Sujets et corrigés des DS de mathématiques et d'informatique

BCPST1A lycée Hoche 2016-2017

Sébastien Godillon

Table des matières

DS n$^{\text{o}}$ 1 de mathématiques

durée : 3 heures

Exercice 1

On considère le nombre réel suivant :

$$x = \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}.$$

1. Déterminer un couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que x vérifie une égalité du type $x^3 = \alpha x + \beta$.
2. Montrer qu'il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\forall X \in \mathbb{R},\ X^3 - \alpha X - \beta = (X-a)(X^2 + bX + c)$.
3. Simplifier x.

Problème 1

Pour tout ensemble $A \subset \mathbb{N}$, on note $p(A)$ le produit des éléments de A, ainsi : $p(\{2, 3, 7\}) = 2 \times 3 \times 7 = 42$. Et pour tout ensemble $E \subset \mathbb{N}^\star$, on note $s(E)$ la somme de tous les $\frac{1}{p(A)}$ où A décrit l'ensemble des parties non vides de E, ainsi : $s(\{4, 2\}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4\times 2} = \frac{7}{8}$. Le but de ce problème est de calculer $s([\![1, n]\!])$ pour tout entier $n \geqslant 1$, où on rappelle que $[\![1, n]\!]$ désigne l'intervalle d'entiers $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$.

1. Calculer $s([\![1, n]\!])$ pour :
   (a) $n = 1$;
   (b) $n = 2$;
   (c) $n = 3$.
2. Pour cette question, on fixe un entier $n \geqslant 1$ et on suppose que $s([\![1, n]\!]) = n$. On pose :

   $$\mathcal{E}_1 = \mathcal{P}([\![1, n]\!]) \setminus \{\emptyset\} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_2 = \{A \subset [\![1, n+1]\!] \mid (n+1) \in A\}$$

   où on rappelle que $\mathcal{P}([\![1, n]\!])$ désigne l'ensemble des parties de $[\![1, n]\!]$.
   (a) Dans cette question, on considère le cas où $n = 2$. Décrire $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ puis reconnaître $\mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2$.
   (b) Donner la somme s_1 de tous les $\frac{1}{p(A)}$ où A décrit $\mathcal{E}_1$.
   (c) Montrer que $\mathcal{E}_2 = \{\{n+1\}\} \cup \{B \cup \{n+1\} \mid B \in \mathcal{E}_1\}$.
   (d) i. Soit $A = B \cup \{n+1\}$ où $B \in \mathcal{E}_1$. Exprimer $p(A)$ en fonction de $p(B)$.
      ii. Montrer que la somme de tous les $\frac{1}{p(A)}$ où A décrit $\{B \cup \{n+1\} \mid B \in \mathcal{E}_1\}$ vaut $\dfrac{s_1}{n+1}$.
      iii. En déduire la somme s_2 de tous les $\frac{1}{p(A)}$ où A décrit $\mathcal{E}_2$.
   (e) Prouver que $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ forment une partition de $\mathcal{P}([\![1, n+1]\!]) \setminus \{\emptyset\}$.
   (f) En déduire $s([\![1, n+1]\!])$.
3. Conclure.

Exercice 2

Le but de cet exercice est de résoudre l'équation suivante d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\lfloor \sqrt{x} \rfloor = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor . \tag{E}$$

1. Montrer que si $x \in \mathbb{R}$ est solution de (E) alors x est solution du système d'inéquations suivant :

$$\begin{cases} \sqrt{x} < \dfrac{x}{2} + 1 \\ \dfrac{x}{2} - 1 < \sqrt{x} \end{cases} . \tag{S}$$

2. Déterminer l'ensemble des solutions du système (S).
3. Calculer la partie entière du réel $\alpha = 2(2 + \sqrt{3})$.
4. Pour chaque entier $k \in [\![0, 7]\!]$, vérifier si les réels de $[k, k+1[$ sont solutions de l'équation (E).
5. Conclure.

Problème 2

On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est <u>continue</u> si et seulement si pour tout réel $\varepsilon > 0$ et tout $a \in \mathbb{R}$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que $f(x) \in]f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon[$ pour tout $x \in]a - \eta, a + \eta[$, autrement dit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue si et seulement si l'assertion suivante est vérifiée :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall a \in \mathbb{R},\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ |x - a| < \eta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon. \tag{C}$$

1. Prouver que la fonction $f_1 : x \mapsto \pi x + 42$ est continue.
2. On considère la fonction $f_2 : x \mapsto x^2$.
   (a) Montrer que $\forall (a, x) \in \mathbb{R}^2,\ |f_2(x) - f_2(a)| \leqslant |x - a|(|x - a| + 2|a|)$.
   (b) Prouver que la fonction f_2 est continue.

On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est <u>uniformément continue</u> si et seulement si pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que $f(x) \in]f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon[$ pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $x \in]a - \eta, a + \eta[$, autrement dit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue si et seulement si l'assertion suivante est vérifiée :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall a \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ |x - a| < \eta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon. \tag{UC}$$

3. Prouver que la fonction $f_1 : x \mapsto \pi x + 42$ est uniformément continue.
4. On considère la fonction $f_2 : x \mapsto x^2$.
   (a) Écrire (avec des quantificateurs) la négation de l'assertion (UC).
   (b) On fixe $\eta > 0$ pour cette question. Montrer qu'il existe un réel $a > 0$ tel que $|f_2(a + \frac{\eta}{2}) - f_2(a)| \geqslant 1$.
   (c) Prouver que la fonction f_2 n'est pas uniformément continue.

Exercice 3

On considère l'ensemble suivant :

$$E = \left\{ f(x) \mid x \in \left]0, \tfrac{\pi}{2}\right[\right\} \quad \text{où} \quad f : x \mapsto x - \frac{\tan(x) - 1}{\tan^2(x) + 1}.$$

1. Montrer que $f(x) = x + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$.
2. Étudier les variations de la fonction f sur $]0, \frac{\pi}{2}[$.
3. En déduire que E est un intervalle à déterminer.

Corrigé du DS n° 1 de mathématiques

Exercice 1

On considère le nombre réel suivant :

$$x = \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}.$$

1. *Déterminer un couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que x vérifie une égalité du type $x^3 = \alpha x + \beta$.*

▶

Le même exercice a été donné lors du DS n° 1 de l'an dernier avec des données numériques différentes. Il ne doit donc poser aucun problème à ceux qui ont travaillé sérieusement les sujets précédents comme c'était conseillé.

On a pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)(a+b)^2 = (a+b)(a^2+2ab+b^2) = a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3\\ &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.\end{aligned}$$

On apprendra plus tard à écrire ce type de formule beaucoup plus vite à l'aide du binôme de Newton.

En posant $a = \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}}$ et $b = \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$, on obtient :

$$\begin{aligned}x^3 =& \left(\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}\right)^3 + 3\left(\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}\right)\left(\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}\right)^2\\ &+3\left(\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}\right)^2\left(\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}\right) + \left(\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}\right)^3\\ =&\left(20+14\sqrt{2}\right) + 3\left(\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}\right)\left(\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}\right)\left(\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}\right)\\ &+\left(20-14\sqrt{2}\right)\\ =&40 + 3\left(\sqrt[3]{\left(20+14\sqrt{2}\right)\left(20-14\sqrt{2}\right)}\right)x = 40 + 3\left(\sqrt[3]{400 - 196\times 2}\right)x\\ =&40+3\left(\sqrt[3]{8}\right)x = 40+6x.\end{aligned}$$

Ainsi, on a bien $x^3 = \alpha x + \beta$ en posant $\boxed{\alpha = 6 \text{ et } \beta = 40}$.

2. *Montrer qu'il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\forall X \in \mathbb{R},\ X^3 - \alpha X - \beta = (X - a)(X^2 + bX + c)$.*

▶ On remarque que $X = 4$ est une racine évidente de l'équation $X^3 - 6X - 40$ d'inconnue $X \in \mathbb{R}$. On peut donc factoriser l'expression $X^3 - 6X - 40$ par $X - 4$ pour tout $X \in \mathbb{R}$. Autrement dit, il existe $(b, c) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall X \in \mathbb{R},\ X^3 - 6X - 40 = (X-4)(X^2+bX+c) = X^3 + (b-4)X^2 + (c-4b)X - 4c.$$

Par identification des coefficients de polynômes, on en déduit que :

$$\left\{\begin{array}{r} b-4=0\\ c-4b=-6\\ -4c=-40\end{array}\right. \quad \text{donc} \quad \left\{\begin{array}{l} b=4\\ c=10\end{array}\right..$$

Par conséquent, on a bien le résultat de l'énoncé en posant $\boxed{a = 4,\ b = 4 \text{ et } c = 10}$.

3. *Simplifier x.*

▶ D'après la question 1, x est solution de l'équation $X^3 - 6X - 40 = 0$ d'inconnue $X \in \mathbb{R}$. D'après la question 3, cette équation peut aussi s'écrire $(X-4)(X^2+4X+10) = 0$ donc $X - 4 = 0$ ou $X^2 + 4X + 10 = 0$ (par intégrité de la multiplication). La deuxième équation obtenue est une équation du second degré de discriminant $\Delta = 4^2 - 4 \times 10 = -24 < 0$, elle n'admet donc pas de solutions réelles. On en déduit que l'unique solution réelle de l'équation $X^3 - 6X - 40 = 0$ est $X = 4$. Par conséquent :

$$\boxed{x = 4}.$$

Problème 1

Pour tout ensemble $A \subset \mathbb{N}$, on note $p(A)$ le produit des éléments de A, ainsi : $p(\{2,3,7\}) = 2 \times 3 \times 7 = 42$. Et pour tout ensemble $E \subset \mathbb{N}^\star$, on note $s(E)$ la somme de tous les $\frac{1}{p(A)}$ où A décrit l'ensemble des parties non vides de E, ainsi : $s(\{4,2\}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4\times 2} = \frac{7}{8}$. Le but de ce problème est de calculer $s(\llbracket 1,n \rrbracket)$ pour tout entier $n \geqslant 1$, où on rappelle que $\llbracket 1,n \rrbracket$ désigne l'intervalle d'entiers $\{1,2,3,\dots,n\}$.

1. *Calculer $s(\llbracket 1,n \rrbracket)$ pour :*

   (a) *$n = 1$;*

   ▶

   > *Il s'agit d'un problème très abstrait donc difficile. Aidez-vous des premières questions pour comprendre l'énoncé avec des exemples.*

   L'ensemble des parties non vides de $\llbracket 1,1 \rrbracket = \{1\}$ est $\{\{1\}\}$, donc :

   $$s(\llbracket 1,1 \rrbracket) = \frac{1}{1} = \boxed{1}.$$

   (b) *$n = 2$;*

   ▶ L'ensemble des parties non vides de $\llbracket 1,2 \rrbracket = \{1,2\}$ est $\{\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$, donc :

   $$s(\llbracket 1,2 \rrbracket) = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1\times 2} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \boxed{2}.$$

   (c) *$n = 3$.*

   ▶ L'ensemble des parties non vides de $\llbracket 1,3 \rrbracket = \{1,2,3\}$ est :

   $$\{\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$$

   donc :

   $$\begin{aligned} s(\llbracket 1,3 \rrbracket) &= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{1\times 3} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{1\times 2\times 3} \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \boxed{3}. \end{aligned}$$

2. *Pour cette question, on fixe un entier $n \geqslant 1$ et on suppose que $s(\llbracket 1,n \rrbracket) = n$. On pose :*

   $$\mathcal{E}_1 = \mathcal{P}(\llbracket 1,n \rrbracket) \setminus \{\emptyset\} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_2 = \{A \subset \llbracket 1,n+1 \rrbracket \mid (n+1) \in A\}$$

   où on rappelle que $\mathcal{P}(\llbracket 1,n \rrbracket)$ désigne l'ensemble des parties de $\llbracket 1,n \rrbracket$.

(a) *Dans cette question, on considère le cas où $n=2$. Décrire $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ puis reconnaître $\mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2$.*

▶ L'ensemble des parties de $[\![1,2]\!] = \{1,2\}$ est :

$$\mathcal{P}([\![1,2]\!]) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}.$$

On en déduit que :

$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{P}([\![1,2]\!]) \setminus \{\emptyset\} = \boxed{\{\{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}}.$$

Par définition, $\mathcal{E}_2 = \{A \subset [\![1,3]\!] \mid 3 \in A\}$ est l'ensemble des ensembles A inclus dans $[\![1,3]\!]$, donc A est une partie de $[\![1,3]\!]$, tels que 3 appartient à A. Or l'ensemble des parties de $[\![1,3]\!] = \{1,2,3\}$ est :

$$\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}.$$

On en déduit que :

$$\mathcal{E}_2 = \boxed{\{\{3\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}}.$$

Par suite, on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2 &= \{\{1\}, \{2\}, \{1,2\}\} \cup \{\{3\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\} \\ &= \boxed{\{\{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{3\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}}. \end{aligned}$$

Or l'ensemble des parties de $[\![1,3]\!] = \{1,2,3\}$ est :

$$\mathcal{P}([\![1,3]\!]) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}.$$

On reconnait donc pour $\mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2$ l'ensemble des parties de $[\![1,3]\!] = \{1,2,3\}$ sauf la partie vide, c'est-à-dire :

$$\boxed{\mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2 = \mathcal{P}([\![1,3]\!]) \setminus \{\emptyset\}}.$$

(b) *Donner la somme s_1 de tous les $\frac{1}{p(A)}$ où A décrit $\mathcal{E}_1$.*

▶ L'ensemble $\mathcal{E}_1 = \mathcal{P}([\![1,n]\!]) \setminus \{\emptyset\}$ est l'ensemble des parties de $[\![1,n]\!]$ sauf la partie vide. Donc si A décrit $\mathcal{E}_1$ alors A décrit l'ensemble des parties non vides de $[\![1,n]\!]$. Ainsi la somme s_1 de tous les $\frac{1}{p(A)}$ où A décrit $\mathcal{E}_1$ est égale à la somme de tous les $\frac{1}{p(A)}$ où A décrit l'ensemble des parties non vides de $[\![1,n]\!]$. Par définition de l'énoncé, on a donc $s_1 = s([\![1,n]\!])$. Et puisque l'énoncé a supposé que $s([\![1,n]\!]) = n$, on obtient :

$$\boxed{s_1 = n}.$$

(c) *Montrer que $\mathcal{E}_2 = \{\{n+1\}\} \cup \{B \cup \{n+1\} \mid B \in \mathcal{E}_1\}$.*

▶ On raisonne par double inclusion.

$\boxed{\text{1}^{\text{re}}\text{ inclusion}}$: montrons que $\mathcal{E}_2 \subset \{\{n+1\}\} \cup \{B \cup \{n+1\} \mid B \in \mathcal{E}_1\}$.

Soit $A \in \mathcal{E}_2$ donc $A \subset [\![1,n+1]\!]$ et $(n+1) \in A$ par définition de $\mathcal{E}_2$.

<u>1er cas</u> : $A = \{n+1\}$ alors $A \in \{\{n+1\}\}$ et en particulier $A \in \{\{n+1\}\} \cup \{B \cup \{n+1\} \mid B \in \mathcal{E}_1\}$.

<u>2e cas</u> : $A \neq \{n+1\}$ alors A contient plus d'éléments que l'élément $(n+1) \in A$. On pose $B = A \setminus \{n+1\}$. Alors $A = B \cup \{n+1\}$. De plus $B \subset [\![1,n+1]\!] \setminus \{n+1\}$ car $A \subset [\![1,n+1]\!]$ et $(n+1) \notin B$. Or $[\![1,n+1]\!] \setminus \{n+1\} = [\![1,n]\!]$ donc B est une partie de $[\![1,n]\!]$, autrement dit $B \in \mathcal{P}([\![1,n]\!])$. Enfin B n'est pas l'ensemble vide car on a supposé que A contient plus d'éléments que $(n+1)$. On en déduit que B appartient à $\mathcal{P}([\![1,n]\!]) \setminus \{\emptyset\} = \mathcal{E}_1$. En résumé A est de la forme $A = B \cup \{n+1\}$ où $B \in \mathcal{E}_1$, donc $A \in \{B \cup \{n+1\} \mid B \in \mathcal{E}_1\}$ et en particulier $A \in \{\{n+1\}\} \cup \{B \cup \{n+1\} \mid B \in \mathcal{E}_1\}$.

<u>Conclusion</u> : dans tous les cas $A \in \{\{n+1\}\} \cup \{B \cup \{n+1\} \mid B \in \mathcal{E}_1\}$ et ceci est vrai pour tout $A \in \mathcal{E}_2$ donc

$$\boxed{\mathcal{E}_2 \subset \{\{n+1\}\} \cup \{B \cup \{n+1\} \mid B \in \mathcal{E}_1\}}.$$

$\boxed{2^{\text{e}} \text{ inclusion}}$: montrons que $\{\{n+1\}\} \cup \{B \cup \{n+1\} \mid B \in \mathcal{E}_1\} \subset \mathcal{E}_2$.
Soit $A \in \{\{n+1\}\} \cup \{B \cup \{n+1\} \mid B \in \mathcal{E}_1\}$.
<u>1er cas</u> : $A = \{n+1\}$ alors $A \subset [\![1, n+1]\!]$ et $(n+1) \in A$ donc $A \in \mathcal{E}_2$.
<u>2e cas</u> : $A \in \{B \cup \{n+1\} \mid B \in \mathcal{E}_1\}$ alors A est de la forme $A = B \cup \{n+1\}$ où B appartient à $\mathcal{E}_1 = \mathcal{P}([\![1,n]\!]) \setminus \{\emptyset\}$. Ainsi B est une partie de $[\![1,n]\!]$ donc en particulier une partie de $[\![1,n+1]\!]$ (car $[\![1,n]\!] \subset [\![1,n+1]\!]$). Autrement dit $B \subset [\![1,n+1]\!]$. Et puisque $\{n+1\} \subset [\![1,n+1]\!]$, on en déduit que $A = B \cup \{n+1\}$ est inclus dans $[\![1,n+1]\!]$. De plus on a bien que $(n+1) \in A$. Par conséquent, on a bien que $A \in \mathcal{E}_2$ par définition de l'ensemble $\mathcal{E}_2$.
<u>Conclusion</u> : dans tous les cas $A \in \mathcal{E}_2$ et ceci est vrai pour tout $A \in \{\{n+1\}\} \cup \{B \cup \{n+1\} \mid B \in \mathcal{E}_1\}$ donc

$$\boxed{\{\{n+1\}\} \cup \{B \cup \{n+1\} \mid B \in \mathcal{E}_1\} \subset \mathcal{E}_2}.$$

$\boxed{\text{Conclusion}}$: par double inclusion, on a bien démontré que

$$\boxed{\mathcal{E}_2 = \{\{n+1\}\} \cup \{B \cup \{n+1\} \mid B \in \mathcal{E}_1\}}.$$

Question difficile car très abstraite. Soyez organisés et méthodiques : distinguez tous les cas, utilisez toutes vos hypothèses et n'oubliez pas ce que vous voulez démontrer à chaque étape. Pour ne pas vous perdre avec tous ces ensembles abstraits, n'hésitez pas à vérifier vos raisonnements sur des exemples ($n = 2$ ou $n = 3$) au brouillon, c'est l'intérêt des questions précédentes.

