $\prod_{k=0}^{n-1}(w_n)^k$ dans le cas où n est pair, c'est-à-dire si $n = 2\ell$ avec $\ell \in \mathbb{N}^\star$.
   (e) En déduire le produit des racines n-ièmes de l'unité dans le cas général.
   (f) Vérifier le résultat précédent pour $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ et $n = 4$ (sous forme algébrique).
6. Calculer $\prod_{k=0}^{n-1}(-w_n)^k$.

Exercice 2

Pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^\star \times \mathbb{N}$ on définit $S^p(n) = \sum_{k=1}^{n} k^p$. Le but de cet exercice est de présenter une méthode pour calculer $S^p(n)$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Rappeler les expressions de $S^0(n)$, $S^1(n)$ et $S^2(n)$.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ S^3(n) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.
3. On fixe $(n, p) \in (\mathbb{N}^\star)^2$ pour cette question.
   (a) Montrer que $\sum_{k=1}^{n}(k+1)^{p+1} = S^{p+1}(n) + (n+1)^{p+1} - 1$.
   (b) Soit $k \in \mathbb{N}^\star$. Développer l'expression $(k+1)^{p+1}$ en vous servant du symbole $\sum$.
   (c) En déduire que $\sum_{k=1}^{n}(k+1)^{p+1} = S^{p+1}(n) + \sum_{\ell=0}^{p} \binom{p+1}{\ell} S^\ell(n)$.
   (d) A l'aide des questions précédentes, montrer que
   $$S^p(n) = \frac{1}{p+1}\left((n+1)^{p+1} - 1 - \sum_{\ell=0}^{p-1}\binom{p+1}{\ell}S^\ell(n)\right).$$
4. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Utiliser le résultat précédent pour retrouver l'expression de $S^3(n)$ donnée à la question 2 puis donner une expression simplifiée de $S^4(n)$.

Exercice 3

On propose de résoudre l'équation suivante d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$z^3 - 6z + 4 = 0 \tag{E}$$

1. On considère $z \in \mathbb{C}$ une solution de (E). Soient $(u, v) \in \mathbb{C}^2$ tel que $u + v = z$ et $uv = 2$.
   (a) Calculer $(u + v)^3$ de deux manières différentes.
   (b) En déduire les valeurs de $u^3 + v^3$ et u^3v^3.
   (c) Montrer que u^3 et v^3 sont solutions de l'équation $Z^2 + 4Z + 8 = 0$ d'inconnue $Z \in \mathbb{C}$.
   (d) Résoudre l'équation $Z^2 + 4Z + 8 = 0$.
2. On pose $w = -2 + 2i$.
   (a) Ecrire w sous la forme exponentielle.
   (b) Résoudre l'équation $Z^3 = w$ d'inconnue $Z \in \mathbb{C}$ en exprimant les solutions sous forme exponentielle.
   (c) On pose $j = e^{2i\pi/3}$. Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation $Z^3 = w$ est $\{1 + i, (1 + i)j, (1 + i)j^2\}$.
3. En utilisant les questions précédentes, déterminer les valeurs possibles de u et v, puis de z.
4. En déduire les solutions de (E).

Exercice 4

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. On propose de calculer les sommes $A_n = \sum_{k=0}^n \cos^2(kx)$ et $B_n = \sum_{k=0}^n \sin^2(kx)$.

1. Calculer $A_n + B_n$.
2. (a) Montrer que $A_n - B_n = \sum_{k=0}^n \cos(2kx)$.
   (b) Rappeler et démontrer l'expression de $\sum_{k=0}^n \cos(k\theta)$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.
   (c) En déduire une expression simplifiée de $A_n - B_n$ (on distinguera plusieurs cas selon les valeurs de $x \in \mathbb{R}$).
3. En déduire des expressions simplifiées de A_n et B_n (on distinguera plusieurs cas selon les valeurs de $x \in \mathbb{R}$).

Exercice 5

Soit $n \in \mathbb{N}$. On propose de calculer la somme double $\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \binom{j}{i}$.

1. Montrer que $\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \binom{j}{i} = \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \binom{j}{i}$.
2. Pour cette question, on fixe $i \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$. Montrer que $\sum_{j=i}^n \binom{j}{i} = \binom{n+1}{i+1}$ (indication : on pourra raisonner par récurrence).
3. Calculer $\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \binom{j}{i}$ de deux manières différentes.

Corrigé du DS n° 2 de mathématiques

Exercice 1

Soit un $n \in \mathbb{N}^\star$ fixé pour tout l'exercice. On rappelle que les racines n-ièmes de l'unité sont les solutions de l'équation $z^n = 1$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$. On propose de calculer la somme et le produit des racines n-ièmes de l'unité.

1. (a) *Résoudre l'équation $z^n = 1$ en exprimant les solutions sous forme exponentielle.*

▶ 0 n'est pas solution de $z^n = 1$. Pour $z \in \mathbb{C}^\star$, on écrit z sous forme exponentielle : $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$. On a alors :

$$z^n = 1 \iff \left(re^{i\theta}\right)^n = 1 \iff r^n e^{in\theta} = 1 \iff \begin{cases} r = 1 \\ n\theta \equiv 0\ [2\pi] \end{cases} \iff \begin{cases} r = 1 \\ \theta \equiv 0\ \left[\frac{2\pi}{n}\right] \end{cases}.$$

$\theta \equiv 0\ \left[\frac{2\pi}{n}\right]$ si et seulement si $\theta = \frac{2k\pi}{n}$ où $k \in \mathbb{Z}$. Mais puisqu'on a choisi l'argument θ dans $[0, 2\pi[$, l'ensemble des θ tel que $\theta \equiv 0\ \left[\frac{2\pi}{n}\right]$ est $\left\{0, \frac{2\pi}{n}, \frac{4\pi}{n}, \ldots, \frac{2(n-1)\pi}{n}\right\} = \left\{\frac{2k\pi}{n} \,|\, k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}\right\}$. On en déduit l'ensemble des solutions de $z^n = 1$:

$$\boxed{\left\{e^{2ik\pi/n} \,\middle|\, k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}\right\}}.$$

N'oubliez pas de justifier que $z \neq 0$ avant d'utiliser la forme exponentielle. Le choix de l'intervalle $[0, 2\pi[$ pour l'argument principal est arbitraire, on peut très bien choisir $]-\pi, \pi]$ (choisissez l'intervalle avec lequel vous êtes le plus à l'aise pour ne pas perdre de temps). Les racines n-ièmes de l'unité ne sont pas au programme de BCPST, mais l'exercice est tellement classique qu'il faut le connaître par cœur.

(b) *En déduire la liste des racines n-ièmes de l'unité sous forme algébrique pour $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ et $n = 4$.*

▶ La liste des racines n-ièmes de l'unité est pour n=1 :

$$\left\{e^{2ik\pi/1} \,\middle|\, k \in \{0\}\right\} = \left\{e^{i0}\right\} = \boxed{\{1\}};$$

pour n=2 :

$$\left\{e^{2ik\pi/2} \,\middle|\, k \in \{0, 1\}\right\} = \left\{e^{i0}, e^{i\pi}\right\} = \boxed{\{1, -1\}};$$

pour n=3 :

$$\left\{e^{2ik\pi/3} \,\middle|\, k \in \{0, 1, 2\}\right\} = \left\{e^{i0}, e^{2i\pi/3}, e^{4i\pi/3}\right\} = \boxed{\left\{1, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}};$$

et pour n=4 :

$$\left\{e^{2ik\pi/4} \,\middle|\, k \in \{0, 1, 2, 3\}\right\} = \left\{e^{i0}, e^{i\pi/2}, e^{i\pi}, e^{3i\pi/2}\right\} = \boxed{\{1, i, -1, -i\}}.$$

2. *On pose $w_n = e^{2i\pi/n}$.*

(a) *Montrer que $w_n = 1 \iff n = 1$.*

▶ Si $w_n = 1$ alors $\frac{2\pi}{n} \equiv 0\ [2\pi]$ en identifiant les arguments. Or $\frac{2\pi}{n} \in]0, 2\pi]$ car $n \in \mathbb{N}^\star$. Donc $\frac{2\pi}{n} = 2\pi$ et $n = 1$. Réciproquement, si $n = 1$ alors $w_n = e^{2i\pi/1} = e^{2i\pi} = 1$. D'où $\boxed{\text{l'équivalence par double implication}}$.

N'oubliez pas de justifier les deux sens de l'équivalence.

(b) *Montrer que w_n est une racine n-ième de l'unité.*

▶ On a : $(w_n)^n = \left(e^{2i\pi/n}\right)^n = e^{2in\pi/n} = e^{2i\pi} = 1$. Donc w_n est solution de l'équation $z^n = 1$, par conséquent $\boxed{w_n \text{ est bien une racine } n\text{-ième de l'unité}}$.

(c) *Donner la liste des racines n-ièmes de l'unité en fonction de w_n.*

▶ D'après le résultat de la question 1.(a), les racines n-ièmes de l'unité sont de la forme $e^{2ik\pi/n} = \left(e^{2i\pi/n}\right)^k = (w_n)^k$ où $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$. Donc la liste des racines n-ièmes de l'unité est donnée par :

$$\boxed{(w_n)^0 = 1, (w_n)^1, (w_n)^2, \dots, (w_n)^{n-1}}.$$

3. (a) *Calculer $\sum_{k=0}^{n-1}(w_n)^k$.*

▶ $\sum_{k=0}^{n-1}(w_n)^k$ est une somme des termes d'une suite géométrique de raison w_n. Pour $n = 1$, on a $w_n = 1$ et donc $\sum_{k=0}^{n-1}(w_n)^k = 1^0 = \boxed{1}$. Pour $n \geqslant 2$, on a $w_n \neq 1$ d'après le résultat de la question 2.(a), et donc :

$$\sum_{k=0}^{n-1}(w_n)^k = \frac{(w_n)^{(n-1)+1} - 1}{w_n - 1} = \frac{(w_n)^n - 1}{w_n - 1} = \frac{1-1}{w_n - 1} = \boxed{0}$$

car w_n est une racine n-ième de l'unité (question 2.(b)).

Il ne faut pas oublier de séparer le cas où la raison est égale à 1. Pensez à utiliser les résultats des questions précédentes, le sujet suit toujours une progression logique.

(b) *En déduire la somme des racines n-ièmes de l'unité.*

▶ D'après le résultat de la question 2.(c), la somme des racines n-ièmes de l'unité est donnée par $\sum_{k=0}^{n-1}(w_n)^k$. En utilisant le résultat précédent, la somme des racines n-ièmes de l'unité est donc égale $\boxed{\text{à 1 pour } n = 1 \text{ et à 0 pour } n \geqslant 2}$.

(c) *Vérifier le résultat précédent pour $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ et $n = 4$ (sous forme algébrique).*

▶ En utilisant le résultat de la question 1.(b), la somme des racines n-ièmes de l'unité est pour $n = 1$:

$$\boxed{1}\ ;$$

pour $n = 2$:

$$1 + (-1) = 1 - 1 = \boxed{0}\ ;$$

pour $n = 3$:

$$1 + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + i\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \boxed{0}\ ;$$

et pour n=4 :

$$1 + i + (-1) + (-i) = 1 - 1 + i(1-1) = \boxed{0}.$$

4. *Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(w_n)^k}$.*

▶ Puisque $|w_n| = |e^{2i\pi/n}| = 1$, on a $\frac{1}{w_n} = \frac{\overline{w_n}}{|w_n|^2} = \overline{w_n}$. On en déduit que

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(w_n)^k} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{w_n}\right)^k = \sum_{k=0}^{n-1} (\overline{w_n})^k = \sum_{k=0}^{n-1} \overline{(w_n)^k} = \overline{\sum_{k=0}^{n-1}(w_n)^k}$$

car la somme de conjugués de nombres complexes est égale au conjugué de la somme de nombres complexes. D'après le résultat de la question 3.(b), $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(w_n)^k}$ est donc égale $\boxed{\text{à 1 pour } n = 1 \text{ et à 0 pour } n \geqslant 2}$.

Un exemple type de question astucieuse où on peut perdre énormément de temps si on n'a pas la bonne idée. Il ne faut surtout pas hésiter à laisser des questions de côté pour aller chercher des points ailleurs au lieu de perdre son temps à s'obstiner. Parfois, l'astuce peut même surgir à notre esprit pendant qu'on est en train de faire quelque chose de complètement différent.

5. (a) *Montrer que $\prod_{k=0}^{n-1}(w_n)^k$ est une racine 2-ième de l'unité.*

▶ On a :

$$\begin{aligned}
\left(\prod_{k=0}^{n-1}(w_n)^k\right)^2 &= \left((w_n)^0 \times (w_n)^1 \times (w_n)^2 \times \cdots \times (w_n)^{n-1}\right)^2 \\
&= \left((w_n)^{0+1+2+\cdots+(n-1)}\right)^2 \\
&= \left((w_n)^{\sum_{k=0}^{n-1} k}\right)^2 \\
&= \left((w_n)^{\frac{(n-1)n}{2}}\right)^2 \quad (\text{car } \textstyle\sum_{k=0}^{n} = \frac{n(n+1)}{2}) \\
&= (w_n)^{\frac{(n-1)n}{2}2} \\
&= (w_n)^{n(n-1)} \\
&= ((w_n)^n)^{n-1} \\
&= (1)^{n-1} \quad (\text{d'après la question 2.(b)}) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Les détails de la transformation du produit en somme n'ont pas besoin d'être indiqués. On peut directement écrire l'égalité de la troisième ligne.

Par conséquent $\prod_{k=0}^{n-1}(w_n)^k$ est une solution de l'équation $z^2 = 1$, c'est donc $\boxed{\text{une racine 2-ième de l'unité}}$.

(b) *Que peut-on en déduire pour le produit des racines n-ièmes de l'unité ?*

▶ D'après le résultat de la question 1.(b), les racines 2-ièmes de l'unité sont 1 et -1. Et d'après le résultat de la question 2.(c), le produit des racines n-ièmes de l'unité est donné par $\prod_{k=0}^{n-1}(w_n)^k$. En utilisant le résultat précédent, le produit des racines n-ièmes de l'unité est donc égal $\boxed{\text{à 1 ou à } -1}$.

(c) *Calculer $\prod_{k=0}^{n-1}(w_n)^k$ dans le cas où n est impair, c'est-à-dire si $n = 2\ell - 1$ avec $\ell \in \mathbb{N}^\star$.*

▶ On suppose que n est impair, donc que $n = 2\ell - 1$ avec $\ell \in \mathbb{N}^\star$. En procédant comme pour la question 5.(a), on obtient :

$$\prod_{k=0}^{n-1}(w_n)^k = \prod_{k=0}^{2\ell-2}(w_n)^k = (w_n)^{\sum_{k=0}^{2\ell-2} k} = (w_n)^{\frac{(2\ell-2)(2\ell-1)}{2}} = ((w_n)^n)^{\ell-1} = \boxed{1}.$$

(d) *Calculer $\prod_{k=0}^{n-1}(w_n)^k$ dans le cas où n est pair, c'est-à-dire si $n = 2\ell$ avec $\ell \in \mathbb{N}^\star$.*

▶ On suppose que n est pair, donc que $n = 2\ell$ avec $\ell \in \mathbb{N}^\star$. En procédant comme pour la question 5.(a), on obtient :

$$\prod_{k=0}^{n-1}(w_n)^k = \prod_{k=0}^{2\ell-1}(w_n)^k = (w_n)^{\sum_{k=0}^{2\ell-1} k} = (w_n)^{\frac{(2\ell-1)2\ell}{2}} = \left((w_n)^\ell\right)^{2\ell-1}.$$

Or $(w_n)^\ell = (w_{2\ell})^\ell = \left(e^{2i\pi/(2\ell)}\right)^\ell = e^{i\ell\pi/\ell} = e^{i\pi} = -1$, donc $\prod_{k=0}^{n-1}(w_n)^k = (-1)^{2\ell-1} = \boxed{-1}$ car $2\ell - 1$ est impair.

(e) *En déduire le produit des racines n-ièmes de l'unité dans le cas général.*

▶ En utilisant les résultats précédents, le produit des racines n-ièmes de l'unité est donc égal $\boxed{\text{à 1 si } n \text{ est impair et à } -1 \text{ si } n \text{ est pair}}$.

(f) *Vérifier le résultat précédent pour $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ et $n = 4$ (sous forme algébrique).*

▶ En utilisant le résultat de la question 1.(b), le produit des racines n-ièmes de l'unité est pour $n = 1$:

$$\boxed{1}\ ;$$

pour $n = 2$:

$$1 \times (-1) = \boxed{-1}\ ;$$

pour $n = 3$:

$$1 \times \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right) + i\left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \boxed{1}\ ;$$

et pour n=4 :

$$1 \times i \times (-1) \times (-i) = i^2 = \boxed{-1}.$$

6. *Calculer $\prod_{k=0}^{n-1}(-w_n)^k$.*

▶ On a :

$$\prod_{k=0}^{n-1}(-w_n)^k = \prod_{k=0}^{n-1}(-1)^k \times \prod_{k=0}^{n-1}(w_n)^k = (-1)^{\sum_{k=0}^{n-1} k} \times \prod_{k=0}^{n-1}(w_n)^k = (-1)^{\frac{(n-1)n}{2}} \times \prod_{k=0}^{n-1}(w_n)^k.$$

D'après le résultat de la question 5.(e), $\prod_{k=0}^{n-1}(-w_n)^k$ est donc égal $\boxed{\text{à } (-1)^{n(n-1)/2} \text{ si } n \text{ est impair et à } -(-1)^{n(n-1)/2} \text{ si } n \text{ est pair}}$.

On peut encore simplifier ce résultat en fonction des congruences modulo 4 de n mais ce n'est pas au programme de BCPST.

Exercice 2

Pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^\star \times \mathbb{N}$ on définit $S^p(n) = \sum_{k=1}^{n} k^p$. Le but de cet exercice est de présenter une méthode pour calculer $S^p(n)$.

1. *Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Rappeler les expressions de $S^0(n)$, $S^1(n)$ et $S^2(n)$.*

▶ Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On a :

$$\left\{\begin{array}{lllll} S^0(n) & = & \sum_{k=1}^{n} 1 & = & \boxed{n} \\ S^1(n) & = & \sum_{k=1}^{n} k & = & \boxed{\dfrac{n(n+1)}{2}} \\ S^2(n) & = & \sum_{k=1}^{n} k^2 & = & \boxed{\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}} \end{array}\right. .$$

2. *Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ S^3(n) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.*

▶ On va démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ S^3(n) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$. Pour $n = 1$, on a $S^3(1) = \sum_{k=1}^{1} k^3 = 1^3 = 1$ et $\frac{1^2(1+1)^2}{4} = \frac{4}{4} = 1$. Donc la formule est vraie pour $n = 1$. On suppose maintenant la formule vraie pour un $n \in \mathbb{N}^\star$ fixé. On a alors :

$$\begin{aligned} S^3(n+1) &= \sum_{k=1}^{n+1} k^3 = (n+1)^3 + \sum_{k=1}^{n} k^3 = (n+1)^3 + \frac{n^2(n+1)^2}{4} \\ &= \frac{(n+1)^2}{4}\left(4(n+1) + n^2\right) = \frac{(n+1)^2}{4}\left(n^2 + 4n + 4\right) \\ &= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}. \end{aligned}$$

Par conséquent la formule est vraie au rang $n+1$ lorsqu'elle est vraie au rang n, et cette implication est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$. $\boxed{\text{On conclut d'après le principe de récurrence}}$.

La récurrence est le moyen le plus rapide pour démontrer ce résultat... à condition de connaitre la formule ou qu'elle soit donnée dans l'énoncé comme ici. Il faut désormais savoir rédiger précisément et rapidement ce type de récurrence non difficile.

3. *On fixe $(n,p) \in (\mathbb{N}^\star)^2$ pour cette question.*

(a) *Montrer que $\sum_{k=1}^{n}(k+1)^{p+1} = S^{p+1}(n) + (n+1)^{p+1} - 1$.*

▶ On a en utilisant un décalage d'indice :

$$\sum_{k=1}^{n}(k+1)^{p+1} = \sum_{k=2}^{n+1} k^{p+1} = \sum_{k=1}^{n} k^{p+1} + (n+1)^{p+1} - 1^{p+1} = \boxed{S^{p+1}(n) + (n+1)^{p+1} - 1}.$$

(b) *Soit $k \in \mathbb{N}^\star$. Développer l'expression $(k+1)^{p+1}$ en vous servant du symbole $\sum$.*

▶ Soit $k \in \mathbb{N}^\star$. On a en utilisant la formule du binôme de Newton :

$$(k+1)^{p+1} = \sum_{\ell=0}^{p+1} \binom{p+1}{\ell} k^\ell 1^{p+1-\ell} = \boxed{\sum_{\ell=0}^{p+1} \binom{p+1}{\ell} k^\ell}.$$

(c) *En déduire que $\sum_{k=1}^{n}(k+1)^{p+1} = S^{p+1}(n) + \sum_{\ell=0}^{p} \binom{p+1}{\ell} S^\ell(n)$.*

▶ On a en sommant le résultat précédent de $k=1$ à $k=n$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}(k+1)^{p+1} &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=0}^{p+1} \binom{p+1}{\ell} k^\ell \quad \text{(on reconnait une somme double)} \\
&= \sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant n \\ 0\leqslant \ell\leqslant p+1}} \binom{p+1}{\ell} k^\ell \\
&= \sum_{\ell=0}^{p+1}\sum_{k=1}^{n} \binom{p+1}{\ell} k^\ell \\
&= \sum_{\ell=0}^{p+1}\sum_{k=1}^{n} \binom{p+1}{\ell} k^\ell \\
&= \sum_{\ell=0}^{p+1} \binom{p+1}{\ell} \left(\sum_{k=1}^{n} k^\ell\right) \\
&= \sum_{\ell=0}^{p+1} \binom{p+1}{\ell} S^\ell(n) \\
&= \sum_{\ell=0}^{p} \binom{p+1}{\ell} S^\ell(n) + \binom{p+1}{p+1} S^{p+1}(n) \\
&= \boxed{S^{p+1}(n) + \sum_{\ell=0}^{p} \binom{p+1}{\ell} S^\ell(n)}.
\end{aligned}$$

(d) *A l'aide des questions précédentes, montrer que*

$$S^p(n) = \frac{1}{p+1}\left((n+1)^{p+1} - 1 - \sum_{\ell=0}^{p-1}\binom{p+1}{\ell} S^\ell(n)\right).$$

▶ En égalisant les résultat des questions 3.(a) et 3.(c) on obtient :

$$S^{p+1}(n) + (n+1)^{p+1} - 1 = \sum_{k=1}^{n}(k+1)^{p+1} = S^{p+1}(n) + \sum_{\ell=0}^{p}\binom{p+1}{\ell} S^\ell(n)$$

et donc :

$$(n+1)^{p+1}-1=\sum_{\ell=0}^{p}\binom{p+1}{\ell}S^\ell(n)=\sum_{\ell=0}^{p-1}\binom{p+1}{\ell}S^\ell(n)+\binom{p+1}{p}S^p(n).$$

Or $\binom{p+1}{p}=\frac{(p+1)!}{p!(p+1-p)!}=\frac{(p+1)!}{p!}=p+1$. Par conséquent, on a bien :

$$\boxed{S^p(n)=\frac{1}{p+1}\left((n+1)^{p+1}-1-\sum_{\ell=0}^{p-1}\binom{p+1}{\ell}S^\ell(n)\right)}.$$

4. Soit $n\in\mathbb{N}^\star$. Utiliser le résultat précédent pour retrouver l'expression de $S^3(n)$ donnée à la question 2 puis donner une expression simplifiée de $S^4(n)$.

▶ Soit $n\in\mathbb{N}^\star$. En utilisant le résultat précédent pour $p=3$, on a :

$$\begin{aligned}
S^3(n) &= \frac{1}{4}\left((n+1)^4-1-\sum_{\ell=0}^{2}\binom{4}{\ell}S^\ell(n)\right)\\
&= \frac{1}{4}\left((n+1)^4-1-\binom{4}{0}S^0(n)-\binom{4}{1}S^1(n)-\binom{4}{2}S^2(n)\right)\\
&= \frac{1}{4}\left((n+1)^4-1-1\times n-4\times\frac{n(n+1)}{2}-6\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)\\
&= \frac{1}{4}\left((n+1)^4-(n+1)-2n(n+1)-n(n+1)(2n+1)\right)\\
&= \frac{(n+1)}{4}\left(n^3+3n^2+3n+1-1-2n-2n^2-n\right)\\
&= \frac{(n+1)}{4}\left(n^3+n^2\right)\\
&= \boxed{\frac{n^2(n+1)^2}{4}}.
\end{aligned}$$

En utilisant maintenant le résultat de la question précédente pour $p=4$, on obtient :

$$\begin{aligned}
S^4(n) &= \frac{1}{5}\left((n+1)^5-1-\sum_{\ell=0}^{3}\binom{5}{\ell}S^\ell(n)\right)\\
&= \frac{1}{5}\left((n+1)^5-1-\binom{5}{0}S^0(n)-\binom{5}{1}S^1(n)-\binom{5}{2}S^2(n)-\binom{5}{3}S^3(n)\right)\\
&= \frac{1}{5}\left((n+1)^5-1-1\times n-5\times\frac{n(n+1)}{2}-10\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\dots\right.\\
&\qquad\qquad\left.\dots-10\times\frac{n^2(n+1)^2}{4}\right)\\
&= \frac{1}{5}\left((n+1)^5-(n+1)-\frac{5}{2}n(n+1)-\frac{5}{3}n(n+1)(2n+1)-\frac{5}{2}n^2(n+1)^2\right)\\
&= \frac{(n+1)}{5}\left(n^4+4n^3+6n^2+4n+1-1-\frac{5}{2}n-\frac{10}{3}n^2-\frac{5}{3}n-\frac{5}{2}n^3-\frac{5}{2}n^2\right)\\
&= \frac{(n+1)}{5}\left(n^4+\frac{3}{2}n^3+\frac{1}{6}n^2-\frac{1}{6}n\right)\\
&= \boxed{\frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}}.
\end{aligned}$$

Ces calculs ne sont pas si difficiles si on s'organise bien. Ecrivez soigneusement, aérez votre copie et organisez vos calculs. On perd un peu de temps à mettre des calculs en forme, mais on en gagne énormément si tout est clair. De même, évitez le plus possible les calculs de tête qui sont très chronophages.

Exercice 3

On propose de résoudre l'équation suivante d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$z^3 - 6z + 4 = 0 \tag{E}$$

1. *On considère $z \in \mathbb{C}$ une solution de (E). Soient $(u, v) \in \mathbb{C}^2$ tel que $u + v = z$ et $uv = 2$.*

   (a) *Calculer $(u + v)^3$ de deux manières différentes.*

   ▶ En utilisant l'équation (E), on a :

$$(u+v)^3 = z^3 = 6z - 4 = \boxed{6(u+v) - 4}.$$

   De plus, d'après la formule du binôme de Newton et car $uv = 2$, on a :

$$(u+v)^3 = \boxed{u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 = u^3 + 6u + 6v + v^3 = u^3 + v^3 + 6(u+v)}.$$

   (b) *En déduire les valeurs de $u^3 + v^3$ et u^3v^3.*

   ▶ En égalisant les deux résultats précédents, on obtient $6(u + v) - 4 = u^3 + v^3 + 6(u + v)$ et donc $\boxed{u^3 + v^3 = -4}$. De plus, $\boxed{u^3v^3 = (uv)^3 = (2)^3 = 8}$.

   (c) *Montrer que u^3 et v^3 sont solutions de l'équation $Z^2 + 4Z + 8 = 0$ d'inconnue $Z \in \mathbb{C}$.*

   ▶ u^3 et v^3 sont solutions de l'équation $(Z-u^3)(Z-v^3) = 0$ d'inconnue $Z \in \mathbb{C}$. Or pour tout $Z \in \mathbb{C}$, on a $(Z-u^3)(Z-v^3) = Z^2-(u^3+v^3)-u^3v^3 = Z^2+4Z+8$ d'après les résultats de la question précédente. Donc $\boxed{u^3 \text{ et } v^3 \text{ sont solutions de l'équation } Z^2 + 4Z + 8 = 0 \text{ d'inconnue } Z \in \mathbb{C}}$.

   (d) *Résoudre l'équation $Z^2 + 4Z + 8 = 0$.*

   ▶ L'équation $Z^2 + 4Z + 8 = 0$ est une équation du second degré de discriminant $\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times 8 = -16 < 0$. Donc elle admet deux solutions complexes conjuguées qui sont :

$$\frac{1}{2\times 1}\left(-4 + i\sqrt{-\Delta}\right) = \frac{1}{2}(-4+4i) = \boxed{-2+2i} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2\times 1}\left(-4 - i\sqrt{-\Delta}\right) = \boxed{-2-2i}.$$

2. *On pose $w = -2 + 2i$.*

   (a) *Ecrire w sous la forme exponentielle.*

   ▶ On a $|w| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. Puisque $\mathrm{Im}(w) = 2 > 0$, on obtient un argument de w par $\arccos\left(\frac{\mathrm{Re}(w)}{|w|}\right) = \arccos\left(\frac{-2}{2\sqrt{2}}\right) = \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$. Finalement, $\boxed{w = 2\sqrt{2}e^{3i\pi/4}}$.

   (b) *Résoudre l'équation $Z^3 = w$ d'inconnue $Z \in \mathbb{C}$ en exprimant les solutions sous forme exponentielle.*

   ▶ 0 n'est pas solution de $Z^3 = w$ (car $w \neq 0$). On écrit donc $Z \in \mathbb{C}^\star$ sous forme exponentielle : $Z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$. On a alors :

$$Z^3 = w \iff r^3e^{3i\theta} = 2\sqrt{2}e^{3i\pi/4} \iff \begin{cases} r^3 = 2\sqrt{2} = \left(\sqrt{2}\right)^3 \\ 3\theta \equiv \frac{3\pi}{4}\ [2\pi] \end{cases} \iff \begin{cases} r = \sqrt{2} \\ \theta \equiv \frac{\pi}{4}\ \left[\frac{2\pi}{3}\right] \end{cases}.$$

   Or $\frac{\pi}{4} - \frac{2\pi}{3} < 0$, $\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3} = \frac{11\pi}{12}$, $\frac{11\pi}{12} + \frac{2\pi}{3} = \frac{19\pi}{12}$ et $\frac{19\pi}{12} + \frac{2\pi}{3} = \frac{9\pi}{4} > 2\pi$. L'ensemble des solutions de $Z^3 = w$ est donc $\boxed{\left\{\sqrt{2}e^{i\pi/4}, \sqrt{2}e^{11i\pi/12}, \sqrt{2}e^{19i\pi/12}\right\}}$.

(c) On pose $j = e^{2i\pi/3}$. Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation $Z^3 = w$ est $\{1+i, (1+i)j, (1+i)j^2\}$.

▶ On a $|1+i| = \sqrt{1^2+1^2}$ et $\arccos\left(\frac{\mathrm{Re}(1+i)}{|1+i|}\right) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$, donc $1+i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$ (car $\mathrm{Im}(1+i) = 1 > 0$). On en déduit en posant $j = e^{2i\pi/3}$ que

$$\begin{aligned} & (1+i)j = \sqrt{2}e^{i\pi/4}e^{2i\pi/3} = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}\right)} = \sqrt{2}e^{11i\pi/12} \\ \text{et} \quad & (1+i)j^2 = \sqrt{2}e^{i\pi/4}e^{4i\pi/3} = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{4\pi}{3}\right)} = \sqrt{2}e^{19i\pi/12}. \end{aligned}$$

D'après le résultat de la question précédente, l'ensemble des solutions de $Z^3 = w$ est donc bien $\boxed{\{1+i, (1+i)j, (1+i)j^2\}}$.

3. *En utilisant les questions précédentes, déterminer les valeurs possibles de u et v, puis de z.*

▶ D'après les résultats des questions 1.(c) et 1.(d), on a $u^3 = -2+2i = w$ ou $u^3 = -2-2i = \overline{w}$. Dans le premier cas, u est solution de l'équation $Z^3 = w$ et donc, d'après le résultat de la question 2.(c), $u = 1+i$, $u = (1+i)j$ ou $u = (1+i)j^2$. Dans le deuxième cas, u est solution de l'équation $Z^3 = \overline{w} \Leftrightarrow \left(\overline{Z}\right)^3 = w$ donc $\overline{u}$ est solution de $Z^3 = w$. On en déduit que $u = \overline{1+i} = 1-i$, $u = \overline{(1+i)j} = (1-i)j^2$ (car $\overline{j} = e^{-2i\pi/3} = e^{4i\pi/3} = j^2$) ou $u = \overline{(1+i)j^2} = (1-i)j$ (car $\overline{j^2} = \overline{\overline{j}} = j$). On obtient donc six valeurs possibles pour u.

Pour chacune des six valeurs possibles de u, on obtient une seule valeur possible de v car $uv = 2 \Leftrightarrow v = \frac{2}{u}$. On calcule les valeurs possibles de v grâce aux relations $\frac{2}{1+i} = 1-i$, $\frac{2}{1-i} = 1+i$, $\frac{1}{j} = e^{-2i\pi/3} = \overline{j} = j^2$ et $\frac{1}{j^2} = e^{-4i\pi/3} = e^{2i\pi/3} = j$.

Pour chacun des six couples possibles (u, v), on en déduit la valeur possible de $z = u+v$ grâce aux relations $j + j^2 = j + \overline{j} = 2\mathrm{Re}(j) = 2\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -1$ et $j - j^2 = j - \overline{j} = 2i\mathrm{Im}(j) = 2i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = i\sqrt{3}$.

Finalement, les valeurs possibles de u, v et z sont résumées dans le tableau suivant.

u	v	$u+v=z$
$1+i$	$1-i$	2
$(1+i)j$	$(1-i)j^2$	$-1-\sqrt{3}$
$(1+i)j^2$	$(1-i)j$	$-1+\sqrt{3}$
$1-i$	$1+i$	2
$(1-i)j^2$	$(1+i)j$	$-1-\sqrt{3}$
$(1-i)j$	$(1+i)j^2$	$-1+\sqrt{3}$

Il y a donc trois valeurs possibles de z.

4. *En déduire les solutions de (E).*

▶ D'après le résultat précédent, si $z \in \mathbb{C}$ est solution de (E) alors $z = 2$, $z = -1-\sqrt{3}$ ou $z = -1+\sqrt{3}$. Réciproquement, on a (en utilisant la formule du binôme de Newton) :

$$\begin{aligned} & 2^3 - 6\times 2 + 4 = 8 - 12 + 4 = 0, \\ & (-1-\sqrt{3})^3 - 6\times(-1-\sqrt{3}) + 4 = -1 - 3\sqrt{3} - 3\times 3 - 3\sqrt{3} + 6 + 6\sqrt{3} + 4 = 0 \\ \text{et} \quad & (-1+\sqrt{3})^3 - 6\times(-1+\sqrt{3}) + 4 = -1 + 3\sqrt{3} - 3\times 3 + 3\sqrt{3} + 6 - 6\sqrt{3} + 4 = 0. \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions de (E) est $\boxed{\{2, -1-\sqrt{3}, -1+\sqrt{3}\}}$.

Cet exercice n'était pas difficile mais on peut perdre du temps à le rédiger si on manque d'organisation. Beaucoup de calculs sont identiques (ou diffèrent seulement de quelques signes), il ne faut surtout pas perdre du temps à refaire plusieurs fois le même.

Exercice 4

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. On propose de calculer les sommes $A_n = \sum_{k=0}^{n} \cos^2(kx)$ et $B_n = \sum_{k=0}^{n} \sin^2(kx)$.

1. *Calculer $A_n + B_n$.*

▶ En utilisant le théorème de Pythagore, on a :

$$A_n + B_n = \sum_{k=0}^{n} \cos^2(kx) + \sum_{k=0}^{n} \sin^2(kx) = \sum_{k=0}^{n} \left(\cos^2(kx) + \sin^2(kx)\right) = \sum_{k=0}^{n} 1 = \boxed{n+1}.$$

2. (a) *Montrer que $A_n - B_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(2kx)$.*

▶ D'après la formule de duplication du cosinus, on a $\forall k \in \mathbb{N},\ \cos^2(2kx) = \cos^2(kx) - \sin^2(kx)$. Donc :

$$A_n - B_n = \sum_{k=0}^{n} \cos^2(kx) - \sum_{k=0}^{n} \sin^2(kx) = \sum_{k=0}^{n} \left(\cos^2(kx) - \sin^2(kx)\right) = \boxed{\sum_{k=0}^{n} \cos(2kx)}.$$

(b) *Rappeler et démontrer l'expression de $\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.*

▶ Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On a $\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Re}(e^{ik\theta}) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{i\theta}\right)$ et on reconnait la somme des termes d'une suite géométrique de raison $e^{i\theta}$. Si $e^{i\theta} = 1$, c'est-à-dire si $\theta \equiv 0\ [2\pi]$, alors $\sum_{k=0}^{n} e^{i\theta} = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$ et donc $\boxed{\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) = \mathrm{Re}(n+1) = n+1}$. Sinon $e^{i\theta} \neq 1$, c'est-à-dire $\theta \not\equiv 0\ [2\pi]$, et alors :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) &= \mathrm{Re}\left(\frac{e^{i(n+1)\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\frac{e^{i(n+1)\theta/2}}{e^{i\theta/2}} \times \frac{e^{i(n+1)\theta/2} - e^{-i(n+1)\theta/2}}{e^{i\theta/2} - e^{-i\theta/2}}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(e^{in\theta/2} \times \frac{2i\sin\left((n+1)\theta/2\right)}{2i\sin\left(\theta/2\right)}\right) \\
&= \boxed{\cos\left(n\frac{\theta}{2}\right) \frac{\sin\left((n+1)\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}}.
\end{aligned}$$

(c) *En déduire une expression simplifiée de $A_n - B_n$ (on distinguera plusieurs cas selon les valeurs de $x \in \mathbb{R}$).*

▶ En remplaçant θ dans le résultat précédent par $2x$, on obtient :

$$A_n - B_n = \begin{cases} \boxed{n+1} & \text{si} \quad 2x \equiv 0\ [2\pi] \Leftrightarrow x \equiv 0\ [\pi] \\ \boxed{\dfrac{\cos(nx)\sin((n+1)x)}{\sin(x)}} & \text{si} \quad 2x \not\equiv 0\ [2\pi] \Leftrightarrow x \not\equiv 0\ [\pi] \end{cases}$$

3. *En déduire des expressions simplifiées de A_n et B_n (on distinguera plusieurs cas selon les valeurs de $x \in \mathbb{R}$).*

▶ Pour obtenir des expressions de A_n et B_n, on écrit $A_n = \frac{1}{2}(A_n + B_n) + \frac{1}{2}(A_n - B_n)$ et $B_n = \frac{1}{2}(A_n + B_n) - \frac{1}{2}(A_n - B_n)$ puis on utilise les résultats des questions 1 et 2. On obtient donc si $x \equiv 0\ [\pi]$:

$$A_n = \frac{1}{2}\left((n+1) + (n+1)\right) = \boxed{n+1} \quad \text{et} \quad B_n = \frac{1}{2}\left((n+1) - (n+1)\right) = \boxed{0},$$

et si $x \not\equiv 0\ [\pi]$:

$$A_n = \boxed{\frac{1}{2}\left((n+1) + \frac{\cos(nx)\cos((n+1)x)}{\sin(x)}\right)} \quad \text{et} \quad B_n = \boxed{\frac{1}{2}\left((n+1) - \frac{\cos(nx)\cos((n+1)x)}{\sin(x)}\right)}.$$

Exercice 5

Soit $n \in \mathbb{N}$. On propose de calculer la somme double $\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \binom{j}{i}$.

1. *Montrer que $\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \binom{j}{i} = \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \binom{j}{i}$.*

▶ D'après la définition des coefficients binomiaux, on a $\binom{j}{i} = 0$ dès que $j < i$. Donc :

$$\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \binom{j}{i} = \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \binom{j}{i} + \sum_{1 \leqslant j < i \leqslant n} \binom{j}{i} = \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \binom{j}{i} + \sum_{1 \leqslant j < i \leqslant n} 0 = \boxed{\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \binom{j}{i}}.$$

2. *Pour cette question, on fixe $i \in \{0,1,2,\dots,n\}$. Montrer que $\sum_{j=i}^{n} \binom{j}{i} = \binom{n+1}{i+1}$ (indication : on pourra raisonner par récurrence).*

▶ On va démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall i \in \{0,1,2,\dots,n\},\ \sum_{j=i}^{n} \binom{j}{i} = \binom{n+1}{i+1}$. Si $n = 0$ alors $i \in \{0\}$ c'est-à-dire $i = 0$, $\sum_{j=i}^{n} \binom{j}{i} = \sum_{j=0}^{0} \binom{j}{0} = \binom{0}{0} = 1$ et $\binom{n+1}{i+1} = \binom{0+1}{0+1} = \binom{1}{1} = 1$. Donc l'égalité est vraie pour $n = 0$. On suppose maintenant l'égalité vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$ et on veut la démontrer au rang $n+1$. Soit $i \in \{0,1,2,\dots,n,n+1\}$. On distingue deux cas : $i \in \{0,1,2,\dots,n\}$ ou $i = n+1$. Dans le deuxième cas, $\sum_{j=i}^{n+1} \binom{j}{i} = \sum_{j=n+1}^{n+1} \binom{j}{n+1} = \binom{n+1}{n+1} = 1$ et $\binom{(n+1)+1}{i+1} = \binom{n+2}{(n+1)+1} = \binom{n+2}{n+2} = 1$ donc l'égalité est vraie au rang $n+1$. Dans le premier cas, on utilise l'hypothèse de récurrence :

$$\sum_{j=i}^{n+1} \binom{j}{i} = \sum_{j=i}^{n} \binom{j}{i} + \binom{n+1}{i} = \binom{n+1}{i+1} + \binom{n+1}{i} = \binom{n+2}{i+1} = \binom{(n+1)+1}{i+1}$$

d'après la formule de Pascal. Donc l'égalité est vraie au rang $n+1$ lorsqu'elle est vraie au rang n, et cette implication est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. $\boxed{\text{On conclut d'après le principe de récurrence}}$.

3. *Calculer $\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \binom{j}{i}$ de deux manières différentes.*

▶ En utilisant les deux questions précédentes, on obtient en sommant sur les lignes :

$$\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \binom{j}{i} = \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \binom{j}{i} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} \binom{j}{i} = \sum_{i=1}^{n} \binom{n+1}{i+1} = \sum_{i=2}^{n+1} \binom{n+1}{i}.$$

Or $\sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} = (1+1)^{n+1} = 2^{n+1}$ d'après la formule du binôme de Newton. Donc :

$$\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \binom{j}{i} = \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} - \binom{n+1}{0} - \binom{n+1}{1} = 2^{n+1} - 1 - (n+1) = \boxed{2^{n+1} - n - 2}.$$

De même, on obtient en utilisant la question 1 et sommant sur les colonnes :

$$\begin{aligned}
\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \binom{j}{i} &= \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \binom{j}{i} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} \binom{j}{i} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} - \binom{j}{0} \right) = \sum_{j=1}^{n} (2^j - 1) \\
&= \sum_{j=1}^{n} 2^j - \sum_{j=1}^{n} 1 = \sum_{j=0}^{n} 2^j - 2^0 - n \\
&= \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} - 1 - n = 2^{n+1} - 1 - 1 - n = \boxed{2^{n+1} - n - 2}.
\end{aligned}$$

DS n$^{\text{o}}$ 3 de mathématiques

durée : 3 heures

Exercice 1

On désigne par E l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par la donnée de trois réels u_0, u_1 et u_2, et par la relation suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} - 3u_{n+1} + 2u_n = 0. \tag{R}$$

1. Dans cette question, on considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E telle que $u_0 = 4$, $u_1 = -5$ et $u_2 = 13$. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de terme général $v_n = u_{n+1} + 2u_n$.
   (a) Calculer v_0 et v_1.
   (b) Exprimer v_{n+2} en fonction de v_{n+1} et v_n.
   (c) Montrer par récurrence que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -2u_n + 3$.
   (d) Exprimer u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
   (e) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $\sum_{k=0}^{n} u_k$.
2. Dans cette question, on considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E telle que $u_0 = 2$, $u_1 = -2$ et $u_2 = 3$. Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de terme général $w_n = u_n - (-2)^n$.
   (a) Vérifier que $w_2 - 2w_1 + w_0 = 0$.
   (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+2} - 2w_{n+1} + w_n = 0$.
   (c) Exprimer w_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
   (d) En déduire l'expression de u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
   (e) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $\sum_{k=0}^{n} u_k$.

Exercice 2

Soient n et p deux entiers strictement positifs. On dit qu'une p-liste d'entiers $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ est :

— *croissante* si $\forall k \in \{1, 2, \ldots, p-1\},\ a_k \leqslant a_{k+1}$;
— *strictement croissante* si $\forall k \in \{1, 2, \ldots, p-1\},\ a_k < a_{k+1}$.

On désigne par E l'ensemble des p-listes croissantes d'éléments de $\{1, 2, \ldots, n\}$ et par F l'ensembles des p-listes strictement croissantes d'éléments de $\{1, 2, \ldots, n+p-1\}$.

1. Déterminer le cardinal de F.
2. Si $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ est une p-liste d'éléments de $\{1, 2, \ldots, n\}$, on définit la p-liste $(b_1, b_2, \ldots, b_p)$ par
$$\forall k \in \{1, 2, \ldots, p\},\ b_k = a_k + k - 1. \tag{1}$$
   Montrer que si $(a_1, a_2, \ldots, a_p) \in E$ alors $(b_1, b_2, \ldots, b_p) \in F$.
3. Si $(b_1, b_2, \ldots, b_p)$ est une p-liste d'éléments de $\{1, 2, \ldots, n+p-1\}$, on définit la p-liste $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ par
$$\forall k \in \{1, 2, \ldots, p\},\ a_k = b_k - k + 1. \tag{2}$$
   Montrer que si $(b_1, b_2, \ldots, b_p) \in F$ alors $(a_1, a_2, \ldots, a_p) \in E$.

4. Montrer que l'application

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & E & \to & F \\ & (a_1, a_2, \ldots, a_p) & \mapsto & \varphi(a_1, a_2, \ldots, a_p) = (b_1, b_2, \ldots, b_p) \quad \text{définie par (1)} \end{array}$$

est bijective.

5. En déduire le nombre de p-listes croissantes d'éléments de $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Exercice 3

On considère une protéine constituée de la succession linéaire d'acides aminés de cystéine, d'aspartate et de glutamate que l'on désignera respectivement par les lettres C, D et E. Cette protéine vérifie de plus la propriété suivante : sa structure primaire peut-être représentée par des séquences successives de lettres telles que **chaque séquence commence par la lettre C et ne comporte jamais deux lettres consécutives identiques**. Pour chaque entier $n \geqslant 1$, on note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des séquences possibles de n lettres et on considère les sous-ensembles $\mathcal{C}_n$, $\mathcal{D}_n$ et $\mathcal{E}_n$ de séquences de $\mathcal{S}_n$ qui se terminent respectivement par C, D et E. On pose $c_n = \text{card}(\mathcal{C}_n)$, $d_n = \text{card}(\mathcal{D}_n)$ et $e_n = \text{card}(\mathcal{E}_n)$.

1. (a) Justifier que $c_1 = 1$, $d_1 = 0$ et $e_1 = 0$.
   (b) Justifier que $c_2 = 0$, $d_2 = 1$ et $e_2 = 1$.
   (c) Déterminer c_3, d_3 et e_3.
2. Déterminer $\text{card}(\mathcal{S}_n)$ et en déduire que $c_n + d_n + e_n = 2^{n-1}$.
3. (a) En étudiant l'avant-dernière lettre des séquences de $\mathcal{C}_{n+1}$, démontrer que $c_{n+1} = d_n + e_n$.
   (b) En s'inspirant de la question précédente, démontrer deux autres relations.
4. Justifier que $d_n = e_n$.
5. A l'aide des questions précédentes, démontrer que $\forall n \geqslant 1,\ c_{n+2} = c_{n+1} + 2c_n$.
6. En déduire l'expression de c_n en fonction de $n \geqslant 1$ puis celles de d_n et e_n.
7. On remarque que le résultat précédent permet de calculer $c_8 = 42$ et $d_8 = 43$. Pour la question suivante, donner les résultats sous forme de produits d'entiers, de factorielles et/ou de coefficients binomiaux sans chercher à les calculer. Combien existe-t-il de structures primaires différentes formées par la succession de :
   (a) cinq séquences identiques de $\mathcal{C}_8$?
   (b) cinq séquences différentes de $\mathcal{C}_8$?
   (c) trois séquences identiques de $\mathcal{C}_8$ et deux séquences identiques de $\mathcal{D}_8$ (pas nécessairement dans cet ordre) ?
   (d) trois séquences différentes de $\mathcal{C}_8$ et deux séquences différentes de $\mathcal{D}_8$ (pas nécessairement dans cet ordre) ?

Exercice 4

Déterminer un équivalent et calculer la limite de chacune des suites suivantes :

1. $u_n = \sqrt{n^2 + 4n + 5} - \sqrt{n^2 + 1}$.
2. $u_n = \left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)^n$.
3. $u_n = \left(7 - 2\sin\left(e^{-n}\right) + \frac{n^5}{2^n}\right)\left(6 - 5\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} + 3\tan\left(\frac{1}{n}\right)\right)$.

Corrigé du DS n° 3 de mathématiques

Exercice 1

On désigne par E l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par la donnée de trois réels u_0, u_1 et u_2, et par la relation suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} - 3u_{n+1} + 2u_n = 0. \tag{R}$$

1. *Dans cette question, on considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E telle que $u_0 = 4$, $u_1 = -5$ et $u_2 = 13$. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de terme général $v_n = u_{n+1} + 2u_n$.*

   (a) *Calculer v_0 et v_1.*

   ▶ On a $v_0 = u_1 + 2u_0 = -5 + 2 \times 4 = \boxed{3}$ et $v_1 = u_2 + 2u_1 = 13 + 2 \times (-5) = \boxed{3}$.

   (b) *Exprimer v_{n+2} en fonction de v_{n+1} et v_n.*

   ▶ Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant la définition de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la relation (R), on obtient :

$$\begin{aligned} v_{n+2} &= u_{n+3} + 2u_{n+2} \\ &= (u_{n+3} - 3u_{n+1} + 2u_n) + 3u_{n+1} - 2u_n + 2u_{n+2} \\ &= 0 + 2(u_{n+2} + 2u_{n+1}) - (u_{n+1} + 2u_n) \\ &= \boxed{2v_{n+1} - v_n}. \end{aligned}$$

   (c) *Montrer par récurrence que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -2u_n + 3$.*

   ▶ On démontre le résultat par récurrence double. Plus précisément, on considère pour tout $n \in \mathbb{N}$ la proposition $\mathcal{P}(n)$: «$v_n = 3$ et $v_{n+1} = 3$». $\mathcal{P}(0)$ est vraie d'après le résultat de la question 1.(a). On suppose maintenant que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$ fixé. Alors $v_n = 3$ et $v_{n+1} = 3$ par hypothèse de récurrence. D'après le résultat de la question précédente, on obtient :

$$v_{n+2} = 2v_{n+1} - v_n = 2 \times 3 - 3 = 3.$$

   Ainsi $v_{n+1} = 3$ et $v_{n+2} = 3$, donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie si $\mathcal{P}(n)$ est vraie, et cette implication est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. On conclut d'après le principe de récurrence que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par conséquent $\boxed{(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est la suite constante égale à } 3}$.

   Rédigez précisément et soigneusement vos raisonnements par récurrence, a fortiori les récurrences doubles.

   On en déduit pour tout $n \in \mathbb{N}$ que $u_{n+1} + 2u_n = v_n = 3$ et donc $\boxed{u_{n+1} = -2u_n + 3}$.

   (d) *Exprimer u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.*

   ▶ D'après le résultat précédent, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique. On cherche donc $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que la suite $(u_n - \alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ soit une suite géométrique. Or on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - \alpha = -2u_n + 3 - \alpha = -2(u_n - \alpha) - 2\alpha + 3 - \alpha = -2(u_n - \alpha) - 3\alpha + 3.$$

   En posant $\alpha = 1$, on a $-3\alpha + 3 = 0$ et donc $(u_n - 1)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison -2. On en déduit pour tout $n \in \mathbb{N}$ que $u_n - 1 = (u_0 - 1)(-2)^n = (4-1)(-2)^n = 3(-2)^n$. Finalement,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \boxed{u_n = 1 + 3(-2)^n}.$$

(e) *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $\sum_{k=0}^{n} u_k$.*

▶ D'après le résultat précédent, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} u_k &= \sum_{k=0}^{n} \left(1+3(-2)^k\right) = \sum_{k=0}^{n} 1 + 3\sum_{k=0}^{n}(-2)^k = n+1+3\frac{(-2)^{n+1}-1}{-2-1} \\ &= n+1-\left((-2)^{n+1}-1\right) = \boxed{n+2-(-2)^{n+1}}.\end{aligned}$$

2. *Dans cette question, on considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E telle que $u_0 = 2$, $u_1 = -2$ et $u_2 = 3$. Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de terme général $w_n = u_n - (-2)^n$.*

(a) *Vérifier que $w_2 - 2w_1 + w_0 = 0$.*

▶ On a $w_0 = u_0 - (-2)^0 = 2 - 1 = 1$, $w_1 = u_1 - (-2)^1 = -2 + 2 = 0$ et $w_2 = u_2 - (-2)^2 = 3 - 4 = -1$. Donc $w_2 - 2w_1 + w_0 = -1 - 2 \times 0 + 1 = \boxed{0}$.

(b) *Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+2} - 2w_{n+1} + w_n = 0$.*

▶ On démontre le résultat par récurrence. Le résultat de la question précédente justifie que la proposition est vraie pour $n = 0$. On suppose que $w_{n+2} - 2w_{n+1} + w_n = 0$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$ fixé. En utilisant l'hypothèse de récurrence puis la définition de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la relation (R), on obtient :

$$\begin{aligned}w_{n+3} - 2w_{n+2} + w_{n+1} &= w_{n+3} - 2(w_{n+2} - 2w_{n+1} + w_n) - 4w_{n+1} + 2w_n + w_{n+1} \\ &= w_{n+3} + 0 - 3w_{n+1} + 2w_n \\ &= (u_{n+3} - (-2)^{n+3}) - 3(u_{n+1} - (-2)^{n+1}) + 2(u_n - (-2)^n) \\ &= (u_{n+3} - 3u_{n+1} + 2u_n) - ((-2)^3 - 3(-2)^1 + 2(-2)^0)(-2)^n \\ &= 0 - (-8+6+2)(-2)^n = 0.\end{aligned}$$

On conclut d'après le principe de récurrence que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+2} - 2w_{n+1} + w_n = 0}$.

(c) *Exprimer w_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.*

▶ D'après le résultat précédent, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2. L'équation caractéristique associée est l'équation $r^2 - 2r + r = (r-1)^2 = 0$ d'inconnue $r \in \mathbb{C}$. Cette équation a pour unique solution $r_0 = 1$. Le terme général de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc de la forme :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = (\lambda + \mu n)(r_0)^n = \lambda + \mu n$$

où λ et μ sont deux nombres réels. On obtient pour $n = 0$: $\lambda = \lambda + \mu \times 0 = w_0 = 1$, et pour $n = 1$: $\lambda + \mu = \lambda + \mu \times 1 = w_1 = 0$ donc $\mu = -\lambda = -1$. Finalement, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = 1 - n}$.

(d) *En déduire l'expression de u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.*

▶ Puisque $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour terme général $w_n = u_n - (-2)^n$, on en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \boxed{u_n = 1 - n + (-2)^n}.$$

(e) *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $\sum_{k=0}^{n} u_k$.*

▶ D'après le résultat précédent, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} u_k &= \sum_{k=0}^{n}(1 - k + (-2)^k) = \sum_{k=0}^{n} 1 - \sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n}(-2)^k \\ &= n + 1 - \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(-2)^{n+1}-1}{-2-1} = \boxed{\frac{(2-n)(n+1)}{2} + \frac{1-(-2)^{n+1}}{3}}.\end{aligned}$$

Exercice 2

Soient n et p deux entiers strictement positifs. On dit qu'une p-liste d'entiers $(a_1, a_2, \dots, a_p)$ est :

- *croissante si $\forall k \in \{1, 2, \dots, p-1\},\ a_k \leqslant a_{k+1}$;*
- *strictement croissante si $\forall k \in \{1, 2, \dots, p-1\},\ a_k < a_{k+1}$.*

On désigne par E l'ensemble des p-listes croissantes d'éléments de $\{1, 2, \dots, n\}$ et par F l'ensembles des p-listes strictement croissantes d'éléments de $\{1, 2, \dots, n+p-1\}$.

1. *Déterminer le cardinal de F.*

   ▶ Puisqu'il n'y a qu'une seule façon d'ordonner par ordre croissant les éléments d'une partie de $\{1, 2, \dots, n+p-1\}$, le nombre de p-listes strictement croissantes de $\{1, 2, \dots, n+p-1\}$ est égal au nombre de parties à p éléments de $\{1, 2, \dots, n+p-1\}$. Autrement dit,

$$\boxed{\mathrm{card}(F) = \binom{n+p-1}{p}}.$$

2. *Si $(a_1, a_2, \dots, a_p)$ est une p-liste d'éléments de $\{1, 2, \dots, n\}$, on définit la p-liste $(b_1, b_2, \dots, b_p)$ par*

$$\forall k \in \{1, 2, \dots, p\},\ b_k = a_k + k - 1. \tag{1}$$

   Montrer que si $(a_1, a_2, \dots, a_p) \in E$ alors $(b_1, b_2, \dots, b_p) \in F$.

   ▶ Si $(a_1, a_2, \dots, a_p)$ est une p-liste d'éléments de $\{1, 2, \dots, n\}$, on définit la p-liste $(b_1, b_2, \dots, b_p)$ par

$$\forall k \in \{1, 2, \dots, p\},\ b_k = a_k + k - 1. \tag{1}$$

   On suppose que $(a_1, a_2, \dots, a_p) \in E$, c'est-à-dire que $(a_1, a_2, \dots, a_p)$ est une p-liste croissante d'éléments de $\{1, 2, \dots, n\}$. Soit $k \in \{1, 2, \dots, p-1\}$. Puisque $(a_1, a_2, \dots, a_p)$ est croissante, on a $a_k \leqslant a_{k+1}$. Par conséquent,

$$b_k = a_k + k - 1 \leqslant a_{k+1} + k - 1 = a_{k+1} + (k+1) - 1 - 1 = b_{k+1} - 1 < b_{k+1}$$

   c'est-à-dire $b_k < b_{k+1}$ pour tout $k \in \{1, 2, \dots, p-1\}$. Soit maintenant $k \in \{1, 2, \dots, p\}$. Puisque $1 \leqslant a_k \leqslant n$ et $1 \leqslant k \leqslant p$, on a

$$1 = 1 + 1 - 1 \leqslant b_k = a_k + k - 1 \leqslant n + p - 1$$

   c'est-à-dire $b_k \in \{1, 2, \dots, n+p-1\}$ pour tout $k \in \{1, 2, \dots, p\}$. Ainsi $(b_1, b_2, \dots, b_p)$ est une p-liste strictement croissante d'éléments de $\{1, 2, \dots, n+p-1\}$, c'est-à-dire $\boxed{(b_1, b_2, \dots, b_p) \in F}$.

3. *Si $(b_1, b_2, \dots, b_p)$ est une p-liste d'éléments de $\{1, 2, \dots, n+p-1\}$, on définit la p-liste $(a_1, a_2, \dots, a_p)$ par*

$$\forall k \in \{1, 2, \dots, p\},\ a_k = b_k - k + 1. \tag{2}$$

   Montrer que si $(b_1, b_2, \dots, b_p) \in F$ alors $(a_1, a_2, \dots, a_p) \in E$.

   ▶ Si $(b_1, b_2, \dots, b_p)$ est une p-liste d'éléments de $\{1, 2, \dots, n+p-1\}$, on définit la p-liste $(a_1, a_2, \dots, a_p)$ par

$$\forall k \in \{1, 2, \dots, p\},\ a_k = b_k - k + 1. \tag{2}$$

   On suppose que $(b_1, b_2, \dots, b_p) \in F$, c'est-à-dire que $(b_1, b_2, \dots, b_p)$ est une p-liste strictement croissante d'éléments de $\{1, 2, \dots, n+p-1\}$. Soit $k \in \{1, 2, \dots, p-1\}$. Puisque $(b_1, b_2, \dots, b_p)$ est strictement croissante, on a $b_k < b_{k+1}$. Par conséquent,

$$a_k = b_k - k + 1 < b_{k+1} - k + 1 = b_{k+1} - (k+1) + 1 + 1 = a_{k+1} + 1.$$

   Or a_k et a_{k+1} sont des nombres entiers, donc $a_k < a_{k+1} + 1 \Rightarrow a_k \leqslant a_{k+1}$. Ainsi $(a_1, a_2, \dots, a_p)$ est croissante. Montrons maintenant que $(a_1, a_2, \dots, a_p)$ est une p-liste d'éléments de $\{1, 2, \dots, n\}$. On a $a_1 = b_1 - 1 + 1 = b_1 \geqslant 1$ et $a_p = b_p - p + 1 \leqslant n + p - 1 - p + 1 = n$. Puisque $(a_1, a_2, \dots, a_p)$ est croissante, on a $a_1 \leqslant a_k \leqslant a_p$ et donc $a_k \in \{1, 2, \dots, n\}$ pour tout $k \in \{1, 2, \dots, p\}$. Finalement $\boxed{(a_1, a_2, \dots, a_p) \in E}$.

4. *Montrer que l'application*

$$\varphi : \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ (a_1, a_2, \ldots, a_p) & \mapsto & \varphi(a_1, a_2, \ldots, a_p) = (b_1, b_2, \ldots, b_p) \end{array} \quad \textit{définie par (1)}$$

est bijective.

▶ On considère l'application

$$\varphi : \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ (a_1, a_2, \ldots, a_p) & \mapsto & \varphi(a_1, a_2, \ldots, a_p) = (b_1, b_2, \ldots, b_p) \end{array} \quad \text{définie par (1).}$$

Montrons tout d'abord que φ est injective. Soient $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ et $(a'_1, a'_2, \ldots, a'_p)$ deux p-listes de E. On note $\varphi(a_1, a_2, \ldots, a_p) = (b_1, b_2, \ldots, b_p)$ et $\varphi(a'_1, a'_2, \ldots, a'_p) = (b'_1, b'_2, \ldots, b'_p)$ leurs images par φ. On suppose que $\varphi(a_1, a_2, \ldots, a_p) = \varphi(a'_1, a'_2, \ldots, a'_p)$, d'où $(b_1, b_2, \ldots, b_p) = (b'_1, b'_2, \ldots, b'_p)$. Soit $k \in \{1, 2, \ldots, p\}$. On a donc $b_k = b'_k$ et d'après (1) :

$$a_k + k - 1 = b_k = b'_k = a'_k + k - 1 \Rightarrow a_k = a'_k.$$

Donc $(a_1, a_2, \ldots, a_p) = (a'_1, a'_2, \ldots, a'_p)$ et φ est injective.
Montrons maintenant que φ est surjective. Soit $(b_1, b_2, \ldots, b_p)$ une p-liste de F. On considère la p-liste $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ définie par (2) et on va prouver que $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ est un antécédent de $(b_1, b_2, \ldots, b_p)$ par φ. Tout d'abord $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ est bien une p-liste de E d'après le résultat de la question précédente. On note donc $\varphi(a_1, a_2, \ldots, a_p) = (b'_1, b'_2, \ldots, b'_p)$ son image par φ et on a :

$$\forall k \in \{1, 2, \ldots, p\},\ b'_k \underset{\text{d'après (1)}}{=} a_k + k - 1 \underset{\text{d'après (2)}}{=} (b_k - k + 1) + k - 1 = b_k.$$

Ainsi $\varphi(a_1, a_2, \ldots, a_p) = (b'_1, b'_2, \ldots, b'_p) = (b_1, b_2, \ldots, b_p)$, autrement dit $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ est un antécédent de $(b_1, b_2, \ldots, b_p)$, et φ est surjective.
Finalement, $\boxed{\varphi \text{ est injective et surjective, donc bijective}}$.

Une autre méthode possible est de considérer l'application $\psi : F \to E$ définie par (2) et de prouver que $\psi \circ \varphi = \mathrm{Id}_E$ et $\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_F$. Dans ce cas, on montre que $\varphi : E \to F$ est bijective et de plus que $\psi : F \to E$ et sa bijection réciproque.

5. *En déduire le nombre de p-listes croissantes d'éléments de $\{1, 2, \ldots, n\}$.*

▶ D'après le résultat précédent on a $\mathrm{card}(E) = \mathrm{card}(F)$. Or E désigne l'ensemble des p-listes croissantes d'éléments de $\{1, 2, \ldots, n\}$ et $\mathrm{card}(F)$ a été déterminé à la question 1. Donc le nombre de p-listes croissantes d'éléments de $\{1, 2, \ldots, n\}$ est

$$\boxed{\mathrm{card}(E) = \binom{n+p-1}{p}}.$$

Exercice 3

On considère une protéine constituée de la succession linéaire d'acides aminés de cystéine, d'aspartate et de glutamate que l'on désignera respectivement par les lettres C, D et E. Cette protéine vérifie de plus la propriété suivante : sa structure primaire peut-être représentée par des séquences successives de lettres telles que ***chaque séquence commence par la lettre C et ne comporte jamais deux lettres consécutives identiques****. Pour chaque entier $n \geqslant 1$, on note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des séquences possibles de n lettres et on considère les sous-ensembles $\mathcal{C}_n$, $\mathcal{D}_n$ et $\mathcal{E}_n$ de séquences de $\mathcal{S}_n$ qui se terminent respectivement par C, D et E. On pose $c_n = \mathrm{card}(\mathcal{C}_n)$, $d_n = \mathrm{card}(\mathcal{D}_n)$ et $e_n = \mathrm{card}(\mathcal{E}_n)$.*

1. (a) *Justifier que $c_1 = 1$, $d_1 = 0$ et $e_1 = 0$.*

▶ Il existe une seule séquence possible de une lettre qui est «C» (car chaque séquence doit commencer par la lettre C). Puisque cette séquence finit par C, on a $\boxed{c_1 = 1}$, $\boxed{d_1 = 0}$ et $\boxed{e_1 = 0}$.

(b) Justifier que $c_2 = 0$, $d_2 = 1$ et $e_2 = 1$.

► Il existe deux séquences possibles de deux lettres qui sont «CD» et «CE» (car la lettre C ne peut pas apparaitre deux fois consécutivement). Donc $\boxed{c_2 = 0}$, $\boxed{d_2 = 1}$ et $\boxed{e_2 = 1}$.

(c) Déterminer c_3, d_3 et e_3.

► Il existe quatre séquences possibles de trois lettres : «CDC», «CDE», «CEC» et «CED». Donc $\boxed{c_3 = 2}$, $\boxed{d_3 = 1}$ et $\boxed{e_3 = 1}$.

2. Déterminer $\mathrm{card}(\mathcal{S}_n)$ et en déduire que $c_n + d_n + e_n = 2^{n-1}$.

► Chaque séquence de $\mathcal{S}_n$ est une n-liste de lettres $(\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n)$ telle que $\ell_1 = \mathrm{C}$ et $\forall k \in \{2, 3, \ldots, n\}$, $\ell_k \neq \ell_{k-1}$. Il y a donc deux choix possibles pour chaque lettre ℓ_k où $k \in \{2, 3, \ldots, n\}$. Puisque $\mathrm{card}(\{2, 3, \ldots, n\}) = n - 1$, on obtient :

$$\mathrm{card}(\mathcal{S}_n) = 1 \times \underbrace{2 \times 2 \times \cdots \times 2}_{n-1 \text{ fois}} = \boxed{2^{n-1}}.$$

Or $\mathcal{S}_n$ est l'union disjointe des séquences possibles qui se terminent par C, D ou E. Donc

$$2^{n-1} = \mathrm{card}(\mathcal{S}_n) = \mathrm{card}(\mathcal{C}_n \cup \mathcal{D}_n \cup \mathcal{E}_n) = \mathrm{card}(\mathcal{C}_n) + \mathrm{card}(\mathcal{D}_n) + \mathrm{card}(\mathcal{E}_n) = \boxed{c_n + d_n + e_n}.$$

3. (a) En étudiant l'avant-dernière lettre des séquences de $\mathcal{C}_{n+1}$, démontrer que $c_{n+1} = d_n + e_n$.

► L'avant-dernière lettre des séquences de $\mathcal{C}_{n+1}$ est D ou E, mais pas C car sinon la lettre C apparaitrait deux fois consécutivement à la fin de la séquence. Chaque séquence de $\mathcal{C}_{n+1}$ est donc formée par une séquence de $\mathcal{D}_n$ ou de $\mathcal{E}_n$ à laquelle on ajoute la lettre C finale. Puisque $\mathcal{D}_n$ et $\mathcal{E}_n$ sont des ensembles disjoints, on obtient :

$$c_{n+1} = \mathrm{card}(\mathcal{C}_{n+1}) = \mathrm{card}(\mathcal{D}_n \cup \mathcal{E}_n) = \mathrm{card}(\mathcal{D}_n) + \mathrm{card}(\mathcal{E}_n) = \boxed{d_n + e_n}.$$

Plus précisément, on peut montrer que l'application $\varphi : \mathcal{C}_{n+1} \to \mathcal{D}_n \cup \mathcal{E}_n$ qui à chaque séquence de $\mathcal{C}_{n+1}$ associe la séquence de n lettres obtenue par suppression de la dernière lettre est une bijection.

(b) En s'inspirant de la question précédente, démontrer deux autres relations.

► En étudiant l'avant-dernière lettre des séquences de $\mathcal{D}_{n+1}$ et celle des séquences de $\mathcal{E}_{n+1}$, on obtient de même que $\boxed{d_{n+1} = c_n + e_n}$ et $\boxed{e_{n+1} = c_n + d_n}$.

4. Justifier que $d_n = e_n$.

► Les lettes D et E jouent un rôle symétrique dans les séquences de $\mathcal{S}_n$. Donc :

$$\boxed{d_n = \mathrm{card}(\mathcal{D}_n) = \mathrm{card}(\mathcal{E}_n) = e_n}.$$

Plus précisément, on peut montrer que l'application $\psi : \mathcal{D}_n \to \mathcal{E}_n$ qui à chaque séquence de $\mathcal{D}_n$ associe la séquence de $\mathcal{E}_n$ obtenue en remplaçant chaque lettre D par une lettre E et chaque lettre E par une lettre D est une bijection. On peut également démontrer le résultat par récurrence en utilisant les deux résultats de la question précédente.

5. A l'aide des questions précédentes, démontrer que $\forall n \geqslant 1$, $c_{n+2} = c_{n+1} + 2c_n$.

► En utilisant les résultats de la question 3, on a pour tout $n \geqslant 1$:

$$c_{n+2} = d_{n+1} + e_{n+1} = (c_n + e_n) + (c_n + d_n) = 2c_n + (d_n + e_n) = \boxed{2c_n + c_{n+1}}.$$

6. *En déduire l'expression de c_n en fonction de $n \geqslant 1$ puis celles de d_n et e_n.*

▶ D'après le résultat précédent, $(c_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2. L'équation caractéristique associée est l'équation $r^2 - r - 2 = 0$ d'inconnue $r \in \mathbb{C}$. Cette équation a pour discriminant $\Delta = (-1)^2 - 4\times 1\times(-2) = 9 > 0$, et admet donc deux solutions réelles $r_1 = \frac{1-\sqrt{9}}{2} = -1$ et $r_2 = \frac{1+\sqrt{9}}{2} = 2$. Par conséquent, le terme général de la suite $(c_n)_{n\geqslant 1}$ est de la forme :

$$\forall n \geqslant 1,\ c_n = \lambda_1(r_1)^n + \lambda_2(r_2)^n = \lambda_1(-1)^n + \lambda_2 \times 2^n$$

où λ_1 et λ_2 sont deux nombres réels. Or $c_1 = 1$ et $c_2 = 0$ d'après les résultats des questions 1.(a) et 1.(b), donc

$$\left\{\begin{array}{rcl} 1 & = & -\lambda_1 + 2\lambda_2 \\ 0 & = & \lambda_1 + 4\lambda_2 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1 & = & 2\lambda_2 - 1 \\ 0 & = & (2\lambda_2 - 1) + 4\lambda_2 = 6\lambda_2 - 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1 & = & -\frac{2}{3} \\ \lambda_2 & = & \frac{1}{6} \end{array}\right. .$$

Par conséquent :

$$\forall n \geqslant 1,\ c_n = -\frac{2}{3}(-1)^n + \frac{2^n}{6}.$$

De plus, en utilisant les résultats des questions 2 et 4, on a $\forall n \geqslant 1,\ 2^{n-1} = c_n + 2d_n = c_n + 2e_n$. Donc :

$$\begin{aligned} \forall n \geqslant 1,\ d_n = e_n &= \frac{1}{2}(2^{n-1} - c_n) = \frac{1}{2}\left(2^{n-1} + \frac{2}{3}(-1)^n - \frac{2^n}{6}\right) \\ &= \frac{(-1)^n}{3} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right)2^n = \boxed{\frac{(-1)^n}{3} + \frac{2^n}{6}}. \end{aligned}$$

On peut également déterminer les expressions de d_n et e_n à l'aide de suites récurrentes linéaires d'ordre 2 de la même manière que pour l'expression de c_n, mais cette méthode est plus longue.

7. *On remarque que le résultat précédent permet de calculer $c_8 = 42$ et $d_8 = 43$. Pour la question suivante, donner les résultats sous forme de produits d'entiers, de factorielles et/ou de coefficients binomiaux sans chercher à les calculer. Combien existe-t-il de structures primaires différentes formées par la succession de :*

(a) *cinq séquences identiques de $\mathcal{C}_8$?*

▶ Pour construire une structure primaire formée par la succession de cinq séquences identiques de $\mathcal{C}_8$, il suffit de choisir une séquence de $\mathcal{C}_8$ parmi $\text{card}(\mathcal{C}_8) = c_8 = 42$ séquences. D'où $\boxed{42}$ structures primaires possibles.

(b) *cinq séquences différentes de $\mathcal{C}_8$?*

▶ Pour construire une structure primaire formée par la succession de cinq séquences différentes de $\mathcal{C}_8$, il suffit de compter le nombre de 5-listes sans répétition d'éléments de $\mathcal{C}_8$. D'où $\boxed{\frac{42!}{(42-5)!} = 42 \times 41 \times 40 \times 39 \times 38}$ structures primaires possibles.

(c) *trois séquences identiques de $\mathcal{C}_8$ et deux séquences identiques de $\mathcal{D}_8$ (pas nécessairement dans cet ordre) ?*

▶ Pour construire une structure primaire formée par la succession de trois séquences identiques de $\mathcal{C}_8$ et deux séquences identiques de $\mathcal{D}_8$ (pas nécessairement dans cet ordre), il suffit de choisir une séquence de $\mathcal{C}_8$ parmi $\text{card}(\mathcal{C}_8) = c_8 = 42$ séquences et une séquence de $\mathcal{D}_8$ parmi $\text{card}(\mathcal{D}_8) = d_8 = 43$ séquences, puis de placer les trois séquences identiques de $\mathcal{C}_8$ dans la succession des cinq séquences, ce qui donne $\binom{5}{3}$ choix possibles, et enfin de placer les deux séquences identiques de $\mathcal{D}_8$ dans les deux places restantes de la succession des cinq séquences. D'où $\boxed{42 \times 43 \times \binom{5}{3}}$ structures primaires possibles.

(d) trois séquences différentes de $\mathcal{C}_8$ et deux séquences différentes de $\mathcal{D}_8$ (pas nécessairement dans cet ordre) ?

▶ Pour construire une structure primaire formée par la succession de trois séquences différentes de $\mathcal{C}_8$ et deux séquences différentes de $\mathcal{D}_8$ (pas nécessairement dans cet ordre), il suffit de choisir une 3-liste sans répétition d'éléments de $\mathcal{C}_8$ parmi $\frac{42!}{(42-3)!} = 42 \times 41 \times 40$ et une 2-liste sans répétition d'éléments de $\mathcal{D}_8$ parmi $\frac{43!}{(43-2)!} = 43 \times 42$, puis de placer la 3-liste sans répétition d'éléments de $\mathcal{C}_8$ dans la succession des cinq séquences, ce qui donne $\binom{5}{3}$ choix possibles, et enfin de placer la 2-liste sans répétition d'éléments de $\mathcal{D}_8$ dans les deux places restantes de la succession de cinq séquences. D'où $\boxed{42 \times 41 \times 40 \times 42 \times 43 \times \binom{5}{3}}$ structures primaires possibles.

Exercice 4

Déterminer un équivalent et calculer la limite de chacune des suites suivantes :

1. $u_n = \sqrt{n^2+4n+5} - \sqrt{n^2+1}$.

▶ On a pour tout $n \geqslant 0$:

$$\begin{aligned} u_n &= \sqrt{n^2+4n+5} - \sqrt{n^2+1} = \sqrt{n^2+1}\left(\sqrt{\frac{n^2+4n+5}{n^2+1}} - 1\right) \\ &= \sqrt{n^2+1}\left(\sqrt{\frac{n^2+1+4n+4}{n^2+1}} - 1\right) = \sqrt{n^2+1}\left(\sqrt{1+4\frac{n+1}{n^2+1}} - 1\right). \end{aligned}$$

Or $\sqrt{n^2+1} \sim \sqrt{n^2} = n$ car $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{1+\frac{1}{n^2}} = 1$ et $\lim_{n\to+\infty} 4\frac{n+1}{n^2+1} = 0$ car $\frac{n+1}{n^2+1} \sim \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$. On en déduit que

$$u_n \sim n\frac{4\frac{n+1}{n^2+1}}{2} = 2\frac{n^2+n}{n^2+1} \sim 2\frac{n^2}{n^2} = \boxed{2} \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = \boxed{2}.$$

2. $u_n = \left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)^n$.

▶ On a pour tout $n \geqslant 1$:

$$u_n = \left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)^n = \exp\left(n\ln\left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)\right) = \exp\left(n\ln\left(1+\left[\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)-1\right]\right)\right).$$

Or $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} \left[\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)-1\right] = 0$ donc

$$\ln\left(1+\left[\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)-1\right]\right) \sim \left[\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)-1\right] \sim -\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2}{2} = -\frac{1}{2n}.$$

En particulier $\lim_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\left[\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)-1\right]\right) = \lim_{n\to+\infty} -\frac{n}{2n} = -\frac{1}{2}$. On en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \exp\left(-\frac{1}{2}\right) = \boxed{\frac{1}{\sqrt{e}}} \quad \text{et} \quad u_n \sim \boxed{\frac{1}{\sqrt{e}}}.$$

Attention de ne pas composer des équivalents avec la fonction exponentielle !!

3. $u_n=\left(7-2\sin\left(e^{-n}\right)+\frac{n^5}{2^n}\right)\left(6-5\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}+3\tan\left(\frac{1}{n}\right)\right)$.

► On a $\lim_{n\to+\infty}\sin\left(e^{-n}\right)=0$ (car $\lim_{n\to+\infty}e^{-n}=0$ et $\lim_{x\to0}\sin(x)=0$) et $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^5}{2^n}=0$ par comparaison de limites. Donc $\lim_{n\to+\infty}\left(7-2\sin\left(e^{-n}\right)+\frac{n^5}{2^n}\right)=7$. Pour le deuxième facteur, on a $\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}=0$ par comparaison de limites et $\lim_{n\to+\infty}\tan\left(\frac{1}{n}\right)=0$ (car $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$ et $\lim_{x\to0}\tan(x)=0$). Donc $\lim_{n\to+\infty}\left(6-5\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}+3\tan\left(\frac{1}{n}\right)\right)=6$. Finalement,

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=7\times6=\boxed{42}\quad\text{et}\quad u_n\sim\boxed{42}.$$

DS n$^{\text{o}}$ 4 de mathématiques

durée : 3 heures

Exercice 1

Cet exercice propose d'étudier un modèle de croissance de population proposé par Verhulst en 1840 en réponse à l'insatisfaisant modèle de croissance exponentielle introduit par Malthus en 1798. L'idée est de remplacer le taux d'accroissement constant du modèle de Malthus par la différence entre un taux de natalité $n(N)$ et un taux de mortalité $m(N)$ qui varient en fonction de la taille de la population N. Plus précisément, le modèle de Verhulst conduit à l'équation différentielle : $N' = [n(N) - m(N)] .N$.

1. Montrer que si le taux de natalité décroît avec la population et si le taux de mortalité croît avec la population alors le taux d'accroissement $N \mapsto n(N) - m(N)$ est décroissant.

Pour simplifier le modèle, Verhulst a fait l'hypothèse que les taux de natalité et de mortalité sont des fonctions affines de N. L'équation différentielle devient alors :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ N'(t) = \Big[a - b.N(t)\Big].N(t) \tag{1}$$

où a et b sont deux constantes réelles fixées avec $a > 0$ et $b \geqslant 0$. On note N_0 la taille initiale de la population (à $t = 0$) et on suppose que $N(t) > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ (en particulier $N_0 = N(0) > 0$).

2. Résoudre (2) dans le cas où $b = 0$ puis décrire l'évolution de la population (c'est-à-dire les variations de $t \mapsto N(t)$ et la limite éventuelle lorsque $t \to +\infty$).
3. On suppose désormais que $b > 0$ et on note K la constante $\dfrac{a}{b}$ (appelée capacité d'accueil).
   (a) Sans chercher à résoudre (2), étudier le signe de N' selon différentes valeurs de N. Que peut-on en déduire pour l'évolution instantanée de la taille $N(t)$ à un instant $t \in \mathbb{R}_+$.
   (b) Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on pose $y(t) = \dfrac{1}{N(t)}$.
      i. Exprimer N et N' en fonction de y et y'.
      ii. En utilisant (2), démontrer que y est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants qu'on déterminera.
      iii. Résoudre l'équation différentielle obtenue à la question précédente.
      iv. En déduire que $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ N(t) = \dfrac{K}{Ce^{-at} + 1}$ où $C \in \mathbb{R}$ est une constante réelle qu'on exprimera en fonction de la capacité d'accueil K et de la taille initiale N_0.
   (c) Décrire l'évolution de la population selon différentes valeurs de la taille initiale N_0.

Exercice 2

Cet exercice propose de calculer les puissances successives de la matrice $A = \begin{pmatrix} -11 & -28 & 20 \\ -5 & -10 & 8 \\ -14 & -32 & 24 \end{pmatrix}$.

1. Calculer le rang de la matrice $P = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -4 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$ et en déduire qu'elle est inversible.
2. On cherche à calculer l'inverse de la matrice P. Pour cela, on va utiliser deux méthodes. Les deux questions suivantes sont donc indépendantes.
   (a) Calculer P^{-1} à l'aide de la méthode du pivot de Gauss.
   (b) Calculer P^2 et exprimer le résultat en fonction de P et I_3. En déduire P^{-1}.
3. Calculer $D = PAP^{-1}$.
4. Justifier que $A^n = P^{-1}D^nP$ puis exprimer la matrice A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}^\star$.

Problème

Pour Noël, une classe d'élèves et leurs professeurs décide d'organiser un échange de cadeaux au hasard au cours duquel chaque personne reçoit un cadeau d'une autre personne. Pour ce faire, tous les noms sont placés dans un chapeau et chaque personne tire au hasard le nom de la personne à qui elle offrira son cadeau. Si une personne tire son propre nom, elle en tire un autre puis remet son nom dans le chapeau. On propose d'étudier le nombre de façons possibles d'attribuer tous les cadeaux.

1. On désigne par $n \geqslant 2$ le nombre total de personnes et par a_n le nombre de façons possibles d'attribuer les n cadeaux sans que quelqu'un reçoive son propre cadeau. Le but de cette question est de déterminer une relation de récurrence vérifiée par a_n.
   (a) Déterminer a_2 et a_3.
   (b) On fixe $n \geqslant 4$. Soit x le professeur de mathématiques. On désigne par y la personne qui reçoit le cadeau de x et par z la personne qui reçoit le cadeau de y. On exprimera les réponses aux trois questions suivantes en fonction de n, a_{n-1} et a_{n-2}.
      i. Combien y a-t-il de choix possibles pour y ?
      ii. Si $z = x$, combien y a-t-il de façons possibles d'attribuer les n cadeaux ?
      iii. Si $z \neq x$, combien y a-t-il de façons possibles d'attribuer les n cadeaux ? (Indication : on pourra étudier le cas où y se désiste et x donne directement son cadeau à z.)
   (c) En déduire que $\boxed{a_n = (n-1)(a_{n-1} + a_{n-2})}$ pour tout $n \geqslant 4$.
   (d) Déterminer a_4 et a_5 à l'aide du résultat précédent.
2. Le but de cette question est de déterminer une expression de a_n en fonction de n. On désigne par b_n le nombre de façons possibles d'attribuer les n cadeaux sans se soucier que quelqu'un reçoive son propre cadeau (on ne change rien si une personne tire son propre nom du chapeau).
   (a) Déterminer b_n en fonction de n.
   (b) En désignant par j le nombre de personnes qui reçoivent bien le cadeau d'une autre personne, justifier que $\forall n \geqslant 2,\ b_n = 1 + \sum_{j=2}^{n} \binom{n}{j} a_j$.
   (c) On fixe $n \geqslant 2$. On cherche à «inverser» la formule précédente, c'est-à-dire à exprimer a_n à l'aide d'une somme de termes contenant les nombres b_i pour $i \in \{2, 3, \dots, n\}$.
      i. Montrer que $\sum_{i=2}^{n} \binom{n}{i} (-1)^{n-i} = -n(-1)^{n-1} - (-1)^n$.
      ii. Montrer que $\forall (i,j) \in \{2, 3, \dots, n\}^2,\ \binom{n}{i}\binom{i}{j} = \binom{n}{j}\binom{n-j}{n-i}$.
      iii. En déduire que $\forall j \in \{2, 3, \dots, n\},\ \sum_{i=j}^{n} \binom{n}{i}\binom{i}{j}(-1)^{n-i} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = n \\ 0 & \text{si } j < n \end{cases}$.
      iv. En déduire que $\sum_{i=2}^{n} \binom{n}{i}(-1)^{n-i} \sum_{j=2}^{i} \binom{i}{j} a_j = a_n$.
      v. Conclure que $a_n = n(-1)^{n-1} + (-1)^n + \sum_{i=2}^{n} \binom{n}{i}(-1)^{n-i} b_i$.
   (d) A l'aide du résultat de la question 2.(a), prouver que $\boxed{a_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}}$ pour tout $n \geqslant 2$.
   (e) Montrer que cette expression de a_n vérifie bien la relation obtenue à la question 1.(c).
3. On désigne par $p_n = \frac{a_n}{b_n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$ la probabilité qu'une attribution des n cadeaux au hasard donne une répartition où chaque personne reçoit bien le cadeau d'une autre personne. Le but de cette question est d'étudier la nature de la suite $(p_n)_{n \geqslant 2}$.
   (a) Prouver que les suites extraites $(p_{2n})_{n \geqslant 1}$ et $(p_{2n+1})_{n \geqslant 1}$ sont adjacentes.
   (b) En déduire que $(p_n)_{n \geqslant 2}$ converge vers une limite $\ell \in]\frac{1}{3}, \frac{1}{2}[$.

   On admet désormais que $\boxed{\ell = \frac{1}{e}}$ (pour les curieux : nous démontrerons ça... en 2015 !).

   (c) On fixe $n = 49$ (46 élèves et 3 professeurs) et on souhaite calculer une valeur approchée de p_{49}. Soit un entier N tel que $49! > 10^N$. Montrer que ℓ est une valeur approchée de p_{49} à 10^{-N} près. Proposer une valeur pertinente de N et justifier votre choix.

Corrigé du DS n° 4 de mathématiques

Exercice 1

Cet exercice propose d'étudier un modèle de croissance de population proposé par Verhulst en 1840 en réponse à l'insatisfaisant modèle de croissance exponentielle introduit par Malthus en 1798. L'idée est de remplacer le taux d'accroissement constant du modèle de Malthus par la différence entre un taux de natalité $n(N)$ et un taux de mortalité $m(N)$ qui varient en fonction de la taille de la population N. Plus précisément, le modèle de Verhulst conduit à l'équation différentielle : $N' = [n(N) - m(N)] . N$.