(d) i. *Soit $A = B \cup \{n+1\}$ où $B \in \mathcal{E}_1$. Exprimer $p(A)$ en fonction de $p(B)$.*

▶ $p(A)$ est égal au produit des éléments de A. Puisque $(n+1) \notin B$ (car $\mathcal{E}_1 = \mathcal{P}([\![1,n]\!]) \setminus \{\emptyset\}$, B est une partie de $[\![1,n]\!]$ qui ne contient pas $(n+1)$). On en déduit que $p(A)$ est égal au produit des éléments de B et de $(n+1)$. Donc

$$\boxed{p(A) = p(B) \times (n+1)}.$$

N'oubliez pas de justifier que $(n+1) \notin B$ sinon le facteur $(n+1)$ apparaitrait déjà dans le produit $p(B)$ et on aurait seulement $p(A) = p(B)$.

ii. *Montrer que la somme de tous les $\frac{1}{p(A)}$ où A décrit $\{B \cup \{n+1\} \mid B \in \mathcal{E}_1\}$ vaut $\dfrac{s_1}{n+1}$.*

▶ D'après le résultat de la question précédente, la somme de tous les $\frac{1}{p(A)}$ où A décrit $\{B \cup \{n+1\} \mid B \in \mathcal{E}_1\}$ est égale à la somme de tous les $\frac{1}{p(B)\times(n+1)}$ où B décrit $\mathcal{E}_1$. En factorisant cette somme par $\frac{1}{(n+1)}$, on retrouve la somme s_1 de tous les $\frac{1}{p(B)}$ où B décrit $\mathcal{E}_1$ de la question 2(b) (car B est une variable muette et peut être remplacée par A). En multipliant par le facteur $\frac{1}{(n+1)}$, on obtient bien que la somme de tous les $\frac{1}{p(A)}$ où A décrit $\{B \cup \{n+1\} \mid B \in \mathcal{E}_1\}$ vaut

$$\boxed{\frac{s_1}{n+1}}.$$

iii. *En déduire la somme s_2 de tous les $\frac{1}{p(A)}$ où A décrit $\mathcal{E}_2$.*

▶ D'après la question 2(c), $\mathcal{E}_2 = \{\{n+1\}\} \cup \{B \cup \{n+1\} \mid B \in \mathcal{E}_1\}$. De plus $\{\{n+1\}\}$ et $\{B \cup \{n+1\} \mid B \in \mathcal{E}_1\}$ sont disjoints car si $B \in \mathcal{E}_1$ alors B est non vide par définition de $\mathcal{E}_1$. Ainsi la somme s_2 de tous les $\frac{1}{p(A)}$ où A décrit $\mathcal{E}_2$ est égale à la somme de $\frac{1}{p(\{n+1\})} = \frac{1}{n+1}$ et de la somme de tous les $\frac{1}{p(A)}$ où A décrit $\{B \cup \{n+1\} \mid B \in \mathcal{E}_1\}$. D'après le résultat de la question précédente et le résultat de la question 2(b), on obtient que

$$\boxed{s_2 = \frac{1}{n+1} + \frac{s_1}{n+1} = \frac{1}{n+1} + \frac{n}{n+1} = 1}.$$

(e) *Prouver que $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ forment une partition de $\mathcal{P}(\llbracket 1,n+1\rrbracket)\setminus\{\emptyset\}$.*

▶ $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ forment une partition de $\mathcal{P}(\llbracket 1,n+1\rrbracket)\setminus\{\emptyset\}$ si et seulement si

$$\mathcal{E}_1\cup\mathcal{E}_2=\mathcal{P}(\llbracket 1,n+1\rrbracket)\setminus\{\emptyset\} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_1\cap\mathcal{E}_2=\emptyset.$$

Jetez vous sur l'occasion pour rappeler la définition d'une partition et montrez ainsi que vous connaissez votre cours.

Pour montrer la première égalité d'ensembles, on raisonne par double inclusion.

1^re^ inclusion : montrons que $\mathcal{E}_1\cup\mathcal{E}_2\subset\mathcal{P}(\llbracket 1,n+1\rrbracket)\setminus\{\emptyset\}$.
Soit $A\in\mathcal{E}_1\cup\mathcal{E}_2$.
1^er^ cas : $A\in\mathcal{E}_1$ alors A est une partie non vide de $\llbracket 1,n\rrbracket$ car $\mathcal{E}_1=\mathcal{P}(\llbracket 1,n\rrbracket)\setminus\{\emptyset\}$ En particulier A est une partie non vide de $\llbracket 1,n+1\rrbracket$ car $\llbracket 1,n\rrbracket\subset\llbracket 1,n+1\rrbracket$, donc $A\in\mathcal{P}(\llbracket 1,n+1\rrbracket)\setminus\{\emptyset\}$.
2^e^ cas : $A\in\mathcal{E}_2$ alors $A\subset\llbracket 1,n+1\rrbracket$ et $(n+1)\in A$. Ainsi A est une partie non vide de $\llbracket 1,n+1\rrbracket$ donc $A\in\mathcal{P}(\llbracket 1,n+1\rrbracket)\setminus\{\emptyset\}$.
Conclusion : dans tous les cas $A\in\mathcal{P}(\llbracket 1,n+1\rrbracket)\setminus\{\emptyset\}$ et ceci est vrai pour tout $A\in\mathcal{E}_1\cup\mathcal{E}_2$ donc

$$\boxed{\mathcal{E}_1\cup\mathcal{E}_2\subset\mathcal{P}(\llbracket 1,n+1\rrbracket)\setminus\{\emptyset\}}.$$

2^e^ inclusion : montrons que $\mathcal{P}(\llbracket 1,n+1\rrbracket)\setminus\{\emptyset\}\subset\mathcal{E}_1\cup\mathcal{E}_2$.
Soit $A\in\mathcal{P}(\llbracket 1,n+1\rrbracket)\setminus\{\emptyset\}$.
1^er^ cas : $A\in\mathcal{E}_1$ alors en particulier $A\in\mathcal{E}_1\cup\mathcal{E}_2$.
2^e^ cas : $A\notin\mathcal{E}_1$ alors A est une partie de $\llbracket 1,n+1\rrbracket$ (car $A\in\mathcal{P}(\llbracket 1,n+1\rrbracket)\setminus\{\emptyset\}$) mais n'est pas une partie de $\llbracket 1,n\rrbracket$ (car $\mathcal{E}_1=\mathcal{P}(\llbracket 1,n\rrbracket)\setminus\{\emptyset\}$). On en déduit que A contient nécessairement $(n+1)$. Ainsi $A\subset\llbracket 1,n+1\rrbracket$ et $(n+1)\in A$ donc $A\in\mathcal{E}_2$ et en particulier $A\in\mathcal{E}_1\cup\mathcal{E}_2$.
Conclusion : dans tous les cas $A\in\mathcal{E}_1\cup\mathcal{E}_2$ et ceci est vrai pour tout $A\in\mathcal{P}(\llbracket 1,n+1\rrbracket)\setminus\{\emptyset\}$ donc

$$\boxed{\mathcal{P}(\llbracket 1,n+1\rrbracket)\setminus\{\emptyset\}\subset\mathcal{E}_1\cup\mathcal{E}_2}.$$

Conclusion : par double inclusion, on a prouvé que :

$$\boxed{\mathcal{E}_1\cup\mathcal{E}_2=\mathcal{P}(\llbracket 1,n+1\rrbracket)\setminus\{\emptyset\}}.$$

Pour montrer la deuxième égalité d'ensembles, on raisonne par l'absurde. On suppose que $\mathcal{E}_1\cap\mathcal{E}_2\neq\emptyset$ donc il existe au moins un élément $A\in\mathcal{E}_1\cap\mathcal{E}_2$. Alors $A\in\mathcal{E}_1$ et $A\in\mathcal{E}_2$. En particulier A est une partie de $\llbracket 1,n\rrbracket$ (car $\mathcal{E}_1=\mathcal{P}(\llbracket 1,n\rrbracket)\setminus\{\emptyset\}$) et $(n+1)\in A$ (par définition de $\mathcal{E}_2$) ce qui est absurde car $(n+1)\notin\llbracket 1,n\rrbracket$. Par conséquent il n'existe pas d'élément $A\in\mathcal{E}_1\cap\mathcal{E}_2$ donc

$$\boxed{\mathcal{E}_1\cap\mathcal{E}_2=\emptyset}.$$

Finalement, on a bien démontré que $\boxed{\mathcal{E}_1 \text{ et } \mathcal{E}_2 \text{ forment une partition de } \mathcal{P}(\llbracket 1,n+1\rrbracket)\setminus\{\emptyset\}}$.

(f) *En déduire $s(\llbracket 1,n+1\rrbracket)$.*

▶ D'après l'énoncé, $s(\llbracket 1,n+1\rrbracket)$ est égale à la somme de tous les $\frac{1}{p(A)}$ où A décrit l'ensembles des parties non vides de $\llbracket 1,n+1\rrbracket$, c'est-à-dire la somme de tous les $\frac{1}{p(A)}$ où A décrit $\mathcal{P}(\llbracket 1,n+1\rrbracket)\setminus\{\emptyset\}$. D'après le résultat de la question précédente, on en déduit que $s(\llbracket 1,n+1\rrbracket)$ est égale à la somme de la somme s_1 de tous les $\frac{1}{p(A)}$ où A décrit $\mathcal{E}_1$ et de la somme s_2 de tous les $\frac{1}{p(A)}$ où A décrit $\mathcal{E}_2$. En utilisant les résultats des questions 2(b) et 2(d), on obtient :

$$\boxed{s(\llbracket 1,n+1\rrbracket)=s_1+s_2=n+1}.$$

3. *Conclure.*

▶ On a montré à la question 1 que $s(\llbracket 1,1\rrbracket)=1$ et à la question 2 que si $s(\llbracket 1,n\rrbracket)=n$ pour un entier $n\geqslant 1$ fixé alors $s(\llbracket 1,n+1\rrbracket)=n+1$. D'après le principe de récurrence, on en déduit que

$$\boxed{\forall n\geqslant 1,\ \ s(\llbracket 1,n\rrbracket)=n}.$$

Soyez précis dans la rédaction de vos conclusions. Ici, il suffit d'évoquer le principe de récurrence et de rappeler précisément les hypothèses. En particulier, il est inutile (donc imprécis) de préciser qu'on a aussi démontré que $s([\![1,2]\!]) = 2$ et que $s([\![1,3]\!]) = 3$.

Exercice 2

Le but de cet exercice est de résoudre l'équation suivante d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\lfloor \sqrt{x} \rfloor = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor. \tag{E}$$

1. *Montrer que si $x \in \mathbb{R}$ est solution de (E) alors x est solution du système d'inéquations suivant :*

$$\begin{cases} \sqrt{x} < \dfrac{x}{2} + 1 \\ \dfrac{x}{2} - 1 < \sqrt{x} \end{cases}. \tag{S}$$

▶ Soit $x \in \mathbb{R}$ une solution de (E). Par définition de la partie entière, on a :

$$\lfloor \sqrt{x} \rfloor \leqslant \sqrt{x} < \lfloor \sqrt{x} \rfloor + 1 \quad \text{et} \quad \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor \leqslant \frac{x}{2} < \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + 1.$$

Puisque $\lfloor \sqrt{x} \rfloor = \lfloor x/2 \rfloor$ car x est solution de (E), on en déduit que :

$$\sqrt{x} < \lfloor \sqrt{x} \rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + 1 \leqslant \frac{x}{2} + 1 \quad \text{et} \quad \frac{x}{2} - 1 < \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + 1 - 1 = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor = \lfloor \sqrt{x} \rfloor \leqslant \sqrt{x}.$$

Donc x vérifie les inégalités suivantes :

$$\sqrt{x} < \frac{x}{2} + 1 \quad \text{et} \quad \frac{x}{2} - 1 < \sqrt{x}.$$

et par conséquent $\boxed{x \text{ est bien solution du système d'inéquations (S)}}$.

2. *Déterminer l'ensemble des solutions du système (S).*

▶ On commence par résoudre la première inéquation de (S). Cette inéquation est bien définie pour tout $x \geqslant 0$. On a :

$$\begin{aligned} & \sqrt{x} < \frac{x}{2} + 1 \\ \Leftrightarrow & \left(\sqrt{x}\right)^2 < \left(\frac{x}{2} + 1\right)^2 && \text{car la fonction } t \mapsto t^2 \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+, \\ & && \sqrt{x} \in \mathbb{R}_+ \text{ (par définition de la racine) et } \tfrac{x}{2} + 1 \in \mathbb{R}_+ \text{ (car } x \geqslant 0) \\ \Leftrightarrow & x < \frac{x^2}{4} + x + 1 \\ \Leftrightarrow & -1 < \frac{x^2}{4}. \end{aligned}$$

N'oubliez pas de justifier que les membres de l'inégalité sont bien dans $\mathbb{R}_+$ à chaque fois que vous utilisez la croissance de la fonction $t \mapsto t^2$ sur $\mathbb{R}_+$ (cette fonction n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$!!).

Puisque cette dernière inégalité est toujours vraie, on en déduit que la première inéquation de (S) est vérifiée pour tout $x \geqslant 0$. On résout ensuite la deuxième inéquation de (S). De même, elle est bien définie pour tout $x \geqslant 0$. On distingue deux cas.

Il est nécessaire de distinguer deux cas ici car $\frac{x}{2} - 1$ n'est pas toujours positif donc on ne peut pas toujours utiliser la croissance de la fonction $t \mapsto t^2$.

1$^{\text{er}}$ cas : $\frac{x}{2} - 1 < 0$ c'est-à-dire $x \in [0, 2[$.
Alors $\frac{x}{2} - 1 < \sqrt{x}$ est toujours vraie car $\sqrt{x} \geqslant 0$ (par définition de la racine) et $\frac{x}{2} - 1 < 0$ (par hypothèse du 1$^{\text{er}}$ cas). Donc la deuxième inéquation de (S) est vérifiée pour tout $x \in [0, 2[$.
2$^{\text{e}}$ cas : $\frac{x}{2} - 1 \geqslant 0$ c'est-à-dire $x \in [2, +\infty[$.
Alors on a en utilisant que la fonction $t \mapsto t^2$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$:

$$\begin{aligned} & \frac{x}{2} - 1 < \sqrt{x} \\ \Leftrightarrow & \left(\frac{x}{2} - 1\right)^2 < \left(\sqrt{x}\right)^2 \quad \text{car } \frac{x}{2} - 1 \in \mathbb{R}_+ \text{ (par hypothèse du 2}^{\text{e}}\text{ cas) et } \sqrt{x} \in \mathbb{R}_+ \\ \Leftrightarrow & \frac{x^2}{4} - x + 1 < x \\ \Leftrightarrow & x^2 - 8x + 4 < 0. \end{aligned}$$

On reconnait un polynôme du second degré de discriminant $\Delta = (-8)^2 - 4 \times 4 = 48 > 0$. Il a donc deux racines :

$$r_1 = \frac{-(-8) + \sqrt{48}}{2} = \frac{8 + 4\sqrt{3}}{2} = 4 + 2\sqrt{3} \quad \text{et} \quad r_2 = 4 - 2\sqrt{3}.$$

Ce polynôme est strictement négatif entre ses deux racines, donc sur $]4 - 2\sqrt{3}, 4 + 2\sqrt{3}[$. Or $x \in [2, +\infty[$ et $2 \in [4 - 2\sqrt{3}, 4 + 2\sqrt{3}]$ (car $\sqrt{3} > 1$ donc $4 - 2\sqrt{3} < 4 - 2 \times 1 = 2$), donc :

$$\frac{x}{2} - 1 < \sqrt{x} \Leftrightarrow x \in \left[2, 4 + 2\sqrt{3}\right[.$$

Conclusion : en prenant l'union des ensembles de solutions obtenus dans les deux cas, on obtient :

$$\frac{x}{2} - 1 < \sqrt{x} \Leftrightarrow x \in [0, 2[\cup \left[2, 4 + 2\sqrt{3}\right[= \left[0, 4 + 2\sqrt{3}\right[.$$

Finalement, en prenant l'intersection des ensembles de solutions de chaque inéquation du système (S), on en déduit l'ensemble des solutions de ce système :

$$[0, +\infty[\cap \left[0, 4 + 2\sqrt{3}\right[= \boxed{\left[0, 4 + 2\sqrt{3}\right[}.$$

Soyez précis dans vos justifications. Ici, il est utile de préciser que l'on considère l'union des ensembles de solutions après la disjonction de cas puis l'intersection des ensembles de solutions pour résoudre le système.