1. *Montrer que si le taux de natalité décroît avec la population et si le taux de mortalité croît avec la population alors le taux d'accroissement $N \mapsto n(N) - m(N)$ est décroissant.*

   ▶ On suppose que le taux de natalité $N \mapsto n(N)$ est décroissant et que le taux de mortalité $N \mapsto m(N)$ est croissant. Montrons que le taux d'accroissement $N \mapsto n(N) - m(N)$ est décroissant. Soient N_1 et N_2 deux tailles de population telles que $N_1 \leqslant N_2$. Puisque le taux de natalité décroît avec la population on a $n(N_1) \geqslant n(N_2)$, et puisque le taux de mortalité croît avec la population on a $m(N_1) \leqslant m(N_2)$ et donc $-m(N_1) \geqslant -m(N_2)$. En sommant ces deux inégalités, on obtient $n(N_1) - m(N_1) \geqslant n(N_2) - m(N_2)$ pour tout $N_1 \leqslant N_2$. Par conséquent $\boxed{\text{le taux d'accroissement } N \mapsto n(N) - m(N) \text{ est décroissant}}$.

   Attention, on ne peut pas étudier le signe de la dérivée du taux d'accroissement ici car on ne sait pas a priori si les fonctions $N \mapsto n(N)$ et $N \mapsto m(N)$ sont dérivables. Il faut donc revenir à la définition d'une fonction décroissante.

Pour simplifier le modèle, Verhulst a fait l'hypothèse que les taux de natalité et de mortalité sont des fonctions affines de N. L'équation différentielle devient alors :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ N'(t) = \Big[a - b.N(t)\Big].N(t) \tag{2}$$

où a et b sont deux constantes réelles fixées avec $a > 0$ et $b \geqslant 0$. On note N_0 la taille initiale de la population (à $t = 0$) et on suppose que $N(t) > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ (en particulier $N_0 = N(0) > 0$).

2. *Résoudre (2) dans le cas où $b = 0$ puis décrire l'évolution de la population (c'est-à-dire les variations de $t \mapsto N(t)$ et la limite éventuelle lorsque $t \to +\infty$).*

   ▶ Si $b = 0$, alors l'équation différentielle (2) peut s'écrire $N' - aN = 0$. On reconnait une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 à coefficients constants dont les solutions sont de la forme $t \mapsto Ce^{at}$ où $C \in \mathbb{R}$ est une constante. En $t = 0$ on obtient $Ce^0 = C$, donc $C = N(0) = N_0$ est la taille initiale de la population. Ainsi, la taille de la population est donnée par $\boxed{N(t) = N_0 e^{at}}$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$. Puisque $a > 0$ et $N_0 > 0$, la taille de la population est donc $\boxed{\text{strictement croissante et tend vers } +\infty \text{ lorsque } t \to +\infty}$.

   Si $b = 0$, le taux d'accroissement $N \mapsto n(N) - m(N)$ est constant égal à $a > 0$. On reconnait donc le modèle de Malthus qui donne une croissance exponentielle de la population.

3. *On suppose désormais que $b > 0$ et on note K la constante $\dfrac{a}{b}$ (appelée capacité d'accueil).*

   (a) *Sans chercher à résoudre (2), étudier le signe de N' selon différentes valeurs de N. Que peut-on en déduire pour l'évolution instantanée de la taille $N(t)$ à un instant $t \in \mathbb{R}_+$.*

   ▶ On a $N' = [a - b.N] .N$. Puisque $N > 0$, la dérivée N' est du signe de $a - b.N = b.(\frac{a}{b} - N) = b.(K - N)$. Or $b > 0$ donc pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:
   - si $\boxed{N(t) < K}$ alors $N'(t) > 0$ et la population est $\boxed{\text{strictement croissante}}$ à l'instant t ;
   - si $\boxed{N(t) = K}$ alors $N'(t) = 0$ et la population est $\boxed{\text{«constante»}}$ à l'instant t ;

— si $\boxed{N(t) > K}$ alors $N'(t) < 0$ et la population est $\boxed{\text{strictement décroissante}}$ à l'instant t.

Dire que la fonction N est «constante» à un instant $t \in \mathbb{R}_+$ n'a pas vraiment de sens (car $N(t)$ est une constante pour t fixé), le résultat mathématiquement précis est l'affirmation $N'(t) = 0$ (pensez à la fonction $x \mapsto x^3$ dont la dérivée est nulle en 0). Par contre, le résultat de cette question permet d'anticiper le résultat de la question (c) : si $N_0 = K$ alors on peut conjecturer que la taille de population N va rester constante égale à K, si $N_0 < K$ alors N va croître et tendre vers K sans jamais dépasser cette taille limite, et inversement si $N_0 < K$ alors N va décroître et tendre vers K.

(b) *Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on pose $y(t) = \dfrac{1}{N(t)}$.*

i. *Exprimer N et N' en fonction de y et y'.*

► Puisque $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ N(t) > 0$, on a en particulier que $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ y(t) \neq 0$ et $y = \frac{1}{N}$ est dérivable (comme l'inverse d'une fonction dérivable et non nulle). Donc $\boxed{N = \frac{1}{y}}$ et $\boxed{N' = -\frac{y'}{y^2}}$.

N'oubliez pas de justifier que le dénominateur est non nul dès que vous passez à l'inverse.

ii. *En utilisant (2), démontrer que y est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants qu'on déterminera.*

► On remplace dans (2) les expressions de N et N' obtenues à la question précédente. On a donc :

$$\begin{aligned} -\frac{y'}{y^2} = \left[a - b.\frac{1}{y}\right].\frac{1}{y} \quad &\Leftrightarrow \quad -\frac{y'y^2}{y^2} = \left[a - b.\frac{1}{y}\right].\frac{y^2}{y} \quad (\text{car } y^2 \neq 0) \\ &\Leftrightarrow \quad -y' = a.y - b.\frac{y}{y} \\ &\Leftrightarrow \quad -y' = ay - b \\ &\Leftrightarrow \quad \boxed{y' + ay = b}. \end{aligned}$$

Ainsi y est bien solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants.

iii. *Résoudre l'équation différentielle obtenue à la question précédente.*

► Les solutions de l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 à coefficients constants $y' + ay = 0$ sont de la forme $y_{\mathrm{H}} : t \mapsto Ce^{-at}$ où $C \in \mathbb{R}$ est une constante. De plus, $y_{\mathrm{P}} : t \mapsto \frac{b}{a}$ (car $a \neq 0$) est une solution particulière de l'équation différentielle $y' + ay = b$. On en déduit d'après le principe de superposition que les solutions de l'équation différentielle $y' + ay = b$ sont de la forme $\boxed{y : t \mapsto y_{\mathrm{H}}(t) + y_{\mathrm{P}}(t) = Ce^{-at} + \frac{b}{a}}$ où $C \in \mathbb{R}$ est une constante.

iv. *En déduire que $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ N(t) = \dfrac{K}{Ce^{-at} + 1}$ où $C \in \mathbb{R}$ est une constante réelle qu'on exprimera en fonction de la capacité d'accueil K et de la taille initiale N_0.*

► D'après le résultat précédent, on en déduit que la taille de la population est de la forme :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ N(t) = \frac{1}{y(t)} = \frac{1}{Ce^{-at} + \frac{b}{a}} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{a}{b}Ce^{-at} + \frac{a}{b}.\frac{b}{a}} = \frac{K}{C'e^{-at} + 1}$$

où $C' = \frac{a}{b}C = KC \in \mathbb{R}$ est une constante. En $t = 0$, on obtient $N_0 = N(0) = \frac{K}{C'+1}$ donc $C' = \frac{K}{N_0} - 1$ (car $N_0 \neq 0$). Finalement :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ N(t) = \frac{K}{\left(\frac{K}{N_0} - 1\right)e^{-at} + 1}.$$

D'où le résultat en posant $\boxed{C = \frac{K}{N_0} - 1}$.

(c) *Décrire l'évolution de la population selon différentes valeurs de la taille initiale N_0.*

▶ D'après le résultat précédent, on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ N'(t) = -\frac{-aK\left(\frac{K}{N_0}-1\right)e^{-at}}{\left(\left(\frac{K}{N_0}-1\right)e^{-at}+1\right)^2} = \frac{aK\left(K-N_0\right)e^{-at}}{N_0\left(\left(\frac{K}{N_0}-1\right)e^{-at}+1\right)^2}.$$

On peut également remplacer l'expression de $N(t)$ dans l'équation différentielle (2) pour obtenir l'expression de $N'(t)$ sans avoir besoin de dériver. Par contre, il faudra factoriser le résultat obtenu pour faciliter l'étude du signe de N'.

Puisque $a > 0$, $K = \frac{a}{b} > 0$ et $N_0 > 0$, la dérivée N' est du signe de $K - N_0$, donc :
- si $\boxed{N_0 < K}$, alors $N' > 0$ et la population est $\boxed{\text{strictement croissante}}$;
- si $\boxed{N_0 = K}$ alors $N' = 0$ et la population est $\boxed{\text{«constante»}}$;
- si $\boxed{N_0 > K}$ alors $N' < 0$ et la population est $\boxed{\text{strictement décroissante}}$.

Dans tous les cas, $\boxed{\lim_{t\to+\infty} N(t) = K}$ car $\lim_{t\to+\infty} e^{-at} = 0$ (puisque $a > 0$).

Le modèle de Verhulst conduit donc à une taille de population qui tend vers une valeur d'équilibre, un comportement radicalement différente du modèle de Malthus où la taille de la population explose (question 2).

Exercice 2

Cet exercice propose de calculer les puissances successives de la matrice $A = \begin{pmatrix} -11 & -28 & 20 \\ -5 & -10 & 8 \\ -14 & -32 & 24 \end{pmatrix}$.

1. *Calculer le rang de la matrice* $P = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -4 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$ *et en déduire qu'elle est inversible.*

▶ Soit $P = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -4 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$. Pour calculer le rang de P, on utilise la méthode du pivot de Gauss.

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -4 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1\leftrightarrow L_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 4 & -4 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2\leftarrow L_2-3L_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -5 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{L_3\leftarrow L_3-2L_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -5 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2\leftarrow L_2-3L_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3\leftarrow L_3+2L_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

L'opération $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1$ permet d'obtenir un pivot égal à 1 sur la deuxième ligne sans avoir à diviser par -5 et se retrouver avec des calculs compliqués de fractions.

On obtient une matrice échelonnée dont le nombre de lignes non nulles est égal à 3. Ainsi $\boxed{\mathrm{Rg}(P) = 3}$ et $\boxed{P \text{ est inversible}}$ car c'est une matrice carré d'ordre 3.

2. *On cherche à calculer l'inverse de la matrice P. Pour cela, on va utiliser deux méthodes. Les deux questions suivantes sont donc indépendantes.*

(a) *Calculer P^{-1} à l'aide de la méthode du pivot de Gauss.*

▶ On commence par effectuer les mêmes opérations sur les lignes de la matrice identité I_3 que celles utilisées à la question précédente.

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1\leftrightarrow L_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2\leftarrow L_2-3L_1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{L_3\leftarrow L_3-2L_1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2\leftarrow L_2-3L_3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -3 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3\leftarrow L_3+2L_1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -3 \\ 2 & 4 & -5 \end{pmatrix}.$$

Inutile de refaire les calculs de la question précédente. Il ne faut surtout pas perdre du temps à faire ou écrire plusieurs fois la même chose.

Puis on continue de manipuler les lignes de la matrice échelonnée obtenue à la question précédente pour arriver à la matrice identité.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow -L_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 + L_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + 2L_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3.$$

Enfin on effectue les mêmes opérations sur les lignes de la matrice obtenue à partir de la matrice identité I_3 pour arriver à la matrice inverse P^{-1}.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -3 \\ 2 & 4 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow -L_3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -3 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 + L_3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + 2L_3} \begin{pmatrix} -4 & -7 & 10 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2} \boxed{\begin{pmatrix} -1 & -4 & 4 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix} = P^{-1}}.$$

(b) *Calculer P^2 et exprimer le résultat en fonction de P et I_3. En déduire P^{-1}.*

▶ On a

$$P^2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -4 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 4 & -4 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 & -8 \\ 2 & 5 & -4 \\ 4 & 8 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 & -8 \\ 2 & 6 & -4 \\ 4 & 8 & -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{2P - I_3}.$$

En particulier $I_3 = 2P - P^2 = P \times (2I_3 - P)$. On en déduit donc que

$$P^{-1} = 2I_3 - P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 4 & -4 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -1 & -4 & 4 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}}.$$

Vous devez bien sûr obtenir le même résultat aux questions 2.(a) et 2.(b). Ça vous permet aussi de vérifier vos calculs.

3. *Calculer $D = PAP^{-1}$.*

▶ On a

$$\begin{aligned} PAP^{-1} &= (P \times A) \times P^{-1} = \left(\begin{pmatrix} 3 & 4 & -4 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -11 & -28 & 20 \\ -5 & -10 & 8 \\ -14 & -32 & 24 \end{pmatrix} \right) \times \begin{pmatrix} -1 & -4 & 4 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 4 & -4 \\ 2 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & -4 & 4 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = D}. \end{aligned}$$

Par associativité du produit matriciel, on aboutit au même résultat si on calcule PAP^{-1} avec l'ordre suivant : $P \times (A \times P^{-1})$.

4. Justifier que $A^n = P^{-1}D^nP$ puis exprimer la matrice A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}^\star$.

▶ Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. En multipliant l'égalité $D = PAP^{-1}$ à gauche par P^{-1} et à droite par P on obtient $P^{-1}DP = P^{-1}PAP^{-1}P = A$ car $P^{-1}P = I_3$. Par conséquent

$$\begin{aligned} A^n &= (P^{-1}DP)^n = \underbrace{(P^{-1}DP)(P^{-1}DP)(P^{-1}DP)\dots(P^{-1}DP)}_{n \text{ fois}} \\ &= P^{-1}D\underbrace{PP^{-1}}_{=I_3}D\underbrace{PP^{-1}}_{=I_3}D\underbrace{PP^{-1}}_{=I_3}\dots\underbrace{PP^{-1}}_{=I_3}DP = P^{-1}D^nP \end{aligned}$$

On peut également démontrer ce résultat plus rigoureusement par récurrence.

puis

$$\begin{aligned} A^n &= P^{-1}D^nP = \left(P^{-1} \times D^n\right) \times P \\ &= \left(\begin{pmatrix} -1 & -4 & 4 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^n\right) \times \begin{pmatrix} 3 & 4 & -4 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix} \\ &= \left(\begin{pmatrix} -1 & -4 & 4 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \times \begin{pmatrix} 3 & 4 & -4 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{car } D \text{ est une matrice diagonale} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & -4 \times 2^n & 0 \\ -1 & -2^n & 0 \\ -2 & -4 \times 2^n & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 4 & -4 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix} \\ &= \boxed{\begin{pmatrix} -3 - 4 \times 2^n & -4 - 12 \times 2^n & 4 + 8 \times 2^n \\ -3 - 2^n & -4 - 3 \times 2^n & 4 + 2 \times 2^n \\ -6 - 4 \times 2^n & -8 - 12 \times 2^n & 8 + 8 \times 2^n \end{pmatrix}}. \end{aligned}$$

On peut vérifier ces résultats en prenant $n = 1$ pour retrouver l'expression de la matrice A. Par contre, la formule n'est pas valable pour $n = 0$ car $D^0 = I_3 \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (le coefficient 0^0 apparait dans les formules alors qu'il n'est pas défini).

Problème

Pour Noël, une classe d'élèves et leurs professeurs décide d'organiser un échange de cadeaux au hasard au cours duquel chaque personne reçoit un cadeau d'une autre personne. Pour ce faire, tous les noms sont placés dans un chapeau et chaque personne tire au hasard le nom de la personne à qui elle offrira son cadeau. Si une personne tire son propre nom, elle en tire un autre puis remet son nom dans le chapeau. On propose d'étudier le nombre de façons possibles d'attribuer tous les cadeaux.

1. On désigne par $n \geqslant 2$ le nombre total de personnes et par a_n le nombre de façons possibles d'attribuer les n cadeaux sans que quelqu'un reçoive son propre cadeau. Le but de cette question est de déterminer une relation de récurrence vérifiée par a_n.

(a) Déterminer a_2 et a_3.

▶ S'il n'y a que deux personnes, appelées x et y, alors il n'y a que $\boxed{a_2 = 1}$ façon d'attribuer les deux cadeaux : x reçoit le cadeau de y et y reçoit le cadeau de x. Par contre, s'il y a trois personnes, appelées x, y et z, alors il y a $\boxed{a_3 = 2}$ façons d'attribuer les trois cadeaux :

— x reçoit le cadeau de y qui reçoit le cadeau de z qui reçoit le cadeau de x ;

— ou bien x reçoit le cadeau de z qui reçoit le cadeau de y qui reçoit le cadeau de x.

(b) On fixe $n \geqslant 4$. Soit x le professeur de mathématiques. On désigne par y la personne qui reçoit le cadeau de x et par z la personne qui reçoit le cadeau de y. On exprimera les réponses aux trois questions suivantes en fonction de n, a_{n-1} et a_{n-2}.

i. *Combien y a-t-il de choix possibles pour y ?*

▶ x ne peut pas recevoir de cadeau de lui-même, mais toutes les autres personnes peuvent recevoir le cadeau de x. Il y a donc $\boxed{n-1}$ choix possibles pour y.

ii. *Si $z = x$, combien y a-t-il de façons possibles d'attribuer les n cadeaux ?*

▶ Si $z = x$, l'attribution des n cadeaux revient à choisir la personne y qui échange son cadeau avec celui de x, puis à choisir une attribution de $n-2$ cadeaux parmi les personnes restantes. Il y a donc $\boxed{(n-1) \times a_{n-2}}$ façons possibles d'attribuer les n cadeaux.

iii. *Si $z \neq x$, combien y a-t-il de façons possibles d'attribuer les n cadeaux ? (Indication : on pourra étudier le cas où y se désiste et x donne directement son cadeau à z.)*

▶ Si $z \neq x$, l'attribution des n cadeaux se déroule comme si y était absent et que x donnait directement son cadeau à z. L'attribution des n cadeaux revient donc à choisir la personne y absente, puis à choisir une attribution de $n-1$ cadeaux parmi les personnes restantes. Il y a donc $\boxed{(n-1) \times a_{n-1}}$ façons possibles d'attribuer les n cadeaux.

(c) *En déduire que $\boxed{a_n = (n-1)(a_{n-1} + a_{n-2})}$ pour tout $n \geqslant 4$.*

▶ Les deux cas précédents sont disjoints et couvrent tous les cas possibles d'attribution des n cadeaux. On en déduit que : $a_n = (n-1) \times a_{n-2} + (n-1) \times a_{n-1} = \boxed{(n-1)(a_{n-1} + a_{n-2})}$.

(d) *Déterminer a_4 et a_5 à l'aide du résultat précédent.*

▶ A l'aide du résultat précédent et de la question 1.(a) on obtient :
— $a_4 = (4-1)(a_3 + a_2) = 3 \times (2+1) = \boxed{9}$;
— $a_5 = (5-1)(a_4 + a_3) = 4 \times (9+2) = \boxed{44}$.

2. *Le but de cette question est de déterminer une expression de a_n en fonction de n. On désigne par b_n le nombre de façons possibles d'attribuer les n cadeaux sans se soucier que quelqu'un reçoive son propre cadeau (on ne change rien si une personne tire son propre nom du chapeau).*

(a) *Déterminer b_n en fonction de n.*

▶ Une attribution des n cadeaux sans se soucier que quelqu'un reçoive son propre cadeau revient à choisir une permutation des n cadeaux. Il y a donc $\boxed{b_n = n!}$ façons possibles d'attribuer les n cadeaux.

Dit autrement : b_n correspond au nombres d'applications bijectives de l'ensemble des personnes vers l'ensemble des cadeaux. Puisque ces deux ensembles ont pour cardinal n, on retrouve le nombre de bijections de $\{1, 2, \ldots, n\}$, c'est-à-dire le nombre de permutations de n éléments. Notez que a_n correspond au nombre de bijections $\varphi : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ telles que $\forall k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $\varphi(k) \neq k$. Ces permutations particulières sont appelées «dérangements» de n éléments.

(b) *En désignant par j le nombre de personnes qui reçoivent bien le cadeau d'une autre personne, justifier que $\forall n \geqslant 2,\ b_n = 1 + \sum_{j=2}^{n} \binom{n}{j} a_j$.*

▶ On désigne par $j \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ le nombre de personnes qui reçoivent bien le cadeau d'une autre personne. Si $j = 0$, alors toutes les personnes reçoivent leur propre cadeau (il n'y a pas d'échange de cadeaux) et il n'y a qu'une seule façon d'attribuer les n cadeaux. Le cas $j = 1$ n'est pas possible car cela signifie qu'une seule personne échange son cadeau pendant que les $n-1$ autres personnes reçoivent leur propre cadeau, ce qui est absurde. Si $j \in \{2, 3, \ldots, n\}$, alors il y a $\binom{n}{j}$ façons de choisir le groupe de j personnes qui s'échangent des cadeaux et a_j façons d'attribuer les j cadeaux dans ce groupe, toutes les personnes restantes reçoivent leur propre cadeau (elles ne font pas d'échange). En sommant ces trois cas disjointes ($j = 0$, $j = 1$ et $j \in \{2, 3, \ldots, n\}$), on obtient le nombre b_n de façons possibles d'attribuer les n cadeaux, c'est-à-dire : $\boxed{b_n = 1 + \sum_{j=2}^{n} \binom{n}{j} a_j}$ pour tout $n \geqslant 2$.

(c) *On fixe $n \geqslant 2$. On cherche à «inverser» la formule précédente, c'est-à-dire à exprimer a_n à l'aide d'une somme de termes contenant les nombres b_i pour $i \in \{2, 3, \ldots, n\}$.*

i. Montrer que $\sum_{i=2}^{n}\binom{n}{i}(-1)^{n-i} = -n(-1)^{n-1} - (-1)^n$.

▶ On a d'après la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned}\sum_{i=2}^{n}\binom{n}{i}(-1)^{n-i} &= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}1^i(-1)^{n-i} - \binom{n}{0}(-1)^{n-0} - \binom{n}{1}(-1)^{n-1}\\ &= \Big(1-1\Big)^n - (-1)^n - n(-1)^{n-1}\\ &= \boxed{-n(-1)^{n-1} - (-1)^n \quad \text{car } (1-1)^n = 0^n = 0.}\end{aligned}$$

A chaque fois que vous voyez une somme avec des coefficients binomiaux et des puissances dont l'exposant dépend de l'indice de la somme, il faut toujours essayer de faire apparaitre un binôme de Newton pour simplifier les expressions.

ii. Montrer que $\forall (i,j) \in \{2,3,\ldots,n\}^2,\ \binom{n}{i}\binom{i}{j} = \binom{n}{j}\binom{n-j}{n-i}$.

▶ Soit $(i,j) \in \{2,3,\ldots,n\}^2$. On a par définition des coefficients binomiaux :

$$\begin{aligned}\binom{n}{i}\binom{i}{j} &= \frac{n!}{i!(n-i)!} \times \frac{i!}{j!(i-j)!}\\ &= \frac{n!}{(n-i)!j!(i-j)!} = \frac{n!}{j!(n-i)!(i-j)!}\\ &= \frac{n!}{j!(n-j)!} \times \frac{(n-j)!}{(n-i)!\,((n-j)-(n-i))!} = \boxed{\binom{n}{j}\binom{n-j}{n-i}}.\end{aligned}$$

iii. En déduire que $\forall j \in \{2,3,\ldots,n\},\ \sum_{i=j}^{n}\binom{n}{i}\binom{i}{j}(-1)^{n-i} = \begin{cases} 1 & si\ j=n \\ 0 & si\ j<n \end{cases}$.

▶ Soit $j \in \{2,3,\ldots,n\}$. Si $j=n$ alors

$$\sum_{i=j}^{n}\binom{n}{i}\binom{i}{j}(-1)^{n-i} = \sum_{i=n}^{n}\binom{n}{i}\binom{i}{n}(-1)^{n-i} = \binom{n}{n}\binom{n}{n}(-1)^{n-n} = 1.$$

Si $j<n$ alors on obtient en utilisant la question précédente :

$$\sum_{i=j}^{n}\binom{n}{i}\binom{i}{j}(-1)^{n-i} = \sum_{i=j}^{n}\binom{n}{j}\binom{n-j}{n-i}(-1)^{n-i} = \binom{n}{j}\sum_{i=j}^{n}\binom{n-j}{n-i}(-1)^{n-i}$$

puis on fait le changement d'indice $k = n-i \in \{0,1,\ldots,n-j\}$ lorsque $i \in \{j,\ldots,n\}$:

$$= \binom{n}{j}\sum_{k=0}^{n-j}\binom{n-j}{k}(-1)^k = \binom{n}{j}\sum_{k=0}^{n-j}\binom{n-j}{k}(-1)^k 1^{n-j-k}$$

enfin on reconnait un binôme de Newton :

$$= \binom{n}{j}\Big(-1+1\Big)^{n-j} = 0.$$

Finalement, on a bien $\boxed{\sum_{i=j}^{n}\binom{n}{i}\binom{i}{j}(-1)^{n-i} = \begin{cases} 1 & \text{si } j=n \\ 0 & \text{si } j<n \end{cases}}$.

Attention de bien distinguer le cas où $j=n$ comme c'est précisé dans l'énoncé. Si $j=n$, la formule du binôme de Newton fait apparaître l'expression 0^0 qui n'est pas définie.

iv. En déduire que $\sum_{i=2}^n \binom{n}{i}(-1)^{n-i}\sum_{j=2}^i \binom{i}{j}a_j = a_n$.

▶ On a :
$$\sum_{i=2}^n \binom{n}{i}(-1)^{n-i}\sum_{j=2}^i \binom{i}{j}a_j = \sum_{i=2}^n\sum_{j=2}^i \binom{n}{i}\binom{i}{j}(-1)^{n-i}a_j$$

ce qui donne en passant d'une somme sur les lignes à une somme sur les colonnes (puisque les indices i et j vérifient $2 \leqslant j \leqslant i \leqslant n$) :

$$= \sum_{j=2}^n\sum_{i=j}^n \binom{n}{i}\binom{i}{j}(-1)^{n-i}a_j = \sum_{j=2}^n\left(\sum_{i=j}^n \binom{n}{i}\binom{i}{j}(-1)^{n-i}\right)a_j.$$

D'où $\boxed{\sum_{i=2}^n \binom{n}{i}(-1)^{n-i}\sum_{j=2}^i \binom{i}{j}a_j = a_n}$ d'après le résultat de la question précédente.

v. Conclure que $a_n = n(-1)^{n-1} + (-1)^n + \sum_{i=2}^n \binom{n}{i}(-1)^{n-i}b_i$.

▶ D'après les résultats des questions précédentes, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=2}^n \binom{n}{i}(-1)^{n-i}b_i &= \sum_{i=2}^n \binom{n}{i}(-1)^{n-i}\left(1+\sum_{j=2}^i \binom{i}{j}a_j\right)\\
&= \sum_{i=2}^n \binom{n}{i}(-1)^{n-i} + \sum_{i=2}^n \binom{n}{i}(-1)^{n-i}\sum_{j=2}^i \binom{i}{j}a_j\\
&= -n(-1)^{n-1} - (-1)^n + a_n.
\end{aligned}$$

Par conséquent $\boxed{a_n = n(-1)^{n-1} + (-1)^n + \sum_{i=2}^n \binom{n}{i}(-1)^{n-i}b_i}$.

(d) A l'aide du résultat de la question 2.(a), prouver que $\boxed{a_n = n!\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}}$ pour tout $n \geqslant 2$.

▶ D'après le résultat de la question 2.(a), on peut remplacer b_i par $i!$ dans l'égalité précédente, ce qui donne :

$$\begin{aligned}
a_n &= n(-1)^{n-1} + (-1)^n + \sum_{i=2}^n \binom{n}{i}(-1)^{n-i}b_i\\
&= n!\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} + n!\frac{(-1)^n}{n!} + \sum_{i=2}^n \frac{n!}{i!(n-i)!}(-1)^{n-i}i!\\
&= n!\left[\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{(-1)^n}{n!} + \sum_{i=2}^n \frac{(-1)^{n-i}}{(n-i)!}\right]\\
&= n!\left[\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{(-1)^n}{n!} + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(-1)^k}{k!}\right] \quad \text{avec } k = n-i\\
&= \boxed{n!\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}}.
\end{aligned}$$

(e) Montrer que cette expression de a_n vérifie bien la relation obtenue à la question 1.(c).

▶ On a :

$$\begin{aligned}
(n-1)(a_{n-1}+a_{n-2}) &= (n-1)\left((n-1)!\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k!} + (n-2)!\sum_{k=0}^{n-2}\frac{(-1)^k}{k!}\right)\\
&= (n-1)(n-2)!\left((n-1)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k!} + \sum_{k=0}^{n-2}\frac{(-1)^k}{k!}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (n-1)!\left(n\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k!}+\sum_{k=0}^{n-2}\frac{(-1)^k}{k!}-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k!}\right)\\
&= (n-1)!\left(n\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k!}-\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\right)\\
&= (n-1)!n\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k!}-\frac{(-1)^{n-1}}{n(n-1)!}\right)\\
&= n!\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k!}+\frac{(-1)^n}{n!}\right)=n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}=\boxed{a_n}.
\end{aligned}$$

Donc l'expression de a_n obtenue à la question précédente vérifie bien la relation obtenue à la question 1.(c).

> *Ces manipulations de sommes sont assez techniques, il faut être soigneux, précis et rigoureux pour ne pas faire d'erreurs.*

3. *On désigne par $p_n=\frac{a_n}{b_n}=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$ la probabilité qu'une attribution des n cadeaux au hasard donne une répartition où chaque personne reçoit bien le cadeau d'une autre personne. Le but de cette question est d'étudier la nature de la suite $(p_n)_{n\geqslant 2}$.*

   (a) *Prouver que les suites extraites $(p_{2n})_{n\geqslant 1}$ et $(p_{2n+1})_{n\geqslant 1}$ sont adjacentes.*

   ▶ Soit $n\geqslant 1$. On a :

$$\begin{cases}
p_{2(n+1)}-p_{2n}=\sum_{k=0}^{2n+2}\frac{(-1)^k}{k!}-\sum_{k=0}^{2n}\frac{(-1)^k}{k!}=\frac{(-1)^{2n+2}}{(2n+2)!}+\frac{(-1)^{2n+1}}{(2n+1)!}=\frac{1-(2n+2)}{(2n+2)!}<0\\
p_{2(n+1)+1}-p_{2n+1}=\sum_{k=0}^{2n+3}\frac{(-1)^k}{k!}-\sum_{k=0}^{2n+1}\frac{(-1)^k}{k!}=\frac{(-1)^{2n+3}}{(2n+3)!}+\frac{(-1)^{2n+2}}{(2n+2)!}=\frac{-1+(2n+3)}{(2n+3)!}>0\\
p_{2n}-p_{2n+1}=\sum_{k=0}^{2n}\frac{(-1)^k}{k!}-\sum_{k=0}^{2n+1}\frac{(-1)^k}{k!}=-\frac{(-1)^{2n+1}}{(2n+1)!}=\frac{1}{(2n+1)!}
\end{cases}$$

   donc $(p_{2n})_{n\geqslant 1}$ est décroissante, $(p_{2n+1})_{n\geqslant 1}$ est croissante et $\lim_{n\to+\infty}p_{2n}-p_{2n+1}=0$. Par conséquent, $\boxed{(p_{2n})_{n\geqslant 1} \text{ et } (p_{2n+1})_{n\geqslant 1} \text{ sont adjacentes}}$.

   (b) *En déduire que $(p_n)_{n\geqslant 2}$ converge vers une limite $\ell\in]\frac{1}{3},\frac{1}{2}[$.*

   ▶ D'après le théorème des suites adjacentes, $(p_{2n})_{n\geqslant 1}$ et $(p_{2n+1})_{n\geqslant 1}$ convergent vers une même limite $\ell\in\mathbb{R}$. Et d'après le théorème des suites extraites, $(p_n)_{n\geqslant 2}$ converge aussi vers ℓ. De plus, puisque $(p_{2n})_{n\geqslant 1}$ est décroissante et $(p_{2n+1})_{n\geqslant 1}$ est croissante, on a

$$\frac{1}{3}=1-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=p_3<\ell<p_2=1-1+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

   c'est-à-dire $\boxed{\ell\in]\frac{1}{3},\frac{1}{2}[}$.

> *Les deux questions précédentes sont similaires à l'étude de la suite $\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k}\right)_{n\geqslant 1}$ qui était en question de cours dans le programme de khôlles sur les suites réelles.*

   On admet désormais que $\boxed{\ell=\frac{1}{e}}$ (pour les curieux : nous démontrerons ça... en 2015 !).

   (c) *On fixe $n=49$ (46 élèves et 3 professeurs) et on souhaite calculer une valeur approchée de p_{49}. Soit un entier N tel que $49!>10^N$. Montrer que ℓ est une valeur approchée de p_{49} à 10^{-N} près. Proposer une valeur pertinente de N et justifier votre choix.*

   ▶ On fixe $n=49$. Soit un entier N tel que $49!>10^N$. Puisque $(p_{2n})_{n\geqslant 1}$ est décroissante et $(p_{2n+1})_{n\geqslant 1}$ est croissante, on a

$$p_{49}<\ell<p_{50}=p_{48}=p_{49}-\frac{(-1)^{49}}{49!}=p_{49}+\frac{1}{49!}<p_{49}+10^{-N}.$$

D'où $\ell - 10^{-N} < p_{49} < \ell$ et par conséquent $\boxed{\ell \text{ est une valeur approchée de } p_{49} \text{ à } 10^{-N} \text{ près}}$. On cherche donc la plus grande valeur possible de N. Or il y a $49 - 10 + 1 = 40$ nombres plus grand ou égal à 10 dans l'ensemble des nombres $\{1, 2, \ldots, 49\}$, donc $49! > 10^{40}$ et $\boxed{N = 40}$ est une valeur pertinente de N qui prouve que la valeur de $\ell = \frac{1}{e}$ est une approximation de p_{49} avec une précision plus petite que 10^{-40} (précision largement suffisante).

Ainsi $p_{49} \approx \frac{1}{e} \approx 0.367879441$. En fait, la valeur de $\ell = \frac{1}{e}$ est une approximation de p_{49} avec une précision de 10^{-62} car $49! \approx 6 \times 10^{62}$.

DS n$^{\text{o}}$ 5 de mathématiques

durée : 3 heures

Exercice 1

Factoriser le polynôme $P = X^6 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 2

L'espace est muni d'un repère orthonormé. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des points $M(x, y, z)$ dont les coordonnées vérifient la relation suivante :

$$\mathcal{P}_n : (x + y + z + 1) + n(x - 5y + 4z - 2) = 0.$$

On note également $\mathcal{P}_\infty$ l'ensemble des points $M(x, y, z)$ dont les coordonnées sont de la forme :

$$\mathcal{P}_\infty : \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 1 + s - t \\ y & = & -1 + s + 3t \\ z & = & -1 + s + 4t \end{array} \right. , (s, t) \in \mathbb{R}^2.$$

1. Quelle est la nature géométrique des ensembles $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_\infty$?
2. Déterminer une représentation cartésienne de l'ensemble $\mathcal{P}_\infty$.
3. Montrer que $\mathcal{D} = \mathcal{P}_0 \cap \mathcal{P}_\infty$ est une droite dont on déterminera une représentation paramétrique.
4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{D} \subset \mathcal{P}_n$.
5. En déduire l'intersection de $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
6. Calculer la distance d_n du point $A(1, 2, 3)$ à $\mathcal{P}_n$ en fonction du paramètre $n \in \mathbb{N}$.
7. Etudier la convergence de la suite $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
8. Calculer la distance d_∞ du point $A(1, 2, 3)$ à $\mathcal{P}_\infty$.

Exercice 3

Le but de cet exercice est de déterminer le sous-ensemble $\mathcal{E} \subset \mathbb{C}[X]$ des polynômes factorisables par leur dérivée. Plus précisément, un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ appartient à $\mathcal{E}$ si et seulement s'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P = Q \times P'$.

1. Montrer que $\mathbb{C}_0[X] \cap \mathcal{E} = \{0\}$.
2. Soient $\lambda \in \mathbb{C}^\star$, $\alpha \in \mathbb{C}$ et $n \geqslant 1$. Montrer que le polynôme $\lambda(X - \alpha)^n$ appartient à $\mathcal{E}$.
3. Soit $P \in \mathcal{E}$ tel que $\deg(P) \geqslant 1$. Pour alléger les notations, on pose $n = \deg(P)$.
   (a) On note Q le polynôme de $\mathbb{C}[X]$ tel que $P = Q \times P'$. Déterminer le degré de Q.
   (b) Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ (sans chercher à le calculer) tel que $P = \frac{1}{n}(X - \alpha) \times P'$.
   (c) Montrer par récurrence que $\forall k \in \{0, 1, 2, \ldots, n - 1\},\ P^{(k)} = \frac{1}{n-k}(X - \alpha) \times P^{(k+1)}$.
   (d) En déduire les valeurs de $P(\alpha)$, $P'(\alpha)$, $P''(\alpha)$, ..., $P^{(n-1)}(\alpha)$. Que peut-on dire de α ?
   (e) Déterminer l'ensemble des racines de P ainsi que l'ordre de multiplicité de chaque racine.
   (f) En déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}^\star$ tel que $P = \lambda(X - \alpha)^n$.
4. Conclure en donnant les éléments de l'ensemble $\mathcal{E}$.

Exercice 4

Le but de cet exercice est de (re)démontrer que les médianes, les médiatrices ou les hauteurs d'un triangle du plan sont concourantes, et surtout de prouver que si ces trois points de concours ne sont pas confondus alors ils sont alignés (la droite ainsi définie est appelée droite d'Euler). On propose deux démonstrations différentes, les deux parties de l'exercice sont donc indépendantes.

Soit ABC un triangle du plan. On désigne par I le milieu de $[BC]$, par J le milieu de $[AC]$ et par K le milieu de $[AB]$.

Première méthode : calcul vectoriel

1. Justifier que $G = \mathrm{Bar}\left((A,1),(B,1),(C,1)\right)$ appartient à chaque médiane de ABC.
2. Soit Ω le point d'intersection de la médiatrice de $[AB]$ et de la médiatrice de $[AC]$.
   (a) Montrer que $\overrightarrow{\Omega A}.\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2}AB^2$ et prouver une expression similaire pour $\overrightarrow{\Omega A}.\overrightarrow{AC}$.
   (b) Rappeler que $AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}$.
   (c) En déduire que $\overrightarrow{\Omega I}.\overrightarrow{BC} = 0$ et justifier que Ω appartient à la médiatrice de $[BC]$.
3. Soit H le point défini par $H = \Omega + \overrightarrow{u}$ où $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{\Omega A} + \overrightarrow{\Omega B} + \overrightarrow{\Omega C}$.
   (a) Montrer que $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{\Omega I}$.
   (b) En déduire que $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC}$ et justifier que H appartient à la hauteur issue de A.
   (c) Prouver des résultats similaires pour les hauteurs issues de B et C.
4. En utilisant les définitions de G et H ci-dessus, montrer que $\overrightarrow{\Omega H} = 3\overrightarrow{\Omega G}$.
5. Conclure en distinguant les cas où au moins deux des trois points G, Ω et H sont confondus.

Deuxième méthode : coordonnées cartésiennes

On munit le plan d'un repère orthonormé dont l'origine est placée en $A(0,0)$. On désigne les coordonnées de B et C par $B(x_B, y_B)$ et $C(x_C, y_C)$.

0. Déterminer les coordonnées de I, J et K.
1. (a) Déterminer les coordonnées de $G = \mathrm{Bar}\left((A,1),(B,1),(C,1)\right)$.
   (b) Montrer $\overrightarrow{AG}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AI}$ et justifier que G appartient à la médiane issue de A.
   (c) Prouver des résultats similaires pour les médianes issues de B et C.
2. Soit $\Omega(x_\Omega, y_\Omega)$ le point d'intersection de la médiatrice de $[AB]$ et de la médiatrice de $[AC]$.
   (a) Déterminer des représentations cartésiennes des médiatrices de $[AB]$ et $[AC]$.
   (b) Montrer que les coordonnées de Ω vérifient l'équation
   $$M\begin{pmatrix} x_\Omega \\ y_\Omega \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_B^2 + y_B^2 \\ x_C^2 + y_C^2 \end{pmatrix}$$
   où M est une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qu'on déterminera.
   (c) En utilisant que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, montrer que $M \in \mathcal{G}\ell_2(\mathbb{R})$.
   (d) En déduire les coordonnées de Ω.
   (e) Montrer que $\overrightarrow{I\Omega}.\overrightarrow{BC} = 0$ et justifier que Ω appartient à la médiatrice de $[BC]$.
3. Soit $H(x_H, y_H)$ le point d'intersection de la hauteur issue de C et de la hauteur issue B.
   (a) Déterminer des représentations cartésiennes des hauteurs issues de C et B.
   (b) Montrer que les coordonnées de H vérifient l'équation
   $$M\begin{pmatrix} x_H \\ y_H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_B x_C + y_B y_C \\ x_B x_C + y_B y_C \end{pmatrix}.$$
   (c) En déduire les coordonnées de H.
   (d) Montrer que $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0$ et justifier que H appartient à la hauteur issue de A.
4. Montrer que $\overrightarrow{GH}$ et $\overrightarrow{G\Omega}$ sont colinéaires.
5. Conclure en distinguant les cas où au moins deux des trois points G, Ω et H sont confondus.

Corrigé du DS n° 5 de mathématiques

Exercice 1

Factoriser le polynôme $P = X^6 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$.

► Soit $P = X^6+1$. On commence par factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$. D'après le théorème de d'Alembert-Gauss, $P = \prod_{i=1}^{6}(X-\alpha_i)$ où $(\alpha_i)_{i\in\{1,\dots,6\}}$ sont les six racines complexes de P (non nécessairement distinctes). Ces racines sont les solutions de l'équation $P(z) = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$. Puisque $P(0) = 1 \neq 0$, on a $z \neq 0$ et on peut écrire $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$. Donc :

N'oubliez pas de justifier que $z \neq 0$ avant de l'écrire sous forme exponentielle.

$$\begin{aligned}
P(z) = 0 \ &\Leftrightarrow\ z^6 + 1 = 0\\
&\Leftrightarrow\ z^6 = -1\\
&\Leftrightarrow\ (re^{i\theta})^6 = -1\\
&\Leftrightarrow\ r^6 e^{6i\theta} = e^{i\pi}\\
&\Leftrightarrow\ \left\{\begin{array}{lcll} r^6 & = & 1 & \\ 6\theta & \equiv & \pi & [2\pi] \end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow\ \left\{\begin{array}{lcll} r & = & 1 & (\text{car } r > 0) \\ \theta & \equiv & \frac{\pi}{6} & \left[\frac{2\pi}{6}\right] \end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow\ \left\{\begin{array}{lcl} r & = & 1 \\ \theta & \in & \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{9\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\} \end{array}\right. \quad (\text{car } \theta \in [0, 2\pi[)\\
&\Leftrightarrow\ \left\{\begin{array}{lcl} r & = & 1 \\ \theta & \in & \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}\right\} \end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow\ z \in \left\{e^{i\pi/6}, e^{i\pi/2}, e^{5i\pi/6}, e^{7i\pi/6}, e^{3i\pi/2}, e^{11i\pi/6}\right\}\\
&\Leftrightarrow\ z \in \left\{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, i, -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i, -i, \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right\}.
\end{aligned}$$

Par conséquent la factorisation de P dans $\mathbb{C}[X]$ est :

$$P = \left(X - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)(X - i)\left(X + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)\left(X + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)(X + i)\left(X - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right).$$

Ensuite on regroupe les monômes par paires de racines complexes conjuguées, ce qui donne la factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$:

$$\begin{aligned}
P &= \left[\left(X - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)\left(X - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)\right]\left[(X-i)(X+i)\right]\left[\left(X + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)\left(X + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)\right]\\
&= \boxed{\left(X^2 - \sqrt{3}X + 1\right)(X^2+1)\left(X^2 + \sqrt{3}X + 1\right)}.
\end{aligned}$$

Pour développer chacun des trois crochets sans perdre de temps, il faut utiliser la formule $(X-\alpha)(X-\overline{\alpha}) = X^2 - 2\mathrm{Re}(\alpha)X + |\alpha|^2$. Ici chaque racine est de module 1 et leurs parties réelles sont égales à $\sqrt{3}$, 0, $-\sqrt{3}$.