3. *Calculer la partie entière du réel $\alpha = 2(2 + \sqrt{3})$.*

► Par définition, la partie entière de $\alpha = 2(2+\sqrt{3})$ est l'unique entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leqslant \alpha < n+1$. Or on a :

$$3 < 2\sqrt{3} < 4 \quad \text{car } 9 < 12 < 16 \text{ et la fonction racine carrée est strictement croissante}$$

donc :

$$7 < 4 + 2\sqrt{3} = 2(2 + \sqrt{3}) = \alpha < 4 + 4 = 8 = 7 + 1.$$

On en déduit que la partie entière de $\alpha = 2(2 + \sqrt{3})$ vaut $\boxed{\lfloor \alpha \rfloor = 7}$.

Inutile de rédiger l'analyse qui se fait au brouillon. Ici on cherche $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leqslant 2(2 + \sqrt{3}) < n + 1$ puis on résout ces deux inéquations ce qui permet de déterminer l'encadrement de $\sqrt{3}$ ou de $2\sqrt{3}$ nécessaire pour la synthèse.

4. *Pour chaque entier $k \in [\![0,7]\!]$, vérifier si les réels de $[k, k+1[$ sont solutions de l'équation (E).*

▶ $\underline{k=0}$: soit $x \in [0,1[$. Alors $\sqrt{x} \in [0,1[$ (car la fonction racine carrée est strictement croissante) et $\frac{x}{2} \in [0, \frac{1}{2}[$. Par définition de la partie entière, on en déduit que $\lfloor \sqrt{x} \rfloor = 0 = \lfloor x/2 \rfloor$. Ainsi $\boxed{\text{tous les réels de } [k, k+1[\text{ pour } k=0 \text{ vérifient l'équation (E)}}$.

$\underline{k=1}$: soit $x \in [1,2[$. En raisonnant de même que pour $k=0$, on a $\sqrt{x} \in [1, \sqrt{2}[\subset [1,2[$ (car $2<4$) et $\frac{x}{2} \in [\frac{1}{2}, 1[\subset [0,1[$. On en déduit que $\lfloor \sqrt{x} \rfloor = 0 \neq 1 = \lfloor x/2 \rfloor$. Ainsi $\boxed{\text{aucun réel de } [k, k+1[\text{ pour } k=1 \text{ ne vérifie l'équation (E)}}$.

$\underline{k=2}$: soit $x \in [2,3[$. On a $\sqrt{x} \in [\sqrt{2}, \sqrt{3}[\subset [1,2[$ (car $1<2<3<4$) et $\frac{x}{2} \in [1, \frac{3}{2}[\subset [1,2[$. On en déduit que $\lfloor \sqrt{x} \rfloor = 1 = \lfloor x/2 \rfloor$. Ainsi $\boxed{\text{tous les réels de } [k, k+1[\text{ pour } k=2 \text{ vérifient (E)}}$.

$\underline{k=3}$: soit $x \in [3,4[$. On a $\sqrt{x} \in [\sqrt{3}, 2[\subset [1,2[$ (car $1<3$) et $\frac{x}{2} \in [\frac{3}{2}, 2[\subset [1,2[$. On en déduit que $\lfloor \sqrt{x} \rfloor = 1 = \lfloor x/2 \rfloor$. Ainsi $\boxed{\text{tous les réels de } [k, k+1[\text{ pour } k=3 \text{ vérifient (E)}}$.

$\underline{k=4}$: soit $x \in [4,5[$. On a $\sqrt{x} \in [2, \sqrt{5}[\subset [2,3[$ (car $5<9$) et $\frac{x}{2} \in [2, \frac{5}{2}[\subset [2,3[$. On en déduit que $\lfloor \sqrt{x} \rfloor = 2 = \lfloor x/2 \rfloor$. Ainsi $\boxed{\text{tous les réels de } [k, k+1[\text{ pour } k=4 \text{ vérifient (E)}}$.

$\underline{k=5}$: soit $x \in [5,6[$. On a $\sqrt{x} \in [\sqrt{5}, \sqrt{6}[\subset [2,3[$ (car $4<5<6<9$) et $\frac{x}{2} \in [\frac{5}{2}, 3[\subset [2,3[$. On en déduit que $\lfloor \sqrt{x} \rfloor = 2 = \lfloor x/2 \rfloor$. Ainsi $\boxed{\text{tous les réels de } [k, k+1[\text{ pour } k=5 \text{ vérifient (E)}}$.

$\underline{k=6}$: soit $x \in [6,7[$. On a $\sqrt{x} \in [\sqrt{6}, \sqrt{7}[\subset [2,3[$ (car $4<6<7<9$) et $\frac{x}{2} \in [3, \frac{7}{2}[\subset [3,4[$. On en déduit que $\lfloor \sqrt{x} \rfloor = 2 \neq 3 = \lfloor x/2 \rfloor$. Ainsi $\boxed{\text{aucun réel de } [k, k+1[\text{ pour } k=6 \text{ ne vérifie (E)}}$.

$\underline{k=7}$: soit $x \in [7,8[$. On a $\sqrt{x} \in [\sqrt{7}, \sqrt{8}[\subset [2,3[$ (car $4<7<8<9$) et $\frac{x}{2} \in [\frac{7}{2}, 4[\subset [3,4[$. On en déduit que $\lfloor \sqrt{x} \rfloor = 2 \neq 3 = \lfloor x/2 \rfloor$. Ainsi $\boxed{\text{aucun réel de } [k, k+1[\text{ pour } k=7 \text{ ne vérifie (E)}}$.

> *Soyez méthodique pour ne pas perdre de temps sur ce type de question. Rédigez proprement le premier cas mais ne perdez pas de temps à répéter la même chose pour les cas suivants, mettez seulement en avant les différences.*

5. *Conclure.*

▶ On a démontré aux questions 1 et 2 que si $x \in \mathbb{R}$ est solution de l'équation (E) alors $x \in [0, 4+2\sqrt{3}[$. Or $\lfloor 4+2\sqrt{3} \rfloor = 7$ d'après le résultat de la question 3 donc si $x \in \mathbb{R}$ est solution de l'équation (E) alors $x \in [0,8[$. Réciproquement, on a démontré à la question 4 que si x appartient à $[0,1[\cup[2,3[\cup[3,4[\cup[4,5[\cup[5,6[=[0,1[\cup[2,6[$ alors x est solution de l'équation (E) mais que si x appartient à $[1,2[\cup[6,7[\cup[7,8[=[1,2[\cup[6,8[$ alors x n'est pas solution de l'équation (E). Puisque tous ces intervalles forment une partition de $[0,8[$, on en déduit que l'ensemble des solutions de l'équation (E) est :

$$\boxed{[0,1[\cup[2,6[}.$$

> *Soyez précis pour rédiger vos conclusions. Montrez que vous avez compris la logique de l'énoncé en détaillant le raisonnement et renvoyant précisément à chaque résultat intermédiaire important. Les mots-clefs ici sont «réciproquement» et «partition».*

Problème 2

On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est <u>continue</u> si et seulement si pour tout réel $\varepsilon > 0$ et tout $a \in \mathbb{R}$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que $f(x) \in]f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon[$ pour tout $x \in]a-\eta, a+\eta[$, autrement dit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue si et seulement si l'assertion suivante est vérifiée :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall a \in \mathbb{R},\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ |x-a| < \eta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon. \qquad \text{(C)}$$

1. *Prouver que la fonction $f_1 : x \mapsto \pi x + 42$ est continue.*

▶

La première partie de ce problème est un exercice corrigé en TD avec des données numériques légèrement différentes ($x \mapsto \pi x + 42$ au lieu de $x \mapsto 42x + \pi$).

On fixe $\varepsilon > 0$ et $a \in \mathbb{R}$. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |f_1(x) - f_1(a)| = |(\pi x + 42) - (\pi a + 42)| = \pi |x - a|.$$

Par conséquent, en posant $\eta = \varepsilon/\pi > 0$, on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}$ que

$$\text{si} \quad |x - a| < \eta \quad \text{alors} \quad |f_1(x) - f_1(a)| = \pi |x - a| < \pi \eta = \pi \frac{\varepsilon}{\pi} = \varepsilon.$$

On a donc prouvé que :

$$\exists \eta > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ |x - a| < \eta \Longrightarrow |f_1(x) - f_1(a)| < \varepsilon.$$

Puisque cette assertion est vraie pour n'importe quel $a \in \mathbb{R}$ et n'importe quel $\varepsilon > 0$, on en déduit que :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall a \in \mathbb{R},\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ |x - a| < \eta \Longrightarrow |f_1(x) - f_1(a)| < \varepsilon.$$

Par conséquent $\boxed{\text{la fonction } f_1 \text{ est continue}}$.

2. *On considère la fonction $f_2 : x \mapsto x^2$.*

(a) *Montrer que $\forall (a, x) \in \mathbb{R}^2,\ |f_2(x) - f_2(a)| \leqslant |x - a|(|x - a| + 2|a|)$.*

▶ Soit $(a, x) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$\begin{aligned} |f_2(x) - f_2(a)| &= |x^2 - a^2| = |(x - a)(x + a)| = |x - a||x + a| \\ &= |x - a||(x - a) + 2a| \\ &\leqslant |x - a|(|x - a| + 2|a|) \end{aligned}$$

d'après l'inégalité triangulaire et car $|x - a| \geqslant 0$. Puisque cette inégalité est vraie pour n'importe quel $(a, x) \in \mathbb{R}^2$, on a bien démontré que

$$\boxed{\forall (a, x) \in \mathbb{R}^2,\ |f_2(x) - f_2(a)| \leqslant |x - a|(|x - a| + 2|a|)}.$$

(b) *Prouver que la fonction f_2 est continue.*

▶ On fixe $\varepsilon > 0$ et $a \in \mathbb{R}$. On cherche $\eta > 0$ tel que $\eta(\eta + 2|a|) = \varepsilon$ donc tel que $\eta^2 + 2|a|\eta - \varepsilon = 0$. On reconnait une équation du second degré de discriminant $\Delta = (2|a|)^2 - 4(-\varepsilon) = 4a^2 + 4\varepsilon > 0$ car $\varepsilon > 0$. Cette équation a donc deux solutions :

$$r_1 = \frac{-2|a| + \sqrt{4a^2 + 4\varepsilon}}{2} = -|a| + \sqrt{a^2 + \varepsilon} \quad \text{et} \quad r_2 = -|a| - \sqrt{a^2 + \varepsilon} \leqslant 0.$$

On pose donc $\eta = -|a| + \sqrt{a^2 + \varepsilon}$. On a bien $\eta > 0$ car $\sqrt{a^2 + \varepsilon} > \sqrt{a^2} = |a|$ (en utilisant que la fonction racine carrée est strictement croissante et que $\varepsilon > 0$). D'après le résultat de la question précédente, on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}$ que

$$\text{si} \quad |x - a| < \eta \quad \text{alors} \quad |f_2(x) - f_2(a)| \leqslant |x - a|(|x - a| + 2|a|) < \eta(\eta + 2|a|) = \varepsilon.$$

On a donc prouvé que :

$$\exists \eta > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ |x - a| < \eta \Longrightarrow |f_2(x) - f_2(a)| < \varepsilon.$$

Puisque cette assertion est vraie pour n'importe quel $a \in \mathbb{R}$ et n'importe quel $\varepsilon > 0$, on en déduit que :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall a \in \mathbb{R},\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ |x - a| < \eta \Longrightarrow |f_2(x) - f_2(a)| < \varepsilon.$$

Par conséquent $\boxed{\text{la fonction } f_2 \text{ est continue}}$.

On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est <u>uniformément continue</u> si et seulement si pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que $f(x) \in]f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon[$ pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $x \in]a - \eta, a + \eta[$, autrement dit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue si et seulement si l'assertion suivante est vérifiée :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall a \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ |x - a| < \eta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon. \tag{UC}$$

3. *Prouver que la fonction $f_1 : x \mapsto \pi x + 42$ est uniformément continue.*

▶

Il faut bien comprendre la différence entre (C) et (UC). L'inversion du quantificateur $\forall a \in \mathbb{R}$ et $\exists \eta > 0$ modifie complètement le sens de l'assertion. Dans (C) le réel $\eta > 0$ dépend du choix de $a \in \mathbb{R}$ fixé avant de trouver η. Dans (UC) le réel $\eta > 0$ ne dépend pas du choix de $a \in \mathbb{R}$ puisque celui-ci est fixé après avoir trouvé η.

On fixe $\varepsilon > 0$. On pose $\eta = \varepsilon/\pi > 0$. On obtient alors pour tout $(a, x) \in \mathbb{R}^2$ que

$$\text{si} \quad |x - a| < \eta \quad \text{alors} \quad |f_1(x) - f_1(a)| = \pi|x - a| < \pi\eta = \pi\frac{\varepsilon}{\pi} = \varepsilon.$$

On a donc prouvé que :

$$\exists \eta > 0,\ \forall a \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ |x - a| < \eta \Longrightarrow |f_1(x) - f_1(a)| < \varepsilon.$$

Puisque cette assertion est vraie pour n'importe quel $\varepsilon > 0$, on en déduit que :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall a \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ |x - a| < \eta \Longrightarrow |f_1(x) - f_1(a)| < \varepsilon.$$

Par conséquent $\boxed{\text{la fonction } f_1 \text{ est uniformément continue}}$.

La preuve est quasi-identique à celle de la question 1 car le réel $\eta > 0$ trouvé à la question 1 ne dépend pas de $a \in \mathbb{R}$. On peut donc poser η avant de fixer a.

4. *On considère la fonction $f_2 : x \mapsto x^2$.*

(a) *Écrire (avec des quantificateurs) la négation de l'assertion (UC).*

▶ La négation de (UC) est :

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall \eta > 0,\ \exists a \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\ |x - a| < \eta \text{ et } |f(x) - f(a)| \geqslant \varepsilon.$$

Attention à la négation d'une implication. Pensez à utiliser le principe de l'implication matérielle : «$P \Longrightarrow Q$» est équivalent à «non(P) ou Q», donc «non($P \Longrightarrow Q$)» est équivalent à «P et non(Q)».

(b) *On fixe $\eta > 0$ pour cette question. Montrer qu'il existe un réel $a > 0$ tel que $|f_2(a+\frac{\eta}{2}) - f_2(a)| \geqslant 1$.*

▶ On a pour tout $a > 0$:

$$\left|f_2\left(a + \frac{\eta}{2}\right) - f_2(a)\right| = \left|\left(a + \frac{\eta}{2}\right)^2 - a^2\right| = \left|a^2 + a\eta + \frac{\eta^2}{4} - a^2\right| = \left|\eta\left(a + \frac{\eta}{4}\right)\right|$$
$$= \eta\left(a + \frac{\eta}{4}\right) \quad \text{car tout est positif.}$$

Il suffit donc de résoudre l'inéquation suivante d'inconnue $a > 0$:

$$\eta\left(a + \frac{\eta}{4}\right) \geqslant 1 \Leftrightarrow a \geqslant \frac{1}{\eta} - \frac{\eta}{4} \quad \text{car } \eta > 0.$$

Par exemple, en posant $a = 1/\eta$ on a bien $a > 0$ et $a \geqslant \frac{1}{\eta} - \frac{\eta}{4}$ donc $\eta\left(a + \frac{\eta}{4}\right) \geqslant 1$.

Attention : si on pose $a = \frac{1}{\eta} - \frac{\eta}{4}$ alors il n'est pas toujours vrai que $a > 0$ (c'est faux si $\eta \geqslant 2$). Par contre, puisqu'il existe une infinité de valeurs possibles pour a, il suffit d'en choisir une strictement positive.

Finalement, on a bien prouvé $\boxed{\text{l'existence d'au moins un } a > 0 \text{ tel que } |f_2(a+\frac{\eta}{2}) - f_2(a)| \geqslant 1}$.

(c) Prouver que la fonction f_2 n'est pas uniformément continue.

▶ On pose $\varepsilon = 1$. On fixe $\eta > 0$. On choisit la valeur de a obtenue à la question précédente et on pose $x = a + \frac{\eta}{2}$. On a alors :

$$\begin{aligned} |x-a| &= \left|a + \frac{\eta}{2} - a\right| = \frac{\eta}{2} < \eta \quad \text{car } \eta > 0 \\ \text{et} \quad |f_2(x) - f_2(a)| &= \left|f_2\left(a + \frac{\eta}{2}\right) - f_2(a)\right| \geqslant 1 = \varepsilon. \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\exists a \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\ |x-a| < \eta \text{ et } |f_2(x) - f_2(a)| \geqslant \varepsilon.$$

Puisque cette assertion est vraie pour n'importe quel $\eta > 0$ et qu'on a posé $\varepsilon = 1 > 0$, on a bien montré que :

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall \eta > 0,\ \exists a \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\ |x-a| < \eta \text{ et } |f_2(x) - f_2(a)| \geqslant \varepsilon.$$

D'après le résultat de la question 4(a), on en déduit que $\boxed{\text{la fonction } f_2 \text{ n'est pas uniformément continue}}$.

La question n'est vraiment pas si difficile si on a bien compris l'énoncé. Le plus dur est de ne pas s'emmêler entre toutes les variables : il faut bien distinguer celles qu'on doit fixer de celles qu'on doit trouver.

Exercice 3

On considère l'ensemble suivant :

$$E = \left\{ f(x) \mid x \in \left]0, \tfrac{\pi}{2}\right[\right\} \quad \textit{où} \quad f : x \mapsto x - \frac{\tan(x) - 1}{\tan^2(x) + 1}.$$

1. *Montrer que $f(x) = x + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$.*

▶ Soit $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$. On a d'après les formules de trigonométrie :

$$\begin{aligned} f(x) = x - \frac{\tan(x) - 1}{\tan^2(x) + 1} &= x - \frac{\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} - 1}{\dfrac{1}{\cos^2(x)}} = x - \left(\frac{\sin(x)\cos^2(x)}{\cos(x)} - \cos^2(x)\right) \\ &= x - \sin(x)\cos(x) + \cos^2(x) \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) &= x + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos(2x)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin(2x)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \\ &= x + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\left(2\cos^2(x) - 1\right)\frac{\sqrt{2}}{2} - 2\cos(x)\sin(x)\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= x + \frac{1}{2} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \left(2\cos^2(x) - 1 - 2\cos(x)\sin(x)\right) \\ &= x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(2\cos^2(x) - 1 - 2\cos(x)\sin(x)\right) \\ &= x + \cos^2(x) - \cos(x)\sin(x). \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\boxed{\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[,\ f(x) = x + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)}.$$

2. *Étudier les variations de la fonction f sur $]0, \frac{\pi}{2}[$.*

► D'après le résultat de la question précédente, la fonction f est dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ comme somme et composée de fonctions usuelles.