Exercice 2

L'espace est muni d'un repère orthonormé. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des points $M(x,y,z)$ dont les coordonnées vérifient la relation suivante :

$$\mathcal{P}_n : (x+y+z+1) + n(x-5y+4z-2) = 0.$$

On note également $\mathcal{P}_\infty$ l'ensemble des points $M(x,y,z)$ dont les coordonnées sont de la forme :

$$\mathcal{P}_\infty : \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & 1+s-t \\ y & = & -1+s+3t \\ z & = & -1+s+4t \end{array} \right., (s,t) \in \mathbb{R}^2.$$

1. *Quelle est la nature géométrique des ensembles $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_\infty$?*

▶ La relation vérifiée par les coordonnées des points de $\mathcal{P}_n$ peut aussi s'écrire :

$$\mathcal{P}_n : (1+n)x + (1-5n)y + (1+4n)z + (1-2n) = 0.$$

En particulier si $y = z = 0$ alors $x = -\frac{1-2n}{1+n}$ ($1+n \neq 0$ car $n \in \mathbb{N}$). De plus le vecteur $\overrightarrow{N_n} = \begin{pmatrix} 1+n \\ 1-5n \\ 1+4n \end{pmatrix}$ est non nul (car $1+n \neq 0$). On en déduit que $\boxed{\mathcal{P}_n \text{ est le plan passant par le point de coordonnées } \left(-\frac{1-2n}{1+n}, 0, 0\right) \text{ et de vecteur normal } \overrightarrow{N_n}}$.

N'oubliez pas de préciser que le vecteur normal $\overrightarrow{N_n}$ est non nul pour justifier que $\mathcal{P}_n$ est un plan. Si $\overrightarrow{N_n}$ était le vecteur nul alors $\mathcal{P}_n$ serait soit l'ensemble vide (si $1-2n \neq 0$) soit l'espace tout entier (si $1-2n = 0$, ce qui est absurde ici car $n \in \mathbb{N}$).

Pour $\mathcal{P}_\infty$, les vecteurs $\overrightarrow{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires (car $\overrightarrow{u_2} \neq \overrightarrow{0}$ et il n'existe pas $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{u_1} = \lambda \overrightarrow{u_2}$). On reconnait donc la représentation paramétrique d'un $\boxed{\text{plan passant par le point de coordonnées } (1,-1,-1) \text{ et de vecteurs directeurs } \overrightarrow{u_1} \text{ et } \overrightarrow{u_2}}$.

N'oubliez pas de préciser que les vecteurs directeurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ ne sont pas colinéaires pour justifier que $\mathcal{P}_\infty$ est un plan. Si $\overrightarrow{u_1}$ était colinéaire à $\overrightarrow{u_2}$ alors $\mathcal{P}_\infty$ serait soit une droite (si $\overrightarrow{u_1} \neq \overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{u_2} \neq \overrightarrow{0}$) soit un point (si $\overrightarrow{u_1} = \overrightarrow{u_2} = \overrightarrow{0}$).

2. *Déterminer une représentation cartésienne de l'ensemble $\mathcal{P}_\infty$.*

▶ En utilisant les deux premières équations de la représentation paramétrique de $\mathcal{P}_\infty$, on a :

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & 1+s-t \\ y & = & -1+s+3t \end{array} \right. & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} s-t & = & x-1 \\ s+3t & = & y+1 \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} s-t & = & x-1 \\ 4t & = & -x+y+2 \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} s & = & t+x-1 = \frac{-x+y+2}{4} + x - 1 = \frac{3x+y-2}{4} \\ t & = & \frac{-x+y+2}{4} \end{array} \right. . \end{aligned}$$

On utilise ensuite ces expressions des paramètres dans la troisième équation de la représentation paramétrique de $\mathcal{P}_\infty$ pour obtenir une représentation cartésienne :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_\infty : \quad & z = -1 + \left(\frac{3x+y-2}{4}\right) + 4\left(\frac{-x+y+2}{4}\right) \\ \Leftrightarrow \quad & 4z + 4 - (3x+y-2) - (-4x+4y+8) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \boxed{x - 5y + 4z - 2 = 0}. \end{aligned}$$

3. *Montrer que $\mathcal{D} = \mathcal{P}_0 \cap \mathcal{P}_\infty$ est une droite dont on déterminera une représentation paramétrique.*

▶ D'après le résultat précédent, $\overrightarrow{N_\infty} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}_\infty$. Puisque $\overrightarrow{N_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{N_\infty}$ ne sont pas colinéaires (car $\overrightarrow{N_\infty} \neq \overrightarrow{0}$ et il n'existe pas $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{N_0} = \lambda \overrightarrow{N_\infty}$), on en déduit que $\boxed{\text{les plans } \mathcal{P}_0 \text{ et } \mathcal{P}_\infty \text{ se coupent selon une droite}}$ de représentation cartésienne :

$$\mathcal{D} = \mathcal{P}_0 \cap \mathcal{P}_\infty : \left\{ \begin{array}{rcl} x+y+z+1 & = & 0 \\ x-5y+4z-2 & = & 0 \end{array} \right. .$$

Pour $z = 0$ et $z = 1$, on obtient les systèmes linéaires suivants :

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{rcl} x+y+1 & = & 0 \\ x-5y-2 & = & 0 \end{array} \right. & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x+y & = & -1 \\ x-5y & = & 2 \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x+y & = & -1 \\ -6y & = & 3 \qquad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -y-1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} \\ y & = & -\frac{1}{2} \end{array} \right. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{rcl} x+y+1+1 & = & 0 \\ x-5y+4-2 & = & 0 \end{array} \right. & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x+y & = & -2 \\ x-5y & = & -2 \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x+y & = & -2 \\ -6y & = & 0 \qquad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -y-2 = -2 \\ y & = & 0 \end{array} \right. . \end{aligned}$$

Ainsi les points de coordonnées $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$ et $(-2, 0, 1)$ appartiennent à la droite $\mathcal{D}$ et le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} -2 - \left(-\frac{1}{2}\right) \\ 0 - \left(-\frac{1}{2}\right) \\ 1 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$. On en déduit une représentation paramétrique :

$$\boxed{\mathcal{D} : \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}t \\ y & = & -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}t \\ z & = & t \end{array} \right.}.$$

On peut également poser le paramètre $z = t$ puis remplacer cette expression de z dans les deux équations cartésiennes de $\mathcal{D}$ pour obtenir un système linéaire de deux équations dont la résolution donne les expressions de x et y en fonction du paramètre t. Les deux méthodes sont équivalentes.

4. *Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{D} \subset \mathcal{P}_n$.*

▶ Soient $n \in \mathbb{N}$ et $M(x, y, z)$ un point appartenant à $\mathcal{D} = \mathcal{P}_0 \cap \mathcal{P}_\infty$. Puisque $M \in \mathcal{P}_0$ et $M \in \mathcal{P}_\infty$, les coordonnées de M vérifient les relations suivantes :

$$x + y + z - 1 = 0 \quad \text{et} \quad x - 5y + 4z - 2 = 0.$$

En particulier $(x + y + z - 1) + n(x - 5y + 4z - 2) = 0 + n \times 0 = 0$ et donc $M \in \mathcal{P}_n$. Ceci étant vrai pour tout $M \in \mathcal{D}$, on a démontré que $\boxed{\mathcal{D} \subset \mathcal{P}_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}}$.

Attention de ne pas tomber dans le piège de cette question : utiliser la représentation paramétrique de $\mathcal{D}$ obtenue à la question précédente va aboutir au même résultat mais les calculs seront beaucoup plus longs. Ici le résultat est immédiat à l'aide des représentations cartésiennes de $\mathcal{P}_0$ et $\mathcal{P}_\infty$.

5. *En déduire l'intersection de $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

▶ Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{N_n} = \lambda \overrightarrow{N_\infty}$. On a :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{N_n} = \lambda \overrightarrow{N_\infty} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1+n \\ 1-5n \\ 1+4n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 1+n &=& \lambda \\ 1-5n &=& -5\lambda \\ 1+4n &=& 4\lambda \end{array} \right. \\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcll} 1+n &=& \lambda & \\ 6 &=& 0 & L_2 \leftarrow L_2 + 5L_1 \\ -3 &=& 0 & L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1 \end{array} \right.
\end{aligned}$$

donc $\overrightarrow{N_n}$ et $\overrightarrow{N_\infty}$ ne sont pas colinéaires (car $\overrightarrow{N_\infty} \neq \overrightarrow{0}$). On en déduit que les plans $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_\infty$ se coupent selon une droite. Or $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}_n$ (d'après le résultat de la question précédente) et $\mathcal{D} = \mathcal{P}_0 \cap \mathcal{P}_\infty \subset \mathcal{P}_\infty$. Par conséquent, $\boxed{\mathcal{P}_n \cap \mathcal{P}_\infty = \mathcal{D}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

> *N'oubliez pas de justifier que les vecteurs normaux $\overrightarrow{N_n}$ et $\overrightarrow{N_\infty}$ ne sont pas colinéaires. En fait, c'est le point le plus difficile de cette question facile.*

6. *Calculer la distance d_n du point $A(1,2,3)$ à $\mathcal{P}_n$ en fonction du paramètre $n \in \mathbb{N}$.*

▶ Soit $n \in \mathbb{N}$. La distance de $A(1,2,3)$ à $\mathcal{P}_n : (1+n)x + (1-5n)y + (1+4n)z + (1-2n) = 0$ est donnée par :

$$\begin{aligned}
d_n &= \frac{|(1+n)\times 1 + (1-5n)\times 2 + (1+4n)\times 3 + (1-2n)|}{\sqrt{(1+n)^2 + (1-5n)^2 + (1+4n)^2}} \\
&= \frac{|1+n+2-10n+3+12n+1-2n|}{\sqrt{(1+2n+n^2) + (1-10n+25n^2) + (1+8n+16n^2)}} \\
&= \frac{|n+7|}{\sqrt{42n^2+3}} = \boxed{\frac{n+7}{\sqrt{42n^2+3}}} \quad (\text{car } n \in \mathbb{N}).
\end{aligned}$$

> *Inutile de démontrer la formule de la distance d'un point à un plan, ce n'est pas demandé par l'énoncé. Par contre, il faut penser à simplifier ses résultats.*

7. *Etudier la convergence de la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

▶ On a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$d_n = \frac{n+7}{\sqrt{42n^2+3}} \sim \frac{n}{\sqrt{42n^2}} = \frac{n}{n\sqrt{42}} = \frac{1}{\sqrt{42}}.$$

En particulier, la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et $\boxed{\lim_{n\to+\infty} d_n = \frac{1}{\sqrt{42}}}$.

8. *Calculer la distance d_∞ du point $A(1,2,3)$ à $\mathcal{P}_\infty$.*

▶ La distance de $A(1,2,3)$ à $\mathcal{P}_\infty : x - 5y + 4z - 2 = 0$ est donnée par :

$$d_\infty = \frac{|1\times 1 - 5\times 2 + 4\times 3 - 2|}{\sqrt{1^2 + (-5)^2 + 4^2}} = \frac{|1|}{\sqrt{1+25+16}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{42}}}.$$

Exercice 3

Le but de cet exercice est de déterminer le sous-ensemble $\mathcal{E} \subset \mathbb{C}[X]$ des polynômes factorisables par leur dérivée. Plus précisément, un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ appartient à $\mathcal{E}$ si et seulement s'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P = Q \times P'$.

1. *Montrer que $\mathbb{C}_0[X] \cap \mathcal{E} = \{0\}$.*

▶ Soit $P \in \mathbb{C}_0[X] \cap \mathcal{E}$. $P \in \mathbb{C}_0[X]$ signifie que $\deg(P) \leqslant 0$ c'est-à-dire que P est un polynôme constant. En particulier $P' = 0$. Puisque $P \in \mathcal{E}$, on a donc $P = Q \times P' = Q \times 0 = 0$. Ainsi $\mathbb{C}_0[X] \cap \mathcal{E} \subset \{0\}$. Soit maintenant $P \in \{0\}$, c'est-à-dire $P = 0$. On a $\deg(P) - \infty \leqslant 0$ donc $P \in \mathbb{C}_0[X]$. De plus, $P = Q \times P'$ pour n'importe quel polynôme $Q \in \mathbb{C}[X]$ car $P = P' = 0$, d'où $P \in \mathcal{E}$. Par conséquent $P \in \mathbb{C}_0[X] \cap \mathcal{E}$ et donc $\{0\} \subset \mathbb{C}_0[X] \cap \mathcal{E}$. On en déduit que $\boxed{\mathbb{C}_0[X] \cap \mathcal{E} = \{0\}}$ par double inclusion.

Cette question est très facile. Profitez-en pour montrer que vous êtes précis et rigoureux dans vos raisonnements. En particulier, n'oubliez de justifier l'inclusion réciproque

2. *Soient $\lambda \in \mathbb{C}^\star$, $\alpha \in \mathbb{C}$ et $n \geqslant 1$. Montrer que le polynôme $\lambda(X-\alpha)^n$ appartient à $\mathcal{E}$.*

▶ On pose $P = \lambda(X-\alpha)^n$. Puisque $n \geqslant 1$, on a :

$$P' = \lambda n (X-\alpha)^{n-1} \quad \text{et donc} \quad \frac{1}{n}(X-\alpha) \times P' = \frac{\lambda n}{n}(X-\alpha)(X-\alpha)^{n-1} = \lambda(X-\alpha)^n = P.$$

Ainsi $P = Q \times P'$ avec $Q = \frac{1}{n}(X-\alpha) \in \mathbb{C}[X]$, et par conséquent $\boxed{\text{le polynôme } P = \lambda(X-\alpha)^n \text{ appartient à } \mathcal{E}}$.

3. *Soit $P \in \mathcal{E}$ tel que $\deg(P) \geqslant 1$. Pour alléger les notations, on pose $n = \deg(P)$.*

(a) *On note Q le polynôme de $\mathbb{C}[X]$ tel que $P = Q \times P'$. Déterminer le degré de Q.*

▶ Soit $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P = Q \times P'$. Puisque $\deg(P) \geqslant 1$, on a $\deg(P') = \deg(P) - 1$ et donc :

$$\deg(P) = \det(Q \times P') = \deg(Q) + \deg(P') = \deg(Q) + \deg(P) - 1.$$

Par conséquent, $\boxed{\deg(Q) = \deg(P) - \deg(P) + 1 = 1}$.

(b) *Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ (sans chercher à le calculer) tel que $P = \frac{1}{n}(X-\alpha) \times P'$.*

▶ D'après le résultat précédent, Q est de la forme $Q = aX + b$ avec $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ et $a \neq 0$. De plus, P est de la forme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ et $a_n \neq 0$. En particulier, le coefficient dominant de P est a_n. Or $P' = \sum_{k=1}^{n} a_k k X^{k-1}$ donc le coefficient dominant de P' est $a_n n$ et le coefficient dominant de $Q \times P' = (aX+b) \times P'$ est $a \times a_n n$. En égalisant les coefficients dominants de $P = Q \times P'$, on obtient :

$$a_n = a \times a_n n \Leftrightarrow a = \frac{1}{n} \quad (\text{car } a_n \neq 0).$$

Donc Q est de la forme $Q = aX + b = \frac{1}{n}X + b = \frac{1}{n}(X - nb) = \frac{1}{n}(X-\alpha)$ avec $\boxed{\alpha = \frac{b}{n}}$. Par conséquent, il existe bien $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $P = Q \times P' = \frac{1}{n}(X-\alpha) \times P'$.

(c) *Montrer par récurrence que $\forall k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$, $P^{(k)} = \frac{1}{n-k}(X-\alpha) \times P^{(k+1)}$.*

▶ Montrons par récurrence que $\forall k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$, $P^{(k)} = \frac{1}{n-k}(X-\alpha) \times P^{(k+1)}$. D'après le résultat précédent on a :

$$P^{(0)} = P = \frac{1}{n}(X-\alpha) \times P' = \frac{1}{n-0}(X-\alpha) \times P^{(0+1)}$$

donc le résultat est vrai pour $k = 0$. On suppose le résultat vrai pour un $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-2\}$ fixé. On a alors :

$$\begin{aligned}
P^{(k+1)} &= \left(P^{(k)}\right)' \\
&= \left(\frac{1}{n-k}(X-\alpha) \times P^{(k+1)}\right)' \quad (\text{par hypothèse de récurrence}) \\
&= \frac{1}{n-k} 1 \times P^{(k+1)} + \frac{1}{n-k}(X-\alpha) \times \left(P^{(k+1)}\right)' \\
&= \frac{1}{n-k} P^{(k+1)} + \frac{1}{n-k}(X-\alpha) \times P^{(k+2)}.
\end{aligned}$$

Donc :

$$\frac{1}{n-k}(X-\alpha)\times P^{(k+2)} = P^{(k+1)} - \frac{1}{n-k}P^{(k+1)} = \left(1-\frac{1}{n-k}\right)P^{(k+1)} = \frac{n-k-1}{n-k}P^{(k+1)}$$

puis :

$$P^{(k+1)} = \frac{n-k}{n-k-1}\times\frac{1}{n-k}(X-\alpha)\times P^{(k+2)} = \frac{1}{n-(k+1)}(X-\alpha)\times P^{((k+1)+1)}.$$

Par conséquent, le résultat est héréditaire. On en déduit donc d'après le principe de récurrence que $\boxed{\text{l'égalité est vraie pour tout } k\in\{0,1,2,\dots,n-1\}}$.

Attention dans ce genre de récurrence sur un nombre fini d'entiers seulement, il faut prouver l'hérédité pour $k\in\{0,1,2,\dots,n-2\}$ mais pas pour $k=n-1$, sinon on démontrerait que l'égalité est vraie aussi au rang $k+1=(n-1)+1=n$ (ce qui est faux ici car $\frac{1}{n-k}$ n'est pas défini pour $k=n$).

(d) *En déduire les valeurs de $P(\alpha)$, $P'(\alpha)$, $P''(\alpha)$, …, $P^{(n-1)}(\alpha)$. Que peut-on dire de α ?*

▶ D'après le résultat précédent, on a pour tout $k\in\{0,1,2,\dots,n-1\}$:

$$P^{(k)}(\alpha) = \frac{1}{n-k}(\alpha-\alpha)\times P^{(k+1)}(\alpha) = 0\times P^{(k+1)}(\alpha) = 0$$

donc $\boxed{P(\alpha)=P'(\alpha)=P''(\alpha)=\cdots=P^{(n-1)}(\alpha)=0}$. On en déduit que $\boxed{\alpha \text{ est une racine de } P}$ $\boxed{\text{d'ordre de multiplicité au moins égal à } n}$.

Cette question comporte un piège !! On peut seulement dire pour l'instant que α est d'ordre AU MOINS n. Pour justifier que l'ordre de α est EXACTEMENT n, il faudrait en plus justifier que $P^{(n)}(\alpha)\neq 0$, ce qui n'est pas demandé.

(e) *Déterminer l'ensemble des racines de P ainsi que l'ordre de multiplicité de chaque racine.*

▶ D'après le théorème de d'Alembert-Gauss, $P\in\mathbb{C}[X]$ possède exactement $n=\deg(P)$ racines comptées avec multiplicité. Or α est une racine d'ordre de multiplicité au moins égal à n, donc $\boxed{\alpha \text{ est la seule racine de } P \text{ et son ordre de multiplicité est exactement } n}$.

Soyez concis et précis pour ce genre de question. Le mot-clef ici est le théorème de d'Alembert-Gauss. Impossible de justifier précisément votre réponse sans le citer.

(f) *En déduire qu'il existe $\lambda\in\mathbb{C}^\star$ tel que $P=\lambda(X-\alpha)^n$.*

▶ D'après le résultat précédent, α est la seule racine de $P\in\mathbb{C}[X]$. D'après le théorème de d'Alembert-Gauss, P est donc de la forme :

$$P=\lambda(X-\alpha)(X-\alpha)(X-\alpha)\dots(X-\alpha)=\lambda(X-\alpha)^n$$

où $\boxed{\lambda\in\mathbb{C}^\star \text{ est le coefficient dominant de } P}$.

4. *Concluer en donnant les éléments de l'ensemble $\mathcal{E}$.*

▶ Soit $P\in\mathcal{E}$. On a deux cas possibles selon le degré de P :
— soit $\deg(P)\leqslant 0$ alors $P\in\mathbb{C}_0[X]\cap\mathcal{E}$ et donc $P=0$ d'après le résultat de la question 1 ;
— soit $\deg(P)\geqslant 1$ alors $P=\lambda(X-\alpha)^n$ avec $\lambda\in\mathbb{C}^\star$, $\alpha\in\mathbb{C}$ et $n\geqslant 1$ d'après le résultat de la question 3.

Donc $\mathcal{E}\subset\{0\}\cup\{\lambda(X-\alpha)^n \mid \lambda\in\mathbb{C}^\star,\ \alpha\in\mathbb{C} \text{ et } n\geqslant 1\}$. Réciproquement $\{0\}\subset\mathcal{E}$ d'après le résultat de la question 1 et $\{\lambda(X-\alpha)^n \mid \lambda\in\mathbb{C}^\star,\ \alpha\in\mathbb{C} \text{ et } n\geqslant 1\}\subset\mathcal{E}$ d'après le résultat de la question 2. Finalement, on obtient par double inclusion :

$$\boxed{\mathcal{E}=\{0\}\cup\{\lambda(X-\alpha)^n \mid \lambda\in\mathbb{C}^\star,\ \alpha\in\mathbb{C} \text{ et } n\geqslant 1\}}.$$

Le correcteur attend de vous que vous ayez compris l'objectif de l'exercice et la structure de la démonstration. Faites-en un résumé succinct et précis en vous référant à chaque question pour en illustrer l'intérêt.

Exercice 4

Le but de cet exercice est de (re)démontrer que les médianes, les médiatrices ou les hauteurs d'un triangle du plan sont concourantes, et surtout de prouver que si ces trois points de concours ne sont pas confondus alors ils sont alignés (la droite ainsi définie est appelée droite d'Euler). On propose deux démonstrations différentes, les deux parties de l'exercice sont donc indépendantes.

Soit ABC un triangle du plan. On désigne par I le milieu de $[BC]$, par J le milieu de $[AC]$ et par K le milieu de $[AB]$.

Première méthode : calcul vectoriel

1. *Justifier que $G = \text{Bar}\left((A,1),(B,1),(C,1)\right)$ appartient à chaque médiane de ABC.*

   ▶ Soit $G = \text{Bar}\left((A,1),(B,1),(C,1)\right)$. On a $I = \text{Bar}((B,1),(C,1))$ car I est le milieu de $[BC]$. Par associativité du barycentre, on obtient $G = \text{Bar}\left((A,1),(I,2)\right)$ donc G appartient à la droite (AI), c'est-à-dire à la médiane issue de A. De même, on obtient $G = \text{Bar}\left((B,1),(J,2)\right) = \text{Bar}\left((C,1),(K,2)\right)$ donc G appartient $\boxed{\text{aux médianes issues de } B \text{ et } C}$.

2. *Soit Ω le point d'intersection de la médiatrice de $[AB]$ et de la médiatrice de $[AC]$.*

   (a) *Montrer que $\overrightarrow{\Omega A}.\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2}AB^2$ et prouver une expression similaire pour $\overrightarrow{\Omega A}.\overrightarrow{AC}$.*

   ▶ On a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\Omega A}.\overrightarrow{AB} &= \left(\overrightarrow{\Omega K}+\overrightarrow{KA}\right).\overrightarrow{AB} \quad \text{(d'après la relation de Chasles)}\\ &= \overrightarrow{\Omega K}.\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{KA}.\overrightarrow{AB} \quad \text{(par linéarité du produit scalaire).}\end{aligned}$$

   Or K est le milieu de $[AB]$ donc $\overrightarrow{KA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. De plus, puisque Ω appartient à la médiatrice de $[AB]$, Ω appartient à la droite perpendiculaire à (AB) passant par K et donc $\overrightarrow{\Omega K}\perp\overrightarrow{AB}$. On en déduit que :

$$\overrightarrow{\Omega A}.\overrightarrow{AB} = 0 - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} = \boxed{-\frac{1}{2}AB^2}.$$

   De même, on obtient que :

$$\overrightarrow{\Omega A}.\overrightarrow{AC} = \left(\overrightarrow{\Omega J}+\overrightarrow{JA}\right).\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{\Omega J}.\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{JA}.\overrightarrow{AC} = 0-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AC} = \boxed{-\frac{1}{2}AC^2}.$$

   (b) *Rappeler que $AB^2 = AC^2+BC^2+2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}$.*

   ▶ On a d'après la relation de Chasles et par propriétés de la norme :

$$AB^2 = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2+2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}+\left\|\overrightarrow{CB}\right\|^2 = \boxed{AC^2+BC^2+2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}}.$$

   (c) *En déduire que $\overrightarrow{\Omega I}.\overrightarrow{BC} = 0$ et justifier que Ω appartient à la médiatrice de $[BC]$.*

   ▶ On a d'après les résultats précédents :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\Omega I}.\overrightarrow{BC} &= \left(\overrightarrow{\Omega A}+\overrightarrow{AI}\right).\overrightarrow{BC}\\ &= \overrightarrow{\Omega A}.\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)+\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BC}\\ &= -\overrightarrow{\Omega A}.\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{\Omega A}.\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BC}\\ &= \frac{1}{2}AB^2-\frac{1}{2}AC^2+\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BC}\\ &= \frac{1}{2}\left(AC^2+BC^2+2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}\right)-\frac{1}{2}AC^2+\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BC}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BC} \\ &= \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CI}\right).\overrightarrow{BC}. \end{aligned}$$

Or I est le milieu de $[BC]$ donc $\overrightarrow{CI}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ et par conséquent $\boxed{\overrightarrow{\Omega I}.\overrightarrow{BC}=0}$. On en déduit que $\overrightarrow{\Omega I}\perp\overrightarrow{BC}$ donc Ω appartient à la droite perpendiculaire à (BC) passant par I c'est-à-dire $\boxed{\text{la médiatrice de } [BC]}$.

3. *Soit H le point défini par $H=\Omega+\overrightarrow{u}$ où $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{\Omega A}+\overrightarrow{\Omega B}+\overrightarrow{\Omega C}$.*

   (a) *Montrer que $\overrightarrow{AH}=2\overrightarrow{\Omega I}$.*

   ▶ Par définition du point H on a $\overrightarrow{\Omega H}=\overrightarrow{u}=\overrightarrow{\Omega A}+\overrightarrow{\Omega B}+\overrightarrow{\Omega C}$. Donc d'après la relation de Chasles :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AH} &= \overrightarrow{A\Omega}+\overrightarrow{\Omega H} \\ &= \overrightarrow{A\Omega}+\overrightarrow{\Omega A}+\overrightarrow{\Omega B}+\overrightarrow{\Omega C} \\ &= \overrightarrow{0}+\overrightarrow{\Omega I}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{\Omega I}+\overrightarrow{IC} \\ &= 2\overrightarrow{\Omega I}+\overrightarrow{0}. \end{aligned}$$

   car I est le milieu de $[BC]$ donc $\overrightarrow{IC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{IB}$. Finalement $\boxed{\overrightarrow{AH}=2\overrightarrow{\Omega I}}$.

   (b) *En déduire que $\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{BC}$ et justifier que H appartient à la hauteur issue de A.*

   ▶ D'après le résultat précédent, on a $\boxed{\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{\Omega I}.\overrightarrow{BC}=0}$ (en utilisant le résultat de la question 2.(c)). Donc H appartient à la droite perpendiculaire à (BC) passant par A c'est-à-dire $\boxed{\text{la hauteur issue de } A}$.

   (c) *Prouver des résultats similaires pour les hauteurs issues de B et C.*

   ▶ De même, on obtient $\overrightarrow{BH}=2\overrightarrow{\Omega J}$ puis $\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC}=0$ (car Ω appartient à la droite perpendiculaire à (AC) passant par J) et $\overrightarrow{CH}=2\overrightarrow{\Omega K}$ puis $\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{AB}=0$ (car Ω appartient à la droite perpendiculaire à (AB) passant par K). On en déduit que H appartient $\boxed{\text{aux hauteurs issues de } B \text{ et } C}$.

4. *En utilisant les définitions de G et H ci-dessus, montrer que $\overrightarrow{\Omega H}=3\overrightarrow{\Omega G}$.*

   ▶ Par définition du point H et d'après la relation de Chasles, on obtient :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\Omega H} &= \overrightarrow{\Omega A}+\overrightarrow{\Omega B}+\overrightarrow{\Omega C} \\ &= \overrightarrow{\Omega G}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{\Omega G}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{\Omega G}+\overrightarrow{GC} \\ &= 3\overrightarrow{\Omega G}+(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}). \end{aligned}$$

   Or $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$ car $G=\mathrm{Bar}\left((A,1),(B,1),(C,1)\right)$ (d'après la définition du barycentre). Finalement, on a $\boxed{\overrightarrow{\Omega H}=3\overrightarrow{\Omega G}}$.

5. *Conclure en distinguant les cas où au moins deux des trois points G, Ω et H sont confondus.*

   ▶ D'après le résultat de la question 1, les trois médianes de ABC sont concourantes en G. D'après le résultat de la question 2, les trois médiatrices de ABC sont concourantes en Ω. D'après le résultat de la question 3, les trois hauteurs sont concourantes en H. De plus $\boxed{\text{si au moins deux de ces trois points sont confondus alors les trois points sont confondus}}$ d'après le résultat de la question 4 (par exemple si $G=\Omega$ alors $\overrightarrow{\Omega H}=3\overrightarrow{\Omega G}=\overrightarrow{0}$ et donc $G=H=\Omega$). Il reste le cas où $\boxed{\text{ces trois points sont deux à deux distincts, alors ils } G, \Omega \text{ et } H \text{ sont alignés}}$ d'après le résultat de la question 4.

Même commentaire que pour la dernière question de l'exercice 3. Soyez succinct et précis en vous référant à chaque question pour en illustrer l'intérêt.

Deuxième méthode : coordonnées cartésiennes

On munit le plan d'un repère orthonormé dont l'origine est placée en $A(0,0)$. On désigne les coordonnées de B et C par $B(x_B, y_B)$ et $C(x_C, y_C)$.

0. Déterminer les coordonnées de I, J et K.

▶ Puisque I est le milieu de $[AB]$, on a $I = \mathrm{Bar}((B,1),(C,1))$ et donc $\boxed{I\left(\frac{x_B+x_C}{2}, \frac{y_B+y_C}{2}\right)}$. De même on obtient avec les coordonnées barycentriques que $\boxed{J\left(\frac{x_C}{2}, \frac{y_C}{2}\right)}$ et que $\boxed{K\left(\frac{x_B}{2}, \frac{y_B}{2}\right)}$.

1. (a) Déterminer les coordonnées de $G = \mathrm{Bar}\left((A,1),(B,1),(C,1)\right)$.

▶ Toujours d'après les coordonnées barycentriques, puisque $G = \mathrm{Bar}\left((A,1),(B,1),(C,1)\right)$, on a $\boxed{G\left(\frac{x_B+x_C}{3}, \frac{y_B+y_C}{3}\right)}$.

(b) Montrer $\overrightarrow{AG}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AI}$ et justifier que G appartient à la médiane issue de A.

▶

(c) On a d'après les résultats précédents :

$$\overrightarrow{AG} = \begin{pmatrix} \frac{x_B+x_C}{3} \\ \frac{y_B+y_C}{3} \end{pmatrix} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} \frac{x_B+x_C}{2} \\ \frac{y_B+y_C}{2} \end{pmatrix} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$$

donc $\boxed{\overrightarrow{AG} \text{ est colinéaire à } \overrightarrow{AI}}$. Par conséquent, G appartient à la droite (AI) c'est-à-dire $\boxed{\text{la médiane issue de } A}$.

(d) Prouver des résultats similaires pour les médianes issues de B et C.

▶ De même on a :

$$\overrightarrow{BG} = \begin{pmatrix} \frac{x_B+x_C}{3} - x_B \\ \frac{y_B+y_C}{3} - y_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_C-2x_B}{3} \\ \frac{y_C-2y_B}{3} \end{pmatrix} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} \frac{x_C-2x_B}{2} \\ \frac{y_C-2y_B}{2} \end{pmatrix} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} \frac{x_C}{2} - x_B \\ \frac{y_C}{2} - y_B \end{pmatrix} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BJ}$$

et

$$\overrightarrow{CG} = \begin{pmatrix} \frac{x_B+x_C}{3} - x_C \\ \frac{y_B+y_C}{3} - y_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_B-2x_C}{3} \\ \frac{y_B-2y_C}{3} \end{pmatrix} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} \frac{x_B-2x_C}{2} \\ \frac{y_B-2y_C}{2} \end{pmatrix} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} \frac{x_B}{2} - x_C \\ \frac{y_B}{2} - y_C \end{pmatrix} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CK}$$

et on en déduit que G appartient $\boxed{\text{aux médianes issues de } B \text{ et } C}$.

2. Soit $\Omega(x_\Omega, y_\Omega)$ le point d'intersection de la médiatrice de $[AB]$ et de la médiatrice de $[AC]$.

(a) Déterminer des représentations cartésiennes des médiatrices de $[AB]$ et $[AC]$.

▶ La médiatrice de $[AB]$ est perpendiculaire à (AB) donc $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à cette médiatrice. On en déduit que la médiatrice de $[AB]$ a une équation cartésienne de la forme $x_B x + y_B y + d = 0$ où $d \in \mathbb{R}$. Et puisque cette médiatrice passe par le point $K\left(\frac{x_B}{2}, \frac{y_B}{2}\right)$ milieu de $[AB]$, on a $x_B\frac{x_B}{2} + y_B\frac{y_B}{2} + d = 0$ et donc $d = -\frac{1}{2}\left(x_B^2 + y_B^2\right)$. D'où une représentation cartésienne de la médiatrice de $[AB]$:

$$x_B x + y_B y = \frac{1}{2}\left(x_B^2 + y_B^2\right).$$

De même, la médiatrice de $[AC]$ admet pour vecteur normal $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} x_C \\ y_C \end{pmatrix}$ et passe par le point $J\left(\frac{x_C}{2}, \frac{y_C}{2}\right)$, on obtient donc pour représentation cartésienne :

$$\boxed{x_C x + y_C y = \frac{1}{2}\left(x_C^2 + y_C^2\right)}.$$

(b) *Montrer que les coordonnées de Ω vérifient l'équation*

$$M\begin{pmatrix} x_\Omega \\ y_\Omega \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_B^2+y_B^2 \\ x_C^2+y_C^2 \end{pmatrix}$$

où M est une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qu'on déterminera.

▶ Puisque Ω est le point d'intersection de la médiatrice de $[AB]$ et de la médiatrice de $[AC]$ ses coordonnées $\Omega(x_\Omega, y_\Omega)$ vérifient les deux équations cartésiennes obtenues à la question précédente, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} x_B x_\Omega + y_B y_\Omega &= \frac{1}{2}\left(x_B^2+y_B^2\right) \\ x_C x_\Omega + y_C y_\Omega &= \frac{1}{2}\left(x_C^2+y_C^2\right) \end{cases}.$$

On a donc un système linéaire de deux équations à deux inconnues x_Ω et y_Ω qui peut aussi s'écrire sous la forme matricielle équivalente suivante :

$$\begin{pmatrix} x_B & y_B \\ x_C & y_C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_\Omega \\ y_\Omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(x_B^2+y_B^2\right) \\ \frac{1}{2}\left(x_C^2+y_C^2\right) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \boxed{M\begin{pmatrix} x_\Omega \\ y_\Omega \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_B^2+y_B^2 \\ x_C^2+y_C^2 \end{pmatrix}}$$

avec $M = \begin{pmatrix} x_B & y_B \\ x_C & y_C \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(c) *En utilisant que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, montrer que $M \in \mathcal{G}\ell_2(\mathbb{R})$.*

▶ Puisque $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires on a $\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \neq 0$, c'est-à-dire :

$$\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \det\begin{pmatrix} x_B-0 & x_C-0 \\ y_B-0 & y_C-0 \end{pmatrix} = x_B y_C - y_B x_C$$

donc $x_B y_C - y_B x_C \neq 0$. Or on a :

$$\det(M) = \det\begin{pmatrix} x_B & y_B \\ x_C & y_C \end{pmatrix} = x_B y_C - x_C y_B = x_B y_C - y_B x_C.$$

On en déduit que $\det(M) \neq 0$ donc que M est inversible, c'est-à-dire $\boxed{M \in \mathcal{G}\ell_2(\mathbb{R})}$.

On vient en fait d'utiliser que $\det({}^tM) = \det(M)$, c'est-à-dire que ${}^tM$ est inversible si et seulement si M est inversible.

(d) *En déduire les coordonnées de Ω.*

▶ Puisque M est inversible, on a d'après le résultat de la question 2.(b) :

$$M\begin{pmatrix} x_\Omega \\ y_\Omega \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_B^2+y_B^2 \\ x_C^2+y_C^2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_\Omega \\ y_\Omega \end{pmatrix} = \frac{1}{2}M^{-1}\begin{pmatrix} x_B^2+y_B^2 \\ x_C^2+y_C^2 \end{pmatrix}.$$

Or $M = \begin{pmatrix} x_B & y_B \\ x_C & y_C \end{pmatrix}$ et $\det(M) = x_B y_C - x_C y_B$, donc :

$$M^{-1} = \frac{1}{x_B y_C - x_C y_B}\begin{pmatrix} y_C & -y_B \\ -x_C & x_B \end{pmatrix}$$

On en déduit les coordonnées Ω :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_\Omega \\ y_\Omega \end{pmatrix} &= \frac{1}{2\left(x_B y_C - x_C y_B\right)}\begin{pmatrix} y_C & -y_B \\ -x_C & x_B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_B^2+y_B^2 \\ x_C^2+y_C^2 \end{pmatrix} \\ &= \boxed{\frac{1}{2\left(x_B y_C - x_C y_B\right)}\begin{pmatrix} y_C\left(x_B^2+y_B^2\right) - y_B\left(x_C^2+y_C^2\right) \\ -x_C\left(x_B^2+y_B^2\right) + x_B\left(x_C^2+y_C^2\right) \end{pmatrix}}. \end{aligned}$$

Inutile d'essayer de développer ces expressions, puisqu'il n'y a aucune relation entre les coordonnées de B et celles de C, les résultats ne peuvent se simplifier.

(e) *Montrer que $\overrightarrow{I\Omega}.\overrightarrow{BC} = 0$ et justifier que Ω appartient à la médiatrice de $[BC]$.*

▶ D'après les résultats précédents, on a :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{I\Omega}.\overrightarrow{BC} &= \begin{pmatrix} x_\Omega - \frac{x_B+x_C}{2} \\ y_\Omega - \frac{y_B+y_C}{2} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_C - x_B \\ y_C - y_B \end{pmatrix} \\
&= \left(x_\Omega - \frac{x_B + x_C}{2} \right) (x_C - x_B) + \left(y_\Omega - \frac{y_B + y_C}{2} \right) (y_C - y_B) \\
&= x_\Omega (x_C - x_B) - \frac{1}{2} \left(x_C^2 - x_B^2 \right) + y_\Omega (y_C - y_B) - \frac{1}{2} \left(y_C^2 - y_B^2 \right) \\
&= \underbrace{(x_C x_\Omega + y_C y_\Omega)}_{=\frac{1}{2}\left(x_C^2+y_C^2\right)} - \underbrace{(x_B x_\Omega + y_B y_\Omega)}_{=\frac{1}{2}\left(x_B^2+y_B^2\right)} - \frac{1}{2} \left(x_C^2 - x_B^2 \right) - \frac{1}{2} \left(y_C^2 - y_B^2 \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(x_C^2 + y_C^2 - x_B^2 - y_B^2 - x_C^2 + x_B^2 - y_C^2 + y_B^2 \right) = \boxed{0}.
\end{aligned}$$

On en déduit que $\overrightarrow{\Omega I} \perp \overrightarrow{BC}$ donc Ω appartient à la droite perpendiculaire à (BC) passant par I c'est-à-dire $\boxed{\text{la médiatrice de } [BC]}$.

3. *Soit $H(x_H, y_H)$ le point d'intersection de la hauteur issue de C et de la hauteur issue B.*

(a) *Déterminer des représentations cartésiennes des hauteurs issues de C et B.*

▶ La hauteur issue de C est perpendiculaire à (AB) donc $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à cette hauteur. On en déduit que la hauteur issue de C a une équation cartésienne de la forme $x_B x + y_B y + d = 0$ où $d \in \mathbb{R}$. Et puisque cette hauteur passe par le point $C(x_C, y_C)$, on a $x_B x_C + y_B y_C + d = 0$ et donc $d = -(x_B x_C + y_B y_C)$. D'où une représentation cartésienne de la hauteur issue de C :

$$\boxed{x_B x + y_B y = x_B x_C + y_B y_C}.$$

De même, la hauteur issue de B admet pour vecteur normal $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} x_C \\ y_C \end{pmatrix}$ et passe par le point $B(x_B, y_B)$, on obtient donc pour représentation cartésienne :

$$\boxed{x_C x + y_C y = x_C x_B + y_C y_B}.$$

(b) *Montrer que les coordonnées de H vérifient l'équation*

$$M \begin{pmatrix} x_H \\ y_H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_B x_C + y_B y_C \\ x_B x_C + y_B y_C \end{pmatrix}.$$

▶ Puisque H est le point d'intersection de la hauteur issue de C et de la hauteur issue de B ses coordonnées $H(x_H, y_H)$ vérifient les deux équations cartésiennes obtenues à la question précédente, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} x_B x_H + y_B y_H &= x_B x_C + y_B y_C \\ x_C x_H + y_C y_H &= x_C x_B + y_C y_B \end{cases}.$$

On a donc un système linéaire de deux équations à deux inconnues x_H et y_H qui peut aussi s'écrire sous la forme matricielle équivalente suivante :

$$\begin{pmatrix} x_B & y_B \\ x_C & y_C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_H \\ y_H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_B x_C + y_B y_C \\ x_C x_B + y_C y_B \end{pmatrix} \Leftrightarrow \boxed{M \begin{pmatrix} x_H \\ y_H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_B x_C + y_B y_C \\ x_B x_C + y_B y_C \end{pmatrix}}.$$

(c) *En déduire les coordonnées de H.*

▶ Puisque M est inversible, on a :

$$M\begin{pmatrix} x_H \\ y_H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_Bx_C + y_By_C \\ x_Bx_C + y_By_C \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_H \\ y_H \end{pmatrix} = M^{-1}\begin{pmatrix} x_Bx_C + y_By_C \\ x_Bx_C + y_By_C \end{pmatrix}..$$

Or $M^{-1} = \frac{1}{x_By_C - x_Cy_B}\begin{pmatrix} y_C & -y_B \\ -x_C & x_B \end{pmatrix}$ (voir la question 2.(d)), d'où les coordonnées de H :

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x_H \\ y_H \end{pmatrix} &= \frac{1}{x_By_C - x_Cy_B}\begin{pmatrix} y_C & -y_B \\ -x_C & x_B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_Bx_C + y_By_C \\ x_Bx_C + y_By_C \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{x_By_C - x_Cy_B}\begin{pmatrix} y_C\left(x_Bx_C + y_By_C\right) - y_B\left(x_Bx_C + y_By_C\right) \\ -x_C\left(x_Bx_C + y_By_C\right) + x_B\left(x_Bx_C + y_By_C\right) \end{pmatrix} \\
&= \boxed{\frac{1}{x_By_C - x_Cy_B}\begin{pmatrix} \left(y_C - y_B\right)\left(x_Bx_C + y_By_C\right) \\ \left(x_B - x_C\right)\left(x_Bx_C + y_By_C\right) \end{pmatrix}}.
\end{aligned}$$

(d) *Montrer que $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0$ et justifier que H appartient à la hauteur issue de A.*

▶ D'après les résultats précédents, on a :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} &= \begin{pmatrix} x_H - 0 \\ y_H - 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x_C - x_B \\ y_C - y_B \end{pmatrix} \\
&= x_H\left(x_C - x_B\right) + y_H\left(y_C - y_B\right) \\
&= \underbrace{\left(x_Cx_H + y_Cy_H\right)}_{=x_Bx_C + y_By_C} - \underbrace{\left(x_Bx_H + y_By_H\right)}_{=x_Bx_C + y_By_C} \\
&= x_Bx_C + y_By_C - x_Bx_C - y_By_C = \boxed{0}.
\end{aligned}$$

On en déduit que $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC}$ donc H appartient à la droite perpendiculaire à (BC) passant par A c'est-à-dire $\boxed{\text{la hauteur issue de } A}$.

4. *Montrer que $\overrightarrow{GH}$ et $\overrightarrow{G\Omega}$ sont colinéaires.*

▶ D'après les résultats précédents, on a :

$$\begin{aligned}
&\det\left(\overrightarrow{GH}, \overrightarrow{G\Omega}\right) \\
= \ &\det\begin{pmatrix} x_H - \frac{x_B + x_C}{3} & x_\Omega - \frac{x_B + x_C}{3} \\ y_H - \frac{y_B + y_C}{3} & y_\Omega - \frac{y_B + y_C}{3} \end{pmatrix} \\
= \ &\left(x_H - \frac{x_B + x_C}{3}\right)\left(y_\Omega - \frac{y_B + y_C}{3}\right) - \left(y_H - \frac{y_B + y_C}{3}\right)\left(x_\Omega - \frac{x_B + x_C}{3}\right) \\
= \ &x_Hy_\Omega - \frac{1}{3}\left(y_B + y_C\right)x_H - \frac{1}{3}\left(x_B + x_C\right)y_\Omega + \frac{1}{9}\left(x_B + x_C\right)\left(y_B + y_C\right) \\
&\quad -y_Hx_\Omega + \frac{1}{3}\left(x_B + x_C\right)y_H + \frac{1}{3}\left(y_B + y_C\right)x_\Omega - \frac{1}{9}\left(y_B + y_C\right)\left(x_B + x_C\right) \\
= \ &\underbrace{\left(x_Hy_\Omega - y_Hx_\Omega\right)}_{=X_1} + \underbrace{\frac{1}{3}\left(y_B + y_C\right)\left(x_\Omega - x_H\right)}_{=X_2} + \underbrace{\frac{1}{3}\left(x_B + x_C\right)\left(y_H - y_\Omega\right)}_{=X_3}
\end{aligned}$$

On ne peut malheureusement pas utiliser les mêmes simplifications que celles des questions 2.(e) et 3.(d). Il faut donc tout développer avec les expressions des coordonnées de Ω et H obtenues aux questions précédentes.

On commence par simplifier X_1 :

$$\begin{aligned}
X_1 &= x_H y_\Omega - y_H x_\Omega \\
&= \frac{(y_C - y_B)(x_B x_C + y_B y_C)}{x_B y_C - x_C y_B} \times \frac{-x_C\left(x_B^2 + y_B^2\right) + x_B\left(x_C^2 + y_C^2\right)}{2\left(x_B y_C - x_C y_B\right)} \\
&\quad - \frac{(x_B - x_C)(x_B x_C + y_B y_C)}{x_B y_C - x_C y_B} \times \frac{y_C\left(x_B^2 + y_B^2\right) - y_B\left(x_C^2 + y_C^2\right)}{2\left(x_B y_C - x_C y_B\right)} \\
&= \frac{x_B x_C + y_B y_C}{2\left(x_B y_C - x_C y_B\right)^2}\Big[(y_C - y_B)\left(-x_B^2 x_C - x_C y_B^2 + x_B x_C^2 + x_B y_C^2\right) \\
&\qquad - (x_B - x_C)\left(x_B^2 y_C + y_B^2 y_C - x_C^2 y_B - y_B y_C^2\right)\Big]
\end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned}
& X1 \times \frac{2\left(x_B y_C - x_C y_B\right)^2}{x_B x_C + y_B y_C} \\
={}& (y_C - y_B)\left(-x_B^2 x_C - x_C y_B^2 + x_B x_C^2 + x_B y_C^2\right) \\
& - (x_B - x_C)\left(x_B^2 y_C + y_B^2 y_C - x_C^2 y_B - y_B y_C^2\right) \\
={}& -x_B^2 x_C y_C - x_C y_B^2 y_C + x_B x_C^2 y_C + x_B y_C^3 + x_B^2 x_C y_B + x_C y_B^3 - x_B x_C^2 y_B - x_B y_B y_C^2 \\
& -x_B^3 y_C - x_B y_B^2 y_C + x_B x_C^2 y_B + x_B y_B y_C^2 + x_B^2 x_C y_C + x_C y_B^2 y_C - x_C^3 y_B - x_C y_B y_C^2 \\
={}& x_B x_C^2 y_C + x_B y_C^3 + x_B^2 x_C y_B + x_C y_B^3 \\
& -x_B^3 y_C - x_B y_B^2 y_C - x_C^3 y_B - x_C y_B y_C^2 \\
={}& x_B y_C\left(-x_B^2 - y_B^2 + x_C^2 + y_C^2\right) + x_C y_B(x_B^2 + y_B^2 - x_C^2 - y_C^2) \\
={}& (x_B y_C - x_C y_B)\left(-x_B^2 - y_B^2 + x_C^2 + y_C^2\right)
\end{aligned}$$

et finalement :

$$X_1 = \frac{(x_B x_C + y_B y_C)\left(-x_B^2 - y_B^2 + x_C^2 + y_C^2\right)}{2\left(x_B y_C - x_C y_B\right)}.$$

Puis on s'implifie X_2 :

$$\begin{aligned}
X_2 &= \frac{1}{3}(y_B + y_C)(x_\Omega - x_H) \\
&= \frac{1}{3}(y_B + y_C)\left[\frac{y_C\left(x_B^2 + y_B^2\right) - y_B\left(x_C^2 + y_C^2\right)}{2\left(x_B y_C - x_C y_B\right)} - \frac{(y_C - y_B)(x_B x_C + y_B y_C)}{x_B y_C - x_C y_B}\right] \\
&= \frac{y_B + y_C}{6\left(x_B y_C - x_C y_B\right)}\Big[x_B^2 y_C + y_B^2 y_C - x_C^2 y_B - y_B y_C^2 \\
&\qquad -2x_B x_C y_C - 2y_B y_C^2 + 2x_B x_C y_B + 2y_B^2 y_C\Big] \\
&= \frac{y_B + y_C}{6\left(x_B y_C - x_C y_B\right)}\Big[x_B^2 y_C + 3y_B^2 y_C - x_C^2 y_B - 3y_B y_C^2 - 2x_B x_C y_C + 2x_B x_C y_B\Big].
\end{aligned}$$

Pour X_3, on a :

$$\begin{aligned}
X_3 &= \frac{1}{3}(x_B + x_C)(y_H - y_\Omega) \\
&= \frac{1}{3}(x_B + x_C)\left[\frac{(x_B - x_C)(x_B x_C + y_B y_C)}{x_B y_C - x_C y_B} - \frac{-x_C\left(x_B^2 + y_B^2\right) + x_B\left(x_C^2 + y_C^2\right)}{2\left(x_B y_C - x_C y_B\right)}\right] \\
&= -\left(\frac{1}{3}(x_B + x_C)\left[\frac{x_C\left(y_B^2 + x_B^2\right) - x_B\left(y_C^2 + x_C^2\right)}{2\left(y_B x_C - y_C x_B\right)} - \frac{(x_C - x_B)(y_B y_C + x_B x_C)}{y_B y_C - y_C x_B}\right]\right)
\end{aligned}$$

On retrouve le même calcul que X_2 en intervertissant chaque lettre x et y, donc :

$$\begin{aligned}
X_3 &= -\left(\frac{x_B + x_C}{6\left(y_B x_C - y_C x_B\right)}\Big[y_B^2 x_C + 3x_B^2 x_C - y_C^2 x_B - 3x_B x_C^2 - 2y_B y_C x_C + 2y_B y_C x_B\Big]\right) \\
&= \frac{x_B + x_C}{6\left(x_B y_C - x_C y_B\right)}\Big[x_C y_B^2 + 3x_B^2 x_C - x_B y_C^2 - 3x_B x_C^2 - 2x_C y_B y_C + 2x_B y_B y_C\Big]
\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
& (X_1+X_2)\times 6\,(x_By_C-x_Cy_B)\\
= \;& (y_B+y_C)\left(x_B^2y_C+3y_B^2y_C-x_C^2y_B-3y_By_C^2-2x_Bx_Cy_C+2x_Bx_Cy_B\right)\\
& +(x_B+x_C)\left(x_Cy_B^2+3x_B^2x_C-x_By_C^2-3x_Bx_C^2-2x_Cy_By_C+2x_By_By_C\right)\\
= \;& x_B^2y_By_C+3y_B^3y_C-x_C^2y_B^2-3y_B^2y_C^2-2x_Bx_Cy_By_C+2x_Bx_Cy_B^2\\
& +x_B^2y_C^2+3y_B^2y_C^2-x_C^2y_By_C-3y_By_C^3-2x_Bx_Cy_C^2+2x_Bx_Cy_By_C\\
& +x_Bx_Cy_B^2+3x_B^3x_C-x_B^2y_C^2-3x_B^2x_C^2-2x_Bx_Cy_By_C+2x_B^2y_By_C\\
& +x_C^2y_B^2+3x_B^2x_C^2-x_Bx_Cy_C^2-3x_Bx_C^3-2x_C^2y_By_C+2x_Bx_Cy_By_C\\
= \;& x_B^2y_By_C+3y_B^3y_C \qquad\qquad\qquad\qquad +2x_Bx_Cy_B^2\\
& \qquad\qquad -x_C^2y_By_C-3y_By_C^3-2x_Bx_Cy_C^2\\
& +x_Bx_Cy_B^2+3x_B^3x_C \qquad\qquad\qquad\qquad +2x_B^2y_By_C\\
& \qquad\qquad -x_Bx_Cy_C^2-3x_Bx_C^3-2x_C^2y_By_C\\
= \;& 3y_By_C\left(x_B^2+y_B^2-x_C^2-y_C^2\right)+3x_Bx_C\left(y_B^2+x_B^2-y_C^2-x_C^2\right)\\
= \;& 3\,(x_Bx_C+y_By_C)\left(x_B^2+x_C^2-y_B^2-y_C^2\right).
\end{aligned}$$

Finalement :

$$X_2+X_3=\frac{(x_Bx_C+y_By_C)\left(x_B^2+y_B^2-x_C^2-y_C^2\right)}{2\,(x_By_C-x_Cy_B)}=-X_1.$$

on en déduit que $\det\left(\overrightarrow{GH},\overrightarrow{G\Omega}\right)=X_1+X_2+X_3=0$, d'où $\boxed{\overrightarrow{GH} \text{ et } \overrightarrow{G\Omega} \text{ sont colinéaires}}$.

Les calculs de cette question sont longs et compliqués. Organisez vos calculs pour les terminer sans erreurs.

5. *Conclure en distinguant les cas où au moins deux des trois points G, Ω et H sont confondus.*

► Si $G=\Omega$ alors les médiatrices et les médianes de ABC sont confondues, par conséquent elles sont aussi ses hauteurs et donc $G=H=\Omega$. Si $G\neq\Omega$ alors $\overrightarrow{G\Omega}\neq\overrightarrow{0}$ d'où $\overrightarrow{\Omega H}=\lambda\overrightarrow{\Omega G}$ pour un certain $\lambda\in\mathbb{R}$ d'après le résultat de la question précédente. Le raisonnement de la question 5 de la première méthode permet alors de conclure.

Attention, a priori on peut avoir $\overrightarrow{GH}\neq\overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{G\Omega}=\overrightarrow{0}$ sans contredire le fait que $\overrightarrow{GH}$ et $\overrightarrow{G\Omega}$ sont colinéaires. Si on veut écrire $\overrightarrow{\Omega H}=\lambda\overrightarrow{\Omega G}$ pour utiliser le raisonnement de la question 5 de la première méthode, il faut donc distinguer le cas où $\overrightarrow{G\Omega}=\overrightarrow{0}$.

DS n$^{\text{o}}$ 6 de mathématiques

durée : 3 heures

Exercice 1

On s'intéresse à une mutation dynamique de l'information génétique au sein d'une lignée de cellules. Pour simplifier les notations, on désigne par A, B et C les trois parties du génome touchées par la mutation. On observe les résultats suivants :

— la mutation ne touche qu'une seule partie du génome de chaque cellule à chaque génération ;

— lorsque la mutation touche A alors elle touche B ou C à la génération suivante avec la même probabilité ;

— lorsque la mutation touche B alors elle touche A ou C à la génération suivante avec la même probabilité ;

— lorsque la mutation touche C alors elle continue de toucher C à la génération suivante.

Pour toute génération $n \in \mathbb{N}^\star$ et pour chaque lettre $X \in \{A, B, C\}$, on note X_n l'événement : «la mutation touche X à la n-ième génération» et x_n la probabilité de l'événement X_n. Enfin, on suppose que la mutation touche A à la première génération, c'est-à-dire $a_1 = 1$ et $b_1 = c_1 = 0$.

1. (a) Déterminer a_2, b_2 et c_2.

   (b) Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ que $a_{n+1} = \frac{1}{2} b_n$ et obtenir une relation similaire pour b_{n+1}.

   (c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, exprimer c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n (sans justifier).

   (d) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ où $L \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est une matrice qu'on exprimera en fonction de la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

   (e) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = L^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$.

2. (a) Montrer que la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer son inverse.

   (b) Montrer que $P^{-1}MP = D + N$ où $D = \text{diag}(-1, 1, 2)$ et $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est une matrice qu'on déterminera.

   (c) Calculer les produits matriciels DN, ND et N^2.

   (d) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N},\ (D + N)^k = D^k + (2^k - 1)N$.

   (e) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, exprimer les coefficients de M^k en fonction de k.

3. En déduire des expressions des probabilités a_n, b_n et c_n pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.

4. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} a_n$, $\lim_{n\to+\infty} b_n$ et $\lim_{n\to+\infty} c_n$. Interpréter ce résultat.

Exercice 2

Cet exercice propose de déterminer la droite de régression affine d'une série statistique double par la méthode des moindre carrés. On considère donc deux caractères quantitatifs x et y sur une population de taille n. Pour $k \in \{1, 2, \ldots, p\}$ et $\ell \in \{1, 2, \ldots, q\}$, on note (x_k, y_ℓ) chaque modalité conjointe du couple statistique (x, y) et $n_{k,\ell}$ l'effectif conjoint associé (ainsi $\sum_{k=1}^{p} \sum_{\ell=1}^{q} n_{k,\ell} = n$). On note également $n_k^x = \sum_{\ell=1}^{q} n_{k,\ell}$ l'effectif de la modalité x_k et $n_\ell^y = \sum_{k=1}^{p} n_{k,\ell}$ celui de y_ℓ.

1. **Rappels de cours.**
   (a) Rappeler les définitions des moyennes $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{x^2}$, $\overline{y^2}$ et $\overline{xy}$.
   (b) Rappeler les définitions des variances $\mathrm{Var}(x)$, $\mathrm{Var}(y)$ et de la covariance $\mathrm{Cov}(x, y)$.
   (c) Rappeler les formules de Koenig-Huygens pour $\mathrm{Var}(x)$, $\mathrm{Var}(y)$ et $\mathrm{Cov}(x, y)$.
   (d) Prouver que $\mathrm{Var}(x) = 0$ si et seulement si le caractère x est constant et rappeler la valeur de cette constante. On supposera désormais que $\mathrm{Var}(x) \neq 0$.
2. **Méthode des moindre carrés.** Pour tout couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on désigne par $\Delta_{a,b}$ la droite du plan affine d'équation $Y = aX + b$. On cherche à déterminer la droite de régression affine qui minimise la moyenne des carrés des distances verticales de la droite $\Delta_{a,b}$ au nuage de point du couple (x, y). Plus précisément, on cherche à déterminer un minimum de la fonction :

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+, (a, b) \mapsto F(a, b) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{p} \sum_{\ell=1}^{q} n_{k,\ell} \Big((ax_k + b) - y_\ell \Big)^2.$$

   (a) Montrer que $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ F(a, b) = a^2\overline{x^2} + 2ab\overline{x} + b^2 - 2a\overline{xy} - 2b\overline{y} + \overline{y^2}$.
   (b) En déduire des expressions de $\frac{\partial F}{\partial a}(a, b)$ et $\frac{\partial F}{\partial b}(a, b)$ pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
   (c) Montrer que les équations $\frac{\partial F}{\partial a}(a, b) = 0$ et $\frac{\partial F}{\partial b}(a, b) = 0$ forment un système de Cramer et exprimer l'unique solution (A, B) en fonction $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\mathrm{Var}(x)$ et $\mathrm{Cov}(x, y)$.
   (d) Pour cette question, on fixe $a \in \mathbb{R}$. Etudier la fonction $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+, b \mapsto F(a, b)$ et en déduire que $\forall b \in \mathbb{R},\ f_a(b) \geqslant f_a(\overline{y} - a\overline{x})$.
   (e) Etudier la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+, a \mapsto f_a(\overline{y} - a\overline{x})$ et en déduire que $\forall a \in \mathbb{R},\ f(a) \geqslant f(A)$.
   (f) En déduire que $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ F(a, b) \geqslant F(A, B)$.
   (g) Conclure et vérifier que le point moyen du couple statistique (x, y) appartient à la droite de régression affine d'équation $Y = AX + B$.

Exercice 3

Cet exercice propose d'étudier une suite de fractions rationnelles particulières, c'est-à-dire des fonctions définies comme quotients de deux fonctions polynomiales. Plus précisément, on considère les suites de polynômes $(P_n)_{n\geqslant 0}$ et $(Q_n)_{n\geqslant 0}$ définies par

$$\left\{ \begin{array}{rcl} P_0 & = & 0 \\ Q_0 & = & 1 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \left\{ \begin{array}{rcl} P_{n+1} & = & P_n + XQ_n \\ Q_{n+1} & = & Q_n - XP_n \end{array} \right.$$

et on note $(R_n)_{n\geqslant 0}$ la suite de fonctions définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ R_n : x \to \frac{P_n(x)}{Q_n(x)}$.

1. Déterminer R_0, R_1, R_2 et R_3 ainsi que leurs domaines de définition.
2. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le domaine de définition de R_n est de la forme $\mathbb{R} \setminus E_n$ où $E_n \subset \mathbb{R}$ est un ensemble fini de nombres réels.
3. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, les coefficients de P_n et Q_n sont des entiers relatifs.
4. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ Q_n + iP_n = (1 + iX)^n$.
5. Pour cette question, on fixe $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
   (a) Ecrire le nombre complexe $(1 + i\tan(\theta))^n$ sous forme algébrique.
   (b) En déduire que $P_n(\tan(\theta)) = \frac{\sin(n\theta)}{\cos^n(\theta)}$ et $Q_n(\tan(\theta)) = \frac{\cos(n\theta)}{\cos^n(\theta)}$.
   (c) Justifier proprement que $E_n = \left\{\tan\left(\frac{m\pi}{2n}\right) \mid m \text{ entier impair tel quel } -n < m < n\right\}$.
   (d) Montrer que $\forall \theta \in \left]-\frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{2n}\right[,\ R_n(\tan(\theta)) = \tan(n\theta)$.
6. Pour cette question, on fixe $n \in \mathbb{N}$ et on suppose qu'il existe deux polynômes $(P, Q) \in (\mathbb{R}[X])^2$ et une fraction rationnelle $R : x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$ telle que $\forall \theta \in \left]-\frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{2n}\right[,\ R(\tan(\theta)) = \tan(n\theta)$.
   (a) Montrer que $\forall \theta \in \left]-\frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{2n}\right[,\ (PQ_n - QP_n)(\tan(\theta)) = 0$.
   (b) En déduire que $PQ_n - QP_n = 0$ puis que $R = R_n$.

Corrigé du DS n° 6 de mathématiques

Exercice 1

On s'intéresse à une mutation dynamique de l'information génétique au sein d'une lignée de cellules. Pour simplifier les notations, on désigne par A, B et C les trois parties du génome touchées par la mutation. On observe les résultats suivants :

- *la mutation ne touche qu'une seule partie du génome de chaque cellule à chaque génération ;*
- *lorsque la mutation touche A alors elle touche B ou C à la génération suivante avec la même probabilité ;*
- *lorsque la mutation touche B alors elle touche A ou C à la génération suivante avec la même probabilité ;*
- *lorsque la mutation touche C alors elle continue de toucher C à la génération suivante.*

Pour toute génération $n \in \mathbb{N}^\star$ et pour chaque lettre $X \in \{A, B, C\}$, on note X_n l'événement : «la mutation touche X à la n-ième génération» et x_n la probabilité de l'événement X_n. Enfin, on suppose que la mutation touche A à la première génération, c'est-à-dire $a_1 = 1$ et $b_1 = c_1 = 0$.

1. (a) *Déterminer a_2, b_2 et c_2.*

► Puisque la mutation touche A à la première génération, elle va toucher B ou C à la deuxième génération avec la même probabilité. Donc $\boxed{a_2 = 0}$ (car la mutation ne touchera pas A à la deuxième génération) et $b_2 = c_2$. Puisque A_2, B_2 et C_2 forment un système complet d'événements on a $a_2 + b_2 + c_2 = 1$. On en déduit que $\boxed{b_2 = c_2 = \frac{1}{2}}$.

Il faut profiter de ces questions faciles pour montrer qu'on sait son cours. Ici, c'est une bonne occasion de montrer qu'on connait la définition d'un système complet d'événements.

(b) *Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ que $a_{n+1} = \frac{1}{2}b_n$ et obtenir une relation similaire pour b_{n+1}.*

► Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Si la mutation touche A à la $(n+1)$-ième génération alors la mutation a forcément touché B à la n-ième génération. De plus, si la mutation a touché B à la n-ième génération, alors elle touche A ou C à la $(n+1)$-ème génération avec la même probabilité, par conséquent elle touche A à la $(n+1)-ime$ génération avec la probabilité $\frac{1}{2}$. On en déduit que $\boxed{a_{n+1} = \frac{1}{2}b_n}$.

La justification précise est donnée par la formule des probabilités totales : $P(A_{n+1}) = P(A_N)P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_N)P_{B_n}(A_{n+1}) + P(C_N)P_{C_n}(A_{n+1})$ avec $P_{A_n}(A_{n+1}) = 0$, $P(B_n) = b_n$, $P_{B_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{2}$ et $P_{C_n}(A_{n+1}) = 0$. Les probabilités conditionnelles n'étaient pas au programme de ce DS mais c'est cette justification qui sera attendue aux concours.

Par un raisonnement identique, on obtient que $\boxed{b_{n+1} = \frac{1}{2}a_n}$.

(c) *Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, exprimer c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n (sans justifier).*

► Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Si la mutation touche C à la $(n+1)$-ième génération alors la mutation peut avoir touché A, B ou C à la n-ième génération. De plus, si la mutation a touché A à la n-ième génération, alors elle touche C à la $(n+1)$-ième génération avec la probabilité $\frac{1}{2}$. De même, si elle a touché B à la n-ième génération, alors elle touche C à la $(n+1)$-ième génération avec la probabilité $\frac{1}{2}$. Enfin, si elle a touché C à la n-ième génération, alors elle touche C à la $(n+1)$-ième génération avec la probabilité 1. On en déduit que $\boxed{c_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}b_n + c_n}$.

De même, la justification précise est donnée par la formule des probabilités totales, qui n'était pas au programme de ce DS.

(d) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ où $L \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est une matrice qu'on exprimera en fonction de la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

▶ Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On a d'après les résultats précédents :

$$\begin{cases} a_{n+1} & = & & & \frac{1}{2}b_n & & \\ b_{n+1} & = & \frac{1}{2}a_n & & & & \\ c_{n+1} & = & \frac{1}{2}a_n & + & \frac{1}{2}b_n & + & c_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}.$$

D'où :

$$\boxed{L = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}M}.$$

(e) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = L^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$.

▶ On procède par récurrence. On a :

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = I_3 \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = L^0 \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = L^{1-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}.$$

Donc l'égalité est vraie pour $n = 1$. On suppose que l'égalité est vraie au rang $n \in \mathbb{N}^\star$ fixé. On a :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} &= L \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} && \text{(d'après le résultat de la question précédente)} \\ &= L \left(L^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \right) && \text{(par hypothèse de récurrence)} \\ &= \left(L L^{n-1} \right) \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} && \text{(par associativité du produit matriciel)} \\ &= L^{1+n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = L^{(n+1)-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Donc l'égalité est vraie au rang $n+1$ dès qu'elle est vraie au rang n pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$. On en déduit que $\boxed{\text{l'égalité est vraie pour tout } n \in \mathbb{N}^\star}$ d'après le principe de récurrence.

Profitez des récurrences faciles pour montrer que vous êtes précis dans vos raisonnements. L'objectif n'est pas seulement de récupérer les points de cette question, mais aussi de mettre le correcteur dans de bonnes dispositions pour le reste de la copie. Si vous répondez de manière précise et concise, le correcteur sera plus indulgent pour la suite ; mais s'il doit remettre votre rédaction dans l'ordre ou compléter ce qui manque...

2. (a) Montrer que la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer son inverse.

▶ On utilise la méthode du pivot de Gauss.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On obtient une matrice équivalente échelonnée de rang 3, donc P est inversible.

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{2}L_2 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{2}L_3 \end{array} \quad \boxed{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = P^{-1}}.$$

(b) *Montrer que $P^{-1}MP = D + N$ où $D = \operatorname{diag}(-1,1,2)$ et $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est une matrice qu'on déterminera.*

▶ On a :

$$\begin{aligned} P^{-1}MP &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Donc $\boxed{P^{-1}MP = D + N}$ avec $D = \operatorname{diag}(-1,1,2)$ et $\boxed{N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$.

(c) *Calculer les produits matriciels DN, ND et N^2.*

▶ On a :

$$\begin{aligned} DN &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{2N}, \\ ND &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{N} \\ \text{et} \quad N^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{0_3}. \end{aligned}$$

(d) *Montrer que $\forall k \in \mathbb{N},\ (D+N)^k = D^k + (2^k - 1)N$.*

▶ On procède par récurrence. On a :

$$(D+N)^0 = I_3 = I_3 + 0_3 = I_3 + 0N = D^0 + (2^0 - 1)N.$$

Donc l'égalité est vraie pour $k = 0$. On suppose que l'égalité est vraie au rang $k \in \mathbb{N}$ fixé. On a :

$$\begin{aligned} (D+N)^{k+1} &= (D+N)^k(D+N) \\ &= (D^k + (2^k - 1)N)(D+N) \quad \text{(par hypothèse de récurrence)} \\ &= D^{k+1} + D^kN + (2^k - 1)ND + (2^k - 1)N^2. \end{aligned}$$

De plus, on a d'après le résultat de la question précédente : $ND = N$, $N^2 = 0_3$ et

$$\begin{aligned}
D^k N &= \underbrace{DD\dots DDD}_{k \text{ fois}} N = \underbrace{DD\dots DD}_{k-1 \text{ fois}} DN = \underbrace{DD\dots DD}_{k-1 \text{ fois}} 2N \\
&= 2\underbrace{DD\dots DD}_{k-1 \text{ fois}} N = 2\underbrace{DD\dots D}_{k-2 \text{ fois}} DN = 2\underbrace{DD\dots D}_{k-2 \text{ fois}} 2N \\
&= 2^2 \underbrace{DD\dots D}_{k-2 \text{ fois}} N = \dots \\
&= 2^k N.
\end{aligned}$$

Inutile de faire une récurrence ici, le résultat est facile et surtout on a déjà montré au correcteur qu'on est capable de rédiger proprement une récurrence.

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
(D+N)^{k+1} &= D^{k+1} + 2^k N + (2^k - 1)N + (2^k - 1)0_3 \\
&= D^{k+1} + (2^k + 2^k - 1)N + 0 \\
&= D^{k+1} + (2^{k+1} - 1)N.
\end{aligned}$$

Donc l'égalité est vraie au rang $k+1$ dès qu'elle est vraie au rang k pour tout $k \in \mathbb{N}$. On en déduit que $\boxed{\text{l'égalité est vraie pour tout } k \in \mathbb{N}}$ d'après le principe de récurrence.

ATTENTION!! Le piège de cette question est qu'on ne peut pas utiliser la formule du binôme de Newton ici car les matrices D et N ne sont pas commutatives d'après les résultats de la question précédente : $DN = 2N \neq N = ND$.

(e) *Pour tout $k \in \mathbb{N}$, exprimer les coefficients de M^k en fonction de k.*

► Soit $k \in \mathbb{N}$. Par associativité du produit matriciel, on a :

$$\begin{aligned}
(P^{-1}MP)^k &= \underbrace{(P^{-1}MP)(P^{-1}MP)\dots(P^{-1}MP)}_{k \text{ fois}} \\
&= P^{-1}\underbrace{M(PP^{-1})M(PP^{-1})\dots M(PP^{-1})}_{k-1 \text{ fois}} MP \\
&= P^{-1}\underbrace{MI_3MI_3\dots MI_3}_{k-1 \text{ fois}} MP \\
&= P^{-1}M^{k-1}MP = P^{-1}M^kP.
\end{aligned}$$

On en déduit d'après les résultats des questions précédentes que :

$$\begin{aligned}
M^k &= I_3M^kI_3 = (PP^{-1})M^k(PP^{-1}) = P(P^{-1}M^kP)P^{-1} = P(P^{-1}MP)^kP^{-1} \\
&= P(D+N)^kP^{-1} = P(D^k + (2^k-1)N)P^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^k + (2^k-1) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} (-1)^k & 0 & 0 \\ 0 & 1^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^k-1 & 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2^k-1 & 2^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (-1)^k & 1 & 0 \\ -(-1)^k & 1 & 0 \\ 0 & 2(2^k-1) & 2 \times 2^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\
&= \boxed{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(-1)^k & \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(-1)^k & 0 \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(-1)^k & \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(-1)^k & 0 \\ 2^k - 1 & 2^k - 1 & 2^k \end{pmatrix}}.
\end{aligned}$$

3. *En déduire des expressions des probabilités a_n, b_n et c_n pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.*

▶ Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On a d'après les résultats des questions précédentes :

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} &= L^{n-1}\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2}M\right)^{n-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2^{n-1}}M^{n-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2^{n-1}}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}+\frac{1}{2}(-1)^{n-1} & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}(-1)^{n-1} & 0 \\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}(-1)^{n-1} & \frac{1}{2}+\frac{1}{2}(-1)^{n-1} & 0 \\ 2^{n-1}-1 & 2^{n-1}-1 & 2^{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2^{n-1}}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}+\frac{1}{2}(-1)^{n-1} \\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}(-1)^{n-1} \\ 2^{n-1}-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+(-1)^{n-1}}{2\times 2^{n-1}} \\ \frac{1-(-1)^{n-1}}{2\times 2^{n-1}} \\ \frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{a_n = \frac{1-(-1)^n}{2^n}}, \quad \boxed{b_n = \frac{1+(-1)^n}{2^n}} \quad \text{et} \quad \boxed{c_n = 1 - \frac{2}{2^n}}.$$

4. *Déterminer $\lim_{n\to+\infty} a_n$, $\lim_{n\to+\infty} b_n$ et $\lim_{n\to+\infty} c_n$. Interpréter ce résultat.*

▶ On a pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $0 \leqslant 1-(-1)^n \leqslant 2$ et $0 \leqslant 1+(-1)^n \leqslant 2$, donc $0 \leqslant a_n \leqslant \frac{2}{2^n}$ et $0 \leqslant b_n \leqslant \frac{2}{2^n}$. Puisque $\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{2^n} = 0$, on en déduit d'après le théorème d'encadrement :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} a_n = 0}, \quad \boxed{\lim_{n\to+\infty} b_n = 0} \quad \text{et} \quad \boxed{\lim_{n\to+\infty} c_n = 1}.$$

Il faut sauter sur la moindre occasion pour citer le cours. Ici on pourrait ne pas justifier ces limites qui semblent évidentes, mais il ne faut surtout pas relâcher son attention et rater l'occasion de placer un théorème d'encadrement. Soyez opportuniste !!

Ainsi, à long terme, $\boxed{\text{la mutation va toucher la partie } C \text{ du génome avec une quasi-certitude}}$.

Exercice 2

Cet exercice propose de déterminer la droite de régression affine d'une série statistique double par la méthode des moindre carrés. On considère donc deux caractères quantitatifs x et y sur une population de taille n. Pour $k \in \{1,2,\dots,p\}$ et $\ell \in \{1,2,\dots,q\}$, on note (x_k, y_ℓ) chaque modalité conjointe du couple statistique (x,y) et $n_{k,\ell}$ l'effectif conjoint associé (ainsi $\sum_{k=1}^p \sum_{\ell=1}^q n_{k,\ell} = n$). On note également $n_k^x = \sum_{\ell=1}^q n_{k,\ell}$ l'effectif de la modalité x_k et $n_\ell^y = \sum_{k=1}^p n_{k,\ell}$ celui de y_ℓ.

1. ***Rappels de cours.***

   (a) *Rappeler les définitions des moyennes $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{x^2}$, $\overline{y^2}$ et $\overline{xy}$.*

   ▶ On a :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \overline{x} & = & \boxed{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^p n_k^x x_k} \\ \overline{y} & = & \boxed{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{\ell=1}^q n_\ell^y y_\ell} \end{array}\right., \quad \left\{\begin{array}{rcl} \overline{x^2} & = & \boxed{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^p n_k^x x_k^2} \\ \overline{y^2} & = & \boxed{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{\ell=1}^q n_\ell^y y_\ell^2} \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \overline{xy} = \boxed{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^p\sum_{\ell=1}^q n_{k,\ell}x_k y_\ell}.$$

   (b) *Rappeler les définitions des variances $\mathrm{Var}(x)$, $\mathrm{Var}(y)$ et de la covariance $\mathrm{Cov}(x,y)$.*

▶ On a :

$$\left\{\begin{array}{lcl}\mathrm{Var}(x) & = & \boxed{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{p} n_k^x\left(x_k-\overline{x}\right)^2} \\ \mathrm{Var}(y) & = & \boxed{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{\ell=1}^{q} n_\ell^y\left(y_\ell-\overline{y}\right)^2}\end{array}\right. \quad \text{et} \quad \mathrm{Cov}(x)=\boxed{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{p}\sum_{\ell=1}^{q} n_{k,\ell}\left(x_k-\overline{x}\right)\left(y_\ell-\overline{y}\right)}.$$

(c) *Rappeler les formules de Koenig-Huygens pour* $\mathrm{Var}(x)$, $\mathrm{Var}(y)$ *et* $\mathrm{Cov}(x,y)$.

▶ Les formules de Koenig-Huygens donnent :

$$\left\{\begin{array}{lcl}\mathrm{Var}(x) & = & \boxed{\overline{x^2}-\overline{x}^2} \\ \mathrm{Var}(y) & = & \boxed{\overline{y^2}-\overline{y}^2}\end{array}\right. \quad \text{et} \quad \mathrm{Cov}(x)=\boxed{\overline{xy}-\overline{x}\times\overline{y}}.$$

(d) *Prouver que* $\mathrm{Var}(x)=0$ *si et seulement si le caractère* x *est constant et rappeler la valeur de cette constante. On supposera désormais que* $\mathrm{Var}(x)\neq 0$.

▶ On suppose que $\mathrm{Var}(x)=0$. Puisque $0=n\mathrm{Var}(x)=\sum_{k=1}^{p} n_k^x\left(x_k-\overline{x}\right)^2$ est une somme de carrés (donc de nombres réels positifs), on en déduit que chaque terme de la somme est nulle c'est-à-dire : $\forall k\in\{1,2,\ldots,p\},\ n_k^x\left(x_k-\overline{x}\right)^2=0$ et par conséquent $x_k=\overline{x}$. Ainsi le caractère x est constant égal à $\overline{x}$. Réciproquement, on suppose que le caractère x est constant. Si on note $c\in\mathbb{R}$ cette constante, alors $\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{p} n_k^x c=\frac{c}{n}\sum_{k=1}^{p} n_k^x=\frac{c}{n}n=c$ puis $\mathrm{Var}(x)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{p} n_k^x\left(c-\overline{x}\right)^2=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{p} n_k^x\left(c-c\right)^2=0$. Finalement, on a montré que $\boxed{\mathrm{Var}(x)=0 \text{ si et seulement si le caractère } x \text{ est constant}}$. Et dans ce cas, on a également montré que x est égale à la constante $\boxed{\overline{x}}$.

2. ***Méthode des moindre carrés.*** *Pour tout couple* $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, *on désigne par* $\Delta_{a,b}$ *la droite du plan affine d'équation* $Y=aX+b$. *On cherche à déterminer la droite de régression affine qui minimise la moyenne des carrés des distances verticales de la droite* $\Delta_{a,b}$ *au nuage de point du couple* (x,y). *Plus précisément, on cherche à déterminer un minimum de la fonction :*

$$F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}_+,\,(a,b)\mapsto F(a,b)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{p}\sum_{\ell=1}^{q} n_{k,\ell}\Big(\left(ax_k+b\right)-y_\ell\Big)^2.$$

(a) *Montrer que* $\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2,\ F(a,b)=a^2\overline{x^2}+2ab\overline{x}+b^2-2a\overline{xy}-2b\overline{y}+\overline{y^2}$.

▶ Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. D'après les rappels de cours de la question 1, on a :

$$\begin{aligned}F(a,b) &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{p}\sum_{\ell=1}^{q} n_{k,\ell}\Big(\left(ax_k+b\right)-y_\ell\Big)^2 \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{p}\sum_{\ell=1}^{q} n_{k,\ell}\Big(\left(ax_k+b\right)^2-2\left(ax_k+b\right)y_\ell+y_\ell^2\Big) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{p}\sum_{\ell=1}^{q} n_{k,\ell}\Big(a^2x_k^2+2abx_k+b^2-2ax_ky_\ell-2by_\ell+y_\ell^2\Big) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{p}\sum_{\ell=1}^{q} a^2n_{k,\ell}x_k^2+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{p}\sum_{\ell=1}^{q} 2abn_{k,\ell}x_k+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{p}\sum_{\ell=1}^{q} b^2n_{k,\ell} \\ &\qquad -\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{p}\sum_{\ell=1}^{q} 2an_{k,\ell}x_ky_\ell-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{p}\sum_{\ell=1}^{q} 2bn_{k,\ell}y_\ell+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{p}\sum_{\ell=1}^{q} n_{k,\ell}y_\ell^2\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{a^2}{n}\sum_{k=1}^{p} n_k^x x_k^2 + \frac{2ab}{n}\sum_{k=1}^{p} n_k^x x_k + \frac{b^2}{n} n \\
&\qquad -\frac{2a}{n}\sum_{k=1}^{p}\sum_{\ell=1}^{q} n_{k,\ell} x_k y_\ell - \frac{2b}{n}\sum_{\ell=1}^{q} n_\ell^y y_\ell + \frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{q} n_\ell^y y_\ell^2 \\
&= \boxed{a^2\overline{x^2} + 2ab\overline{x} + b^2 - 2a\overline{xy} - 2b\overline{y} + \overline{y^2}}.
\end{aligned}
$$

(b) En déduire des expressions de $\frac{\partial F}{\partial a}(a,b)$ et $\frac{\partial F}{\partial b}(a,b)$ pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}^2$.

► Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. D'après le résultat précédent, on obtient les dérivées partielles suivantes :

$$\frac{\partial F}{\partial a}(a,b) = \boxed{2a\overline{x^2} + 2b\overline{x} - 2\overline{xy}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial b}(a,b) = \boxed{2a\overline{x} + 2b - 2\overline{y}}.$$

(c) Montrer que les équations $\frac{\partial F}{\partial a}(a,b) = 0$ et $\frac{\partial F}{\partial b}(a,b) = 0$ forment un système de Cramer et exprimer l'unique solution (A,B) en fonction $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\mathrm{Var}(x)$ et $\mathrm{Cov}(x,y)$.

► On a d'après les résultats précédents :

$$
\begin{aligned}
\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial a}(a,b) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial b}(a,b) = 0 \end{cases}
&\Leftrightarrow \begin{cases} 2a\overline{x^2} + 2b\overline{x} - 2\overline{xy} = 0 \\ 2a\overline{x} + 2b - 2\overline{y} = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 2\overline{x^2}a + 2\overline{x}b = 2\overline{xy} \\ 2\overline{x}a + 2b = 2\overline{y} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2\overline{x^2} & 2\overline{x} \\ 2\overline{x} & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\overline{xy} \\ 2\overline{y} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Or la matrice $M = \begin{pmatrix} 2\overline{x^2} & 2\overline{x} \\ 2\overline{x} & 2 \end{pmatrix}$ est inversible car

$$\det(M) = 2\overline{x^2}\times 2 - 2\overline{x}\times 2\overline{x} = 4\left(\overline{x^2} - \overline{x}^2\right) = 4\mathrm{Var}(x) \neq 0$$

donc $\boxed{\text{le système est de Cramer}}$. L'unique solution est donnée par :

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} &= M^{-1}\begin{pmatrix} 2\overline{xy} \\ 2\overline{y} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(M)}\begin{pmatrix} 2 & -2\overline{x} \\ -2\overline{x} & 2\overline{x^2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2\overline{xy} \\ 2\overline{y} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{4\mathrm{Var}(x)}\begin{pmatrix} 4\overline{xy} - 4\overline{x}\times\overline{y} \\ -4\overline{xy}\times\overline{x} + 4\overline{x^2}\times\overline{y} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\mathrm{Var}(x)}\begin{pmatrix} \mathrm{Cov}(x,y) \\ -\left(\mathrm{Cov(x,y)} + \overline{x}\times\overline{y}\right)\overline{x} + \left(\mathrm{Var}(x) + \overline{x}^2\right)\overline{y} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\mathrm{Var}(x)}\begin{pmatrix} \mathrm{Cov}(x,y) \\ -\mathrm{Cov(x,y)}\overline{x} + \mathrm{Var}(x)\overline{y} \end{pmatrix} \quad (\text{car } \overline{x}\times\overline{y}\times\overline{x} = \overline{x}^2\times\overline{y})
\end{aligned}
$$

c'est-à-dire $\boxed{A = \frac{\mathrm{Cov}(x,y)}{\mathrm{Var}(x)}}$ et $\boxed{B = \overline{y} - \frac{\mathrm{Cov}(x,y)}{\mathrm{Var}(x)}\overline{x}}$.

(d) Pour cette question, on fixe $a\in\mathbb{R}$. Etudier la fonction $f_a : \mathbb{R}\to\mathbb{R}_+, b\mapsto F(a,b)$ et en déduire que $\forall b\in\mathbb{R},\ f_a(b) \geqslant f_a(\overline{y} - a\overline{x})$.

► On fixe $a\in\mathbb{R}$ et on considère la fonction $f_a : \mathbb{R}\to\mathbb{R}_+, b\mapsto F(a,b)$. On a pour tout $b\in\mathbb{R}$:

$$f_a'(b) = \frac{\partial F}{\partial b}(a,b) = 2a\overline{x} + 2b - 2\overline{y} = 2\Big(b - (\overline{y} - a\overline{x})\Big).$$

Donc f_a est décroissante sur $]-\infty, \overline{y} - a\overline{x}]$ et croissante sur $[\overline{y} - a\overline{x}, +\infty[$. En particulier, f_a admet un minimum en $\overline{y} - a\overline{x}$ et donc $\boxed{\forall b\in\mathbb{R},\ f_a(b) \geqslant f_a(\overline{y} - a\overline{x})}$.

(e) Etudier la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+, a \mapsto f_a(\overline{y} - a\overline{x})$ et en déduire que $\forall a \in \mathbb{R},\ f(a) \geqslant f(A)$.

▶ On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+, a \mapsto f_a(\overline{y} - a\overline{x})$. On a pour tout $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcl} f(a) & = & f_a(\overline{y} - a\overline{x}) = F(a, \overline{y} - a\overline{x}) \\ & = & a^2\overline{x^2} + 2a(\overline{y} - a\overline{x})\overline{x} + (\overline{y} - a\overline{x})^2 - 2a\overline{xy} - 2(\overline{y} - a\overline{x})\overline{y} + \overline{y^2} \\ & = & a^2\overline{x^2} + 2a\overline{x} \times \overline{y} - 2a^2\overline{x}^2 + \overline{y}^2 - 2a\overline{x} \times \overline{y} + a^2\overline{x}^2 - 2a\overline{xy} - 2\overline{y}^2 + 2a\overline{x} \times \overline{y} + \overline{y^2} \\ & = & a^2\left(\overline{x^2} - \overline{x}^2\right) + 2a\left(\overline{x} \times \overline{y} - \overline{xy}\right) + \overline{y^2} - \overline{y}^2 \\ & = & a^2\mathrm{Var}(x) - 2a\mathrm{Cov}(x,y) + \mathrm{Var}(y), \end{array}$$

et donc :

$$f'(a) = 2a\mathrm{Var}(x) - 2\mathrm{Cov}(x,y) = 2\mathrm{Var}(x)\left(a - \frac{\mathrm{Cov}(x,y)}{\mathrm{Var}(x)}\right) = 2\mathrm{Var}(x)\left(a - A\right).$$

Ainsi f est décroissante sur $]-\infty, A]$ et croissante sur $[A, +\infty[$. En particulier, f admet un minimum en A et donc $\boxed{\forall a \in \mathbb{R},\ f(a) \geqslant f(A)}$.

(f) En déduire que $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ F(a,b) \geqslant F(A,B)$.