N'oubliez jamais de justifier qu'une fonction est dérivable avant de calculer sa dérivée. Ici la forme obtenue à la question précédente est beaucoup plus facile que celle de l'énoncé pour justifier la dérivabilité.

La dérivée de f est donnée par :

$$\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[, \ f'(x) = 1 - 2\frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 - \sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right).$$

Pour étudier le signe de la dérivée, on résout l'inéquation suivante d'inconnue $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$:

$$\begin{aligned}
& 1 - \sqrt{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \geqslant 0 \\
\Leftrightarrow & \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\
\Leftrightarrow & 2x + \frac{\pi}{4} \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \frac{9\pi}{4} + 2k\pi\right] \quad \text{d'après le cercle trigonométrique} \\
\Leftrightarrow & 2x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi\right] \\
\Leftrightarrow & x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{4} + k\pi, \pi + k\pi\right] \\
\Leftrightarrow & x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[\quad \text{car } x \in]0, \frac{\pi}{2}[.
\end{aligned}$$

On en déduit le tableau des variations de la fonction f sur $]0, \frac{\pi}{2}[$:

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$\frac{\pi}{4}$	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$

car on a d'après le résultat de la question précédente :

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) \\
&= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4}, \\
\lim_{x \to 0} f(x) &= \lim_{x \to 0} \left(x + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1, \\
\text{et} \quad \lim_{x \to \pi/2} f(x) &= \lim_{x \to \pi/2} \left(x + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)\right) \\
&= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

3. *En déduire que E est un intervalle à déterminer.*

▶ Par définition, $E = \{f(x) \mid x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\}$ est l'ensemble des images de la fonction f sur $]0, \frac{\pi}{2}[$. D'après le tableau des variations de la fonction f sur $]0, \frac{\pi}{2}[$, on obtient que

$$\boxed{E = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[} \quad \text{car } 1 < \frac{\pi}{2}.$$

On verra plus tard dans le cours que l'argument principal pour justifier la réponse à ce type de question est le théorème des valeurs intermédiaires.

DS n$^{\text{o}}$ 2 de mathématiques

durée : 3 heures

Exercice 1

Déterminer l'ensemble des solutions de l'inéquation et des deux équations suivantes d'inconnue $\theta \in \mathbb{R}$.

1. $\sin(3\theta) \geqslant \cos(\theta)$.
2. $2 = 3\cos(\theta) + 4\sin(\theta)$.
3. $\cos(\theta) + \cos(2\theta) + \cos(3\theta) + \cdots + \cos(42\theta) = 0$.

Problème 1

On fixe un entier $n \geqslant 2$ pour tout ce problème et on considère le produit suivant :

$$P = \prod_{k=2}^{n} \frac{k^3+1}{k^3-1}.$$

1. Déterminer sous forme exponentielle les solutions de l'équation $z^3 = 1$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$. On note j la seule de ces solutions ayant une partie imaginaire strictement positive.
2. Calculer $1 + j + j^2$.
3. Montrer que pour tout $X \in \mathbb{C}$:
$$X^3+1 = \Big(X+1\Big)\Big(X+j\Big)\Big(X+j^2\Big) \quad \text{et} \quad X^3-1 = \Big(X-1\Big)\Big(X-j\Big)\Big(X-j^2\Big).$$
4. Déduire des résultats précédents que :
$$P = \left(\prod_{k=2}^{n} \frac{k+1}{k-1}\right)\left(\prod_{k=2}^{n} \frac{j+k}{j+k+1}\right)\left(\prod_{k=2}^{n} \frac{-j+k-1}{-j+k}\right).$$
5. Simplifier P.

Exercice 2

Simplifier les expressions suivantes en fonction de $n \in \mathbb{N}^\star$ à l'aide des méthodes indiquées.

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor^2$ en séparant les indices pairs et impairs.
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$ en inversant l'ordre de sommation.
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ en reconnaissant deux sommes télescopiques.

Problème 2

Le but de ce problème est de dénombrer certains ensembles d'entiers.

Partie I. Dans cette partie, on s'intéresse pour chaque $n \in \mathbb{N}^\star$ aux parties de $[\![1,n]\!] = \{1,2,3,\dots,n\}$ ne contenant pas deux entiers consécutifs. On note :

— $\mathcal{A}_n$ l'ensemble des parties de $[\![1,n]\!]$ ne contenant pas deux entiers consécutifs ;

— a_n le nombre d'éléments de $\mathcal{A}_n$;

— $\mathcal{E}_n = \{A \in \mathcal{A}_n \mid n \in A\}$.

Ainsi, on a :

$$\mathcal{A}_3 = \Big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,3\}\Big\}, \quad a_3 = 5 \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_3 = \Big\{\{3\}, \{1,3\}\Big\}.$$

1. Justifier que $a_1 = 2$ et $a_2 = 3$.
2. Déterminer $\mathcal{A}_4$, a_4 et $\mathcal{E}_4$ puis reconnaître $\mathcal{A}_4 \setminus \mathcal{E}_4$.
3. Pour cette question, on fixe un entier $n \geqslant 3$.
   (a) Montrer que $\mathcal{A}_n \setminus \mathcal{E}_n = \mathcal{A}_{n-1}$.
   (b) Montrer que $\mathcal{E}_n = \{X \cup \{n\} \mid X \in \mathcal{A}_{n-2}\}$.
   (c) À l'aide d'une partition de $\mathcal{A}_n$, déduire des résultats précédents que $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.
4. Calculer une expression de a_n en fonction de $n \in \mathbb{N}^\star$.

Partie II. On s'intéresse maintenant pour chaque $n \in \mathbb{N}^\star$ aux parties de $[\![1,n]\!] = \{1,2,3,\dots,n\}$ ne contenant pas trois entiers consécutifs. On note :

— $\mathcal{B}_n$ l'ensemble des parties de $[\![1,n]\!]$ ne contenant pas trois entiers consécutifs ;

— b_n le nombre d'éléments de $\mathcal{B}_n$;

— $\mathcal{F}_n = \{B \in \mathcal{B}_n \mid n \in B\}$ et $\mathcal{F}'_n = \{B \in \mathcal{B}_n \mid (n-1) \in B\}$.

1. Justifier que $b_1 = 2$, $b_2 = 4$ et $b_3 = 7$.
2. Déterminer $\mathcal{B}_4$, b_4, $\mathcal{F}_4$ et $\mathcal{F}'_4$.
3. Pour cette question, on fixe un entier $n \geqslant 4$.
   (a) Montrer que $\mathcal{B}_n \setminus \mathcal{F}_n = \mathcal{B}_{n-1}$.
   (b) Montrer que $\mathcal{F}_n \setminus \mathcal{F}'_n = \{X \cup \{n\} \mid X \in \mathcal{B}_{n-2}\}$.
   (c) Montrer que $\mathcal{F}_n \cap \mathcal{F}'_n = \{X \cup \{(n-1), n\} \mid X \in \mathcal{B}_{n-3}\}$.
   (d) Justifier que $\mathcal{B}_n \setminus \mathcal{F}_n$, $\mathcal{F}_n \setminus \mathcal{F}'_n$ et $\mathcal{F}_n \cap \mathcal{F}'_n$ forment une partition de $\mathcal{B}_n$.
   (e) En déduire que $b_n = b_{n-1} + b_{n-2} + b_{n-3}$.
4. Dans cette question, on s'intéresse à l'équation suivante d'inconnue $q \in \mathbb{C}$:
$$q^3 = q^2 + q + 1. \tag{E}$$
   (a) Prouver qu'il existe un unique réel solution de (E) qu'on notera r sans déterminer sa valeur.
   (b) Déterminer $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ en fonction de r tel que $\forall z \in \mathbb{C},\ z^3 - z^2 - z - 1 = (z-r)(z^2 + \alpha z + \beta)$.
   (c) En déduire que (E) admet trois solutions distinctes : le réel r et deux solutions complexes conjuguées qu'on notera $\rho e^{i\theta}$ et $\rho e^{-i\theta}$ sans déterminer leur valeur.
5. On admet qu'il existe un triplet $(\lambda, A, B) \in \mathbb{R}^3$ solution du système linéaire suivant :
$$\left\{\begin{array}{l} r\lambda + \rho\cos(\theta)A + \rho\sin(\theta)B = 2 \\ r^2\lambda + \rho^2\cos(2\theta)A + \rho^2\sin(2\theta)B = 4 \\ r^3\lambda + \rho^3\cos(3\theta)A + \rho^3\sin(3\theta)B = 7 \end{array}\right. . \tag{S}$$
   Démontrer que $b_n = \lambda r^n + \rho^n(A\cos(n\theta) + B\sin(n\theta))$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.

Exercice 3

Soit $x \in [-1,1]$. Montrer que $\arccos(x) + \arcsin(x) = \dfrac{\pi}{2}$.

Corrigé du DS n° 2 de mathématiques

Exercice 1

Déterminer l'ensemble des solutions de l'inéquation et des deux équations suivantes d'inconnue $\theta \in \mathbb{R}$.

1. $\sin(3\theta) \geqslant \cos(\theta)$.

▶ On a pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
&\sin(3\theta) - \cos(\theta) \\
=&\sin(3\theta) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \quad \text{par symétrie de la fonction cosinus} \\
=&\mathrm{Im}\left(e^{i3\theta} - e^{i(\pi/2-\theta)}\right) \quad \text{par linéarité de la partie imaginaire} \\
=&\mathrm{Im}\left(2i\sin\left(\frac{3\theta-(\pi/2-\theta)}{2}\right)e^{i\frac{3\theta+(\pi/2-\theta)}{2}}\right) \quad \text{à l'aide d'une factorisation par l'angle moitié} \\
=&2\sin\left(2\theta - \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right).
\end{aligned}$$

Donc :

$$\sin(3\theta) \geqslant \cos(\theta) \iff \sin\left(2\theta - \frac{\pi}{4}\right) \text{ et } \cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \text{ ont même signe.}$$

Or on a d'après le cercle trigonométrique :

$$\sin\left(2\theta - \frac{\pi}{4}\right) \geqslant 0 \iff \left(2\theta - \frac{\pi}{4}\right) \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [0 + 2k\pi, \pi + 2k\pi] \iff \theta \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{8} + k\pi, \frac{5\pi}{8} + k\pi\right],$$

et :

$$\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \geqslant 0 \iff \left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right] \iff \theta \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi\right].$$

Ce qui donne dans un tableau de signes :

θ	$\cdots$	$-\frac{7\pi}{8}$		$-\frac{3\pi}{4}$		$-\frac{3\pi}{8}$		$\frac{\pi}{8}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{5\pi}{8}$		$\frac{9\pi}{8}$		$\frac{5\pi}{4}$		$\frac{13\pi}{8}$		$\frac{17\pi}{8}$		$\frac{9\pi}{4}$		$\frac{21\pi}{8}$	$\cdots$
$\sin\left(2\theta - \frac{\pi}{4}\right)$	$\cdots -$	0	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	0	$- \cdots$
$\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$	$\cdots -$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	0	$-$		$- \cdots$
$\cdots \times \cdots$	$\cdots +$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+ \cdots$

On remarque que le tableau de signes est périodique de période 2π. On en déduit l'ensemble des solutions de l'inéquation :

$$\boxed{\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(\left[\frac{\pi}{8} + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi\right] \cup \left[\frac{5\pi}{8} + 2k\pi, \frac{9\pi}{8} + 2k\pi\right] \cup \left[\frac{5\pi}{4} + 2k\pi, \frac{13\pi}{8} + 2k\pi\right]\right)}.$$

2. $2 = 3\cos(\theta) + 4\sin(\theta)$.

▶ On pose $z = 3 + i4$. Puisque $z \neq 0$, on peut l'écrire sous forme exponentielle $z = re^{i\varphi}$ où $r > 0$ et $\varphi \in \mathbb{R}$. On a :

$$r = |z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Donc :
$$3+i4=z=re^{i\varphi}=5\cos(\varphi)+i5\sin(\varphi).$$
Par identification des parties réelles on obtient $\cos(\varphi)=\frac{3}{5}$ donc :
$$\varphi \equiv \arccos\left(\frac{3}{5}\right) \ [2\pi] \quad \text{ou} \quad \varphi \equiv -\arccos\left(\frac{3}{5}\right) \ [2\pi].$$
Or on a $\sin(\varphi)=\frac{4}{5}>0$ donc $\varphi=\arccos\left(\frac{3}{5}\right)$ est un argument de z.

N'oubliez pas de préciser que la partie imaginaire de z est strictement positive pour pouvoir justifier précisément le choix de $\arccos\left(\frac{3}{5}\right)$ et non $-\arccos\left(\frac{3}{5}\right)$.

Soit maintenant $\theta\in\mathbb{R}$. En reconnaissant les parties réelle et imaginaire de z, on a :
$$\begin{aligned}3\cos(\theta)+4\sin(\theta)&=5\cos(\varphi)\cos(\theta)+5\sin(\varphi)\sin(\theta)\\&=5\cos(\theta-\varphi)\quad \text{d'après la formule d'addition de cosinus.}\end{aligned}$$
Donc :
$$\begin{aligned}2=3\cos(\theta)+4\sin(\theta)&\iff \cos(\theta-\varphi)=\frac{2}{5}\\&\iff (\theta-\varphi)\equiv\arccos\left(\frac{2}{5}\right)\ [2\pi] \quad \text{ou} \quad (\theta-\varphi)\equiv-\arccos\left(\frac{2}{5}\right)\ [2\pi]\\&\iff \theta\equiv\varphi+\arccos\left(\frac{2}{5}\right)\ [2\pi] \quad \text{ou} \quad \theta\equiv\varphi-\arccos\left(\frac{2}{5}\right)\ [2\pi].\end{aligned}$$
Puisque $\varphi=\arccos\left(\frac{3}{5}\right)$, on en déduit l'ensemble des solutions de l'équation :
$$\boxed{\left\{\arccos\left(\frac{3}{5}\right)+\arccos\left(\frac{2}{5}\right)+2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\arccos\left(\frac{3}{5}\right)-\arccos\left(\frac{2}{5}\right)+2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}}.$$

3. $\cos(\theta)+\cos(2\theta)+\cos(3\theta)+\cdots+\cos(42\theta)=0$.

▶ On a pour tout $\theta\in\mathbb{R}$:
$$\begin{aligned}&\cos(\theta)+\cos(2\theta)+\cos(3\theta)+\cdots+\cos(42\theta)\\&=\sum_{k=1}^{42}\cos(k\theta)=\sum_{k=1}^{42}\mathrm{Re}\left(e^{ik\theta}\right)=\mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{42}\left(e^{i\theta}\right)^k\right)\quad \text{par linéarité de la partie réelle.}\end{aligned}$$
On reconnait la somme des termes d'une suite géométrique de raison $e^{i\theta}$.

<u>1er cas</u> : $e^{i\theta}=1 \iff \theta\equiv 0\ [2\pi]$. Alors :
$$\cos(\theta)+\cos(2\theta)+\cos(3\theta)+\cdots+\cos(42\theta)=\mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{42}1^k\right)=42\neq 0.$$
Donc si $\theta\equiv 0\ [2\pi]$ alors θ n'est pas solution de l'équation.

N'oubliez pas de distinguer ce cas avant de pouvoir utiliser la formule de la somme des termes d'une suite géométrique.

<u>2e cas</u> : $e^{i\theta}\neq 1 \iff \theta\not\equiv 0\ [2\pi]$. Alors :
$$\begin{aligned}&\cos(\theta)+\cos(2\theta)+\cos(3\theta)+\cdots+\cos(42\theta)\\&=\mathrm{Re}\left(\frac{1-e^{i42\theta}}{1-e^{i\theta}}e^{i\theta}\right)\quad \text{d'après la formule de la somme des termes d'une suite géométrique}\end{aligned}$$

Attention : la somme commence à $k = 1$ et non à $k = 0$, il ne faut donc pas oublier le facteur $e^{i\theta}$ qui correspond au premier terme de la suite géométrique.

$$
\begin{aligned}
&=\mathrm{Re}\left(\frac{2i\sin((0-42\theta)/2)e^{i(0+42\theta)/2}}{2i\sin((0-\theta)/2)e^{i(0+\theta)/2}}e^{i\theta}\right) \quad \text{à l'aide d'une factorisation par l'angle moitié}\\
&=\mathrm{Re}\left(\frac{\sin(-21\theta)e^{i21\theta}}{\sin(-\theta/2)e^{i\theta/2}}e^{i\theta}\right)\\
&=\mathrm{Re}\left(\frac{\sin(21\theta)}{\sin(\theta/2)}e^{i(21+1-\frac{1}{2})\theta}\right) \quad \text{car la fonction sinus est impaire}\\
&=\frac{\sin(21\theta)}{\sin(\theta/2)}\cos(43\theta/2).
\end{aligned}
$$

On en déduit que :

$$\cos(\theta)+\cos(2\theta)+\cos(3\theta)+\cdots+\cos(42\theta)=0 \iff \sin(21\theta)=0 \quad \text{ou} \quad \cos\left(\frac{43\theta}{2}\right)=0.$$

Or on a d'après le cercle trigonométrique :

$$\sin(21\theta)=0 \iff 21\theta\equiv 0\ [\pi] \iff \theta\equiv 0\ \left[\frac{\pi}{21}\right]$$

et :

$$\cos\left(\frac{43\theta}{2}\right)=0 \iff \frac{43\theta}{2}\equiv\frac{\pi}{2}\ [\pi] \iff \theta\equiv\frac{\pi}{43}\ \left[\frac{2\pi}{43}\right].$$

On en déduit l'ensemble des solutions de l'équation :

$$
\begin{aligned}
&\left(\left\{0+\frac{k\pi}{21}\,|\,k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{\pi}{43}+\frac{2k\pi}{43}\,|\,k\in\mathbb{Z}\right\}\right)\cap\{\theta\in\mathbb{R}\,|\,\theta\not\equiv 0\ [2\pi]\}\\
=&\boxed{\left(\left\{\frac{k\pi}{21}\,|\,k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{(2k+1)\pi}{43}\,|\,k\in\mathbb{Z}\right\}\right)\setminus\{2k\pi\,|\,k\in\mathbb{Z}\}}.
\end{aligned}
$$

N'oubliez pas de retirer les valeurs de θ correspondant au 1er cas puisqu'elles ne sont pas solutions.

Problème 1

On fixe un entier $n \geqslant 2$ pour tout ce problème et on considère le produit suivant :

$$P=\prod_{k=2}^{n}\frac{k^3+1}{k^3-1}.$$

1. *Déterminer sous forme exponentielle les solutions de l'équation $z^3 = 1$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$. On note j la seule de ces solutions ayant une partie imaginaire strictement positive.*

▶

Question très classique, il faut reconnaître les racines 3-ièmes de l'unité.

On remarque que $z = 0$ n'est pas solution car $z^3 = 0^3 = 0 \neq 1$. On peut donc supposer que l'inconnue z appartient à $\mathbb{C}^\star$ et ainsi l'écrire sous forme exponentielle $z = re^{i\theta}$ où $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. On a alors :

$$z^3=1 \iff (re^{i\theta})^3=1 \iff r^3e^{i3\theta}=1e^{i0} \iff \begin{cases} r^3=1\\ 3\theta\equiv 0\ [2\pi]\end{cases} \iff \begin{cases} r=1\\ \theta\equiv 0\ \left[\frac{2\pi}{3}\right]\end{cases}.$$

On en déduit l'ensemble des solutions de l'équation :

$$\boxed{\left\{e^{i0}, e^{i2\pi/3}, e^{i4\pi/3}\right\}}.$$

De plus, on a sous forme algébrique :

$$e^{i0} = 1, \quad e^{i2\pi/3} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad e^{i4\pi/3} = \overline{e^{i2\pi/3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Puisque j est la seule de ces solutions ayant une partie imaginaire strictement positive, on reconnaît que :

$$\boxed{j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i2\pi/3}}.$$

2. *Calculer $1 + j + j^2$.*

▶ On a :

$$1 + j + j^2 = 1 + e^{i2\pi/3} + e^{i4\pi/3} = 1 - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \boxed{0}.$$

On peut aussi reconnaître la somme d'une suite géométrique de raison $j \neq 1$:

$$1 + j + j^2 = \frac{1 - j^3}{1 - j} = 0 \quad \textit{car } j^3 = 1 \textit{ (} j \textit{ est solution de l'équation } z^3 = 1\textit{).}$$

On verra également dans le chapitre sur les polynômes que la somme des racines d'un polynôme de la forme $X^d + a_{d-1}X^{d-1} + \cdots + a_2X^2 + a_1X + a_0$ est égale à $-a_{d-1}$. Puisque $\{1, j, j^2\}$ est l'ensemble des solutions de l'équation $z^3 = 1$, c'est également l'ensemble des racines du polynôme $X^3 - 1$ et on retrouve le résultat.

3. *Montrer que pour tout $X \in \mathbb{C}$:*

$$X^3 + 1 = \Big(X + 1\Big)\Big(X + j\Big)\Big(X + j^2\Big) \quad \textit{et} \quad X^3 - 1 = \Big(X - 1\Big)\Big(X - j\Big)\Big(X - j^2\Big).$$

▶ On a :

$$\begin{aligned}\Big(X + 1\Big)\Big(X + j\Big)\Big(X + j^2\Big) &= \Big(X^2 + (1 + j)X + j\Big)\Big(X + j^2\Big) \\ &= X^3 + (1 + j + j^2)X^2 + j(1 + j + j^2)X + j^3.\end{aligned}$$

Or $j^3 = 1$ puisque j est solution de l'équation $z^3 = 1$ (question 1) et $1 + j + j^2 = 0$ (question 2). D'où :

$$\boxed{\Big(X + 1\Big)\Big(X + j\Big)\Big(X + j^2\Big) = X^3 + 1}.$$

Puisque cette égalité est vraie pour tout $X \in \mathbb{C}$, on a en remplaçant X par $-X$:

$$\begin{aligned} & \Big(-X + 1\Big)\Big(-X + j\Big)\Big(-X + j^2\Big) = (-X)^3 + 1 \\ \text{donc} \quad & (-1)^3\Big(X - 1\Big)\Big(X - j\Big)\Big(X - j^2\Big) = -X^3 + 1 \\ \text{donc} \quad & -\Big(X - 1\Big)\Big(X - j\Big)\Big(X - j^2\Big) = -\Big(X^3 - 1\Big) \\ \text{donc} \quad & \boxed{\Big(X - 1\Big)\Big(X - j\Big)\Big(X - j^2\Big) = X^3 - 1}.\end{aligned}$$

On peut aussi tout simplement développer $(X - 1)(X - j)(X - j^2)$ comme pour le premier produit. On verra également dans le chapitre sur les polynômes qu'un polynôme de la forme $P = X^d + a_{d-1}X^{d-1} + \cdots + a_2X^2 + a_1X + a_0$ peut s'écrire sous la forme factorisée $P = (X - r_1)(X - r_2)\ldots(X - r_d)$ si et seulement si l'ensemble de ses racines est $\{r_1, r_2, \ldots, r_d\}$. Ce qui permet de retrouver le résultat pour $X^3 - 1$, mais aussi pour $X^3 + 1$ après avoir remarqué que $\{-1, -j, -j^2\}$ est l'ensemble des solutions de l'équation $z^3 = -1$.

4. *Déduire des résultats précédents que :*

$$P=\left(\prod_{k=2}^{n}\frac{k+1}{k-1}\right)\left(\prod_{k=2}^{n}\frac{j+k}{j+k+1}\right)\left(\prod_{k=2}^{n}\frac{-j+k-1}{-j+k}\right).$$

▶ En appliquant le résultat de la question précédente à $X=k$ pour tout $k\in[\![2,n]\!]$, on obtient :

$$\begin{aligned}
P=\prod_{k=2}^{n}\frac{k^3+1}{k^3-1}&=\prod_{k=2}^{n}\frac{(k+1)(k+j)(k+j^2)}{(k-1)(k-j)(k-j^2)}\\
&=\left(\prod_{k=2}^{n}\frac{k+1}{k-1}\right)\left(\prod_{k=2}^{n}\frac{k+j}{k-j^2}\right)\left(\prod_{k=2}^{n}\frac{k+j^2}{k-j}\right) && \text{par associativité du produit}\\
&=\left(\prod_{k=2}^{n}\frac{k+1}{k-1}\right)\left(\prod_{k=2}^{n}\frac{j+k}{k-(-1-j)}\right)\left(\prod_{k=2}^{n}\frac{k+(-1-j)}{-j+k}\right) && \text{car } 1+j+j^2=0 \text{ donc } j^2=-1-j\\
&=\boxed{\left(\prod_{k=2}^{n}\frac{k+1}{k-1}\right)\left(\prod_{k=2}^{n}\frac{j+k}{j+k+1}\right)\left(\prod_{k=2}^{n}\frac{-j+k-1}{-j+k}\right)}.
\end{aligned}$$

5. *Simplifier P.*

▶ On reconnaît trois produits télescopiques dans l'expression de P obtenue à la question précédente. Plus précisément, on a :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=2}^{n}\frac{k+1}{k-1}=\frac{\prod_{k=2}^{n}(k+1)}{\prod_{k=2}^{n}(k-1)}&=\frac{\prod_{\ell=4}^{n+2}(\ell-1)}{\prod_{k=2}^{n}(k-1)} && \text{en posant } k+1=\ell-1 \iff \ell=k+2\\
&=\frac{(n+2-1)(n+1-1)}{(3-1)(2-1)}=\frac{n(n+1)}{2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\prod_{k=2}^{n}\frac{j+k}{j+k+1}=\frac{\prod_{k=2}^{n}(j+k)}{\prod_{k=2}^{n}(j+k+1)}&=\frac{\prod_{k=2}^{n}(j+k)}{\prod_{\ell=3}^{n+1}(j+\ell)} && \text{en posant } k+1=\ell\\
&=\frac{(j+2)}{(j+n+1)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{et}\quad \prod_{k=2}^{n}\frac{-j+k-1}{-j+k}=\frac{\prod_{k=2}^{n}(-j+k-1)}{\prod_{k=2}^{n}(-j+k)}&=\frac{\prod_{\ell=1}^{n-1}(-j+\ell)}{\prod_{k=2}^{n}(-j+k)} && \text{en posant } k-1=\ell\\
&=\frac{(-j+1)}{(-j+n)}.
\end{aligned}$$

Donc :

$$P=\frac{n(n+1)}{2}\times\frac{(j+2)}{(j+n+1)}\times\frac{(-j+1)}{(-j+n)}=\frac{n(n+1)(j+2)(-j+1)}{2(j+n+1)(-j+n)}$$

P est un produit de nombres réels, il est donc réel. Ainsi, on peut encore simplifier l'expression obtenue qui contient le nombre complexe j. Ce n'est pas fini !

$$\begin{aligned}
&=\frac{n(n+1)(-j^2-j+2)}{2(-j^2-j+n(n+1))}=\frac{n(n+1)(1+2)}{2(1+n(n+1))} && \text{car } 1+j+j^2 \text{ donc } -j^2-j=1\\
&=\boxed{\frac{3n(n+1)}{2(n^2+n+1)}}.
\end{aligned}$$

Exercice 2

Simplifier les expressions suivantes en fonction de $n \in \mathbb{N}^\star$ à l'aide des méthodes indiquées.

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor^2$ *en séparant les indices pairs et impairs.*

▶ On a :

$$\sum_{k=0}^{2n} \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor^2 = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{2n} \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor^2 + \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{2n} \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor^2$$
$$= \sum_{0 \leqslant 2\ell \leqslant 2n} \left\lfloor \frac{2\ell}{2} \right\rfloor^2 + \sum_{0 \leqslant 2\ell+1 \leqslant 2n} \left\lfloor \frac{2\ell+1}{2} \right\rfloor^2$$
$$= \sum_{0 \leqslant \ell \leqslant n} \lfloor \ell \rfloor^2 + \sum_{-\frac{1}{2} \leqslant \ell \leqslant n-\frac{1}{2}} \left\lfloor \ell + \frac{1}{2} \right\rfloor^2 .$$

Or pour tout $x \in \mathbb{R}$, sa partie entière $\lfloor x \rfloor$ est l'unique entier tel que $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$. En particulier si $x = \ell$ est un entier, on obtient :

$$\begin{cases} \lfloor \ell \rfloor = \ell \text{ car } \ell \leqslant \ell < \ell + 1 \\ \left\lfloor \ell + \frac{1}{2} \right\rfloor = \ell \text{ car } \ell \leqslant \ell + \frac{1}{2} < \ell + 1 \end{cases} .$$

Donc :

$$\sum_{k=0}^{2n} \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor^2 = \sum_{0 \leqslant \ell \leqslant n} \ell^2 + \sum_{-\frac{1}{2} \leqslant \ell \leqslant n-\frac{1}{2}} \ell^2 = \sum_{\ell=0}^{n} \ell^2 + \sum_{\ell=0}^{n-1} \ell^2$$
$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{(n-1)(n-1+1)(2(n-1)+1)}{6}$$
$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$
$$= \frac{n}{6}\Big[(2n^2+3n+1) + (2n^2-3n+1)\Big] = \frac{n}{6}\Big[4n^2+2\Big]$$
$$= \boxed{\frac{n(2n^2+1)}{3}}.$$

2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$ *en inversant l'ordre de sommation.*

▶ On a :

$$S = \sum_{k=0}^{n} \sin^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \sum_{\ell=0}^{n} \sin^2\left(\frac{(n-\ell)\pi}{2n}\right) \quad \text{en posant } k = n - \ell \iff \ell = n - k$$
$$= \sum_{\ell=0}^{n} \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\ell\pi}{2n}\right)$$
$$= \sum_{\ell=0}^{n} \cos^2\left(\frac{\ell\pi}{2n}\right) \quad \text{par symétrie de la fonction sinus}$$
$$= \sum_{\ell=0}^{n} \left(1 - \sin^2\left(\frac{\ell\pi}{2n}\right)\right) \quad \text{d'après le théorème de Pythagore}$$
$$= \sum_{\ell=0}^{n} 1 - \sum_{\ell=0}^{n} \sin^2\left(\frac{\ell\pi}{2n}\right) \quad \text{par linéarité de la somme}$$
$$= (n+1) - S.$$

On en déduit que $2S = n+1$ et donc :

$$\sum_{k=0}^{n} \sin^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = S = \boxed{\frac{n+1}{2}}.$$

3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ *en reconnaissant deux sommes télescopiques.*

▶ On a pour tout $k \geqslant 1$:

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)}$$

Une astuce vue dans le cours et qu'il faut connaître. C'est un classique à partir duquel on peut construire de nombreuses sommes télescopiques.

ce qui donne en divisant par $(k+2)$:

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{k(k+2)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}.$$

De plus, on a $k \geqslant 1$:

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} = \frac{2}{k+2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} = \frac{1}{(k+1)(k+2)}.$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k(k+2)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right) - \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right) - \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) \quad \text{par linéarité de la somme.}
\end{aligned}$$

On reconnaît deux sommes télescopiques. Plus précisément, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+2} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{\ell=3}^{n+2} \frac{1}{\ell} \quad \text{en posant } k+2=\ell \\
&= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{3(n+1)(n+2) - 2(n+2) - 2(n+1)}{2(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{(3n^2+9n+6) - (4n+6)}{2(n+1)(n+2)} = \frac{n(3n+5)}{2(n+1)(n+2)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{et} \quad \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+2} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} - \sum_{\ell=2}^{n+1} \frac{1}{\ell+1} \quad \text{en posant } k+2=\ell+1 \iff \ell = k+1 \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} = \frac{n+2-2}{2(n+2)} = \frac{n}{2(n+2)}.
\end{aligned}$$

Donc :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{2}\times\frac{n(3n+5)}{2(n+1)(n+2)}-\frac{n}{2(n+2)}=\frac{n(3n+5)-2n(n+1)}{4(n+1)(n+2)}$$
$$=\frac{n^2+3n}{4(n+1)(n+2)}=\boxed{\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}}.$$

Problème 2

Le but de ce problème est de dénombrer certains ensembles d'entiers.

Partie I. *Dans cette partie, on s'intéresse pour chaque $n\in\mathbb{N}^\star$ aux parties de $[\![1,n]\!]=\{1,2,3,\dots,n\}$ ne contenant pas deux entiers consécutifs. On note :*

- *$\mathcal{A}_n$ l'ensemble des parties de $[\![1,n]\!]$ ne contenant pas deux entiers consécutifs ;*
- *a_n le nombre d'éléments de $\mathcal{A}_n$;*
- *$\mathcal{E}_n=\{A\in\mathcal{A}_n \mid n\in A\}$.*

Ainsi, on a :

$$\mathcal{A}_3=\Big\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,3\}\Big\},\quad a_3=5\quad\text{et}\quad \mathcal{E}_3=\Big\{\{3\},\{1,3\}\Big\}.$$

1. *Justifier que $a_1=2$ et $a_2=3$.*

   ▶ L'ensemble des parties de $[\![1,1]\!]$ est $\mathcal{P}([\![1,1]\!])=\mathcal{P}(\{1\})=\{\emptyset,\{1\}\}$. Chacun de ces deux ensembles ne contient pas deux entiers consécutifs, donc $\boxed{a_1=2}$.
   L'ensemble des parties $[\![1,2]\!]$ est $\mathcal{P}([\![1,2]\!])=\mathcal{P}(\{1,2\})=\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$. Parmi ces quatre ensembles, seul $\{1,2\}$ contient deux entiers consécutifs, donc $\boxed{a_2=3}$.

2. *Déterminer $\mathcal{A}_4$, a_4 et $\mathcal{E}_4$ puis reconnaître $\mathcal{A}_4\setminus\mathcal{E}_4$.*

   ▶ L'ensemble des parties de $[\![1,4]\!]$ est :

$$\mathcal{P}([\![1,4]\!])=\mathcal{P}\Big(\{1,2,3,4\}\Big)=\Big\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\},$$
$$\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,3,4\},\{2,3,4\},\{1,2,3,4\}\Big\}.$$

   Parmi ces ensembles, on reconnaît ceux qui ne contiennent pas deux entiers consécutifs :

$$\boxed{\mathcal{A}_4=\Big\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,4\}\Big\}}\quad\text{et donc}\quad\boxed{a_4=8}.$$

   L'ensemble $\mathcal{E}_4$ correspond aux éléments de $\mathcal{A}_4$ qui contiennent 4, donc :

$$\boxed{\mathcal{E}_4=\Big\{\{4\},\{1,4\},\{2,4\}\Big\}}\quad\text{et}\quad\boxed{\mathcal{A}_4\setminus\mathcal{E}_4=\Big\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,3\}\Big\}=\mathcal{A}_3}.$$

3. *Pour cette question, on fixe un entier $n\geqslant 3$.*

   (a) *Montrer que $\mathcal{A}_n\setminus\mathcal{E}_n=\mathcal{A}_{n-1}$.*

   ▶ On raisonne par double inclusion.
   1re inclusion : montrons que $\mathcal{A}_n\setminus\mathcal{E}_n\subset\mathcal{A}_{n-1}$. Soit $A\in\mathcal{A}_n\setminus\mathcal{E}_n$, donc $A\in\mathcal{A}_n$ et $A\notin\mathcal{E}_n$. Puisque $A\in\mathcal{A}_n$, A est une partie de $[\![1,n]\!]$. Or $n\notin A$, car $A\notin\mathcal{E}_n$, donc A est une partie de $[\![1,n-1]\!]$. De plus A ne contient pas deux entiers consécutifs car $A\in\mathcal{A}_n$. Finalement $A\in\mathcal{A}_{n-1}$ et ceci étant vrai pour tout $A\in\mathcal{A}_n\setminus\mathcal{E}_n$ on en déduit que $\mathcal{A}_n\setminus\mathcal{E}_n\subset\mathcal{A}_{n-1}$.
   2e inclusion : montrons que $\mathcal{A}_{n-1}\subset\mathcal{A}_n\setminus\mathcal{E}_n$. Soit $A\in\mathcal{A}_{n-1}$. Alors A est une partie de $[\![1,n-1]\!]$, donc en particulier une partie de $[\![1,n]\!]$. De plus A ne contient pas deux entiers consécutifs donc $A\in\mathcal{A}_n$. D'autre part $n\notin A$, car $A\subset[\![1,n-1]\!]$, donc $A\notin\mathcal{E}_n$. Finalement $A\in\mathcal{A}_n$ et $A\notin\mathcal{E}_n$, donc $A\in\mathcal{A}_n\setminus\mathcal{E}_n$ et ceci étant vrai pour tout $A\in\mathcal{A}_{n-1}$, on en déduit que $\mathcal{A}_{n-1}\subset\mathcal{A}_n\setminus\mathcal{E}_n$.
   Conclusion : par double inclusion, on a bien démontré que $\boxed{\mathcal{A}_n\setminus\mathcal{E}_n=\mathcal{A}_{n-1}}$.