▶ D'après les résultats précédents, on a pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$:

$$F(a,b) = f_a(b) \geqslant f_a(\overline{y} - a\overline{x}) = f(a) \geqslant f(A) = f_A(\overline{y} - A\overline{x}) = F\left(A, \overline{y} - A\overline{x}\right) = F(A,B)$$

car $\overline{y} - A\overline{x} = \overline{y} - \frac{\mathrm{Cov}(x,y)}{\mathrm{Var}(x)}\overline{x} = B$. On a bien montré que $\boxed{\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ F(a,b) \geqslant F(A,B)}$.

(g) Conclure et vérifier que le point moyen du couple statistique (x,y) appartient à la droite de régression affine d'équation $Y = AX + B$.

▶ Par conséquent, le minimum de la fonction F est atteint au point (A,B) et la droite de régression affine qui correspond à ce minimum admet pour équation :

$$\boxed{Y = AX + B = \frac{\mathrm{Cov}(x,y)}{\mathrm{Var}(x)}X + \overline{y} - \frac{\mathrm{Cov}(x,y)}{\mathrm{Var}(x)}\overline{x} = \frac{\mathrm{Cov}(x,y)}{\mathrm{Var}(x)}\left(X - \overline{x}\right) + \overline{y}}.$$

En particulier le point moyen de coordonnées $(\overline{x}, \overline{y})$ appartient à cette droite de régression affine car $\overline{y} = \frac{\mathrm{Cov}(x,y)}{\mathrm{Var}(x)}\left(\overline{x} - \overline{x}\right) + \overline{y}$.

Cet exercice relativement facile fournit la démonstration d'un résultat admis dans le cours. Les principales difficultés sont de connaître les formules du cours (questions 1 et 2(a)), de savoir calculer des dérivées partielles (question 2(b)), de résoudre rapidement et efficacement des systèmes de deux équations linéaires à deux inconnues à l'aide des matrices (question 2(c)), et d'étudier des fonctions réelles (questions 2(d), 2(e) et 2(f)).

Exercice 3

Cet exercice propose d'étudier une suite de fractions rationnelles particulières, c'est-à-dire des fonctions définies comme quotients de deux fonctions polynomiales. Plus précisément, on considère les suites de polynômes $(P_n)_{n\geqslant 0}$ et $(Q_n)_{n\geqslant 0}$ définies par

$$\left\{\begin{array}{rcl} P_0 & = & 0 \\ Q_0 & = & 1 \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ \left\{\begin{array}{rcl} P_{n+1} & = & P_n + XQ_n \\ Q_{n+1} & = & Q_n - XP_n \end{array}\right.$$

et on note $(R_n)_{n\geqslant 0}$ la suite de fonctions définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ R_n : x \to \frac{P_n(x)}{Q_n(x)}$.

1. Déterminer R_0, R_1, R_2 et R_3 ainsi que leurs domaines de définition.

▶ On a :

— $P_0 = 0$ et $Q_0 = 1$ donc $\boxed{R_0 : x \mapsto \frac{0}{1} = 0}$ est définie sur tout $\boxed{\mathbb{R}}$;

— $P_1 = P_0 + XQ_0 = 0 + 1X = X$ et $Q_1 = Q_0 - XP_0 = 1 - 0X = 1$ donc $\boxed{R_1 : x \mapsto \frac{x}{1} = x}$ est définie sur tout $\boxed{\mathbb{R}}$;

— $P_2 = P_1 + XQ_1 = X + 1X = 2X$ et $Q_2 = Q_1 - XP_1 = 1 - XX = 1 - X^2$ donc $\boxed{R_2 : x \mapsto \frac{2x}{1-x^2} = \frac{2x}{(1-x)(1+x)}}$ est définie sur $\boxed{\mathbb{R} \setminus \{-1, +1\}}$;

— $P_3 = P_2 + XQ_2 = 2X + X(1-X^2) = X(3-X^2)$ et $Q_3 = Q_2 - XP_2 = (1-X^2) - 2XX = 1 - 3X^2$ donc $\boxed{R_3 : x \mapsto \frac{x(3-x^2)}{1-3x^2} = \frac{x(3-x^2)}{(1-\sqrt{3}x)(1+\sqrt{3}x)}}$ est définie sur $\boxed{\mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{\sqrt{3}}, +\frac{1}{\sqrt{3}}\}}$.

2. *Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le domaine de définition de R_n est de la forme $\mathbb{R} \setminus E_n$ où $E_n \subset \mathbb{R}$ est un ensemble fini de nombres réels.*

► Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque R_n est définie comme un quotient de polynômes, son domaine de définition correspond aux nombres réels x tels que le dénominateur est non nul, c'est-à-dire $Q_n(x) \neq 0$. Or Q_n est un polynôme donc l'ensemble de ses racines réelles est un ensemble fini (le nombre de ses racines est majoré par son degré). Donc, si on note $\boxed{E_n = \{x \in \mathbb{R} \,|\, Q_n(x) = 0\}}$ l'ensemble des racines réelles de Q_n, alors le domaine de définition de R_n est donné par $\mathbb{R} \setminus E_n$ où E_n est bien un ensemble fini de nombres réels.

3. *Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, les coefficients de P_n et Q_n sont des entiers relatifs.*

► On procède par récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note par $\mathcal{P}_n$ la proposition : «les coefficients de P_n et Q_n sont des entiers relatifs». Pour $n = 0$ on a $P_0 = 0$ et $Q_0 = 1$ donc $\mathcal{P}_0$ est vraie. On suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un certain entier $n \in \mathbb{N}$ fixé. On note $(a_k)_{k\geqslant 0}$ les coefficients de $P_n = \sum_{k\geqslant 0} a_k X^k$ et $(b_k)_{k\geqslant 0}$ ceux de $Q_n = \sum_{k\geqslant 0} b_k X^k$. On a donc $a_k \in \mathbb{Z}$ et $b_k \in \mathbb{Z}$ pour tout $k \geqslant 0$ par hypothèse de récurrence. De plus, on a :

$$\begin{aligned}
P_{n+1} &= P_n + XQ_n = \sum_{k\geqslant 0} a_k X^k + X \sum_{k\geqslant 0} b_k X^k = \sum_{k\geqslant 0} a_k X^k + \sum_{k\geqslant 0} b_k X^{k+1} \\
&= \sum_{k\geqslant 0} a_k X^k + \sum_{k\geqslant 1} b_{k-1} X^k = a_0 + \sum_{k\geqslant 1} (a_k + b_{k-1}) X^k \\
\text{et} \quad Q_{n+1} &= Q_n - XP_n = \sum_{k\geqslant 0} b_k X^k - X \sum_{k\geqslant 0} a_k X^k = \sum_{k\geqslant 0} b_k X^k - \sum_{k\geqslant 0} a_k X^{k+1} \\
&= \sum_{k\geqslant 0} b_k X^k - \sum_{k\geqslant 1} a_{k-1} X^k = b_0 - \sum_{k\geqslant 1} (b_k + a_{k-1}) X^k.
\end{aligned}$$

Puisque $a_k + b_{k-1} \in \mathbb{Z}$ et $b_k + a_{k-1} \in \mathbb{Z}$ pour tout $k \geqslant 1$, on en déduit que les coefficients de P_{n+1} et Q_{n+1} sont des entiers relatifs, ainsi $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie dès que $\mathcal{P}_n$ est vraie. Finalement $\boxed{\mathcal{P}_n \text{ est vraie pour tout } n \in \mathbb{N}}$ d'après le principe de récurrence.

On peut également n'introduire que les coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_{\deg(P_n)}$ de P_n (tous les autres sont nuls) et les coefficients $b_0, b_1, \ldots, b_{\deg(Q_n)}$ de Q_n (tous les autres sont nuls), mais dans ce cas il est beaucoup moins pratique d'écrire proprement les coefficients de P_{n+1} et Q_{n+1} (il faut distinguer deux cas : $\deg(P_n) < \deg(Q_n)$ ou $\deg(P_n) \geqslant \deg(Q_n)$).

4. *Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ Q_n + iP_n = (1 + iX)^n$.*

► On procède par récurrence. On a :

$$Q_0 + iP_0 = 1 + 0i = 1 \quad \text{et} \quad (1 + iX)^0 = 1$$

donc le résultat est vrai pour $n = 0$. On suppose que $Q_n + iP_n = (1 + iX)^n$ pour un certain entier $n \in \mathbb{N}$ fixé. On a alors :

$$\begin{aligned}
Q_{n+1} + iP_{n+1} &= (Q_n - XP_n) + i(P_n + XQ_n) = (Q_n + iP_n) + iX(Q_n + iP_n) \\
&= (Q_n + iP_n)(1 + iX) = (1 + iX)^n(1 + iX) = (1 + iX)^{n+1}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, $\boxed{Q_n + iP_n = (1 + iX)^n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}}$ d'après le principe de récurrence.

5. *Pour cette question, on fixe $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.*

(a) *Ecrire le nombre complexe $(1 + i\tan(\theta))^n$ sous forme algébrique.*

▶ On a $1 + i\tan(\theta) = 1 + i\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{1}{\cos(\theta)}\Big(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\Big) = \frac{1}{\cos(\theta)}e^{i\theta}$ donc

$$(1 + i\tan(\theta))^n = \frac{1}{\cos^n(\theta)}e^{in\theta} = \frac{1}{\cos^n(\theta)}\Big(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\Big) = \boxed{\frac{\cos(n\theta)}{\cos^n(\theta)} + i\frac{\sin(n\theta)}{\cos^n(\theta)}}.$$

Comme souvent avec les nombres complexes, cette question est assez astucieuse : il faut commencer par écrire $1 + i\tan(\theta)$ sous forme exponentielle pour pouvoir écrire ses puissances n-ièmes sous forme algébrique grâce à la formule de Moivre.

(b) *En déduire que $P_n(\tan(\theta)) = \frac{\sin(n\theta)}{\cos^n(\theta)}$ et $Q_n(\tan(\theta)) = \frac{\cos(n\theta)}{\cos^n(\theta)}$.*

▶ D'après les résultats précédents, on a :

$$\begin{aligned} P_n(\tan(\theta)) &= \operatorname{Im}\left(Q_n(\tan(\theta)) + iP_n(\tan(\theta))\right) = \operatorname{Im}\left((1 + i\tan(\theta))^n\right) \\ &= \operatorname{Im}\left(\frac{\cos(n\theta)}{\cos^n(\theta)} + i\frac{\sin(n\theta)}{\cos^n(\theta)}\right) = \boxed{\frac{\sin(n\theta)}{\cos^n(\theta)}} \\ \text{et} \quad Q_n(\tan(\theta)) &= \operatorname{Re}\left(Q_n(\tan(\theta)) + iP_n(\tan(\theta))\right) = \operatorname{Re}\left((1 + i\tan(\theta))^n\right) \\ &= \operatorname{Re}\left(\frac{\cos(n\theta)}{\cos^n(\theta)} + i\frac{\sin(n\theta)}{\cos^n(\theta)}\right) = \boxed{\frac{\cos(n\theta)}{\cos^n(\theta)}}. \end{aligned}$$

(c) *Justifier proprement que $E_n = \left\{\tan\left(\frac{m\pi}{2n}\right) \mid m \text{ entier impair tel quel } -n < m < n\right\}$.*

▶ D'après ce qu'on a vu à la question 2, E_n est l'ensemble des racines réelles de Q_n. On obtient donc d'après le résultat de la question précédente et en utilisant la bijection réciproque $\arctan : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$:

$$\begin{aligned} x \in E_n \quad &\Leftrightarrow \quad Q_n(x) = 0 \Leftrightarrow Q_n\left(\tan(\arctan(x))\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\cos(n\arctan(x))}{\cos^n(\arctan(x))} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \cos(n\arctan(x)) = 0 \Leftrightarrow n\arctan(x) \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi] \\ &\Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z},\ \arctan(x) = \frac{1}{n}\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = \frac{(1+2k)\pi}{2n} \\ &\Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z},\ x = \tan(\arctan(x)) = \tan\left(\frac{(1+2k)\pi}{2n}\right). \end{aligned}$$

Or $\arctan(x) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ donc l'entier $k \in \mathbb{Z}$ est tel que

$$-\frac{\pi}{2} < \frac{(1+2k)\pi}{2n} < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -n < 1 + 2k < n.$$

Finalement, en posant $m = 1 + 2k$ qui est un entier impair, on obtient :

$$\boxed{E_n = \left\{\tan\left(\frac{m\pi}{2n}\right) \mid m \text{ entier impair tel quel } -n < m < n\right\}}.$$

Soyez précis pour ce genre de questions. Le mot-clef ici est «bijection réciproque».

(d) *Montrer que $\forall \theta \in \left]-\frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{2n}\right[,\ R_n\left(\tan(\theta)\right) = \tan(n\theta)$.*

▶ Soit $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{2n}\right[$. On a d'après les résultats de la question 5(b) :

$$R_n(\tan(\theta)) = \frac{P_n(\tan(\theta))}{Q_n(\tan(\theta))} = \frac{\frac{\sin(n\theta)}{\cos^n(\theta)}}{\frac{\cos(n\theta)}{\cos^n(\theta)}} = \frac{\sin(n\theta)}{\cos(n\theta)} = \boxed{\tan(n\theta)}.$$

6. *Pour cette question, on fixe $n \in \mathbb{N}$ et on suppose qu'il existe deux polynômes $(P, Q) \in (\mathbb{R}[X])^2$ et une fraction rationnelle $R : x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$ telle que $\forall \theta \in \left]-\frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{2n}\right[,\ R(\tan(\theta)) = \tan(n\theta)$.*

   (a) *Montrer que $\forall \theta \in \left]-\frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{2n}\right[,\ (PQ_n - QP_n)(\tan(\theta)) = 0$.*

   ► Soit $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{2n}\right[$. D'après le résultat précédent, on a :

$$\frac{P(\tan(\theta))}{Q(\tan(\theta))} = R(\tan(\theta)) = \tan(n\theta) = R_n(\tan(\theta)) = \frac{P_n(\tan(\theta))}{Q_n(\tan(\theta))}.$$

   En multipliant cette égalité par $Q(\tan(\theta))Q_n(\tan(\theta))$ on obtient $P(\tan(\theta))Q_n(\tan(\theta)) = Q(\tan(\theta))P_n(\mathrm{t}$
   et donc $\boxed{(PQ_n - QP_n)(\tan(\theta)) = 0}$.

   (b) *En déduire que $PQ_n - QP_n = 0$ puis que $R = R_n$.*

   ►

   (c) Puisque P, Q, P_n et Q_n sont des polynômes, $PQ_n - QP_n$ aussi. Or le résultat précédent est vrai pour tout $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{2n}\right[$, autrement dit le polynôme $PQ_n - QP_n$ a une infinité de racines, c'est donc le polynôme nul : $\boxed{PQ_n - QP_n = 0}$. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus E_n$. En divisant l'égalité précédente par $Q(x)Q_n(x)$ on obtient :

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} = R_n(x)$$

   par conséquent $\boxed{R = R_n}$.

DS n$^{\text{o}}$ 7 de mathématiques

durée : 3 heures

Exercice 1

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^\star$, on considère la fonction $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in [0,1],\ f_n(x) = x^n - (1-x)^2.$$

1. Dans cette question, l'entier $n \in \mathbb{N}^\star$ est fixé.
   (a) Étudier la monotonie de la fonction f_n sur $[0,1]$.
   (b) Démontrer qu'il existe un unique $\alpha_n \in]0,1[$ tel que $f_n(\alpha_n) = 0$.
2. On considère maintenant la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$.
   (a) Déterminer le signe de $f_n(\alpha_{n+1})$ pour $n \in \mathbb{N}^\star$.
   (b) À l'aide des questions précédentes, démontrer que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est croissante.
   (c) En déduire que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est convergente.
   On notera $\alpha = \lim_{n\to+\infty} \alpha_n$.
   (d) Montrer que $\alpha \neq 0$.
   (e) Supposons que $0 < \alpha < 1$.
      i. Montrer qu'alors : $\lim_{n\to+\infty} \alpha_n^n = 0$.
      ii. À l'aide de la relation $f_n(\alpha_n) = 0$, en déduire que $(1-\alpha)^2 = 0$.
   (f) Conclure sur la valeur de α.

Exercice 2

Le but de cet exercice est de démontrer que toute fonction continue et injective sur $\mathbb{R}$ est strictement monotone. On suppose donc par l'absurde qu'il existe une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et injective telle que f n'est pas strictement monotone, c'est-à-dire telle qu'il existe quatre nombres réels a, b, a', b' avec $a < b$, $a' < b'$ et $(f(b) - f(a))(f(b') - f(a')) \leqslant 0$.

1. On considère la fonction $g_a : x \mapsto f(xa + (1-x)a')$. Montrer que g_a est continue sur $[0,1]$ et déterminer $g_a(0)$ et $g_a(1)$.
2. Déterminer une fonction g_b continue sur $[0,1]$ telle que $g_b(0) = f(b')$ et $g_b(1) = f(b)$.
3. Montrer qu'il existe $c \in [0,1]$ tel que $g_b(c) = g_a(c)$.
4. En rappelant que f est injective, montrer que $c(b-a) = -(1-c)(b'-a')$.
5. Conclure en étudiant le signe de $c(b-a)$.

Exercice 3

On considère la fonction suivante :

$$f : x \mapsto \left(\frac{x}{x-1}\right)^{x-1} - \left(\frac{x+1}{x}\right)^{x+1}.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f et étudier la continuité de f.
2. Montrer que f est impaire.
3. Montrer que f admet un prolongement par continuité en 1 et en -1.
4. Etudier la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

Exercice 4

Cet exercice propose d'étudier la transmission d'un gène par autopollinisation (ou autogamie) chez certaines plantes hermaphrodites (comme le pêcher) et de démontrer que ce mode de fécondation favorisé par l'agriculture est moins riche en diversité génétique que l'interpollinisation (ou allogamie, par exemple par les animaux ou le vent). On s'intéresse donc à un gène présent sous la forme de deux allèles notés a et A. On suppose que le gène est autosomique, ainsi chaque plante autogame peut être ou bien homozygote (de génotype aa ou AA) ou bien hétérozygote (de génotype aA). Par autogamie, une plante homozygote donne une plante homozygote de même génotype, alors qu'une plante hétérozygote donne des plantes aussi bien homozygotes (de génotype aa ou AA) qu'hétérozygotes (tout se passe comme la fécondation de deux plantes de même génotype). On suppose qu'un parent hétérozygote transmet l'allèle a ou A de façon équiprobable, et que les deux allèles transmis sont indépendants. De plus, on néglige les modifications d'information génétique par mutation. Partant d'une plante hétérozygote, on étudie une lignée de générations successives par autogamie. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on note aa_n, AA_n et aA_n les événements d'obtenir à la n-ième génération les génotypes aa, AA et aA respectivement, et x_n, y_n et z_n leur probabilité respective (donc $x_1 = y_1 = 0$ et $z_1 = 1$).

1. On fixe $n \in \mathbb{N}^\star$ pour cette question.
   (a) Montrer que la probabilité qu'un parent hétérozygote donne par autogamie une plante homozygote de génotype aa est $\frac{1}{4}$, celle de donner une plante homozygote de génotype AA est $\frac{1}{4}$, et celle de donner une plante hétérozygote de génotype aA est $\frac{1}{2}$. En déduire les probabilités conditionnelles $P_{aA_n}(aa_{n+1})$, $P_{aA_n}(AA_{n+1})$ et $P_{aA_n}(aA_{n+1})$.
   (b) Déterminer les probabilités conditionnelles $P_{aa_n}(aa_{n+1})$, $P_{aa_n}(AA_{n+1})$ et $P_{aa_n}(aA_{n+1})$, ainsi que $P_{AA_n}(aa_{n+1})$, $P_{AA_n}(AA_{n+1})$ et $P_{AA_n}(aA_{n+1})$.
   (c) Que peut-on dire des événements aa_n, AA_n et aA_n ?
   (d) Justifier précisément que $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{4}z_n$, $y_{n+1} = y_n + \frac{1}{4}z_n$ et $z_{n+1} = \frac{1}{2}z_n$.

   On va maintenant déterminer des expressions de x_n, y_n et z_n en fonction de $n \in \mathbb{N}^\star$ en utilisant deux méthodes différentes. Les questions 2 et 3 sont donc indépendantes.

2. (1^re^ méthode)
   (a) Exprimer z_n en fonction de $n \in \mathbb{N}^\star$.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer $\sum_{k=1}^{n-1}(x_{k+1} - x_k)$ de deux manières différentes et en déduire une expression de x_n en fonction de n.
   (c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^\star, x_n = y_n$ et en déduire une expression de y_n en fonction de n.

3. (2^e^ méthode) Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$.
   (a) Déterminer une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ X_{n+1} = MX_n$.
   (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ X_n = M^{n-1}X_1$
   (c) Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
   (d) Montrer que $P^{-1}MP$ est une matrice diagonale D qu'on précisera.
   (e) Exprimer M^{n-1} en fonction de P, P^{-1}, D et n.
   (f) En déduire des expressions de x_n, y_n et z_n en fonction de n.

4. À l'aide des résultats précédents, déterminer les limites de x_n, y_n et z_n lorsque n tend vers $+\infty$ et conclure en interprétant ces résultats.

Corrigé du DS n° 7 de mathématiques

Exercice 1

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^\star$, on considère la fonction $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in [0,1],\ \ f_n(x) = x^n - (1-x)^2.$$

1. *Dans cette question, l'entier $n \in \mathbb{N}^\star$ est fixé.*

   (a) *Étudier la monotonie de la fonction f_n sur $[0,1]$.*

   ▶ f_n est une fonction polynomiale donc continue et dérivable sur $[0,1]$. On a :

   $$\forall x \in [0,1],\ \ f_n'(x) = nx^{n-1} + 2(1-x).$$

   Or pour tout $x \in]0,1[$, $x^{n-1} > 0$ et $(1-x) > 0$ donc $f_n'(x) > 0$. Par conséquent $\boxed{f_n \text{ est strictement croissante sur } [0,1]}$.

   Le fait que $f_n'(x) > 0$ pour tout $x \in]0,1[$ est suffisant pour justifier que f_n est strictement croissante sur $[0,1]$ (quelles que soient les valeurs de $f_n(0)$ et $f_n(1)$).

   (b) *Démontrer qu'il existe un unique $\alpha_n \in]0,1[$ tel que $f_n(\alpha_n) = 0$.*

   ▶ f_n est continue sur $[0,1]$ avec $f_n(0) = -1 < 0$ et $f_n(1) = 1 > 0$ et f_n est strictement croissante sur $[0,1]$ d'après le résultat de la question précédente. D'après le théorème de la bijection continue, l'équation $f_n(x) = 0$ d'inconnue $x \in [0,1]$ admet $\boxed{\text{une unique solution } \alpha_n \in]0,1[}$.

2. *On considère maintenant la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$.*

   (a) *Déterminer le signe de $f_n(\alpha_{n+1})$ pour $n \in \mathbb{N}^\star$.*

   ▶ Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Puisque $f_{n+1}(\alpha_{n+1}) = 0$, on en déduit que $(1-\alpha_{n+1})^2 = \alpha_{n+1}^{n+1}$. On obtient donc :

   $$f_n(\alpha_{n+1}) = \alpha_{n+1}^n - (1-\alpha_{n+1})^2 = \alpha_{n+1}^n - \alpha_{n+1}^{n+1} = \alpha_{n+1}^n(1-\alpha_{n+1})\boxed{> 0} \quad (\text{car } \alpha_{n+1} \in]0,1[).$$

   (b) *À l'aide des questions précédentes, démontrer que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est croissante.*

   ▶ Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. D'après le résultat précédent, on a $f_n(\alpha_{n+1}) > 0 = f_n(\alpha_n)$. Or f_n est strictement croissante sur $[0,1]$ d'après le résultat de la question 1.(a), donc $\alpha_{n+1} > \alpha_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$. On en déduit que $\boxed{\text{la suite } (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^\star} \text{ est strictement croissante}}$.

   (c) *En déduire que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est convergente.*

   ▶ La suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est croissante d'après le résultat précédent et bornée par 1 (car $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $\alpha_n \in]0,1[$). On en déduit d'après le théorème de convergence monotone que $\boxed{\text{la suite } (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^\star} \text{ est convergente.}}$

   On notera $\alpha = \lim_{n\to+\infty} \alpha_n$.

   (d) *Montrer que $\alpha \neq 0$.*

   ▶ Puisque la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est croissante, on a : $\alpha \geqslant \alpha_1 > 0$ donc $\boxed{\alpha \neq 0}$.

   (e) *Supposons que $0 < \alpha < 1$.*

      i. *Montrer qu'alors : $\lim_{n\to+\infty} \alpha_n^n = 0$.*

      ▶ On a : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \alpha_n^n = \lim_{n\to+\infty} \exp(n\ln(\alpha_n)) = 0}$ car $\lim_{n\to+\infty} \ln(\alpha_n) = \ln(\alpha) < 0$ et $\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$.

      ii. *À l'aide de la relation $f_n(\alpha_n) = 0$, en déduire que $(1-\alpha)^2 = 0$.*

      ▶ Puisque $f_n(\alpha_n) = 0$, on en déduit que $(1-\alpha_n)^2 = \alpha_n^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$. En passant à la limite quand n tend vers $+\infty$, on obtient d'après le résultat de la question précédente : $\boxed{(1-\alpha)^2 = 0}$.

(f) Conclure sur la valeur de α.

▶ Puisque $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ \alpha_n \in]0,1[$, on a $\alpha \in [0,1]$. Or $\alpha \neq 0$ d'après le résultat de la question 2.(d). De plus, on a montré à la question précédente que si $\alpha \in]0,1[$ alors $(1-\alpha)^2 = 0$ ce qui est absurde. Il ne reste donc plus qu'une possibilité : $\boxed{\alpha = 1}$.

Attention à bien rédiger cette question. Il faut montrer qu'on a compris le raisonnement par l'absurde de la question précédente.

Exercice 2

Le but de cet exercice est de démontrer que toute fonction continue et injective sur $\mathbb{R}$ est strictement monotone. On suppose donc par l'absurde qu'il existe une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et injective telle que f n'est pas strictement monotone, c'est-à-dire telle qu'il existe quatre nombres réels a, b, a', b' avec $a < b$, $a' < b'$ et $(f(b) - f(a))(f(b') - f(a')) \leqslant 0$.

1. *On considère la fonction $g_a : x \mapsto f(xa + (1-x)a')$. Montrer que g_a est continue sur $[0,1]$ et déterminer $g_a(0)$ et $g_a(1)$.*

   ▶ On considère la fonction $g_a : x \mapsto f(xa+(1-x)a')$. Puisque $x \mapsto xa+(1-x)a' = a'+(a-a')x$ est continue en tant que fonction polynomiale, $\boxed{g_a \text{ est continue sur } [0,1]}$ comme composée de fonctions continues. De plus, $\boxed{g_a(0) = f(a')}$ et $\boxed{g_a(1) = f(a)}$.

2. *Déterminer une fonction g_b continue sur $[0,1]$ telle que $g_b(0) = f(b')$ et $g_b(1) = f(b)$.*

   ▶ En raisonnant comme à la question précédente, on montre que $\boxed{g_b : x \mapsto f(xb + (1-x)b')}$ est continue sur $[0,1]$ avec $g_b(0) = f(b')$ et $g_b(1) = f(b)$.

3. *Montrer qu'il existe $c \in [0,1]$ tel que $g_b(c) = g_a(c)$.*

   ▶ On considère la fonction $g : [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto g_b(x) - g_a(x)$. g est continue comme somme de fonctions continues. De plus $g(0) = f(b') - f(a')$ et $g(1) = f(b) - f(a)$, on en déduit d'après les hypothèses de l'énoncé que $g(0)g(1) \leqslant 0$, c'est-à-dire que $g(0)$ et $g(1)$ sont de signes opposés. Par conséquent il existe $c \in [0,1]$ tel que $g(c) = 0$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires, d'où $\boxed{g_b(c) = g_a(c)}$.

4. *En rappelant que f est injective, montrer que $c(b-a) = -(1-c)(b'-a')$.*

   ▶ Puisque $g_b(c) = g_a(c)$, on a $f(cb + (1-c)b') = f(ca + (1-c)a')$. Or f est injective, donc $cb + (1-c)b' = ca + (1-c)a'$ ce qui donne :

$$\boxed{c(b-a) = cb - ca = -(1-c)b' + (1-c)a' = -(1-c)(b'-a')}.$$

5. *Conclure en étudiant le signe de $c(b-a)$.*

   ▶ Puisque $c \in [0,1]$, $a < b$ et $a' < b'$, on a $c(b-a) \geqslant 0$ et $-(1-c)(b'-a') \leqslant 0$. D'après le résultat de la question précédente, on en déduit que $c(b-a) = 0 = -(1-c)(b'-a')$ et donc que $c = 0 = 1-c$ ce qui est absurde. Par conséquent, $\boxed{f \text{ est strictement monotone}}$ et ceci est vrai pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et injective.

Exercice 3

On considère la fonction suivante :

$$f : x \mapsto \left(\frac{x}{x-1}\right)^{x-1} - \left(\frac{x+1}{x}\right)^{x+1}.$$

1. *Déterminer l'ensemble de définition de f et étudier la continuité de f.*

   ▶ On a :

$$f : x \mapsto \exp\left((x-1)\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)\right) - \exp\left((x+1)\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)\right)$$

donc $f(x)$ est bien définie pour $\frac{x}{x-1} > 0$ et $\frac{x+1}{x} > 0$ (car $\mathcal{D}_{\exp} = \mathbb{R}$ et $\mathcal{D}_{\ln} = \mathbb{R}_+^\star$). A l'aide d'un tableau de signes, on obtient :

$$\frac{x}{x-1} > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[\quad \text{et} \quad \frac{x+1}{x} > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[.$$

Donc $\mathcal{D}_f = (]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[) \cap (]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[) = \boxed{]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[}$. De plus, $\boxed{f \text{ est continue sur } \mathcal{D}_f}$ comme somme, composées et quotients (de dénominateur non nul) de fonctions usuelles continues.

Attention : si $b \in \mathbb{R}$ alors $a^b = \exp(b\ln(a))$ est défini seulement pour $a > 0$.

2. *Montrer que f est impaire.*

▶ Le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f est symétrique par rapport à l'origine. De plus, on a pour tout $x \in \mathcal{D}_f$:

$$\begin{aligned}
f(-x) &= \left(\frac{-x}{-x-1}\right)^{-x-1} - \left(\frac{-x+1}{-x}\right)^{-x+1} \\
&= \left(\frac{x}{x+1}\right)^{-(x+1)} - \left(\frac{x-1}{x}\right)^{-(x-1)} \\
&= \left(\frac{x+1}{x}\right)^{x+1} - \left(\frac{x}{x-1}\right)^{x-1} \\
&= -f(x).
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{f \text{ est impaire}}$.

N'oubliez pas de préciser que le domaine de définition est symétrique par rapport à l'origine pour justifier qu'une fonction est paire ou impaire.

3. *Montrer que f admet un prolongement par continuité en 1 et en -1.*

▶ A l'aide du changement de variable $x = 1 + t$ on a :

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{t\to 0^+} f(1+t) = \lim_{t\to 0^+} \left(\frac{1+t}{t}\right)^t - \left(\frac{2+t}{1+t}\right)^{2+t}.$$

Or :

$$\begin{cases}
\lim_{t\to 0^+} \left(\frac{1+t}{t}\right)^t &= \lim_{t\to 0^+} \frac{\exp(t\ln(1+t))}{\exp(t\ln(t))} = \frac{\exp(0)}{\exp(0)} = 1 \\
\lim_{t\to 0^+} \left(\frac{2+t}{1+t}\right)^{2+t} &= \left(\frac{2}{1}\right)^2 = 4
\end{cases}$$

(car $\lim_{t\to 0^+} t\ln(t) = 0$ par croissance comparée), donc $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1 - 4 = -3$. On en déduit que f se prolonge par continuité en 1 en posant $\boxed{f(1) = -3}$. Et puisque f est impaire d'après le résultat de la question précédente, on en déduit que f se prolonge par continuité en -1 en posant $\boxed{f(-1) = -f(1) = 3}$.

Pensez à utiliser que f est impaire pour gagner du temps sur ce type de question.

4. *Etudier la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.*

▶ A l'aide du changement de variable $x = \frac{1}{t}$ on a :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{t\to 0^+} f\left(\frac{1}{t}\right) \\
&= \lim_{t\to 0^+} \left(\frac{1/t}{1/t-1}\right)^{1/t-1} - \left(\frac{1/t+1}{1/t}\right)^{1/t+1} \\
&= \lim_{t\to 0^+} \exp\left(\left(\frac{1}{t}-1\right)\ln\left(\frac{1}{1-t}\right)\right) - \exp\left(\left(\frac{1}{t}+1\right)\ln\left(\frac{1+t}{1}\right)\right).
\end{aligned}$$

Inutile de factoriser ici, il n'y a pas de formes indéterminées.

Or $\lim_{t\to 0^+} \frac{1}{1-t} = 1$ donc $\lim_{t\to 0^+} \frac{1}{1-t} - 1 = 0$ et par conséquent :

$$\ln\left(\frac{1}{1-t}\right) = \ln\left(1 + \left(\frac{1}{1-t} - 1\right)\right) \sim_{t\to 0^+} \left(\frac{1}{1-t} - 1\right) = \frac{t}{1-t} \sim_{t\to 0^+} \frac{t}{1} = t$$

(en utilisant l'équivalent en 0 d'une fraction rationnelle). De plus $\frac{1}{t} - 1 = \frac{1-t}{t} \sim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}$, donc :

$$\left(\frac{1}{t} - 1\right)\ln\left(\frac{1}{1-t}\right) \sim_{t\to 0^+} \frac{1}{t} \times t = 1$$

et par conséquent :

$$\lim_{t\to 0^+} \exp\left(\left(\frac{1}{t} - 1\right)\ln\left(\frac{1}{1-t}\right)\right) = \exp(1) = e.$$

D'autre part, on a :

$$\left(\frac{1}{t} + 1\right)\ln\left(\frac{1+t}{1}\right) = \left(\frac{1}{t} + 1\right)\ln(1+t) \sim_{t\to 0^+} \frac{1}{t} \times t = 1$$

et par conséquent :

$$\lim_{t\to 0^+} \exp\left(\left(\frac{1}{t} + 1\right)\ln\left(\frac{1+t}{1}\right)\right) = \exp(1) = e.$$

Finalement, $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = e - e = 0}$. Et puisque f est impaire d'après le résultat de la question 2, on en déduit que $\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0}$.

Comme à la question précédente, pensez à utiliser que f est impaire.

Exercice 4

Cet exercice propose d'étudier la transmission d'un gène par autopollinisation (ou autogamie) chez certaines plantes hermaphrodites (comme le pêcher) et de démontrer que ce mode de fécondation favorisé par l'agriculture est moins riche en diversité génétique que l'interpollinisation (ou allogamie, par exemple par les animaux ou le vent). On s'intéresse donc à un gène présent sous la forme de deux allèles notés a et A. On suppose que le gène est autosomique, ainsi chaque plante autogame peut être ou bien homozygote (de génotype aa ou AA) ou bien hétérozygote (de génotype aA). Par autogamie, une plante homozygote donne une plante homozygote de même génotype, alors qu'une plante hétérozygote donne des plantes aussi bien homozygotes (de génotype aa ou AA) qu'hétérozygotes (tout se passe comme la fécondation de deux plantes de même génotype). On suppose qu'un parent hétérozygote transmet l'allèle a ou A de façon équiprobable, et que les deux allèles transmis sont indépendants. De plus, on néglige les modifications d'information génétique par mutation. Partant d'une plante hétérozygote, on étudie une lignée de générations successives par autogamie. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on note aa_n, AA_n et aA_n les événements d'obtenir à la n-ième génération les génotypes aa, AA et aA respectivement, et x_n, y_n et z_n leur probabilité respective (donc $x_1 = y_1 = 0$ et $z_1 = 1$).

1. *On fixe $n \in \mathbb{N}^\star$ pour cette question.*

   (a) *Montrer que la probabilité qu'un parent hétérozygote donne par autogamie une plante homozygote de génotype aa est $\frac{1}{4}$, celle de donner une plante homozygote de génotype AA est $\frac{1}{4}$, et celle de donner une plante hétérozygote de génotype aA est $\frac{1}{2}$. En déduire les probabilités conditionnelles $P_{aA_n}(aa_{n+1})$, $P_{aA_n}(AA_{n+1})$ et $P_{aA_n}(aA_{n+1})$.*

   ▶ Puisque l'autogamie se passe comme la fécondation de deux plantes de même génotype, on peut supposer qu'on part de deux parents hérérozygotes de génotype aA que l'on note H et H'. On note a (respectivement a') l'événement que H (respectivement H') transmet l'allèle a, et A (respectivement A') l'événement que H (respectivement H') transmet l'allèle A. On a donc les événements suivants :

— $a \cap a'$: obtenir une plante homozygote de génotype aa ;
— $A \cap A'$: obtenir une plante homozygote de génotype AA ;
— $(a \cap A') \cup (A \cap a')$: obtenir une plante hétérozygote de génotype aA.

Puisque une plante hétérozygote transmet l'allèle a ou A de façon équiprobable, on a $P(a) = P(A) = \frac{1}{2}$ et $P(a') = P(A') = \frac{1}{2}$. Et puisque les deux allèles transmis par une plante hétérozygote sont indépendants, on obtient :

— $P(a \cap a') = P(a)P(a') = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \boxed{\dfrac{1}{4}}$;
— $P(A \cap A') = P(A)P(A') = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \boxed{\dfrac{1}{4}}$;
— $P((a \cap A') \cup (A \cap a')) = P(a \cap A') + P(A \cap a')$ (car les événements $a \cap A'$ et $A \cap a'$ sont incompatibles) donc $P((a \cap A') \cup (A \cap a')) = P(a)P(A') + P(A)P(a') = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \boxed{\dfrac{1}{2}}$.

Enfin, puisqu'on néglige les modifications d'information génétique par mutation, on obtient à chaque génération :

$$P_{aA_n}(aa_{n+1}) = P(a \cap a') = \boxed{\frac{1}{4}},\ P_{aA_n}(AA_{n+1}) = P(A \cap A') = \boxed{\frac{1}{4}},$$
$$P_{aA_n}(aA_{n+1}) = P((a \cap A') \cup (A \cap a')) = \boxed{\frac{1}{2}}.$$

(b) *Déterminer les probabilités conditionnelles $P_{aa_n}(aa_{n+1})$, $P_{aa_n}(AA_{n+1})$ et $P_{aa_n}(aA_{n+1})$, ainsi que $P_{AA_n}(aa_{n+1})$, $P_{AA_n}(AA_{n+1})$ et $P_{AA_n}(aA_{n+1})$.*

▶ De même, on obtient d'après les hypothèses de l'énoncé :

$$P_{aa_n}(aa_{n+1}) = \boxed{1},\ P_{aa_n}(AA_{n+1}) = \boxed{0},\ P_{aa_n}(aA_{n+1}) = \boxed{0}$$
$$P_{AA_n}(aa_{n+1}) = \boxed{0},\ P_{AA_n}(AA_{n+1}) = \boxed{1},\ P_{AA_n}(aA_{n+1}) = \boxed{0}.$$

(c) *Que peut-on dire des événements aa_n, AA_n et aA_n ?*

▶ Les événements aa_n, AA_n et aA_n sont deux à deux incompatibles et leur union forme l'ensemble de tous les génotypes possibles. Ces trois événements forment donc $\boxed{\text{un système complet d'événe}}$

(d) *Justifier précisément que $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{4}z_n$, $y_{n+1} = y_n + \frac{1}{4}z_n$ et $z_{n+1} = \frac{1}{2}z_n$.*

▶ Puisque aa_n, AA_n et aA_n forment un système complet d'événements (résultat précédent), on obtient d'après la formule des probabilités totales et en utilisant les résultats des questions 1.(a) et 1.(b) :

$$\begin{aligned}
x_{n+1} &= P(aa_{n+1}) \\
&= P_{aa_n}(aa_{n+1})P(aa_n) + P_{AA_n}(aa_{n+1})P(AA_n) + P_{aA_n}(aa_{n+1})P(aA_n) \\
&= 1 \times x_n + 0 \times y_n + \frac{1}{4} \times z_n = \boxed{x_n + \frac{1}{4}z_n}; \\
y_{n+1} &= P(AA_{n+1}) \\
&= P_{aa_n}(AA_{n+1})P(aa_n) + P_{AA_n}(AA_{n+1})P(AA_n) + P_{aA_n}(AA_{n+1})P(aA_n) \\
&= 0 \times x_n + 1 \times y_n + \frac{1}{4} \times z_n = \boxed{y_n + \frac{1}{4}z_n}; \\
z_{n+1} &= P(aA_{n+1}) \\
&= P_{aa_n}(aA_{n+1})P(aa_n) + P_{AA_n}(aA_{n+1})P(AA_n) + P_{aA_n}(aA_{n+1})P(aA_n) \\
&= 0 \times x_n + 0 \times y_n + \frac{1}{2} \times z_n = \boxed{\frac{1}{2}z_n}.
\end{aligned}$$

On va maintenant déterminer des expressions de x_n, y_n et z_n en fonction de $n \in \mathbb{N}^\star$ en utilisant deux méthodes différentes. Les questions 2 et 3 sont donc indépendantes.

2. *(1re méthode)*

(a) *Exprimer z_n en fonction de $n \in \mathbb{N}^\star$.*

▶ D'après le résultat de la question précédente, $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

On en déduit donc que $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ z_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} z_1 = \boxed{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$ (car $z_1 = 1$).

Attention : la raison est élevée à la puissance $n-1$ ici car le premier terme est z_1 (si le premier terme est de rang 0, on élève à la puissance n).

(b) *Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer $\sum_{k=1}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)$ de deux manières différentes et en déduire une expression de x_n en fonction de n.*

▶ Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n-1}(x_{k+1}-x_k) &= \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{4}z_k \quad \text{(d'après le résultat de la question 1.(d))}\\
&= \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \quad \text{(d'après le résultat de la question précédente)}\\
&= \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n-2}\left(\frac{1}{2}\right)^{k} \quad \text{(par linéarité et changement d'indice)}\\
&= \frac{1}{4}\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{2}} \quad \text{(somme des termes d'une suite géométrique)}\\
&= \boxed{\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}}.
\end{aligned}$$

De plus, on reconnait une somme télescopique :

$$\sum_{k=1}^{n-1}(x_{k+1}-x_k) = \sum_{k=1}^{n-1}x_{k+1} - \sum_{k=1}^{n-1}x_k = \sum_{k=2}^{n}x_k - \sum_{k=1}^{n-1}x_k = x_n + \sum_{k=2}^{n-1}x_k - \sum_{k=2}^{n-1}x_k - x_1 = \boxed{x_n - x_1}.$$

Puisque $x_1 = 0$, on en déduit que $\boxed{x_n = \frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^n}$.

(c) *Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^\star, x_n = y_n$ et en déduire une expression de y_n en fonction de n.*

▶ Démontrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^\star, x_n = y_n$. Pour $n = 1$, le résultat est vrai car $x_1 = y_1 = 0$. On suppose que $x_n = y_n$ pour un entier $n \in \mathbb{N}^\star$ fixé. Alors on a d'après les résultats de la question 1.(d) :

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{4}z_n = y_n + \frac{1}{4}z_n = y_{n+1}.$$

Le résultat est donc héréditaire pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ puis on conclut d'après le principe de récurrence. Par conséquent, on en déduit d'après le résultat de la question précédente que $\boxed{y_n = \frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.

3. *(2e méthode) Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$.*

(a) *Déterminer une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ X_{n+1} = MX_n$.*

▶ D'après les résultats de la question 1.(d), on a pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$:

$$\left\{\begin{array}{rcccccc} x_{n+1} &=& x_n & & &+& \frac{1}{4}z_n \\ y_{n+1} &=& & & y_n &+& \frac{1}{4}z_n \\ z_{n+1} &=& & & & & \frac{1}{2}z_n \end{array}\right. \iff \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire $X_{n+1} = MX_n$ avec $\boxed{M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}}$.

(b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ X_n = M^{n-1}X_1$

▶ Démontrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ X_n = M^{n-1}X_1$. Pour $n = 1$, le résultat est vrai car $M^{1-1} = M^0 = I_3$. On suppose que $X_n = M^{n-1}X_1$ pour un entier $n \in \mathbb{N}^\star$ fixé. On a donc d'après le résultat de la question précédente :

$$X_{n+1} = MX_n = M \times (M^{n-1}X_1) = (M \times M^{n-1})X_1 = M^nX_1 = M^{(n+1)-1}X_1$$

par associativité du produit matriciel. Le résultat est donc héréditaire pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ puis on conclut $\boxed{\text{d'après le principe de récurrence}}$.

(c) Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.