(b) *Montrer que $\mathcal{E}_n = \{X \cup \{n\} \mid X \in \mathcal{A}_{n-2}\}$.*

▶ On raisonne par double inclusion.

<u>1re inclusion</u> : montrons que $\mathcal{E}_n \subset \{X \cup \{n\} \mid X \in \mathcal{A}_{n-2}\}$. Soit $A \in \mathcal{E}_n$, donc $A \in \mathcal{A}_n$ et $n \in A$. On pose $X = A \setminus \{n\}$ afin que $A = X \cup \{n\}$. Puisque X est une partie de $[\![1, n-1]\!]$ ne contenant pas deux entiers consécutifs, car $A \in \mathcal{A}_n$, on a $X \in \mathcal{A}_{n-1}$. Mais on a aussi que $(n-1) \notin X$ car sinon $(n-1) \in A$ ce qui est absurde car $n \in A$ et A ne contient pas deux entiers consécutifs. Ainsi X est une partie de $[\![1, n-2]\!]$ ne contenant pas deux entiers consécutifs, donc $X \in \mathcal{A}_{n-2}$. Finalement A est de la forme $X \cup \{n\}$ avec $X \in \mathcal{A}_{n-2}$ et ceci étant vrai pour tout $A \in \mathcal{E}_n$, on en déduit que $\mathcal{E}_n \subset \{X \cup \{n\} \mid X \in \mathcal{A}_{n-2}\}$.

> *Il faut bien comprendre qu'il s'agit de trouver X ici pour démontrer l'inclusion. La définition de X doit donc apparaitre quelque part.*

<u>2e inclusion</u> : montrons que $\{X \cup \{n\} \mid X \in \mathcal{A}_{n-2}\} \subset \mathcal{E}_n$. Soit $A \in \{X \cup \{n\} \mid X \in \mathcal{A}_{n-2}\}$, c'est-à-dire $A = X \cup \{n\}$ avec $X \in \mathcal{A}_{n-2}$. Puisque X est une partie de $[\![1, n-2]\!]$, $A = X \cup \{n\}$ est une partie de $[\![1, n]\!]$. De plus, A ne contient pas deux entiers consécutifs car X ne contient pas deux entiers consécutifs et car $(n-1) \notin A$. Par conséquent $A \in \mathcal{A}_n$. Finalement $A \in \mathcal{E}_n$, car $n \in A$, et ceci étant vrai pour tout $A \in \{X \cup \{n\} \mid X \in \mathcal{A}_{n-2}\}$, on en déduit que $\{X \cup \{n\} \mid X \in \mathcal{A}_{n-2}\} \subset \mathcal{E}_n$.

> *N'oubliez pas de préciser que $(n-1) \notin A$, c'est l'argument clef pour justifier que A ne contient pas deux entiers consécutifs.*

<u>Conclusion</u> : par double inclusion, on a bien démontré que $\boxed{\mathcal{E}_n = \{X \cup \{n\} \mid X \in \mathcal{A}_{n-2}\}}$.

(c) *À l'aide d'une partition de $\mathcal{A}_n$, déduire des résultats précédents que $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.*

▶ On remarque que $\mathcal{A}_n \setminus \mathcal{E}_n$ et $\mathcal{E}_n$ forment une partition de $\mathcal{A}_n$ car :

$$(\mathcal{A}_n \setminus \mathcal{E}_n) \cap \mathcal{E}_n = \emptyset \quad \text{et} \quad (\mathcal{A}_n \setminus \mathcal{E}_n) \cup \mathcal{E}_n = \mathcal{A}_n$$

puisque $\mathcal{A}_n \setminus \mathcal{E}_n = \{A \in \mathcal{A}_n \mid A \notin \mathcal{E}_n\}$.

> *Inutile de démontrer ces deux égalités d'ensembles par double inclusion. Elles sont immédiates par définition de la différence de deux ensembles.*

Ainsi, le nombre a_n d'éléments de $\mathcal{A}_n$ est égal à la somme du nombre d'éléments de $\mathcal{A}_n \setminus \mathcal{E}_n$ et du nombre d'éléments de $\mathcal{E}_n$. Or d'après les résultats des questions précédentes, on a :

$$\mathcal{A}_n \setminus \mathcal{E}_n = \mathcal{A}_{n-1} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_n = \{X \cup \{n\} \mid X \in \mathcal{A}_{n-2}\}$$

donc le nombre d'éléments de $\mathcal{A}_n \setminus \mathcal{E}_n$ est égal à a_{n-1}, et le nombre d'éléments de $\mathcal{E}_n$ est égal au nombre de choix de X dans $\mathcal{A}_{n-2}$, c'est-à-dire au nombre d'éléments de $\mathcal{A}_{n-2}$, donc a_{n-2}. Finalement, on a bien déduit des résultats précédents que $\boxed{a_n = a_{n-1} + a_{n-2}}$.

4. *Calculer une expression de a_n en fonction de $n \in \mathbb{N}^\star$.*

▶ À la question précédente, on a montré que $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ pour tout $n \geqslant 3$, ce qui peut aussi s'écrire en posant $n = k+2 \iff k = n-2$:

$$\forall k \geqslant 1,\ a_{k+2} = a_{k+1} + a_k.$$

On reconnaît une suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique :

$$q^2 = q + 1 \quad \text{d'inconnue } q \in \mathbb{C}.$$

Cette équation a pour discriminant $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 5 > 0$, donc elle admet deux racines réelles distinctes :

$$q_1 = \frac{-(-1) + \sqrt{5}}{2 \times 1} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad q_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Il existe donc $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall n \geqslant 1,\ a_n = \lambda_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \lambda_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

D'après les résultats de la question 1, on obtient pour $n = 1$ et $n = 2$:

$$2 = \lambda_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + \lambda_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \tag{1}$$

$$\text{et} \quad 3 = \lambda_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \lambda_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \lambda_1 \left(\frac{6+2\sqrt{5}}{4}\right) + \lambda_2 \left(\frac{6-2\sqrt{5}}{4}\right)$$

$$= \lambda_1 \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) + \lambda_2 \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right). \tag{2}$$

Donc :

$$1 = \lambda_1 \left(\frac{(3+\sqrt{5})-(1+\sqrt{5})}{2}\right) + \lambda_2 \left(\frac{(3-\sqrt{5})-(1-\sqrt{5})}{2}\right) \qquad (2)-(1)$$

$$= \lambda_1 + \lambda_2.$$

En substituant $\lambda_2 = 1 - \lambda_1$ dans (1), on obtient :

$$2 = \lambda_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + (1-\lambda_1) \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = \lambda_1 \left(\frac{(1+\sqrt{5})-(1-\sqrt{5})}{2}\right) + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$= \lambda_1\sqrt{5} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

donc :

$$\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right) = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{5+3\sqrt{5}}{10}$$

$$\text{et} \quad \lambda_2 = 1 - \lambda_1 = \frac{5-3\sqrt{5}}{10}.$$

Finalement, on obtient une expression de a_n en fonction de $n \in \mathbb{N}^\star$:

$$\boxed{\forall n \geqslant 1,\ a_n = \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5-3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}.$$

Partie II. *On s'intéresse maintenant pour chaque $n \in \mathbb{N}^\star$ aux parties de $[\![1, n]\!] = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ ne contenant pas trois entiers consécutifs. On note :*

- *$\mathcal{B}_n$ l'ensemble des parties de $[\![1, n]\!]$ ne contenant pas trois entiers consécutifs ;*
- *b_n le nombre d'éléments de $\mathcal{B}_n$;*
- *$\mathcal{F}_n = \{B \in \mathcal{B}_n \mid n \in B\}$ et $\mathcal{F}'_n = \{B \in \mathcal{B}_n \mid (n-1) \in B\}$.*

1. *Justifier que $b_1 = 2$, $b_2 = 4$ et $b_3 = 7$.*

► L'ensemble des parties de $[\![1, 1]\!]$ est $\mathcal{P}([\![1, 1]\!]) = \mathcal{P}(\{1\}) = \{\emptyset, \{1\}\}$. Chacun de ces deux ensembles ne contient pas trois entiers consécutifs, donc $\boxed{b_1 = 2}$.
L'ensemble des parties $[\![1, 2]\!]$ est $\mathcal{P}([\![1, 2]\!]) = \mathcal{P}(\{1, 2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$. Chacun de ces quatre ensembles ne contient pas trois entiers consécutifs, donc $\boxed{b_2 = 4}$.
L'ensemble des parties $[\![1, 3]\!]$ est

$$\mathcal{P}([\![1, 3]\!]) = \mathcal{P}(\{1, 3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

Parmi ces huit ensembles, seuls $\{1, 2, 3\}$ contient trois entiers consécutifs, donc $\boxed{b_3 = 7}$.

2. *Déterminer $\mathcal{B}_4$, b_4, $\mathcal{F}_4$ et $\mathcal{F}'_4$.*

▶ L'ensemble des parties de $[\![1,4]\!]$ est :

$$\mathcal{P}([\![1,4]\!]) = \mathcal{P}\Big(\{1,2,3,4\}\Big) = \Big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\}\Big\}.$$

Parmi ces ensembles, on reconnaît ceux qui ne contiennent pas trois entiers consécutifs :

$$\boxed{\mathcal{B}_4 = \Big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}\Big\}}$$

$$\text{et donc } \boxed{b_4 = 13}.$$

L'ensemble $\mathcal{F}_4$ correspond aux éléments de $\mathcal{B}_4$ qui contiennent 4, donc :

$$\boxed{\mathcal{F}_4 = \Big\{\{4\}, \{1,4\}, \{2,4\}, \{3,4\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}\Big\}},$$

et l'ensemble $\mathcal{F}'_4$ correspond aux éléments de $\mathcal{B}_4$ qui contiennent 3, donc :

$$\boxed{\mathcal{F}'_4 = \Big\{\{3\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{3,4\}, \{1,3,4\}\Big\}}.$$

3. *Pour cette question, on fixe un entier $n \geqslant 4$.*

(a) *Montrer que $\mathcal{B}_n \setminus \mathcal{F}_n = \mathcal{B}_{n-1}$.*

▶ Le raisonnement est identique à celui de la question 3(a) en remplaçant $\mathcal{A}_n$ par $\mathcal{B}_n$, $\mathcal{E}_n$ par $\mathcal{F}_n$, $\mathcal{A}_{n-1}$ par $\mathcal{B}_{n-1}$ et l'expression «deux entiers consécutifs» par l'expression «trois entiers consécutifs».

Inutile de perdre du temps à rédiger ce raisonnement de nouveau, il suffit de préciser les principales différences avec celui de la question 3(a).

(b) *Montrer que $\mathcal{F}_n \setminus \mathcal{F}'_n = \{X \cup \{n\} \mid X \in \mathcal{B}_{n-2}\}$.*

▶ On raisonne par double inclusion.
1re inclusion : montrons que $\mathcal{F}_n \setminus \mathcal{F}'_n \subset \{X \cup \{n\} \mid X \in \mathcal{B}_{n-2}\}$. Soit $B \in \mathcal{F}_n \setminus \mathcal{F}'_n$, donc $B \in \mathcal{B}_n$, $n \in B$ et $(n-1) \notin B$. On pose $X = B \setminus \{n\}$ afin que $B = X \cup \{n\}$. On a $n \notin X$ et $(n-1) \notin X$, car $(n-1) \notin B$, donc X est une partie de $[\![1, n-2]\!]$ ne contenant pas trois entiers consécutifs, car $B \in \mathcal{B}_n$. Ainsi $X \in \mathcal{B}_{n-2}$. Finalement B est de la forme $X \cup \{n\}$ avec $X \in \mathcal{B}_{n-2}$ et ceci étant vrai pour tout $B \in \mathcal{F}_n \setminus \mathcal{F}'_n$, on en déduit que $\mathcal{F}_n \setminus \mathcal{F}'_n \subset \{X \cup \{n\} \mid X \in \mathcal{B}_{n-2}\}$.
2e inclusion : montrons que $\{X \cup \{n\} \mid X \in \mathcal{B}_{n-2}\} \subset \mathcal{F}_n \setminus \mathcal{F}'_n$. Soit $B \in \{X \cup \{n\} \mid X \in \mathcal{B}_{n-2}\}$, c'est-à-dire $B = X \cup \{n\}$ avec $X \in \mathcal{B}_{n-2}$. Puisque X est une partie de $[\![1, n-2]\!]$, $B = X \cup \{n\}$ est une partie de $[\![1, n]\!]$. De plus, B ne contient pas trois entiers consécutifs car X ne contient pas trois entiers consécutifs et car $(n-1) \notin B$. Par conséquent $B \in \mathcal{B}_n$. De plus, $n \in B$ et $(n-1) \notin B$, donc $B \in \mathcal{F}_n \setminus \mathcal{F}'_n$ et ceci étant vrai pour tout $B \in \{X \cup \{n\} \mid X \in \mathcal{B}_{n-2}\}$, on en déduit que $\{X \cup \{n\} \mid X \in \mathcal{B}_{n-2}\} \subset \mathcal{F}_n \setminus \mathcal{F}'_n$.
Conclusion : par double inclusion, on a bien démontré que $\boxed{\mathcal{F}_n \setminus \mathcal{F}'_n = \{X \cup \{n\} \mid X \in \mathcal{B}_{n-2}\}}$.

(c) *Montrer que $\mathcal{F}_n \cap \mathcal{F}'_n = \{X \cup \{(n-1), n\} \mid X \in \mathcal{B}_{n-3}\}$.*

▶ On raisonne par double inclusion.
1re inclusion : montrons que $\mathcal{F}_n \cap \mathcal{F}'_n \subset \{X \cup \{(n-1), n\} \mid X \in \mathcal{B}_{n-3}\}$. Soit $B \in \mathcal{F}_n \cap \mathcal{F}'_n$, donc $B \in \mathcal{B}_n$, $n \in B$ et $(n-1) \in B$. On pose $X = B \setminus \{(n-1), n\}$ afin que $B = X \cup \{(n-1), n\}$. Puisque X est une partie de $[\![1, n-2]\!]$ ne contenant pas deux entiers consécutifs, car $B \in \mathcal{B}_n$, on a $X \in \mathcal{B}_{n-2}$. Mais on a aussi que $(n-2) \notin X$ car sinon $(n-2) \in B$ ce qui est absurde car $\{(n-1), n\} \in B$ et B ne contient pas trois entiers consécutifs. Ainsi X est une partie

de $[\![1, n-3]\!]$ ne contenant pas trois entiers consécutifs, donc $X \in \mathcal{B}_{n-3}$. Finalement B est de la forme $X \cup \{(n-1), n\}$ avec $X \in \mathcal{B}_{n-3}$ et ceci étant vrai pour tout $B \in \mathcal{F}_n \cap \mathcal{F}'_n$, on en déduit que $\mathcal{F}_n \cap \mathcal{F}'_n \subset \{X \cup \{(n-1), n\} \mid X \in \mathcal{B}_{n-3}\}$.
2e inclusion : montrons que $\{X \cup \{(n-1), n\} \mid X \in \mathcal{B}_{n-3}\} \subset \mathcal{F}_n \cap \mathcal{F}'_n$. Soit $B \in \{X \cup \{(n-1), n\} \mid X \in \mathcal{B}_{n-3}\}$, c'est-à-dire $B = X \cup \{(n-1), n\}$ avec $X \in \mathcal{B}_{n-3}$. Puisque X est une partie de $[\![1, n-3]\!]$, $B = X \cup \{(n-1), n\}$ est une partie de $[\![1, n]\!]$. De plus, B ne contient pas trois entiers consécutifs car X ne contient pas trois entiers consécutifs et car $(n-2) \notin B$. Par conséquent $B \in \mathcal{B}_n$. Finalement $B \in \mathcal{F}_n \cap \mathcal{F}'_n$, car $n \in B$ et $(n-1) \in B$, et ceci étant vrai pour tout $B \in \{X \cup \{n\} \mid X \in \mathcal{A}_{n-3}\}$, on en déduit que $\{X \cup \{(n-1), n\} \mid X \in \mathcal{B}_{n-3}\} \subset \mathcal{F}_n \cap \mathcal{F}'_n$.
Conclusion : on a bien démontré que $\boxed{\mathcal{F}_n \cap \mathcal{F}'_n = \{X \cup \{(n-1), n\} \mid X \in \mathcal{B}_{n-3}\}}$ par double inclusion.

(d) *Justifier que $\mathcal{B}_n \setminus \mathcal{F}_n$, $\mathcal{F}_n \setminus \mathcal{F}'_n$ et $\mathcal{F}_n \cap \mathcal{F}'_n$ forment une partition de $\mathcal{B}_n$.*
▶ On a :

$$\begin{cases} (\mathcal{B}_n \setminus \mathcal{F}_n) \cap (\mathcal{F}_n \setminus \mathcal{F}'_n) = \emptyset \\ (\mathcal{B}_n \setminus \mathcal{F}_n) \cap (\mathcal{F}_n \cap \mathcal{F}'_n) = \emptyset \\ (\mathcal{F}_n \setminus \mathcal{F}'_n) \cap (\mathcal{F}_n \cap \mathcal{F}'_n) = \emptyset \end{cases} \quad \text{et} \quad (\mathcal{B}_n \setminus \mathcal{F}_n) \cup (\mathcal{F}_n \setminus \mathcal{F}'_n) \cup (\mathcal{F}_n \cap \mathcal{F}'_n) = \mathcal{B}_n$$

par définition de la différence et de l'union de deux ensembles. Ainsi $\boxed{\mathcal{B}_n \setminus \mathcal{F}_n,\ \mathcal{F}_n \setminus \mathcal{F}'_n \text{ et } \mathcal{F}_n \cap \mathcal{F}'_n \text{ forment une partition de } \mathcal{B}_n}$.

Attention, l'égalité $(\mathcal{B}_n \setminus \mathcal{F}_n) \cap (\mathcal{F}_n \setminus \mathcal{F}'_n) \cap (\mathcal{F}_n \cap \mathcal{F}'_n) = \emptyset$ est insuffisante pour justifier que $\mathcal{B}_n \setminus \mathcal{F}_n$, $\mathcal{F}_n \setminus \mathcal{F}'_n$ et $\mathcal{F}_n \cap \mathcal{F}'_n$ sont deux à deux disjoints.

(e) *En déduire que $b_n = b_{n-1} + b_{n-2} + b_{n-3}$.*
▶ D'après le résultat de la question précédente, le nombre b_n d'éléments de $\mathcal{B}_n$ est égal à la somme du nombre d'éléments de $\mathcal{B}_n \setminus \mathcal{F}_n$, du nombre d'éléments de $\mathcal{F}_n \setminus \mathcal{F}'_n$ et du nombre d'éléments de $\mathcal{F}_n \cap \mathcal{F}'_n$. Or d'après les résultats des questions précédentes, on a :

$$\mathcal{B}_n \setminus \mathcal{F}_n = \mathcal{B}_{n-1},\ \mathcal{F}_n \setminus \mathcal{F}'_n = \{X \cup \{n\} \mid X \in \mathcal{B}_{n-2}\} \text{ et } \mathcal{F}_n \cap \mathcal{F}'_n = \{X \cup \{(n-1), n\} \mid X \in \mathcal{B}_{n-3}\}$$

donc le nombre d'éléments de $\mathcal{B}_n \setminus \mathcal{F}_n$ est égal à b_{n-1}, le nombre d'éléments de $\mathcal{F}_n \setminus \mathcal{F}'_n$ est égal au nombre de choix de X dans $\mathcal{B}_{n-2}$, c'est-à-dire au nombre d'éléments de $\mathcal{B}_{n-2}$, donc b_{n-2}, et de même le nombre d'éléments de $\mathcal{F}_n \cap \mathcal{F}'_n$ est égal à b_{n-3}. Finalement, on a bien déduit de résultats précédents que $\boxed{b_n = b_{n-1} + b_{n-2} + b_{n-3}}$.

4. *Dans cette question, on s'intéresse à l'équation suivante d'inconnue $q \in \mathbb{C}$:*

$$q^3 = q^2 + q + 1. \tag{E}$$

(a) *Prouver qu'il existe un unique réel solution de (E) qu'on notera r sans déterminer sa valeur.*
▶ On pose la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^3 - x^2 - x - 1$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynomiale et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 3x^2 - 2x - 1.$$

On reconnaît un polynôme de degré 2 de discriminant $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 3 \times (-1) = 16 > 0$, donc il admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-(-2) + \sqrt{16}}{2 \times 3} = 1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{2-4}{6} = -\frac{1}{3}.$$

De plus, on a :

$$f(1) = 1 - 1 - 1 - 1 = -2 \quad \text{et} \quad f\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{27} - \frac{1}{9} + \frac{1}{3} - 1 = \frac{-1 - 3 + 9 - 27}{27} = -\frac{22}{27}.$$

D'où le tableau des variations de f :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		1		r		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$			
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{22}{27}$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

On en déduit qu'il existe un unique réel r tel que $f(r) = 0$.

On verra plus tard dans le cours que l'argument principal pour justifier ce type d'affirmation est le théorème de la bijection.

Or, par définition de la fonction f, on a pour tout réel x : $f(x) = 0$ si et seulement si x est solution de (E). On en déduit qu' $\boxed{\text{il existe un unique réel } r \text{ solution de } (E)}$.

(b) *Déterminer $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ en fonction de r tel que $\forall z \in \mathbb{C},\ z^3 - z^2 - z - 1 = (z-r)(z^2+\alpha z+\beta)$.*

► Analyse : on suppose qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ qui vérifie l'énoncé. On a pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$z^3 - z^2 - z - 1 = (z-r)(z^2 + \alpha z + \beta) = z^3 + (\alpha - r)z^2 + (\beta - \alpha r)z - r\beta.$$

En identifiant les coefficients de deux polynômes égaux, on obtient :

$$\begin{cases} \alpha - r = -1 \\ \beta - \alpha r = -1 \\ -r\beta = -1 \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} \alpha = r - 1 \\ \beta = \alpha r - 1 = (r-1)r - 1 = r^2 - r - 1 \end{cases}.$$

Synthèse : on pose $\boxed{\alpha = r - 1}$ et $\boxed{\beta = r^2 - r - 1}$. Alors on a pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} (z-r)(z^2 + \alpha z + \beta) &= z^3 + (\alpha - r)z^2 + (\beta - \alpha r)z - r\beta \\ &= z^3 + (r - 1 - r)z^2 + (r^2 - r - 1 - (r-1)r)z - r(r^2 - r - 1) \\ &= z^3 - z^2 - z - r^3 + r^2 + r. \end{aligned}$$

Or $r^3 = r^2 + r + 1$ car r est solution de (E). Donc :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ (z-r)(z^2 + \alpha z + \beta) = z^3 - z^2 - z - (r^2 + r + 1) + r^2 + r = z^3 - z^2 - z - 1.$$

Ainsi α et β vérifient bien l'énoncé.

On peut aussi rédiger la réponse à ce type de question sans utiliser de raisonnement d'analyse-synthèse. On peut par exemple résoudre par équivalences le système de trois équations obtenu pour déterminer les deux inconnues α et β. Dans ce cas, il ne faut pas oublier de vérifier la compatibilité de la troisième équation (en utilisant que r est solution de (E)).

(c) *En déduire que (E) admet trois solutions distinctes : le réel r et deux solutions complexes conjuguées qu'on notera $\rho e^{i\theta}$ et $\rho e^{-i\theta}$ sans déterminer leur valeur.*

► D'après le résultat de la question précédente, on a pour tout $q \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} & q^3 = q^2 + q + 1 && \text{(E)} \\ \iff & q^3 - q^2 - q - 1 = 0 \\ \iff & (q-r)(q^2 + \alpha q + \beta) = 0 \\ \iff & q = r \quad \text{ou} \quad q^2 + \alpha q + \beta = 0. \end{aligned}$$

On reconnaît une équation de degré 2 de discriminant :

$$\begin{aligned} \Delta &= \alpha^2 - 4\beta \\ &= (r-1)^2 - 4(r^2 - r - 1) \quad \text{d'après les résultats de la question précédente} \\ &= r^2 - 2r + 1 - 4r^2 + 4r + 4 \\ &= -3r^2 + 2r + 5. \end{aligned}$$

On reconnaît un polynôme de degré 2 de discriminant $\Delta' = 2^2 - 4 \times (-3) \times 5 = 64 > 0$, donc il admet deux racines réelles distinctes :

$$r_1 = \frac{-2+\sqrt{64}}{2\times(-3)} = -1 \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{-2-8}{-6} = \frac{5}{3}.$$

En reprenant la fonction f définie à la question 4(a), on a :

$$f\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{125}{27} - \frac{25}{9} - \frac{5}{3} - 1 = \frac{125-75-45-27}{27} = -\frac{22}{27} < 0.$$

D'après le tableau des variations de f obtenue à la question 4(a), on obtient que $\frac{5}{3} < r$, ainsi $r \in]-\infty, r_1[\cup]r_2, +\infty[$. On en déduit que $\Delta < 0$ et donc que l'équation $q^2+\alpha q+\beta = 0$ admet deux solutions complexes conjuguées distinctes. Finalement, on obtient que (E) admet trois solutions distinctes : le réel r et deux solutions complexes conjuguées.

5. *On admet qu'il existe un triplet $(\lambda, A, B) \in \mathbb{R}^3$ solution du système linéaire suivant :*

$$\left\{\begin{array}{l} r\lambda + \rho\cos(\theta)A + \rho\sin(\theta)B = 2 \\ r^2\lambda + \rho^2\cos(2\theta)A + \rho^2\sin(2\theta)B = 4 \\ r^3\lambda + \rho^3\cos(3\theta)A + \rho^3\sin(3\theta)B = 7 \end{array}\right. . \qquad \text{(S)}$$

Démontrer que $b_n = \lambda r^n + \rho^n(A\cos(n\theta) + B\sin(n\theta))$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.

▶ Démontrons le résultat par récurrence triple.

On peut également utiliser une récurrence simple pour montrer la proposition suivante pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$:

$$P(n) : « \left\{\begin{array}{l} b_n = \lambda r^n + \rho^n(A\cos(n\theta) + B\sin(n\theta)) \\ b_{n+1} = \lambda r^{n+1} + \rho^{n+1}(A\cos((n+1)\theta) + B\sin((n+1)\theta)) \\ b_{n+2} = \lambda r^{n+2} + \rho^{n+2}(A\cos((n+2)\theta) + B\sin((n+2)\theta)) \end{array}\right. ».$$

Initialisation : on a $b_1 = 2$, $b_2 = 4$ et $b_3 = 7$ d'après la question 2, donc le résultat est vrai pour $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$ car $(\lambda, A, B) \in \mathbb{R}^3$ est solution de (S).

Hérédité : on suppose que le résultat est vrai aux rangs k, $k+1$ et $k+2$ où $k \in \mathbb{N}^\star$ est fixé. Montrons que le résultat est vrai au rang $k+3$. On a :

$$\begin{aligned} b_{k+3} =& b_{k+2} + b_{k+1} + b_k \quad \text{en posant } n = k+3 \text{ dans le résultat de la question 3(e)} \\ =& \lambda r^{n+2} + \rho^{n+2}(A\cos((n+2)\theta) + B\sin((n+2)\theta)) \\ &+ \lambda r^{n+1} + \rho^{n+1}(A\cos((n+1)\theta) + B\sin((n+1)\theta)) \\ &+ \lambda r^n + \rho^n(A\cos(n\theta) + B\sin(n\theta)) \quad \text{par hypothèses de récurrence} \\ =& \lambda r^n\left(r^2+r+1\right) + A\mathrm{Re}\left(\rho^n e^{in\theta}\left((\rho e^{i\theta})^2 + \rho e^{i\theta} + 1\right)\right) + B\mathrm{Im}\left(\rho^n e^{in\theta}\left((\rho e^{i\theta})^2 + \rho e^{i\theta} + 1\right)\right). \end{aligned}$$

Or $r^2+r+1 = r^3$ et $(\rho e^{i\theta})^2 + \rho e^{i\theta} = (\rho e^{i\theta})^3$ car r et $\rho e^{i\theta}$ sont solutions de (E). Donc :

$$\begin{aligned} b_{k+3} =& \lambda r^n r^3 + A\mathrm{Re}\left(\rho^n e^{in\theta}(\rho e^{i\theta})^3\right) + B\mathrm{Im}\left(\rho^n e^{in\theta}(\rho e^{i\theta})^3\right) \\ =& \lambda r^{n+3} + \rho^{n+3}(A\cos((n+3)\theta) + B\sin((n+3)\theta)). \end{aligned}$$

Ainsi le résultat est vrai au rang $k+3$ dès qu'il est vrai aux rangs k, $k+1$ et $k+2$. Et ceci est vrai pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$.

Conclusion : d'après le principe de récurrence triple, on a bien démontré que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ b_n = \lambda r^n + \rho^n(A\cos(n\theta) + B\sin(n\theta))}.$$

Exercice 3

Soit $x \in [-1,1]$. Montrer que $\arccos(x) + \arcsin(x) = \dfrac{\pi}{2}$.

► Par définition de la fonction arccosinus, $\theta = \arccos(x)$ est l'unique solution de l'équation $\cos(\theta) = x$ d'inconnue $\theta \in [0,\pi]$. Or on a d'après les formules de trigonométrie (symétrie des fonction cosinus et sinus et réciprocité de la fonction arcsinus) :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(x)\right) = \sin(\arcsin(x)) = x$$

et :

$$\begin{array}{ll} & \arcsin(x) \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] \quad \text{par définition de la fonction arcsinus} \\ \text{donc} & -\dfrac{\pi}{2} \leqslant \arcsin(x) \leqslant \dfrac{\pi}{2} \\ \text{donc} & 0 = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{2} \leqslant \dfrac{\pi}{2} - \arcsin(x) \leqslant \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{2} = \pi \\ \text{donc} & \left(\dfrac{\pi}{2} - \arcsin(x)\right) \in [0,\pi]. \end{array}$$

Ainsi $\theta = \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(x)\right)$ est solution de l'équation $\cos(\theta) = x$ et $\theta \in [0,\pi]$. Par unicité de cette solution, on en déduit que :

$$\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(x)\right) = \theta = \arccos(x)$$

et par conséquent :

$$\boxed{\arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}}.$$

N'oubliez pas de justifier que $\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(x)\right) \in [0,\pi]$ *sinon on peut seulement déduire de* $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(x)\right) = x$ *que* $\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(x)\right) \equiv \arccos(x)$ *ou* $-\arccos(x)$ $[2\pi]$.

DS n° 3 de mathématiques et d'informatique

durée : 4 heures

Problème 1 (Modélisation mathématique et informatique)
Un modèle de dynamique des populations : les populations structurées

La dynamique des populations consiste à étudier l'évolution du nombre d'individus d'une population au cours du temps. Un des premiers modèles est de supposer que le temps est un entier positif n (correspondant par exemple à un nombre d'années) et que le taux de croissance d'une population est un réel $a > 0$ fixé. Autrement dit, si x_n est le nombre d'individus au temps n, on a $\frac{x_{n+1}}{x_n} = a$. On constate alors que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison a.

Par exemple, on cherche à déterminer le nombre de cellules x_n après n heures sachant qu'une cellule se divise en deux toutes les heures. En supposant qu'il y ait au temps 0 une seule cellule et que l'on soit dans des conditions optimales, on constate alors : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = 2x_n$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = 2^n$ et ici le taux de croissance est 2.

Mais ce modèle comporte de nombreux inconvénients, l'un d'entre eux étant qu'il suppose que tous les individus de la population étudiée se reproduisent de la même manière.

Une façon de raffiner ce modèle est alors de partager la population en plusieurs classes suivant certains facteurs (par exemple l'âge). En faisant des hypothèses sur la croissance de la population (ici linéaire), il est alors possible d'obtenir des prévisions plus précises dans le développement de la population étudiée.

A - Exemple : un modèle de développement cellulaire

Dans cette partie, on suppose qu'il existe deux types de cellules : les matures et les immatures. Si au temps n une cellule est immature, elle devient mature au temps $n + 1$. Si au temps n une cellule est mature, alors au temps $n + 1$ elle se divise en deux cellules, l'une mature et l'autre immature. En posant respectivement x_n et y_n le nombre de cellules matures et immatures au temps n, on constate alors que les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient la récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} x_{n+1} = x_n + y_n \\ y_{n+1} = x_n \end{cases} \text{ et avec } x_0 \in \mathbb{N}, y_0 \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

1. (INFO) Écrire une fonction en Python `suite(n,x0,y0)` qui prend en argument un entier $n \in \mathbb{N}$ et qui retourne la valeur du couple (x_n, y_n).
2. Montrer que l'on a $\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$.
3. Exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}$, x_n et y_n en fonction de n, x_0 et y_0.
4. En supposant qu'au temps 0, il y a uniquement une cellule immature, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(r_1^n - r_2^n)$ où $r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.
5. Montrer que l'on a $\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} \binom{n}{2k+1} 5^k$.

B - Un modèle général et quelques applications

Dans cette partie, on présente le modèle d'une population structurée en deux classes de manière générique. On appliquera alors ce modèle à différents problèmes issues de la biologie.

Considèrons deux populations $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ évoluant de la manière suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} x_{n+1} = ax_n + by_n \\ y_{n+1} = cx_n + dy_n \end{cases} \tag{E}$$

où a, b, c, d sont des paramètres réels.

Par exemple, pour la population de cellules étudiées dans la partie A on a deux classes, l'une correspondant aux cellules matures et l'autre aux cellules immatures. Les paramètres ont dans ce contexte la signification biologique suivante :

— $a = 1$ est la proportion de cellules matures restant matures entre deux temps consécutifs ;

— $b = 1$ est la proportion de cellules immatures devenant matures entre deux temps consécutifs ;

— $c = 1$ est le nombre de cellules immatures obtenues par division d'une cellule mature ;

— $d = 0$ car les cellules immatures ne se divisent pas.

B1 - Étude du modèle général

6. (INFO) Écrire une fonction en Python `suite(n,a,b,c,d,x0,y0)` qui prend en argument un entier $n \in \mathbb{N}$, quatre paramètres réels a, b, c, d et les conditions initiales x_0, y_0 et qui retourne la valeur du couple (x_n, y_n).
7. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+2} = (a+d)x_{n+1} + (bc - ad)x_n$.
   Indication : on pourra d'abord montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $bdy_n = dx_{n+1} - adx_n$.
8. De manière similaire, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, y_{n+2} = (a+d)y_{n+1} + (bc - ad)y_n$.
9. Réciproquement, on suppose que les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+2} = (a+d)x_{n+1} + (bc - ad)x_n,\ \ y_{n+2} = (a+d)y_{n+1} + (bc - ad)y_n,$$
   et avec comme conditions initiales $x_0, y_0, x_1 = ax_0 + by_0, y_1 = cx_0 + dy_0$.
   Montrer par récurrence que les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient le système (E). (Indication : on pourra vérifier $P(0)$ et $P(1)$, et supposer que $P(n-1)$ et $P(n)$ sont vraies pour un certain $n \in \mathbb{N}^\star$).
10. On suppose que $(a+d)^2 - 4(ad - bc) = 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer x_n en fonction de n et des autres paramètres.