▶ La matrice P est inversible car elle est échelonnée et de rang 3. D'après la méthode du pivot de Gauss, on a :

$$\begin{array}{rcl}
P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & L_3 \leftarrow -\frac{1}{2}L_3 & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} \\
I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \end{array} & \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} = P^{-1}}.
\end{array}$$

(d) Montrer que $P^{-1}MP$ est une matrice diagonale D qu'on précisera.

▶ On a :

$$\begin{aligned}
P^{-1}MP &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Ainsi $P^{-1}MP$ est égale à la matrice diagonale $\boxed{D = \text{diag}\left(1, 1, \frac{1}{2}\right)}$.

(e) Exprimer M^{n-1} en fonction de P, P^{-1}, D et n.

▶ Puisque $P^{-1}MP = D$, on en déduit que $M = PDP^{-1}$ (en multipliant à gauche par P et à droite par P^{-1}). Puis en utilisant l'associativité du produit matriciel, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$:

$$\begin{aligned}
M^{n-1} &= (PDP^{-1})^{n-1} \\
&= \underbrace{(PDP^{-1})(PDP^{-1})(PDP^{-1})\dots(PDP^{-1})(PDP^{-1})}_{(n-1) \text{ fois}} \\
&= P\,\underbrace{D(P^{-1}P)D(P^{-1}P)D(P^{-1}P)\dots D(P^{-1}P)}_{(n-2) \text{ fois}}\,DP^{-1} \\
&= PD^{n-2}DP^{-1} \quad (\text{car } D(P^{-1}P) = DI_3 = D) \\
&= \boxed{PD^{n-1}P^{-1}}.
\end{aligned}$$

(f) En déduire des expressions de x_n, y_n et z_n en fonction de n.

► D'après les résultats des questions précédentes, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} &= X_n = M^{n-1}X_1 = PD^{n-1}P^{-1}X_1 \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1/2)^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -(1/2)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 - (1/2)^n \\ 1/2 - (1/2)^n \\ (1/2)^{n-1} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

On en déduit que $\boxed{x_n = y_n = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^n}$ et $\boxed{z_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$.

4. *À l'aide des résultats précédents, déterminer les limites de x_n, y_n et z_n lorsque n tend vers $+\infty$ et conclure en interprétant ces résultats.*

► Puisque $\frac{1}{2} \in]-1, 1[$, on a $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$. On en déduit d'après les résultats précédents que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} y_n = \frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \boxed{\lim_{n\to+\infty} z_n = 0}.$$

Ainsi, en partant d'un parent hétérozygote, la probabilité d'obtenir une plante hétérozygote après un grand nombre de fécondations autogames tend vers 0 alors que celle d'obtenir une plante homozygote (de génotype aa ou AA) tend vers 1. $\boxed{\text{L'autogamie ne favorise donc pas la diversité génétique}}$.

DS n° 8 de mathématiques

durée : 3 heures

Exercice 1

On considère la fonction $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = \dfrac{e^x}{x}$.

1. Dresser le tableau des variations de f.
2. Discuter du nombre de solutions de l'équation $f(x) = a$ d'inconnue $x \in]0, +\infty[$ en fonction des différentes valeurs du paramètre $a \in \mathbb{R}$.
3. Justifier que les restrictions de f sur deux intervalles maximaux à déterminer sont bijectives. On notera g_1 et g_2 les bijections réciproques correspondantes.
4. En donnant une définition par morceaux en fonction de f, g_1 et g_2, montrer qu'il existe une fonction $\varphi :]0, +\infty[\to]0, +\infty[$ telle que :
$$\forall (x, y) \in]0, +\infty[^2, \quad \varphi(x) = y \Leftrightarrow \Big[\big(x = y = 1\big) \text{ ou } \big(x \neq y \text{ et } f(x) = f(y)\big) \Big].$$
5. Etudier la continuité de φ.
6. Dresser le tableau des variations de φ.
7. Que peut-on dire de $\varphi \circ \varphi$?
8. Montrer que φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star \setminus \{1\}$ et exprimer sa dérivée φ' en fonction de φ.
9. Donner un équivalent de $f(x) - f(1)$ lorsque $x \to 1$ et en déduire que φ est dérivable en 1.
10. La fonction φ est-elle de classe $\mathcal{C}^1$?

Exercice 2

On considère la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto g(x) = \dfrac{x}{1 + e^x}$.

1. Etudier la régularité de g.
2. Montrer qu'il existe un unique nombre réel a tel que $g'(a) = 0$.
3. Etablir que $a \in]1, 2[$ et que $g(a) = a - 1$.
4. Dresser le tableau des variations de g.
5. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de g au point d'abscisse 0 et étudier la position relative de la courbe par rapport à cette tangente.
6. Montrer que la courbe représentative de g admet des droites asymptotes aux voisinages de $+\infty$ et $-\infty$ (dont on donnera les équations) et étudier la position relative de la courbe par rapport à ces asymptotes.
7. En utilisant les résultats précédents, représenter schématiquement l'allure de la courbe représentative de g sur un dessin (sur lequel on fera apparaître les éléments utiles au tracé).

On considère maintenant la fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto h(x) = 1 + e^{-x}$ et la suite réelle $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $a_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = h(a_n)$. On admet que $2,30 < \ln(10) < 2,31$.

8. Prouver que a est l'unique solution de l'équation $h(x) = x$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
9. Justifier que $0 < a - 1 < \frac{1}{e}$.
10. Montrer que pour tout $x \geqslant 1$: $h(x) \geqslant 1$, $-\frac{1}{e} \leqslant h'(x) \leqslant 0$ et $|h(x) - a| \leqslant \frac{1}{e}$.
11. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_n \geqslant 1$ et $|a_n - a| \leqslant e^{-(n+1)}$.
12. Conclure que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
13. Proposer, sans la calculer, une valeur approchée de a à 10^{-3} près.

Exercice 3

Afin de concevoir un exercice de cinématique sur un jongleur maladroit, une enseignante de sciences physiques a besoin de calculer un développement limité. Malheureusement, elle commet de nombreuses erreurs. Aidez-la à corriger son calcul avant que son collègue de mathématiques ne s'en aperçoive (toute ressemblance avec des personnages réels serait purement fortuite).

Calcul du développement limité de $\sqrt{1+e^{-x}}$ à l'ordre 3 pour des petites valeurs de x.

J'utilise les développements usuels :

$$\begin{cases} e^{u} = 1 + u + \dfrac{u^2}{2} + \dfrac{u^3}{3} + o(u^3) \\ \sqrt{1+v} = 1 + \dfrac{v}{2} - \dfrac{v^2}{8} + o(v^2) \end{cases}$$

Avec $u = -x$ j'obtiens :

$$e^{-x} = 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

Avec $v = e^{-x}$ j'obtiens :

$$\sqrt{1+e^{-x}} = 1 + \frac{1}{2}\left(1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) - \frac{1}{8}\left(1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)^2$$

$$\sqrt{1+e^{-x}} = \frac{3}{2} - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - \frac{1}{8}\left(1 - 2x - x^2 - \frac{2x^3}{3} + o(x^3)\right)$$

$$\sqrt{1+e^{-x}} = \frac{11}{8} - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{12} + o(x^3)$$

1) Donner le nombre de fautes commises dans le calcul, et pour chacune d'entre elles expliquer brièvement quelle est l'erreur.

2) Calculer vous-mêmes le développement limité recherché.

Corrigé du DS n° 8 de mathématiques

Exercice 1

On considère la fonction $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = \dfrac{e^x}{x}$.

1. *Dresser le tableau des variations de f.*

   ▶ La fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus, $\forall x \in]0,+\infty[,\ f'(x) = \frac{e^x x - e^x}{x^2} = \frac{e^x}{x^2}(x-1)$. Puisque $\frac{e^x}{x^2} > 0$ pour tout $x > 0$, on en déduit que f' est du signe de $x \mapsto x-1$, d'où le tableau des variations de f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	e	↗	$+\infty$

   car $\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x}{x} = +\infty$ (car $\frac{e^x}{x} \sim_{x\to 0} \frac{1}{x}$) et $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ par croissances comparées.

2. *Discuter du nombre de solutions de l'équation $f(x) = a$ d'inconnue $x \in]0,+\infty[$ en fonction des différentes valeurs du paramètre $a \in \mathbb{R}$.*

   ▶ Puisque f est continue sur $]0,+\infty[$, strictement décroissante sur $]0,1]$ et strictement croissante sur $[1,+\infty[$, on en déduit d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires que l'équation $f(x) = a$ d'inconnue $x \in]0,+\infty[$ a :
   - $\boxed{\text{zéro solution si } a \in]-\infty, e[}$;
   - $\boxed{\text{une seule solution si } a = e}$;
   - $\boxed{\text{exactement deux solutions si } a \in]e,+\infty[}$.

   Les solutions de l'équation $f(x) = a$ sont les antécédents de a par f (par définition).

3. *Justifier que les restrictions de f sur deux intervalles maximaux à déterminer sont bijectives. On notera g_1 et g_2 les bijections réciproques correspondantes.*

   ▶ D'après le théorème de la bijection et les variations de f obtenues à la question 1, les restrictions $\boxed{f|_{]0,1]} :]0,1] \to [e,+\infty[}$ et $\boxed{f|_{[1,+\infty[} : [1,+\infty[\to [e,+\infty[}$ sont bijectives. On note $\boxed{g_1 : [e,+\infty[\to]0,1]}$ et $\boxed{g_2 : [e,+\infty[\to [1,+\infty[}$ les bijections réciproques correspondantes.

   On remarque que si $a \in]e,+\infty[$, alors $g_1(a)$ et $g_2(a)$ sont les deux solutions de l'équation $f(x) = a$, autrement dit $g_1(a)$ est l'unique antécédent de a par f dans $]0,1[$ et $g_2(a)$ est l'unique antécédent de a par f dans $]1,+\infty[$.

4. *En donnant une définition par morceaux en fonction de f, g_1 et g_2, montrer qu'il existe une fonction $\varphi :]0,+\infty[\to]0,+\infty[$ telle que :*

$$\forall (x,y) \in]0,+\infty[^2, \quad \varphi(x) = y \Leftrightarrow \Big[\big(x = y = 1\big) \text{ ou } \big(x \neq y \text{ et } f(x) = f(y)\big) \Big].$$

   ▶ On suppose qu'il existe une fonction $\varphi :]0,+\infty[\to]0,+\infty[$ telle que :

$$\forall (x,y) \in]0,+\infty[^2, \quad \varphi(x) = y \Leftrightarrow \Big[\big(x = y = 1\big) \text{ ou } \big(x \neq y \text{ et } f(x) = f(y)\big) \Big].$$

   Soit $(x,y) \in]0,+\infty[^2$ tel que $\varphi(x) = y$. On considère trois cas.

1^er^ cas : $x\in]0,1[$. Alors $x\neq y$ et $f(x)=f(y)$. Puisque $a=f(x)\in]e,+\infty[$ admet exactement deux antécédents par f, ces deux antécédents sont $x=g_1(a)\in]0,1[$ et $y=g_2(a)\in]1,+\infty[$ (car $y\neq x$ et $f(y)=f(x)=a$). En particulier, $\varphi(x)=y=g_2(f(x))$.

2^e^ cas : $x=1$. Alors $x=y=1$. En particulier, $\varphi(1)=1$.

3^e^ cas : $x\in]1,+\infty[$. Alors $x\neq y$ et $f(x)=f(y)$. Puisque $a=f(x)\in]e,+\infty[$ admet exactement deux antécédents par f, ces deux antécédents sont $x=g_2(a)\in]1,+\infty[$ et $y=g_1(a)\in]0,1[$ (car $y\neq x$ et $f(y)=f(x)=a$). En particulier, $\varphi(x)=y=g_1(f(x))$.

La partie de la réponse ci-dessus constitue l'analyse. Il n'est pas nécessaire de la faire apparaître sur votre copie, mais c'est cette analyse qui permet d'obtenir la définition par morceaux de la fonction $\varphi:]0,+\infty[\to]0,+\infty[$ demandée par l'énoncé. Par contre, la partie de la réponse ci-dessous, la synthèse, doit apparaître sur votre copie puisque c'est cette synthèse qui fournit explicitement la définition par morceaux de la fonction $\varphi:]0,+\infty[\to]0,+\infty[$ demandée par l'énoncé.

On définit par morceaux la fonction $\varphi:]0,+\infty[\to]0,+\infty[$ suivante :

$$\boxed{\varphi:x\mapsto\begin{cases}g_2(f(x)) & \text{si} \quad x\in]0,1[\\ 1 & \text{si} \quad x=1\\ g_1(f(x)) & \text{si} \quad x\in]1,+\infty[\end{cases}}.$$

Attention ici : $g_1(f(x))\neq x$ et $g_2(f(x))\neq x$ même si g_1 et g_2 sont des bijections réciproques de f. En fait, on a précisément que $g_1:[e,+\infty[\to]0,1]$ est la bijection réciproque de $f|_{]0,1]}:]0,1]\to[e,+\infty[$. Donc $g_1(f(x))=x$ si $x\in]0,1]$ (c'est-à-dire $g_1\circ f=\mathrm{Id}_{]0,1]}$), mais $g_1(f(x))\neq x$ si $x\in]1,+\infty[$. De même pour $g_2(f(x))=x$ si $x\in[1,+\infty[$ (c'est-à-dire $g_2\circ f=\mathrm{Id}_{[1,+\infty[}$), mais $g_2(f(x))\neq x$ si $x\in]0,1[$.

Vérifions que cette fonction φ vérifie la propriété de l'énoncé. Puisque cette propriété est une équivalence, on doit vérifier deux implications.

Sens direct. Soit $(x,y)\in]0,+\infty[^2$ tel que $\varphi(x)=y$. On considère deux cas.

1^er^ cas : $x=1$. Alors $y=\varphi(x)=\varphi(1)=1$ par définition de la fonction φ. En résumé, $x=y=1$ dans ce cas.

2^e^ cas : $x\neq 1$. Alors $x\in]0,1[\cup]1,+\infty[$. Si $x\in]0,1[$ alors $y=\varphi(x)=g_2(f(x))\in]1,+\infty[$ par définition des fonctions φ et g_2, donc $y\neq x$ et $f(y)=f(g_2(f(x)))=f(x)$ (car $f\circ g_2=\mathrm{Id}_{[e,+\infty[}$). De même, si $x\in]1,+\infty[$ alors $y=\varphi(x)=g_1(f(x))\in]0,1[$ par définition des fonctions φ et g_1, donc $y\neq x$ et $f(y)=f(g_1(f(x)))=f(x)$ (car $f\circ g_1=\mathrm{Id}_{[e,+\infty[}$). En résumé, $x\neq y$ et $f(x)=f(y)$ dès que $x\neq 1$.

Finalement, si $\varphi(x)=y$ alors $(x=y=1)$ ou $(x\neq y$ et $f(x)=f(y))$.

Sens réciproque. Soit $(x,y)\in]0,+\infty[^2$ tel que $(x=y=1)$ ou $(x\neq y$ et $f(x)=f(y))$.

1^er^ cas : $x=y=1$. Alors $\varphi(x)=\varphi(1)=1=y$ par définition de la fonction φ.

2^e^ cas : $x\neq y$ et $f(x)=f(y)$. Alors x et y sont les deux antécédents de $a=f(x)\in]e,+\infty[$ par f. Or ces deux antécédents sont $g_1(a)\in]0,1[$ et $g_2(a)\in]1,+\infty[$. Si $x=g_1(a)\in]0,1[$ alors $y=g_2(a)=g_2(f(x))=\varphi(x)$. Si $x=g_2(a)\in]1,+\infty[$ alors $y=g_1(a)=g_1(f(x))=\varphi(x)$. Par conséquent, $y=\varphi(x)$ dès que $x\neq y$ et $f(x)=f(y)$.

Finalement, $\varphi(x)=y$ dans tous les cas.

La fonction $\varphi:]0,+\infty[\to]0,+\infty[$ définie plus haut vérifie donc bien la propriété :

$$\boxed{\forall(x,y)\in]0,+\infty[^2,\quad \varphi(x)=y\Leftrightarrow\Big[\Big(x=y=1\Big)\text{ ou }\Big(x\neq y\text{ et }f(x)=f(y)\Big)\Big]}.$$

Cette question était un peu difficile car très abstraite. Il faut bien comprendre la signification de la propriété ci-dessus avant d'essayer de répondre. Mais en résumé, la fonction φ est tout simplement la fonction qui associe à chaque $x \in]0,+\infty[$ le deuxième antécédent de $f(x)$ par f. Autrement dit, les antécédents de $f(x)$ par f sont les éléments de $\{g_1(f(x)), g_2(f(x))\} = \{x, \varphi(x)\}$. Si on fait le même exercice avec la fonction de départ $f : x \mapsto x^2$, on obtiendrait la fonction $\varphi : x \mapsto -x$.

5. *Etudier la continuité de φ.*

▶ La fonction f est continue sur $]0,+\infty[$ car elle est dérivable (voir la question 1), les fonctions g_1 et g_2 sont continues sur $[e,+\infty[$ comme bijections réciproques de fonctions continues (voir la question 3). Donc φ est continue sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$ comme composée de fonctions continues (voir la question 4). Pour la continuité de φ en 1, on a :

$$\lim_{x\to 1} f(x) = f(1) = e \quad \text{et} \quad \begin{cases} \lim\limits_{y\to e} g_1(y) = g_1(e) = 1 \\ \lim\limits_{y\to e} g_2(y) = g_2(e) = 1 \end{cases}$$

d'où par composition de limites :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} g_2(f(x)) = 1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} g_1(f(x)) = 1 \end{cases} \quad \text{donc} \quad \lim_{x\to 1} \varphi(x) = 1 = \varphi(1)$$

ce qui prouve la continuité de φ en 1. Finalement $\boxed{\varphi \text{ est continue sur }]0,+\infty[}$.

6. *Dresser le tableau des variations de φ.*

▶ Puisque $g_1 : [e,+\infty[\to]0,1]$ et $g_2 : [e,+\infty[\to [1,+\infty[$ ont les mêmes monotonies que les restrictions $f|_{]0,1]} :]0,1] \to [e,+\infty[$ et $f|_{[1,+\infty[} : [1,+\infty[\to [e,+\infty[$ respectivement (d'après le théorème de la bijection, voir la question 3), on déduit le tableau des variations de φ (définie à la question 4) de celui de f (voir la question 1) :

x	0		1		$+\infty$
$\varphi(x)$	‖ $+\infty$	↘	1	↘	0

car $\lim_{x\to 0^+} \varphi(x) = \lim_{x\to 0^+} g_2(f(x)) = \lim_{y\to +\infty} g_2(y) = +\infty$ par composition de limites et $\lim_{x\to +\infty} \varphi(x) = \lim_{x\to +\infty} g_1(f(x)) = \lim_{y\to +\infty} g_1(y) = 0^+$ par composition de limites.

7. *Que peut-on dire de $\varphi \circ \varphi$?*

▶ Soit $x \in]0,+\infty[$. On considère trois cas.

1$^{\text{er}}$ cas : $x \in]0,1[$. Alors $\varphi(x) = g_2(f(x)) \in]1,+\infty[$ et par conséquent $\varphi(\varphi(x)) = g_1(f(\varphi(x))) = g_1(f(g_2(f(x))))$. Or $f \circ g_2 = \mathrm{Id}_{[e,+\infty[}$ et $g_1 \circ f = \mathrm{Id}_{]0,1]}$, donc :

$$\varphi(\varphi(x)) = g_1(\underbrace{f(g_2(f(x)))}_{\substack{=f(x) \text{ car} \\ f(x)\in[e,+\infty[}}) = \underbrace{g_1(f(x))}_{\substack{=x \text{ car} \\ x\in]0,1]}} = x.$$

2$^{\text{e}}$ cas : $x = 1$. Alors $\varphi(\varphi(x)) = \varphi(\varphi(1)) = \varphi(1) = 1 = x$ car $\varphi(1) = 1$.

3$^{\text{e}}$ cas : $x \in]1,+\infty[$. Alors $\varphi(x) = g_1(f(x)) \in]0,1[$ et par conséquent $\varphi(\varphi(x)) = g_2(f(\varphi(x))) = g_2(f(g_1(f(x))))$. Or $f \circ g_1 = \mathrm{Id}_{[e,+\infty[}$ et $g_2 \circ f = \mathrm{Id}_{[1,+\infty[}$, donc :

$$\varphi(\varphi(x)) = g_2(\underbrace{f(g_1(f(x)))}_{\substack{=f(x) \text{ car} \\ f(x)\in[e,+\infty[}}) = \underbrace{g_2(f(x))}_{\substack{=x \text{ car} \\ x\in[1,+\infty[}}) = x.$$

Ainsi $\varphi(\varphi(x)) = x$ dans tous les cas. On en déduit que $\boxed{\varphi \circ \varphi = \mathrm{Id}_{]0,+\infty[}}$.

Ce résultat est intuitif si on a bien compris l'énoncé : puisque la fonction φ associe à chaque $x \in]0,+\infty[$ le deuxième antécédent de $f(x)$ par f, si on applique deux fois φ à x on retrouve bien x qui est l'un des deux antécédents de $f(x)$ par f.

8. *Montrer que φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star \setminus \{1\}$ et exprimer sa dérivée φ' en fonction de φ.*

▶ La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star \setminus \{1\}$ (voir la question 1) et $\forall x \in \mathbb{R}_+^\star \setminus \{1\},\ f'(x) = \frac{e^x}{x^2}(x-1) \neq 0$. Donc g_1 et g_2 sont dérivables sur $]e,+\infty[$ comme bijections réciproques de fonctions dérivables (voir la question 3). De plus :

$$\forall y \in]e,+\infty[, \quad g_1'(y) = \frac{1}{f'(g_1(y))} \quad \text{et} \quad g_2'(y) = \frac{1}{f'(g_2(y))}.$$

Attention de ne pas oublier de préciser que la dérivée f' de f ne s'annule pas pour justifier que les bijections réciproques de f sont dérivables.

Donc $\boxed{\varphi \text{ est dérivable sur }]0,1[\cup]1,+\infty[= \mathbb{R}_+^\star \setminus \{1\}}$ comme composée de fonctions dérivables (voir la question 4). De plus :

$$\left\{ \begin{array}{r} \forall x \in]0,1[, \quad \varphi'(x) = (g_2 \circ f)'(x) = f'(x) g_2'(f(x)) = \dfrac{f'(x)}{f'(g_2(f(x)))} = \dfrac{f'(x)}{f'(\varphi(x))} \\ \forall x \in]1,+\infty[, \quad \varphi'(x) = (g_1 \circ f)'(x) = f'(x) g_1'(f(x)) = \dfrac{f'(x)}{f'(g_1(f(x)))} = \dfrac{f'(x)}{f'(\varphi(x))} \end{array} \right. .$$

Dans tous les cas, on obtient :

$$\forall x \in]0,1[\cup]1,+\infty[= \mathbb{R}_+^\star \setminus \{1\},\ \varphi'(x) = \frac{f'(x)}{f'(\varphi(x))} = \frac{\frac{e^x}{x^2}(x-1)}{\frac{e^{\varphi(x)}}{\varphi(x)^2}(\varphi(x)-1)} = \frac{e^x}{e^{\varphi(x)}} \times \frac{\varphi(x)^2(x-1)}{x^2(\varphi(x)-1)}.$$

On peut se contenter de cette expression de φ' en fonction de φ qui répond à la question de l'énoncé. Mais on peut aussi simplifier astucieusement ce résultat comme suit.

Or $f(x) = f(\varphi(x))$ par définition de la fonction φ (voir la question 4) donc $\frac{e^x}{x} = \frac{e^{\varphi(x)}}{\varphi(x)}$ ce qui donne $\frac{e^x}{e^{\varphi(x)}} = \frac{x}{\varphi(x)}$ et finalement :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\star \setminus \{1\},\ \varphi'(x) = \frac{x}{\varphi(x)} \times \frac{\varphi(x)^2(x-1)}{x^2(\varphi(x)-1)} = \boxed{\frac{\varphi(x)(x-1)}{x(\varphi(x)-1)}}.$$

9. *Donner un équivalent de $f(x) - f(1)$ lorsque $x \to 1$ et en déduire que φ est dérivable en 1.*

▶ Pour obtenir un équivalent de $f(x) - f(1)$ lorsque $x \to 1$, on utilise un développement limité de $f(1+h) - f(1)$ lorsque $h \to 0$:

$$\begin{aligned} f(1+h) - f(1) &= \frac{e^{1+h}}{1+h} - e \\ &= e\left(e^h \times \frac{1}{1+h} - 1\right) \\ &= e\left(\left[1 + h + \frac{h^2}{2} + o_{h^2\to 0}(h)\right] \times \left[1 - h + h^2 + o_{h\to 0}(h^2)\right] - 1\right) \\ &= e\left(1 + \left(1 - 1 + \frac{1}{2}\right) h^2 + o_{h\to 0}(h^2) - 1\right) \\ &= \frac{e}{2}h^2 + o_{h\to 0}(h^2). \end{aligned}$$

On doit utiliser des développements limités d'ordre au moins 2 ici car l'équivalent recherché est de degré 2. Notez que c'est le seul «gros» calcul de tout l'exercice, les autres questions font seulement appel à la réflexion.

Finalement, on obtient avec le changement de variable $h = x - 1$:

$$f(x) - f(1) \underset{x\to 1}{\sim} \boxed{\frac{e}{2}(x-1)^2}.$$

Pour étudier la dérivabilité de φ en 1, on étudie les limites du taux d'accroissement à gauche et à droite.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{\varphi(x)-\varphi(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{g_2(f(x))-1}{x-1} \\ \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\varphi(x)-\varphi(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{g_1(f(x))-1}{x-1} \end{cases}.$$

Puisque $\lim_{x\to 1^-} g_2(f(x)) = 1^+$, on obtient avec le changement de variable $X = g_2(f(x))$:

$$\begin{aligned} \frac{e}{2}\Big(g_2(f(x))-1\Big)^2 = \frac{e}{2}(X-1)^2 \quad &\underset{x\to 1^-}{\sim} \quad f(X)-f(1) = \underbrace{f(g_2(f(x)))}_{\substack{=f(x) \text{ car} \\ f\circ g_2 = \mathrm{Id}_{[e,+\infty[}}} - f(1) = f(x) - f(1) \\ &\underset{x\to 1^-}{\sim} \quad \frac{e}{2}(x-1)^2. \end{aligned}$$

Puisque $g_2(f(x)) - 1 > 0$ et $x - 1 < 0$ pour tout x dans un voisinage à gauche de 1, on obtient en passant à la racine :

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{g_2(f(x))-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{\sqrt{(g_2(f(x))-1)^2}}{-\sqrt{(x-1)^2}} = -\lim_{x\to 1^-} \sqrt{\frac{\frac{e}{2}\Big(g_2(f(x))-1\Big)^2}{\frac{e}{2}(x-1)^2}} = -1.$$

En raisonnant de même avec $\lim_{x\to 1^+} g_1(f(x)) = 1^-$, on obtient :

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{g_1(f(x))-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{-\sqrt{(g_1(f(x))-1)^2}}{\sqrt{(x-1)^2}} = -\lim_{x\to 1^+} \sqrt{\frac{\frac{e}{2}\Big(g_1(f(x))-1\Big)^2}{\frac{e}{2}(x-1)^2}} = -1.$$

Ainsi φ est dérivable à gauche et à droite en 1 avec $\varphi'_g(1) = \varphi'_d(1) = -1$, par conséquent $\boxed{\varphi \text{ est dérivable en 1 avec } \varphi'(1) = -1}$.

La deuxième partie de cette question, à savoir la dérivabilité de φ en 1, était très astucieuse. Il faut tout d'abord écrire ce que l'on veut, puis penser à utiliser l'équivalent obtenu précédemment avec les changements de variable $X = g_2(f(x))$ et $X = g_1(f(x))$.

10. *La fonction φ est-elle de classe $\mathcal{C}^1$?*

▶ D'après les résultats précédents, la fonction φ est de classe $\mathcal{D}^1$ sur $]0,+\infty[= \mathbb{R}_+^\star$. D'après le résultat de la question 8, φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^\star \setminus \{1\}$ (car φ' est continue sur $\mathbb{R}_+^\star \setminus \{1\}$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas). De plus, on a :

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1} \varphi'(x) &= \lim_{x\to 1} \frac{\varphi(x)(x-1)}{x(\varphi(x)-1)} = \lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{x} \times \varphi(x) \times \frac{1}{\frac{\varphi(x)-1}{x-1}}\right) \\ &= 1 \times \varphi(1) \times \frac{1}{\varphi'(1)} = 1 \times 1 \times \frac{1}{-1} = -1 = \varphi'(1) \end{aligned}$$

ce qui prouve la continuité de φ' en 1. Finalement $\boxed{\varphi \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]0,+\infty[= \mathbb{R}_+^\star}$.

Exercice 2

On considère la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto g(x) = \dfrac{x}{1+e^x}$.

1. *Etudier la régularité de* g.

   ▶ Puisque $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x > 0$, on en déduit que $\boxed{g \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}}$ comme quotient de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ dont le dénominateur ne s'annule pas.

2. *Montrer qu'il existe un unique nombre réel* a *tel que* $g'(a) = 0$.

   ▶ On a :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = \frac{(1+e^x) - xe^x}{(1+e^x)^2}.$$
   On pose $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = 1 + e^x - xe^x$ afin que $g'(a) = 0 \Leftrightarrow f(a) = 0$. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ comme somme de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$, et :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 0 + e^x - (e^x + xe^x) = -xe^x.$$
   On en déduit le tableau des variations de f :

x	$-\infty$		0		a		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0			$-$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

   car $\lim_{x\to-\infty}(1+e^x-xe^x) = 1+0-0 = 1$ par croissances comparées et $\lim_{x\to+\infty}(1+e^x-xe^x) = 1 + \lim_{x\to+\infty}(1-x)e^x = -\infty$. En particulier, on en déduit d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires qu'$\boxed{\text{il existe un unique nombre réel } a}$ tel que $f(a) = 0$ et donc $\boxed{\text{tel que } g'(a) = 0}$.

   N'hésitez pas à poser des fonctions auxiliaires (ici f) pour démontrer ce que vous souhaitez. De plus, allez toujours au plus simple. Ici, puisque le dénominateur de g' est strictement positif, il est inutile d'étudier g'', l'étude du numérateur de g' suffit.

3. *Etablir que* $a \in]1,2[$ *et que* $g(a) = a - 1$.

   ▶ En utilisant la fonction f de la question précédente, on a $f(1) = 1 + e - e = 1 > 0$ et $f(2) = 1 + e^2 - 2e^2 = 1 - e^2 < 0$ (car $e > 1$). On en déduit d'après le tableau des variations de f et le théorème des valeurs intermédiaires que $\boxed{a \in]1,2[}$. De plus, on a :
$$0 = f(a) = 1 + e^a - ae^a = 1 + (1-a)e^a$$
   donc $1 + e^a = ae^a$ et $e^a = \frac{1}{a-1}$. Par conséquent :
$$g(a) = \frac{a}{1+e^a} = \frac{a}{ae^a} = \frac{1}{e^a} = \boxed{a-1}.$$

4. *Dresser le tableau des variations de* g.

   ▶ Puisque $\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = \frac{f(x)}{(1+e^x)^2}$, g' est du même signe que f. On déduit donc le tableau des variations de g de celui de f :

x	$-\infty$		a		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$a-1$	$\searrow$	0

car $\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{1+e^x}=-\infty$ (car $\frac{x}{1+e^x}\sim_{x\to-\infty}x$) et $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{1+e^x}=0$ par croissances comparées (car $\frac{x}{1+e^x}\sim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}$).

5. *Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de g au point d'abscisse 0 et étudier la position relative de la courbe par rapport à cette tangente.*

▶ Pour étudier la tangente à la courbe représentative de g au point d'abscisse 0, on utilise un développement limité de g en 0 :

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{x}{1+e^x} \\ &= \frac{x}{2+x+o_{x\to0}(x)} \\ &= \frac{x}{2}\times\frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}+o_{x\to0}(x)\right)} \\ &= \frac{x}{2}\times\left(1-\left(\frac{x}{2}+o_{x\to0}(x)\right)+o_{x\to0}(x)\right) \\ &= \frac{x}{2}-\frac{x^2}{4}+o_{x\to0}(x^2). \end{aligned}$$

Il est suffisant d'utiliser les développements limités d'ordre 1 des fonctions $t\mapsto e^t$ et $t\mapsto\frac{1}{1+t}$. L'objectif est d'obtenir un développement limité de g avec un terme non nul de degré au moins 2, ce qui est bien le cas ici.

Ainsi la tangente à la courbe représentative de g au point d'abscisse 0 admet pour équation $\boxed{y=\frac{x}{2}}$ et la courbe se situe $\boxed{\text{au-dessous de cette tangente au voisinage de } 0}$.

6. *Montrer que la courbe représentative de g admet des droites asymptotes aux voisinages de $+\infty$ et $-\infty$ (dont on donnera les équations) et étudier la position relative de la courbe par rapport à ces asymptotes.*

▶ Pour étudier les asymptotes à la courbe représentative de g, on considère la fonction $x\mapsto xg\left(\frac{1}{x}\right)$ lorsque $x\to0^-$ et lorsque $x\to0^+$:

$$xg\left(\frac{1}{x}\right)=x\frac{1/x}{1+e^{1/x}}=\frac{1}{1+e^{1/x}}.$$

Puisque $\lim_{x\to0^-}e^{1/x}=0$, on a en 0^- :

$$xg\left(\frac{1}{x}\right)=1-e^{1/x}+o_{x\to0^-}\left(e^{1/x}\right)$$

ce qui donne avec le changement de variable $X=1/x$:

$$g(X)=X-Xe^X+o_{X\to-\infty}\left(Xe^X\right).$$

Puisque $\lim_{X\to-\infty}Xe^X=0$ par croissances comparées, on en déduit que la courbe représentative de g admet pour asymptote en $-\infty$ la droite d'équation $y=x$ et la courbe si situe au-dessus de cette asymptote au voisinage de $-\infty$ (car $-Xe^X>0$ lorsque $X\to-\infty$).

Si on essaie d'écrire le développement limité de $xg\left(\frac{1}{x}\right)$ lorsque $x\to0^-$, on obtient que $xg\left(\frac{1}{x}\right)=1+o_{x\to0^-}(x^n)$ pour tout ordre $n\in\mathbb{N}$ (car $\lim_{x\to0^-}\frac{e^{1/x}}{x^n}=0$ par croissances comparées). On retrouve bien l'équation de l'asymptote. Mais puisqu'il n'existe pas de terme non nul de degré au moins 2 dans ce cas, le développement limité ne permet pas d'étudier la position relative de la courbe par rapport à son asymptote.

Puisque $\forall n\in\mathbb{N},\ \lim_{x\to0^+}\frac{1}{x^n(1+e^{1/x})}=0$ par croissances comparées, on a en 0^+ :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ xg\left(\frac{1}{x}\right)=0+o_{x\to0^+}\left(x^n\right)$$

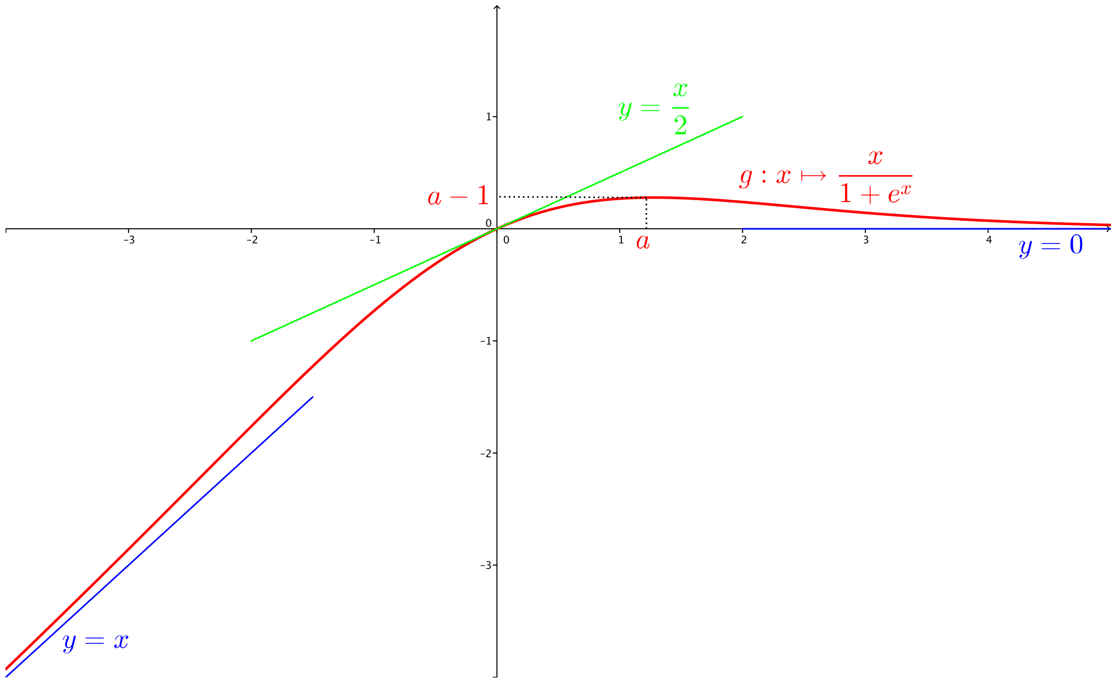
ce qui donne avec le changement de variable $X = 1/x$:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ g(X) = 0 + o_{X\to+\infty}\left(\frac{1}{X^{n-1}}\right).$$

Puisque $\lim_{X\to+\infty} \frac{1}{X^{n-1}} = 0$ pour tout $n \geqslant 2$, on en déduit que la courbe représentative de g admet pour asymptote en $+\infty$ la droite d'équation $\boxed{y = 0}$ et la courbe se situe $\boxed{\text{au-dessus de cette asymptote au voisinage de } +\infty}$ (car $g(X) = \frac{X}{1+e^X} > 0$ lorsque $X \to +\infty$).

7. *En utilisant les résultats précédents, représenter schématiquement l'allure de la courbe représentative de g sur un dessin (sur lequel on fera apparaître les éléments utiles au tracé).*

► D'après les résultats précédents, l'allure de la courbe représentative de g est donnée par le schéma suivant :



Les éléments importants à faire apparaitre sur le schéma sont : le maximum $g(a) = a - 1$ atteint en $a \in]1, 2[$, les variations de g (croissante à gauche de a et décroissante à droite), la tangente au point d'abscisse 0 et le fait que la courbe est au-dessous de sa tangente au voisinage de 0, les asymptotes en $-\infty$ et $+\infty$ et le fait que la courbe est au-dessus de ses asymptotes au voisinage de $-\infty$ et $+\infty$.

On considère maintenant la fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto h(x) = 1 + e^{-x}$ et la suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $a_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = h(a_n)$. On admet que $2,30 < \ln(10) < 2,31$.

8. *Prouver que a est l'unique solution de l'équation $h(x) = x$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.*

► En utilisant la fonction f introduite à la question 2, on remarque que $\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) - x = 1 + e^{-x} - x = e^{-x}(e^x + 1 - xe^x) = e^{-x} f(x)$. En particulier, $h(x) = x \Leftrightarrow f(x) = 0$. Puisque a est l'unique nombre réel tel que $f(a) = 0$, on en déduit que $\boxed{a \text{ est l'unique solution de l'équation } h(x) = x \text{ d'inconnue } x \in \mathbb{R}}$.

Pensez à réutiliser ce que vous avez déjà démontré. Ici, c'est une perte de temps d'étudier la fonction $x \mapsto h(x) - x$.

9. *Justifier que $0 < a - 1 < \frac{1}{e}$.*

► Puisque $a \in]1, 2[$ d'après le résultat de la question 3, on a en particulier que $a - 1 > 0$. De plus, $a = h(a) = 1 + e^{-a}$ d'après le résultat de la question précédente, donc $a - 1 = e^{-a} < e^{-1} = \frac{1}{e}$ car la fonction $x \mapsto e^{-x}$ est strictement décroissante. En résumé, $\boxed{0 < a - 1 < \frac{1}{e}}$.

10. *Montrer que pour tout $x \geqslant 1$: $h(x) \geqslant 1$, $-\frac{1}{e} \leqslant h'(x) \leqslant 0$ et $|h(x) - a| \leqslant \frac{1}{e}$.*

▶ Soit $x \geqslant 1$. Puisque $e^{-x} > 0$ on a $h(x) = 1 + e^{-x} \geqslant 1$. On a $h'(x) = -e^{-x} \leqslant 0$ et puisque la fonction $t \mapsto -e^{-t}$ est croissante : $h'(x) \geqslant h'(1) = -\frac{1}{e}$. En résumé, $\boxed{-\frac{1}{e} \leqslant h'(x) \leqslant 0}$. Enfin, puisque la fonction h est décroissante, on a

$$\lim_{+\infty} h = 1 \leqslant h(x) \leqslant 1 + e^{-1} = h(1) \quad \text{donc} \quad (1-a) \leqslant h(x) - a \leqslant (1-a) + \frac{1}{e}.$$

Or $-\frac{1}{e} < (1-a) < 0$ d'après le résultat de la question précédente donc $-\frac{1}{e} \leqslant h(x) - a \leqslant \frac{1}{e}$ et on en déduit que $\boxed{|h(x) - a| \leqslant \frac{1}{e}}$.

11. *En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_n \geqslant 1$ et $|a_n - a| \leqslant e^{-(n+1)}$.*

▶ Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_n \geqslant 1$ et $|a_n - a| \leqslant e^{-(n+1)}$. Pour $n = 0$, on a $a_0 = 1$ et $|a_0 - a| = |1 - a| = a - 1 \leqslant \frac{1}{e} = e^{-1} = e^{-(0+1)}$ d'après le résultat de la question précédente. Donc la proposition est vraie pour $n = 0$. On suppose maintenant la proposition vraie pour un entier $n \in \mathbb{N}$ fixé. Alors $a_{n+1} = h(a_n) \geqslant 1$ d'après le résultat de la question précédente (car $a_n \geqslant 1$ par hypothèse de récurrence). De plus, $|a_{n+1} - a| = |h(a_n) - h(a)|$ et $|h'(x)| \leqslant \frac{1}{e}$ pour tout $x \geqslant 1$ d'après le résultat de la question précédente. Puisque l'intervalle compris entre a_n et a est inclus dans $[1, +\infty[$, on en déduit d'après l'inégalité des accroissements finis que :

$$|a_{n+1} - a| = |h(a_n) - h(a)| \leqslant \frac{1}{e} |a_n - a|$$

ce qui donne en utilisant l'hypothèse de récurrence :

$$|a_{n+1} - a| \leqslant \frac{1}{e} \times e^{-(n+1)} = e^{-1} e^{-(n+1)} = e^{-((n+1)+1)}.$$

Ainsi la proposition est vraie au rang $n+1$ dès qu'elle est vraie au rang n. On en déduit qu'$\boxed{\text{elle est vraie pour tout entier } n \in \mathbb{N} \text{ d'après le principe de récurrence}}$.

Ce type de récurrence utilisant l'inégalité des accroissements finis (le plus souvent pour des suites définies par récurrence à l'aide d'une fonction dont on sait borner la dérivée) est TRES classique. Il faut savoir repérer et répondre à ce genre de questions.

12. *Conclure que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.*

▶ Puisque $\lim_{n \to +\infty} e^{-(n+1)} = 0$, on déduit du résultat précédent que $\boxed{\lim_{n \to +\infty} a_n = a}$ d'après le théorème d'encadrement.

13. *Proposer, sans la calculer, une valeur approchée de a à 10^{-3} près.*

▶ D'après le résultat de la question 11, a_n est une valeur approchée de a à $e^{-(n+1)}$ près pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. Pour obtenir une valeur approchée de a à 10^{-3} près, il suffit donc de déterminer un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $e^{-(n+1)} < 10^{-3}$. Or on a :

$$\begin{aligned}
& e^{-(n+1)} < 10^{-3} \\
\Leftrightarrow \quad & -(n+1) < \ln\left(10^{-3}\right) \quad \text{(car ln est strictement croissante)} \\
\Leftrightarrow \quad & n+1 > 3\ln(10) \\
\Leftrightarrow \quad & n > 3\ln(10) - 1.
\end{aligned}$$

De plus, $\ln(10) < 2,31$ donc $3\ln(10) - 1 < 5,93$. Ainsi pour tout $n \geqslant 6$, a_n est une valeur approchée de a à 10^{-3} près. Il suffit donc de prendre par exemple $\boxed{a_6}$.

Attention à vos raisonnements. Ici on cherche une condition suffisante pour n, donc on a seulement besoin de la majoration $\ln(10) < 2,31$. La minoration $2,30 < \ln(10)$ donne une condition nécessaire pour n (qui est $n > 3 \times 2,30 - 1 = 5,90$). Cette minoration ne permet donc pas de répondre à la question de l'énoncé, mais permet de justifier que $n = 6$ est le plus petit entier tel que a_n est une valeur approchée de a à 10^{-3} près.

Exercice 3

Afin de concevoir un exercice de cinématique sur un jongleur maladroit, une enseignante de sciences physiques a besoin de calculer un développement limité. Malheureusement, elle commet de nombreuses erreurs. Aidez-la à corriger son calcul avant que son collègue de mathématiques ne s'en aperçoive (toute ressemblance avec des personnages réels serait purement fortuite).

Calcul du développement limité de $\sqrt{1+e^{-x}}$ à l'ordre 3 pour des petites valeurs de x

J'utilise les développements usuels :

$$\begin{cases} e^{u} = 1 + u + \dfrac{u^2}{2} + \dfrac{u^3}{3} + o(u^3) \\ \sqrt{1+v} = 1 + \dfrac{v}{2} - \dfrac{v^2}{8} + o(v^2) \end{cases}$$

Avec $u = -x$ j'obtiens :

$$e^{-x} = 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

Avec $v = e^{-x}$ j'obtiens :

$$\sqrt{1+e^{-x}} = 1 + \frac{1}{2}\left(1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) - \frac{1}{8}\left(1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)^2$$

$$\sqrt{1+e^{-x}} = \frac{3}{2} - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - \frac{1}{8}\left(1 - 2x - x^2 - \frac{2x^3}{3} + o(x^3)\right)$$

$$\sqrt{1+e^{-x}} = \frac{11}{8} - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{12} + o(x^3)$$

1) *Donner le nombre de fautes commises dans le calcul, et pour chacune d'entre elles expliquer brièvement quelle est l'erreur.*

► Les fautes commises dans le calcul sont par ordre d'apparition :

1. Dans le $DL_3(0)$ de $u \mapsto e^u$, le coefficient du terme de degré 3 n'est pas $\frac{1}{3}$ mais $\frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$.
2. Puisqu'on recherche le $DL_3(0)$ de la fonction $x \mapsto \sqrt{1+e^{-x}}$, on doit utiliser des développements limités à l'ordre 3 de chaque fonction qui la compose. En particulier, il faudrait écrire le $DL_3(0)$ de $v \mapsto \sqrt{1+v}$ et non son $DL_2(0)$.
3. Il y a une erreur de signe lors du changement de variable $u = -x$ pour le $DL_3(0)$ de $x \mapsto e^{-x}$: le terme de degré 2 n'est pas $-\frac{x^2}{2}$ mais $\frac{(-x)^2}{2} = +\frac{x^2}{2}$.
4. Puisqu'on utilise le développement limité en 0 de $v \mapsto \sqrt{1+v}$, on doit effectuer un changement de variable tel que $\lim_{x\to 0} v = 0$. Le changement de variable $v = e^{-x}$ est donc incorrect car $\lim_{x\to 0} e^{-x} = 1 \neq 0$.
5. Il manque des termes lors du développement de $\left(1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o_{x\to 0}(x^3)\right)^2$. Le coefficient du terme de degré 2 n'est pas -1 mais $-\frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2} = -1 + 1 = 0$. De même, le terme de degré 3 n'est pas $-\frac{2}{3}$ mais $-\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = -\frac{2}{3} + 1 = \frac{1}{3}$.

6. Il y a une erreur de calcul lors de la somme des développements limités à la dernière ligne. Le coefficient du terme de degré 2 n'est pas $+\frac{1}{8}$ mais $-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\times(-1)=-\frac{1}{8}$.

On peut aussi compter l'erreur n° 5 comme deux fautes (mais la cause de l'erreur est identique pour les deux coefficients).

2) *Calculer vous-mêmes le développement limité recherché.*

► On a :

$$\begin{cases} e^u = 1+u+\dfrac{u^2}{2}+\dfrac{u^3}{6}+o_{u\to 0}(u^3) \\ \sqrt{1+v}=(1+v)^{1/2}=1+\dfrac{v}{2}-\dfrac{v^2}{8}+\dfrac{v^3}{16}+o_{v\to 0}(u^3) \quad \text{car } \dfrac{\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}-1\right)\times\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}=\dfrac{1}{16} \end{cases}.$$

De plus :

$$\sqrt{1+e^{-x}}=\sqrt{2+(e^{-x}-1)}=\sqrt{2}\times\sqrt{1+\left(\frac{e^{-x}-1}{2}\right)} \quad \text{avec } \lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}-1}{2}=0.$$

En posant $u=-x$, on obtient :

$$\frac{e^{-x}-1}{2}=\frac{1}{2}\left(1-x+\frac{(-x)^2}{2}+\frac{(-x)^3}{6}+o_{x\to 0}(x^3)-1\right)=-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{12}+o_{x\to 0}(x^3)$$

puis en posant $v=\frac{e^{-x}-1}{2}$, on obtient :

$$\begin{aligned}
&\sqrt{1+e^{-x}}\\
=\;&\sqrt{2}\times\sqrt{1+\left(\frac{e^{-x}-1}{2}\right)}\\
=\;&\sqrt{2}\times\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{e^{-x}-1}{2}\right)-\frac{1}{8}\left(\frac{e^{-x}-1}{2}\right)^2+\frac{1}{16}\left(\frac{e^{-x}-1}{2}\right)^3+o_{x\to 0}\left(\frac{e^{-x}-1}{2}\right)\right)\\
=\;&\sqrt{2}\times\left(1+\frac{1}{2}\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{12}\right)-\frac{1}{8}\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{12}\right)^2\right.\\
&\qquad\left.+\frac{1}{16}\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{12}\right)^3+o_{x\to 0}\left(x^3\right)\right)\\
=\;&\sqrt{2}\times\left(1+\frac{1}{2}\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{12}\right)-\frac{1}{8}\left(\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{8}-\frac{x^3}{8}\right)+\frac{1}{16}\left(-\frac{x^3}{8}\right)+o_{x\to 0}\left(x^3\right)\right)\\
=\;&\sqrt{2}\times\left(1-\frac{x}{4}+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{32}\right)x^2+\left(-\frac{1}{24}+\frac{1}{32}-\frac{1}{128}\right)x^3+o_{x\to 0}\left(x^3\right)\right)\\
=\;&\boxed{\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}x+\frac{3\sqrt{2}}{32}x^2-\frac{7\sqrt{2}}{384}x^3+o_{x\to 0}\left(x^3\right)}.
\end{aligned}$$

DS n$^{\text{o}}$ 9 de mathématiques

durée : 3 heures

Problème

Pour un entier naturel non nul n donné, on considère une urne contenant $2n$ boules numérotées et indiscernables au toucher :

— n boules numérotées 0

— et les n boules restantes numérotées de 1 à n.

On effectue au hasard et sans remise deux tirages successifs d'une boule dans cette urne. On note X le plus grand des deux numéros obtenus et Y le plus petit. Ce problème a deux objectifs indépendants : calculer les espérances de X et Y, et calculer la probabilité de l'événement $(X = Y + 1)$.

Partie 0 : préliminaire. On note A le premier numéro tiré et B le deuxième.

1. Déterminer l'ensemble des valeurs possibles prises par A et B.
2. Déterminer la loi de probabilité de A et en déduire que son espérance est égale à $\frac{n+1}{4}$.
3. Justifier brièvement que B a la même loi de probabilité que A et en déduire son espérance.
4. Exprimer la probabilité conditionnelle $P_{(A=a)}(B = b)$ en fonction de n en distinguant plusieurs cas selon les différentes valeurs de $(a, b) \in \{0, 1, \dots, n\}^2$.

Partie 1 : calcul des espérances de X et Y.

1. Déterminer l'ensemble des valeurs possibles prises par X.
2. Calculer la probabilité de l'événement $(X = 0)$.
3. On fixe un entier $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ pour cette question.
   (a) Justifier précisément que :
   $$P(X = k) = P(A = k)\sum_{b=0}^{k-1} P_{(A=k)}(B = b) + \sum_{a=0}^{k-1} P(A = a)P_{(A=a)}(B = k).$$
   (b) En utilisant les résultats du préliminaire, en déduire que $P(X = k) = \frac{n+k-1}{n(2n-1)}$.
4. Déduire des résultats précédents l'expression de l'espérance de X en fonction de n.
5. En remarquant que $X + Y = A + B$, montrer que $E(Y) = \frac{n^2-1}{6(2n-1)}$.
6. Donner un équivalent simple de $\frac{E(X)}{E(Y)}$ quand n tend vers l'infini et interpréter ce résultat.

Partie 2 : calcul de la probabilité de l'événement $(X = Y + 1)$.

1. Justifier précisément que :
   $$P(X = Y + 1) = \sum_{k=1}^{n} \Big[P(A = k)P_{(A=k)}(B = k - 1) + P(A = k - 1)P_{(A=k-1)}P(B = k)\Big].$$
2. En utilisant le préliminaire, donner une expression simple de la probabilité $P(X = Y + 1)$ en fonction de n.

Exercice 1

Le but de cet exercice est d'obtenir un développement asymptotique en 1 de la bijection réciproque de la fonction sinus que l'on notera arcsin, c'est-à-dire de déterminer une approximation de $\arcsin(x)$ lorsque x est au voisinage de 1 à l'aide de fonctions usuelles.

1. Rappeler le domaine de définition, de continuité et de dérivabilité de la fonction arcsin.
2. Calculer la dérivée de arcsin sur son domaine de dérivabilité (on simplifiera son expression le plus possible).
3. La fonction arcsin admet-elle un développement limité à l'ordre 1 en 1 ? En déduire que le développement asymptotique recherché n'est pas un polynôme non constant.
4. On considère la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}, h \mapsto \arcsin(1-h^2)$.
   (a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1]$ et que $\forall h \in]0,1],\ f'(h) = \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{1-h^2/2}}$.
   (b) Justifier que $\forall h \in]0,1],\ \exists c_h \in]0,h[,\ f(h) - \frac{\pi}{2} = hf'(c_h)$.
   (c) En déduire que f est dérivable en 0, puis que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1]$.
   (d) Calculer le développement limité à l'ordre 5 en 0 de f'.
   (e) En déduire le développement limité à l'ordre 6 en 0 de f.
5. Conclure que pour tout x au voisinage de 1 :

$$\boxed{\arcsin(x) = \frac{\pi}{2} - \sqrt{1-x}\left(\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{12}(1-x) + \frac{3\sqrt{2}}{160}(1-x)^2\right) + o_{x\to 1}\Big((1-x)^3\Big)}.$$

Exercice 2

On considère l'application suivante :

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & \overrightarrow{x} = (x_1,x_2,x_3,x_4) & \mapsto & \varphi\left(\overrightarrow{x}\right) = \overrightarrow{y} = (y_1,y_2,y_3) \end{array} \quad \text{où} \quad \left\{\begin{array}{rcl} y_1 & = & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \\ y_2 & = & x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 \\ y_3 & = & 2x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 7x_4 \end{array}\right.$$

et on propose d'étudier les ensembles suivants :

$$\mathrm{Ker}(\varphi) = \left\{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^4 \mid \varphi\left(\overrightarrow{x}\right) = \overrightarrow{0}\right\} \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(\varphi) = \left\{\overrightarrow{y} = \varphi\left(\overrightarrow{x}\right),\ \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^4\right\}.$$

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(\varphi)$ et $\mathrm{Im}(\varphi)$ sont des sous-espaces vectoriels (on précisera pour chacun de ces ensembles de quel espace vectoriel il est un sous-espace vectoriel).
2. (a) Déterminer une base $\mathcal{B}_{\mathrm{Ker}}$ de $\mathrm{Ker}(\varphi)$ et en déduire la dimension de $\mathrm{Ker}(\varphi)$.
   (b) L'application φ est-elle injective ? Justifier votre réponse.
3. (a) Déterminer une base $\mathcal{B}_{\mathrm{Im}}$ de $\mathrm{Im}(\varphi)$ et en déduire la dimension de $\mathrm{Im}(\varphi)$.
   (b) L'application φ est-elle surjective ? Justifier votre réponse.
4. (a) La famille $\mathcal{B}_{\mathrm{Ker}}$ est-elle une base de $\mathbb{R}^4$? Justifier votre réponse.
   (b) Pour chacun des vecteurs $\overrightarrow{y}$ de la famille $\mathcal{B}_{\mathrm{Im}}$, déterminer un vecteur $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^4$ tel que $\varphi\left(\overrightarrow{x}\right) = \overrightarrow{y}$. On notera $\mathcal{B}'_{\mathrm{Im}}$ la famille de vecteurs obtenus.
   (c) Montrer que la famille formée des vecteurs de $\mathcal{B}_{\mathrm{Ker}}$ et ceux de $\mathcal{B}'_{\mathrm{Im}}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

Corrigé du DS nº 9 de mathématiques

Problème

Pour un entier naturel non nul n donné, on considère une urne contenant $2n$ boules numérotées et indiscernables au toucher :

- *n boules numérotées 0*
- *et les n boules restantes numérotées de 1 à n.*

On effectue au hasard et sans remise deux tirages successifs d'une boule dans cette urne. On note X le plus grand des deux numéros obtenus et Y le plus petit. Ce problème a deux objectifs indépendants : calculer les espérances de X et Y, et calculer la probabilité de l'événement $(X = Y + 1)$.

Partie 0 : préliminaire. *On note A le premier numéro tiré et B le deuxième.*

1. *Déterminer l'ensemble des valeurs possibles prises par A et B.*

▶ Puisque les boules sont numérotées de 0 à n et que tous les entiers entre ces deux bornes sont utilisés, l'ensemble des valeurs possibles prises par A est $\boxed{\{0, 1, \ldots, n\}}$. Il en est de même pour B car les deux boules sont tirées dans la même urne.

2. *Déterminer la loi de probabilité de A et en déduire que son espérance est égale à $\frac{n+1}{4}$.*

▶ D'après l'énoncé, la loi de probabilité de A est donnée par :

$$P(A = 0) = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \forall k \in \{1, 2, \ldots, n\},\ P(A = k) = \frac{1}{2n}.$$

L'espérance de A est donc égale à :

$$E(A) = \sum_{k=0}^{n} kP(A = k) = 0 \cdot \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} k\frac{1}{2n} = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \boxed{\frac{n+1}{4}}.$$

3. *Justifier brièvement que B a la même loi de probabilité que A et en déduire son espérance.*

▶ Effectuer deux tirages successifs sans remise d'une boule revient à effectuer un tirage simultané de deux boules puisque la première boule tirée est différente de la deuxième. Ainsi, $\boxed{\text{les lois de probabilité des deux numéros obtenus sont identiques}}$. En particulier :

$$E(B) = \sum_{k=0}^{n} kP(B = k) = \sum_{k=0}^{n} kP(A = k) = E(A) = \boxed{\frac{n+1}{4}}.$$

4. *Exprimer la probabilité conditionnelle $P_{(A=a)}(B = b)$ en fonction de n en distinguant plusieurs cas selon les différentes valeurs de $(a, b) \in \{0, 1, \ldots, n\}^2$.*

▶ Soit $(a, b) \in \{0, 1, \ldots, n\}^2$. On a par définition des probabilités conditionnelles :

$$P_{(A=a)}(B = b) = \frac{P((A = a) \cap (B = b))}{P(A = a)} = \frac{P(A = a \text{ et } B = b)}{P(A = a)}.$$

On considère cinq cas possibles selon que a et b soient égaux entre eux ou non et qu'ils soient nuls ou non.

— Si $a = b = 0$, alors $P(A = 0) = \frac{1}{2}$ et $P(A = 0 \text{ et } B = 0) = \frac{n \cdot (n-1)}{2n \cdot (2n-1)}$ donc

$$P_{(A=0)}(B = 0) = \frac{2n(n-1)}{2n(2n-1)} = \frac{n-1}{2n-1}.$$

— Si $a = b \neq 0$, alors $P(A = a) = \frac{1}{2n}$ et $P(A = a \text{ et } B = a) = \frac{1 \cdot 0}{2n \cdot (2n-1)}$ donc

$$P_{(A=a)}(B = a) = 0.$$

— Si $a=0$ et $b\neq 0$, alors $P(A=0)=\frac{1}{2}$ et $P(A=0 \text{ et } B=b)=\frac{n\cdot 1}{2n\cdot(2n-1)}$ donc

$$P_{(A=0)}(B=b)=\frac{2n}{2n(2n-1)}=\frac{1}{2n-1}.$$

— Si $a\neq 0$ et $b=0$, alors $P(A=a)=\frac{1}{2n}$ et $P(A=a \text{ et } B=0)=\frac{1\cdot n}{2n\cdot(2n-1)}$ donc

$$P_{(A=a)}(B=0)=\frac{2n^2}{2n(2n-1)}=\frac{n}{2n-1}.$$

— Si $a\neq b$, $a\neq 0$ et $b\neq 0$, alors $P(A=a)=\frac{1}{2n}$ et $P(A=a \text{ et } B=b)=\frac{1\cdot 1}{2n(2n-1)}$ donc

$$P_{(A=a)}(B=b)=\frac{2n}{2n(2n-1)}=\frac{1}{2n-1}.$$

Finalement, on a :

$$\boxed{P_{(A=a)}(B=b)=\begin{cases}\frac{n-1}{2n-1} & \text{si } \quad a=b=0\\ 0 & \text{si } \quad a=b\neq 0\\ \frac{1}{2n-1} & \text{si } \quad a\neq b \text{ et } b\neq 0\\ \frac{n}{2n-1} & \text{si } \quad a\neq 0 \text{ et } b=0\end{cases}}.$$

Partie 1 : calcul des espérances de X et Y.

1. *Déterminer l'ensemble des valeurs possibles prises par X.*

▶ Puisqu'il existe plusieurs boules numérotées 0, l'ensemble des valeurs possibles prises par X est aussi $\boxed{\{0,1,\dots,n\}}$.

En toute rigueur, l'ensemble des valeurs possibles prises par X est seulement $\{1\}$ et non $\{0,1\}$ si $n=1$ (mais ce cas particulier où l'urne ne contient que deux boules est inintéressant puisque $X=1$ et $Y=0$ avec des lois certaines).

2. *Calculer la probabilité de l'événement $(X=0)$.*

▶ Si $X=0$ alors nécessairement $Y=0$ et donc $A=B=0$. Réciproquement, si $A=B=0$ alors $X=0$. On en déduit que :

$$P(X=0)=P(A=0 \text{ et } B=0)=\frac{n\cdot(n-1)}{2n\cdot(2n-1)}=\boxed{\frac{n-1}{2(2n-1)}}.$$

Attention pour ce genre de justification de ne pas se contenter de la première phrase qui affirme seulement que $(X=0)\subset(A=0)\cap(B=0)$ et donc que $P(X=0)\leqslant\frac{n(n-1)}{2n(2n-1)}$. Pour justifier l'égalité, il faut préciser la réciproque.

3. *On fixe un entier $k\in\{1,2,\dots,n\}$ pour cette question.*

(a) *Justifier précisément que :*

$$P(X=k)=P(A=k)\sum_{b=0}^{k-1}P_{(A=k)}(B=b)+\sum_{a=0}^{k-1}P(A=a)P_{(A=a)}(B=k).$$

▶ Puisque A et B ne peuvent pas être égaux à k en même temps, on a :

$$(X=k)=(A=k \text{ et } B<k)\cup(A<k \text{ et } B=k)$$

et puisque cette union est disjointe :

$$\begin{aligned}
P(X=k) &= P\Big((A=k)\cap(B<k)\Big)+P\Big((A<k)\cap(B=k)\Big)\\
&= \sum_{b=0}^{k-1} P\Big((A=k)\cap(B=b)\Big)+\sum_{a=0}^{k-1} P\Big((A=a)\cap(B=k)\Big)\\
&= \sum_{b=0}^{k-1} P(A=k)P_{(A=k)}(B=b)+\sum_{a=0}^{k-1} P(A=a)P_{(A=a)}(B=k)\\
&= \boxed{P(A=k)\sum_{b=0}^{k-1} P_{(A=k)}(B=b)+\sum_{a=0}^{k-1} P(A=a)P_{(A=a)}(B=k)}
\end{aligned}$$

en utilisant que les événements $(A=a)$ et $(B=b)$ forment deux systèmes complets d'événements et d'après la formule des probabilités composées.

(b) *En utilisant les résultats du préliminaire, en déduire que* $P(X=k)=\frac{n+k-1}{n(2n-1)}$.

► En utilisant l'expression de la probabilité conditionnelle $P_{(A=a)}(B=b)$ obtenue dans le préliminaire, on obtient d'après le résultat précédent :

$$\begin{aligned}
P(X=k) &= P(A=k)P_{(A=k)}(B=0)+P(A=k)\sum_{b=1}^{k-1} P_{(A=k)}(B=b)\\
&\quad +P(A=0)P_{(A=0)}(B=k)+\sum_{a=1}^{k-1} P(A=a)P_{(A=a)}(B=k)\\
&= \frac{1}{2n}\cdot\frac{n}{2n-1}+\frac{1}{2n}\sum_{b=1}^{k-1}\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2n-1}+\sum_{a=1}^{k-1}\left(\frac{1}{2n}\cdot\frac{1}{2n-1}\right)\\
&= \frac{1}{2(2n-1)}+\frac{k-1}{2n(2n-1)}+\frac{1}{2(2n-1)}+\frac{k-1}{2n(2n-1)}\\
&= \boxed{\frac{n+k-1}{n(2n-1)}}.
\end{aligned}$$

4. *Déduire des résultats précédents l'expression de l'espérance de X en fonction de n.*

► On a d'après les résultats précédents :

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{k=0}^{n} kP(X=k)\\
&= 0\cdot\frac{n-1}{2(2n-1)}+\sum_{k=1}^{n} k\frac{n+k-1}{n(2n-1)}\\
&= \frac{1}{n(2n-1)}\left((n-1)\sum_{k=1}^{n} k+\sum_{k=1}^{n} k^2\right)\\
&= \frac{1}{n(2n-1)}\left((n-1)\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)\\
&= \frac{1}{6(2n-1)}\big(3(n^2-1)+(2n^2+3n+1)\big)\\
&= \boxed{\frac{5n^2+3n-2}{6(2n-1)}}.
\end{aligned}$$

5. *En remarquant que $X+Y=A+B$, montrer que $E(Y)=\frac{n^2-1}{6(2n-1)}$.*

▶ Puisque $X+Y$ et $A+B$ sont égales à la somme des deux numéros obtenus, on a par linéarité de l'espérance :

$$E(X)+E(Y)=E(X+Y)=E(A+B)=E(A)+E(B).$$

D'où en utilisant les résultats du préliminaire et celui de la question précédente :

$$\begin{aligned} E(Y) &= E(A)+E(B)-E(X) \\ &= \frac{n+1}{4}+\frac{n+1}{4}-\frac{5n^2+3n-2}{6(2n-1)} \\ &= \frac{1}{6(2n-1)}\big(3(n+1)(2n-1)-(5n^2+3n-2)\big) \\ &= \boxed{\frac{n^2-1}{6(2n-1)}}. \end{aligned}$$

6. *Donner un équivalent simple de $\frac{E(X)}{E(Y)}$ quand n tend vers l'infini et interpréter ce résultat.*

▶ On a d'après les résultats précédents :

$$\frac{E(X)}{E(Y)}=\frac{5n^2+3n-2}{n^2-1}\sim_{n\to+\infty}\frac{5n^2}{n^2}=\boxed{5}.$$

Ainsi, lorsque n est très grand, l'espérance du plus grand numéro obtenu est cinq fois plus grande que celle du plus petit.

Partie 2 : calcul de la probabilité de l'événement $(X=Y+1)$.

1. *Justifier précisément que :*

$$P(X=Y+1)=\sum_{k=1}^{n}\Big[P(A=k)P_{(A=k)}(B=k-1)+P(A=k-1)P_{(A=k-1)}P(B=k)\Big].$$

▶ Si $X=Y+1$ alors $X=k$ et $Y=k-1$ pour un certain entier $k\in\{1,2,\dots,n\}$. On a donc d'après la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned} P(X=Y+1) &= \sum_{k=1}^{n}P\Big((X=k)\cap(Y=k-1)\Big) \\ &= \sum_{k=1}^{n}\Big[P\Big((A=k)\cap(B=k-1)\Big)+P\Big((A=k-1)\cap(B=k)\Big)\Big] \\ &= \boxed{\sum_{k=1}^{n}\Big[P(A=k)P_{(A=k)}(B=k-1)+P(A=k-1)P_{(A=k-1)}P(B=k)\Big]}. \end{aligned}$$

2. *En utilisant le préliminaire, donner une expression simple de la probabilité $P(X=Y+1)$ en fonction de n.*

▶ En utilisant l'expression de la probabilité conditionnelle $P_{(A=a)}(B=b)$ obtenue dans le préliminaire, on obtient d'après le résultat précédent :

$$\begin{aligned} P(X=Y+1) &= P(A=1)P_{(A=1)}(B=0)+P(A=0)P_{(A=0)}(B=1) \\ &\quad +\sum_{k=2}^{n}\Big[P(A=k)P_{(A=k)}(B=k-1)+P(A=k-1)P_{(A=k-1)}P(B=k)\Big] \\ &= \frac{1}{2n}\cdot\frac{n}{2n-1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2n-1}+\sum_{k=2}^{n}\left[\frac{1}{2n}\cdot\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}\cdot\frac{1}{2n-1}\right] \\ &= \frac{1}{2n-1}+2\frac{n-2+1}{2n(2n-1)} \\ &= \boxed{\frac{1}{n}}. \end{aligned}$$

Exercice 1

Le but de cet exercice est d'obtenir un développement asymptotique en 1 de la bijection réciproque de la fonction sinus que l'on notera arcsin, *c'est-à-dire de déterminer une approximation de* $\arcsin(x)$ *lorsque* x *est au voisinage de 1 à l'aide de fonctions usuelles.*

1. *Rappeler le domaine de définition, de continuité et de dérivabilité de la fonction* arcsin.

▶ La fonction arcsin est définie et continue sur l'intervalle fermé $\boxed{[-1,+1]}$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $\boxed{]-1,+1[}$.

Inutile de perdre du temps à justifier les questions qui demandent seulement de «rappeler» le cours.

2. *Calculer la dérivée de* arcsin *sur son domaine de dérivabilité (on simplifiera son expression le plus possible).*

▶ D'après la formule de la dérivée d'une bijection réciproque, on obtient :

$$\forall x \in]-1,+1[,\ \arcsin'(x) = \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}.$$

Or pour tout $x \in]-1,+1[$, on a $\arcsin(x) \in \left]-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right[$ donc $\cos(\arcsin(x)) > 0$. On en déduit d'après la formule de Pythagore que :

$$\forall x \in]-1,+1[,\ \cos(\arcsin(x)) = \sqrt{\cos^2(\arcsin(x))} = \sqrt{1-\sin^2(\arcsin(x))} = \sqrt{1-x^2}$$

et par conséquent :

$$\forall x \in]-1,+1[,\ \boxed{\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}.$$

3. *La fonction* arcsin *admet-elle un développement limité à l'ordre 1 en 1 ? En déduire que le développement asymptotique recherché n'est pas un polynôme non constant.*

▶ Puisque la fonction arcsin n'est pas dérivable en 1, $\boxed{\text{elle n'admet pas de développement limité à l'ordre 1 en 1}}$. Si le développement asymptotique de la fonction arcsin en 1 était un polynôme non constant, alors la fonction arcsin admettrait un développement limité en 1 à un ordre supérieur ou égal à 1, et donc en particulier un développement limité en 1 à l'ordre 1 ce qui est absurde. Le développement asymptotique recherché $\boxed{\text{n'est donc pas un polynôme non constant}}$.

N'oubliez pas que cette propriété du cours n'est valable qu'à l'ordre 1 !! Une fonction peut ne pas être dérivable deux fois en un point et pourtant admettre un développement limité à l'ordre deux en ce point (par exemple $x \mapsto x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$*).*

4. *On considère la fonction* $f : [0,1] \to \mathbb{R}, h \mapsto \arcsin(1-h^2)$.

(a) *Montrer que* f *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $]0,1]$ *et que* $\forall h \in]0,1],\ f'(h) = \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{1-h^2/2}}$.

▶ L'image de l'intervalle $]0,1]$ par la fonction $h \mapsto 1-h^2$ est l'intervalle $[0,1[$ qui est inclus dans $]-1,+1[$. Or $h \mapsto 1-h^2$ est de classe $\mathcal{C}^1$ (et même $\mathcal{C}^\infty$) sur $[0,1[$ en tant que fonction polynomiale et la fonction arcsin est de classe $\mathcal{C}^1$ (et même $\mathcal{C}^\infty$) sur $]-1,+1[$ d'après les résultats des questions 1 et 2 et le théorème de la bijection. On en déduit que $\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]0,1]}$ par composition et d'après la formule de la dérivée d'une composée :

$$\forall h \in]0,1],\ f'(h) = -2h \times \frac{1}{\sqrt{1-(1-h^2)^2}} = \frac{-2h}{\sqrt{2h^2-h^4}} = \frac{-2h}{\sqrt{2h^2}\sqrt{1-h^2/2}} = \boxed{\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{1-h^2/2}}}.$$

(b) *Justifier que* $\forall h \in]0,1],\ \exists c_h \in]0,h[,\ f(h) - \frac{\pi}{2} = hf'(c_h)$.

▶ La fonction f est continue sur $[0,1]$ par composée de fonctions continues et dérivable sur $]0,1[$ par composée de fonctions dérivables. On en déduit d'après le théorème des accroissements finis que :

$$\forall h \in]0,1],\ \exists c_h \in]0,h[,\ f(h) - f(0) = f'(c_h)(h-0).$$

Or $f(0) = \arcsin(1-0^2) = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$, donc :

$$\boxed{\forall h \in]0,1],\ \exists c_h \in]0,h[,\ f(h) - \frac{\pi}{2} = hf'(c_h)}.$$

(c) *En déduire que f est dérivable en 0, puis que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1]$.*

▶ D'après le résultat précédent, le taux d'accroissement de f en 0 est égale à :

$$\frac{f(h)-f(0)}{h-0} = \frac{f(h)-\frac{\pi}{2}}{h} = f'(c_h).$$

Or $c_h \in]0,h[$ pour tout $h \in]0,1]$ donc $\lim_{h\to 0} c_h = 0$ d'après le théorème de limite par encadrement. On en déduit par composition de limites et d'après l'expression de f' obtenue à la question 4.(a) que :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h-0} = \lim_{c\to 0} f'(c) = \lim_{c\to 0} \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{1-c^2/2}} = -\sqrt{2}.$$

Ainsi $\boxed{f \text{ est dérivable en } 0}$ avec $\boxed{f'(0) = -\sqrt{2}}$, et donc :

$$\forall h \in [0,1],\ f'(h) = \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{1-h^2/2}}$$

car l'expression de f' obtenue à la question 4.(a) reste valable pour $h = 0$. En particulier, f' est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1]$ comme quotient et composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ dont le dénominateur ne s'annule pas ($1 - h^2/2 = 0 \Leftrightarrow h = \pm\sqrt{2}$ mais $\pm\sqrt{2} \notin [0,1]$). Par conséquent, $\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } [0,1]}$.

(d) *Calculer le développement limité à l'ordre 5 en 0 de f'.*

▶ On a le développement limité usuel :

$$\frac{1}{\sqrt{1+u}} = (1+u)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}u + \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2}u^2 + o_{u\to 0}(u^2) = 1 - \frac{1}{2}u + \frac{3}{8}u^2 + o_{u\to 0}(u^2).$$

Avec le changement de variable $u = -\frac{h^2}{2}$, on obtient :

$$\frac{1}{\sqrt{1-h^2/2}} = 1 + \frac{1}{4}h^2 + \frac{3}{32}h^4 + o_{h\to 0}(h^4).$$

Puisque cette fonction de h est paire, le terme $o_{h\to 0}(h^4)$ est en fait égal à $o_{h\to 0}(h^5)$. On a finalement :

$$\boxed{f'(h) = \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{1-h^2/2}} = -\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}h^2 - \frac{3\sqrt{2}}{32}h^4 + o_{h\to 0}(h^5)}.$$

(e) *En déduire le développement limité à l'ordre 6 en 0 de f.*

▶ On obtient en intégrant le résultat précédent :

$$f(h) = f(0) - \sqrt{2}\cdot h - \frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{h^3}{3} - \frac{3\sqrt{2}}{32}\cdot\frac{h^5}{5} + o_{h\to 0}(h^6) = \boxed{\frac{\pi}{2} - \sqrt{2}h - \frac{\sqrt{2}}{12}h^3 - \frac{3\sqrt{2}}{160}h^5 + o_{h\to 0}(h^6)}.$$

5. *Conclure que pour tout x au voisinage de 1 :*

$$\boxed{\arcsin(x) = \frac{\pi}{2} - \sqrt{1-x}\left(\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{12}(1-x) + \frac{3\sqrt{2}}{160}(1-x)^2\right) + o_{x\to 1}\Big((1-x)^3\Big)}.$$

► Pour tout $h \in [0,1]$, on pose $x = 1-h^2 \Leftrightarrow h = \sqrt{1-x}$ (car $x \in [0,1]$) ce qui donne d'après le résultat précédent :

$$\begin{aligned}
\arcsin(x) &= \arcsin(1-h^2)\\
&= f(h)\\
&= \frac{\pi}{2} - \sqrt{2}h - \frac{\sqrt{2}}{12}h^3 - \frac{3\sqrt{2}}{160} + o_{h\to 0}(h^6)\\
&= \frac{\pi}{2} - \sqrt{2}\sqrt{1-x} - \frac{\sqrt{2}}{12}\left(\sqrt{1-x}\right)^3 - \frac{3\sqrt{2}}{160}\left(\sqrt{1-x}\right)^5 + o_{h\to 0}\Big(\left(\sqrt{1-x}\right)^6\Big)\\
&= \frac{\pi}{2} - \sqrt{2}\sqrt{1-x} - \frac{\sqrt{2}}{12}(1-x)\sqrt{1-x} - \frac{3\sqrt{2}}{160}(1-x)^2\sqrt{1-x} + o_{h\to 0}\Big((1-x)^3\Big)\\
&= \boxed{\frac{\pi}{2} - \sqrt{1-x}\left(\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{12}(1-x) + \frac{3\sqrt{2}}{160}(1-x)^2\right) + o_{x\to 1}\Big((1-x)^3\Big)}.
\end{aligned}$$

Exercice 2

On considère l'application suivante :

$$\begin{array}{cccc} \varphi : & \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & \overrightarrow{x} = (x_1,x_2,x_3,x_4) & \mapsto & \varphi\left(\overrightarrow{x}\right) = \overrightarrow{y} = (y_1,y_2,y_3) \end{array} \quad \text{où} \quad \left\{\begin{array}{rcl} y_1 &=& x_1+2x_2+3x_3+4x_4\\ y_2 &=& x_1+4x_2+2x_3+3x_4\\ y_3 &=& 2x_1+6x_2+5x_3+7x_4\end{array}\right.$$

et on propose d'étudier les ensembles suivants :

$$\mathrm{Ker}(\varphi) = \left\{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^4 \mid \varphi\left(\overrightarrow{x}\right) = \overrightarrow{0}\right\} \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(\varphi) = \left\{\overrightarrow{y} = \varphi\left(\overrightarrow{x}\right),\ \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^4\right\}.$$

1. *Montrer que* $\mathrm{Ker}(\varphi)$ *et* $\mathrm{Im}(\varphi)$ *sont des sous-espaces vectoriels (on précisera pour chacun de ces ensembles de quel espace vectoriel il est un sous-espace vectoriel).*

► Par définition, $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^4$ de représentation cartésienne :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1+2x_2+3x_3+4x_4 &=& 0\\ x_1+4x_2+2x_3+3x_4 &=& 0\\ 2x_1+6x_2+5x_3+7x_4 &=& 0\end{array}\right. .$$

En particulier, $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est bien $\boxed{\text{un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^4}$ en tant qu'intersection de trois hyperplans de $\mathbb{R}^4$. Par définition, $\mathrm{Im}(\varphi)$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ de représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{rcl} y_1 &=& x_1+2x_2+3x_3+4x_4\\ y_2 &=& x_1+4x_2+2x_3+3x_4\\ y_3 &=& 2x_1+6x_2+5x_3+7x_4\end{array}\right. ,\ (x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4.$$

En particulier, $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Vect}\left((1,1,2),(2,4,6),(3,2,5),(4,3,7)\right)$ est bien $\boxed{\text{un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^3}$.

Ces résultats seront bientôt du cours.

2. (a) *Déterminer une base $\mathcal{B}_{\text{Ker}}$ de $\text{Ker}(\varphi)$ et en déduire la dimension de $\text{Ker}(\varphi)$.*

▶ On applique la méthode du pivot de Gauss à la représentation cartésienne de $\text{Ker}(\varphi)$:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 6x_2 & + & 5x_3 & + & 7x_4 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcll} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 0 & \\ & & 2x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 0 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ & & 2x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 0 & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcll} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 0 & \\ & & 2x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 0 & \\ & & & & & & 0 & = & 0 & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{array}\right. .$$

Le système linéaire homogène échelonné de rang 2 obtenu a une infinité de solutions qu'on peut exprimer en fonction des deux inconnues auxiliaires x_3 et x_4 vues comme des paramètres :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & = & -3x_3 & - & 4x_4 \\ & & 2x_2 & = & x_3 & + & x_4 \\ & & x_3 & = & x_3 & & \\ & & x_4 & = & & & x_4 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrl} x_1 & = & -4x_3 & - & 5x_4 & L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ x_2 & = & \frac{1}{2}x_3 & + & \frac{1}{2}x_4 & L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2 \\ x_3 & = & x_3 & & & \\ x_4 & = & & & x_4 & \end{array}\right. .$$

On obtient une représentation paramétrique du sous-espace vectoriel $\text{Ker}(\varphi)$ qui est donc engendré par les vecteurs $\left(-4, \frac{1}{2}, 1, 0\right)$ et $\left(-5, \frac{1}{2}, 0, 1\right)$. Puisque ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, ils forment une base de $\text{Ker}(\varphi)$. D'où :

$$\boxed{\mathcal{B}_{\text{Ker}} = \left(\left(-4, \frac{1}{2}, 1, 0\right), \left(-5, \frac{1}{2}, 0, 1\right)\right)} \quad \text{et} \quad \boxed{\dim(\text{Ker}(\varphi)) = 2}.$$

(b) *L'application φ est-elle injective ? Justifier votre réponse.*

▶ Pour chaque vecteur $\overrightarrow{x} \in \text{Ker}(\varphi)$ on a $\varphi(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{0}$. En particulier, on a par exemple $\varphi(-4, 1, 1, 0) = \varphi(-5, 1, 0, 1)$ donc $\boxed{\varphi \text{ n'est pas injective}}$.

Ce résultat sera bientôt du cours.

3. (a) *Déterminer une base $\mathcal{B}_{\text{Im}}$ de $\text{Im}(\varphi)$ et en déduire la dimension de $\text{Im}(\varphi)$.*

▶ On a déjà vu à la question 1 que les vecteurs $(1, 1, 2)$, $(2, 4, 6)$, $(3, 2, 5)$ et $(4, 3, 7)$ forment une famille génératrice de $\text{Im}(\varphi)$. Cette famille est nécessairement liée car la dimension du sous-espace vectoriel $\text{Im}(\varphi)$ est inférieure ou égale à $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$. A l'aide des calculs de la question 2.(a), on a :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} -4 \cdot (1,1,2) & + & \frac{1}{2} \cdot (2,4,6) & + & 1 \cdot (3,2,5) & + & 0 \cdot (4,3,7) & = & (0,0,0) \\ -5 \cdot (1,1,2) & + & \frac{1}{2} \cdot (2,4,6) & + & 0 \cdot (3,2,5) & + & 1 \cdot (4,3,7) & = & (0,0,0) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcl} (3,2,5) & = & 4 \cdot (1,1,2) & - & \frac{1}{2}.(2,4,6) \\ (4,3,7) & = & 5 \cdot (1,1,2) & - & \frac{1}{2}.(2,4,6) \end{array}\right.$$

ainsi les vecteurs $(3, 2, 5)$ et $(4, 3, 7)$ sont combinaisons linéaires des vecteurs $(1, 1, 2)$ et $(2, 4, 6)$. On en déduit que :

$$\text{Im}(\varphi) = \text{Vect}\Big((1,1,2), (2,4,6), (3,2,5), (4,3,7)\Big) = \text{Vect}\Big((1,1,2), (2,4,6)\Big).$$

Et puisque $(1, 1, 2)$ et $(2, 4, 6)$ ne sont pas colinéaires, ils forment une base de $\text{Im}(\varphi)$. D'où :

$$\boxed{\mathcal{B}_{\text{Im}} = \Big((1,1,2), (2,4,6)\Big)} \quad \text{et} \quad \boxed{\dim(\text{Im}(\varphi)) = 2}.$$

N'hésitez pas à utiliser les calculs des questions précédentes pour gagner du temps.

(b) *L'application φ est-elle surjective ? Justifier votre réponse.*

▶ Puisque $\dim(\mathrm{Im}(\varphi)) = 2$ d'après le résultat précédent, on a $\mathrm{Im}(\varphi) \neq \mathbb{R}^3$ (car $\dim(R^3) = 3$ et $\mathrm{Im}(\varphi)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$). En particulier, il existe des vecteurs $\overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^3$ tels que $\overrightarrow{y} \notin \mathrm{Im}(\varphi)$. Par définition de $\mathrm{Im}(\varphi)$, ces vecteurs n'ont pas d'antécédents par φ et donc $\boxed{\varphi \text{ n'est pas surjective}}$.

Au lieu de raisonner avec les dimensions, on peut aussi tout simplement déterminer explicitement un vecteur $\overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathrm{Im}(\varphi)$, par exemple $\overrightarrow{y} = (1, 0, 0)$, en prouvant que le système linéaire $\overrightarrow{y} = \lambda \cdot (1, 1, 2) + \mu \cdot (2, 4, 6)$ de trois équations à deux inconnues $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ n'admet pas de solutions. Ce résultat sera bientôt du cours.

4. (a) *La famille $\mathcal{B}_{\mathrm{Ker}}$ est-elle une base de $\mathbb{R}^4$? Justifier votre réponse.*

▶ La famille $\mathcal{B}_{\mathrm{Ker}}$ $\boxed{\text{n'est pas une base de } \mathbb{R}^4}$ car elle comporte seulement deux vecteurs alors que $\dim(\mathbb{R}^4) = 4$.

(b) *Pour chacun des vecteurs $\overrightarrow{y}$ de la famille $\mathcal{B}_{\mathrm{Im}}$, déterminer un vecteur $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^4$ tel que $\varphi(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{y}$. On notera $\mathcal{B}'_{\mathrm{Im}}$ la famille de vecteurs obtenus.*

▶ On a par exemple $\varphi(1, 0, 0, 0) = (1, 1, 2)$ et $\varphi(0, 1, 0, 0) = (2, 4, 6)$ donc

$$\boxed{\mathcal{B}'_{\mathrm{Im}} = \Big((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0)\Big)}.$$

(c) *Montrer que la famille formée des vecteurs de $\mathcal{B}_{\mathrm{Ker}}$ et ceux de $\mathcal{B}'_{\mathrm{Im}}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.*

▶ On considère l'équation suivante d'inconnue $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$:

$$\alpha \cdot \left(-4, \frac{1}{2}, 1, 0\right) + \beta \cdot \left(-5, \frac{1}{2}, 0, 1\right) + \gamma \cdot (1, 0, 0, 0) + \delta \cdot (0, 1, 0, 0) = (0, 0, 0, 0)$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} -4\alpha & - & 5\beta & + & \gamma & & & = & 0 \\ \frac{1}{2}\alpha & + & \frac{1}{2}\beta & & & + & \delta & = & 0 \\ \alpha & & & & & & & = & 0 \\ & & \beta & & & & & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} \alpha & = & 0 \\ \beta & = & 0 \\ \gamma & = & 0 \\ \delta & = & 0 \end{array}\right. .$$

Puisque cette équation n'a qu'une seule solution, on en déduit que les vecteurs $\left(-4, \frac{1}{2}, 1, 0\right)$, $\left(-5, \frac{1}{2}, 0, 1\right)$, $(1, 0, 0, 0)$ et $(0, 1, 0, 0)$ forment une famille libre de quatre vecteurs de $\mathbb{R}^4$. Or $\dim(\mathbb{R}^4) = 4$, donc cette famille est $\boxed{\text{une base de } \mathbb{R}^4}$.