B2 - Application : une espèce vouée à disparaître

On considère une espèce partagée en deux classes $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (les parasites) et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (les reproducteurs). On suppose que l'évolution de l'espèce obéit aux règles suivantes :

— un reproducteur donne naissance à un reproducteur et à deux parasites entre le temps n et $n+1$;

— un reproducteur reste reproducteur entre le temps n et $n+1$;

— un parasite mange deux reproducteurs entre le temps n et $n+1$.

En modélisant à l'aide d'une récurrence, on a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} x_{n+1} = 2y_n \\ y_{n+1} = -2x_n + 2y_n \end{cases} \tag{2}$$

On suppose qu'au temps 0, il n'y a pas de parasites et 2 reproducteurs.

11. Exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}$, x_n et y_n en fonction de n.
12. Montrer qu'il existe des entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que x_n est négatif.

On constate alors qu'à partir d'un certain temps, ce modèle n'est plus valide concernant la population étudiée : en effet, si on obtient $x \leqslant 0$ ceci signifierait qu'il y aurait un nombre négatif d'individus ce qui n'a pas de sens biologique. Dans le cas où on aurait $x_{n_0} \leqslant 0$ pour un certain $n_0 \in \mathbb{N}$, on en conclut que la population $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'éteint à partir d'un certain moment.

B3 - Un modèle tue-mouche

On place dans un même espace confiné deux espèces de mouches, Drosophila simulans et Drosophila melanogaster. On suppose que leur taux de croissance est identique et est de $a > 0$, qu'une D. melanogaster élimine systématiquement $b > 0$ D. simulans entre les instants n et $n+1$. On note respectivement $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites de populations de D. simulans et de D. melanogaster. On suppose que $x_0 > 0$ et $y_0 > 0$.

13. Déterminer les relations de récurrences que vérifient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
14. Exprimer x_n et y_n en fonction de x_0, y_0, a, b, n.
15. En déduire que la population de simulans disparaît à partir d'un temps n_0, que l'on exprimera en fonction de a, b, x_0, y_0.
16. (INFO) On suppose que la fonction `tueMouche(x0,y0,a,b,n)` retourne la valeur du couple (x_n, y_n). On considère les deux programmes suivants :

```
n=0
simulans=tueMouche(x0,y0,a,b,n)[0]
while(simulans>0) :
  n=n+1
  simulans=tueMouche(x0,y0,a,b,n)[0]
print(n)
```

```
n=0
melanogaster=tueMouche(x0,y0,a,b,n)[1]
while(simulans>0) :
  n=n+1
  melanogaster=tueMouche(x0,y0,a,b,n)[1]
print(n)
```

Le ou lesquels de ces programmes terminent ? On se placera dans les conditions de l'énoncé. Dans le cas où il y a une fin au programme, dire ce qui sera affiché.

C - Une population structurée en trois classes

On étudie l'évolution d'une population d'insectes que l'on partage en trois classes d'âges : les larves, les insectes adultes et les insectes âgés. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note respectivement x_n, y_n et z_n le nombre de larves, adultes et d'insectes âgés au temps n.

On suppose que l'évolution de ces populations obéit à la récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} x_{n+1} = 80 y_n \\ y_{n+1} = \frac{x_n}{20} \\ z_{n+1} = \frac{y_n}{2} \end{cases}$$

17. Donner une interprétation biologique des coefficients 80, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{20}$, et de la non-apparition de z_n dans cette récurrence.
18. (INFO) Ércire une fonction `popuplation(n)` qui prend en argument une entier $n \in \mathbb{N}$ et qui retourne le nombre total d'insectes.
19. On cherche à établir une relation de récurrence pour la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$x_{n+2} = 4x_n. \tag{3}$$
20. On suppose que pour $n = 0$, il y a 100 larves et pas d'insectes adultes et âgés. Déterminer la population totale en fonction de n.
21. Ce modèle vous paraît-il adapté pour l'étude d'une population d'insectes ?

Problème 2 (Méthodes de calcul et raisonnement)

La ferme expérimentale de Grignon souhaite mettre en place une nouvelle salle de traite automatique donnant plus de liberté aux vaches et sans avoir besoin de chien «super-intelligent» pour diriger le troupeau. Cette nouvelle salle contient n stalles alignées numérotées de 1 à n (où $n \in \mathbb{N}^\star$ est un entier fixé). Dès que les stalles sont libres un sas s'ouvre sur un enclos d'attente pour laisser passer n vaches l'une après l'autre. Chaque vache a une stalle de traite préférée. Pour chaque $k \in [\![1, n]\!] = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, on note $s_k \in [\![1, n]\!]$ le numéro de stalle préférée de la k-ième vache arrivant dans la salle de traite. Si la stalle numéro s_k est déjà occupée, la k-ième vache se déplacera jusqu'à la prochaine stalle libre. Les problèmes surviennent lorsqu'aucune stalle restante n'est disponible puisque les vaches ne peuvent pas faire demi-tour.

L'application $k \mapsto s_k$ est simplement représentée par le n-uplet $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n) \in [\![1, n]\!]^n$ et on dit que s est une fonction de parcage si les n vaches se répartissent dans la salle de traite sans problèmes, c'est-à-dire si chacune occupe une stalle avant le début de la traite. Par exemple pour $n = 6$: $(3, 5, 1, 2, 3, 2)$ est une fonction de parcage au contraire de $(2, 5, 6, 5, 1, 2)$ (voir les figures 3 et 4). De plus, on dit que s est croissante si l'application $k \mapsto s_k$ est croissante, c'est-à-dire si $s_1 \leqslant s_2 \leqslant \cdots \leqslant s_n$.

On note $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des fonctions de parcage et $\mathcal{P}_n^+$ le sous-ensemble des fonctions de parcage croissantes. Le but de ce problème est de dénombrer ces deux ensembles.

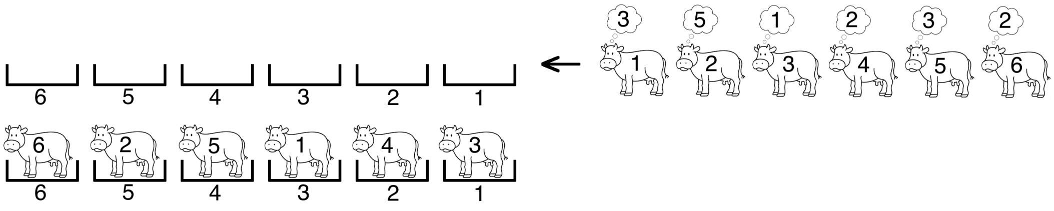


FIGURE 1 – $(3, 5, 1, 2, 3, 2)$ est une fonction de parcage.

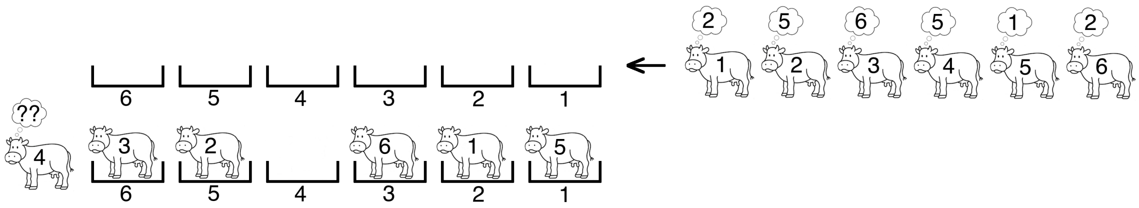


FIGURE 2 – $(2, 5, 6, 5, 1, 2)$ n'est pas une fonction de parcage.

1. (a) Rappeler le nombre total d'applications de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$.
   (b) Montrer que $\mathcal{P}_2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\}$.
   (c) Donner, sans justifier, les éléments de $\mathcal{P}_3$ et en déduire que $\text{card}(\mathcal{P}_3) = 16$.
2. On note Θ l'application qui à chaque $s \in [\![1, n]\!]^n$ associe le n-uplet ayant les mêmes composantes que s réordonnées dans l'ordre croissant, par exemple pour $n = 6$: $\Theta(3, 5, 1, 2, 3, 2) = (1, 2, 2, 3, 3, 5)$.
   (a) Discuter brièvement de l'injectivité et de la surjectivité de l'application $\Theta : [\![1, n]\!]^n \to [\![1, n]\!]^n$.
   (b) Dans les deux questions suivantes, on fixe $s = (s_1, s_2, \dots, s_n) \in [\![1, n]\!]^n$ et on note $t = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ l'image de s par Θ. Ainsi on a $t_1 \leqslant t_2 \leqslant \cdots \leqslant t_n$.
      i. Pour cette question, on suppose que $t_k > k$ pour un certain $k \in [\![1, n]\!]$. En observant les vaches ayant les préférences $t_k, t_{k+1}, \dots, t_n$, justifier que s n'est pas une fonction de parcage.
      ii. Pour cette question, on suppose que s n'est pas une fonction de parcage et on note k le plus petit numéro des stalles qui restent inoccupées. En observant les vaches ayant les préférences $t_1, t_2, \dots, t_k$, justifier par l'absurde que $t_k > k$.
   (c) En déduire la description suivante de l'ensemble des fonctions de parcage :

$$\boxed{\mathcal{P}_n = \left\{ s \in [\![1, n]\!]^n \mid \forall k \in [\![1, n]\!],\ t_k \leqslant k \text{ où } (t_1, t_2, \dots, t_n) = \Theta(s) \right\}}.$$

3. Pour chaque $t = (t_1, t_2, \dots, t_n) \in [\![1, n]\!]^n$ croissant, c'est-à-dire tel que $t_1 \leqslant t_2 \leqslant \cdots \leqslant t_n$, on note $\mathcal{A}_t$ l'ensemble des antécédents de t par l'application Θ, c'est-à-dire : $\mathcal{A}_t = \{s \in [\![1, n]\!]^n \mid \Theta(s) = t\}$. Par définition de l'application Θ, $\mathcal{A}_t$ est donc l'ensemble des n-uplets ayant les mêmes composantes que t dans un ordre quelconque, autrement dit $\mathcal{A}_t$ est l'ensemble des anagrammes de t.
   (a) Montrer que si $t \in [\![1, n]\!]^n$ et $t' \in [\![1, n]\!]^n$ sont distincts et croissants, alors $\mathcal{A}_t \cap \mathcal{A}_{t'} = \emptyset$.
   (b) À l'aide du résultat de la question 2, montrer que si $t \in \mathcal{P}_n^+$, alors $\mathcal{A}_t \subset \mathcal{P}_n$.
   (c) Prouver que l'union des ensembles $\mathcal{A}_t$ où t décrit $\mathcal{P}_n^+$ est égal à $\mathcal{P}_n$ et en déduire que

$$\boxed{\text{card}\,(\mathcal{P}_n) = \sum_{t \in \mathcal{P}_n^+} \text{card}\,(\mathcal{A}_t)}.$$

4. (a) Écrire $\mathcal{P}_2$ sous la forme $\bigcup_{t \in \mathcal{P}_2^+} \mathcal{A}_t$ en déterminant $\mathcal{P}_2^+$ et chaque ensemble $\mathcal{A}_t$ où t décrit $\mathcal{P}_2^+$.
   (b) Même question pour $\mathcal{P}_3$.
   (c) Dans les trois questions suivantes, on s'intéresse au cas $n = 4$.

i. À l'aide du résultat de la question 2, donner, sans justifier, les éléments de $\mathcal{P}_4^+$.

ii. Pour chaque $t \in \mathcal{P}_4^+$, déterminer $\text{card}(\mathcal{A}_t)$, c'est-à-dire le nombre d'anagrammes de t.

iii. En déduire que $\text{card}(\mathcal{P}_4) = 125$.

5. Pour chaque $n \in \mathbb{N}^\star$ et chaque $(i,j) \in [\![1, n+1]\!]^2$, on définit les ensembles suivants :

$$\mathcal{E}_n^i = \Big\{(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in \mathcal{P}_n^+ \mid t_n = i\Big\} \text{ et } \mathcal{F}_{n+1}^{i,j} = \Big\{(t_1, t_2, \ldots, t_n, t_{n+1}) \in \mathcal{P}_{n+1}^+ \mid (t_n, t_{n+1}) = (i,j)\Big\}.$$

De plus, on note E_n^i le cardinal de $\mathcal{E}_n^i$.

(a) Calculer E_n^1 et E_n^{n+1}.

(b) Dans les quatre questions suivantes, on fixe $(i,j) \in [\![1, n+1]\!]^2$ tel que $i \leqslant j$ et on pose :

$$\varphi : \mathcal{E}_n^i \to \mathcal{F}_{n+1}^{i,j},\ (t_1, t_2, \ldots, t_n) \mapsto (t_1, t_2, \ldots, t_n, j).$$

i. Justifier que si $(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in \mathcal{P}_n^+$, alors $(t_1, t_2, \ldots, t_n, \ell) \in \mathcal{P}_{n+1}^+$ pour tout $\ell \in [\![t_n, n+1]\!]$.

ii. En déduire que φ est bien définie, c'est-à-dire que $\varphi(t) \in \mathcal{F}_{n+1}^{i,j}$ pour tout $t \in \mathcal{E}_n^i$.

iii. Justifier que si $(t_1, t_2, \ldots, t_n, t_{n+1}) \in \mathcal{P}_{n+1}^+$, alors $(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in \mathcal{P}_n^+$.

iv. Montrer que $\varphi : \mathcal{E}_n^i \to \mathcal{F}_{n+1}^{i,j}$ est bijective et que $\text{card}\left(\mathcal{F}_{n+1}^{i,j}\right) = E_n^i$.

(c) Pour cette question, on fixe $j \in [\![1, n+1]\!]$. Prouver que $\bigcup_{i=1}^{j} \mathcal{F}_{n+1}^{i,j} = \mathcal{E}_{n+1}^j$ et en déduire que

$$E_{n+1}^j = \sum_{i=1}^{j} E_n^i.$$

(d) Montrer que

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ \sum_{\ell=0}^{p} \binom{q+\ell}{\ell} = \binom{p+q+1}{p}$$

(indication : utiliser après l'avoir justifié que $\binom{q+\ell}{\ell} = \binom{q+\ell+1}{\ell} - \binom{q+\ell}{\ell-1}$ pour tout $\ell \in \mathbb{Z}$).

(e) À l'aide des résultats précédents, démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ on a :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ E_n^i = \binom{n+i-2}{i-1} - \binom{n+i-2}{i-2}.$$

(f) Justifier brièvement que $\mathcal{P}_n^+$ est égal à l'union disjointe des $\mathcal{E}_n^1, \mathcal{E}_n^2, \ldots, \mathcal{E}_n^n$, puis en déduire que

$$\text{card}\left(\mathcal{P}_n^+\right) = \sum_{i=1}^{n} E_n^i = \binom{2n-1}{n-1} - \binom{2n-1}{n-2}.$$

(g) Conclure que

$$\boxed{\text{card}\left(\mathcal{P}_n^+\right) = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}}.$$

6. (a) À l'aide du résultat précédent, déterminer le nombre d'éléments de $\mathcal{P}_5^+$.

(b) En s'inspirant de la question 4.(c), expliquer comment on pourrait déterminer $\text{card}(\mathcal{P}_5)$.

Corrigé du DS n° 3 de mathématiques et d'informatique

Problème 1 (Modélisation mathématique et informatique)
Énoncé et corrigé de V. Vong

A - Exemple : un modèle de développement cellulaire

1. (INFO) On pose :

```
def suite(n,x0,y0) :
    x=x0
    y=y0
    for i in range(0,n) :
        d=x
        x=x+y
        y=x
    return (x,y)
```

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a

$$x_{n+2} = x_{n+1} + y_{n+1}.$$

Or, $y_{n+1} = y_n$. On en déduit que

$$\boxed{x_{n+2} = x_{n+1} + x_n}.$$

3. On constate que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie une récurrence linéaire d'ordre dont voici l'équation caractéristique :

$$X^2 - X - 1 = 0.$$

Calculons son discriminant : $\Delta = 5$. On en déduit que les solutions de cette équation sont :

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Par conséquent, il existe A et B réels tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n = Ar_1^n + Br_2^n.$$

Déterminons les valeurs de A et de B en fonction de x_0 et de y_0. D'après la relation de récurrence entre x_n et y_n, on en déduit que $x_1 = x_0 + y_0$. Donc

$$\begin{cases} x_0 & = A + B \\ x_0 + y_0 & = Ar_1 + Br_2 \end{cases}$$

En regroupant la ligne 2 suivant $A + B$ et $A - B$, on obtient :

$$\begin{cases} x_0 & = A + B \\ x_0 + y_0 & = \frac{A+B}{2} + \frac{\sqrt{5}(A-B)}{2} \end{cases}$$

En remplaçant $A + B$ par x_0, on a

$$\begin{cases} x_0 & = A + B \\ x_0 + y_0 & = \frac{x_0}{2} + \frac{\sqrt{5}(A-B)}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0 &= A+B \\ \frac{x_0}{2}+y_0 &= \frac{\sqrt{5}(A-B)}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0 &= A+B \\ \frac{1}{\sqrt{5}}\left(x_0+2y_0\right) &= A-B \end{cases}$$

En sommant les deux lignes, et en soustrayant la ligne 2 à la ligne 1, on obtient

$$2A = \frac{(1+\sqrt{5})x_0+2y_0}{\sqrt{5}}, 2B = \frac{x_0(\sqrt{5}-1)-2y_0}{\sqrt{5}}$$

D'où

$$\boxed{A = \frac{(1+\sqrt{5})x_0+2y_0}{2\sqrt{5}}, B = \frac{x_0(\sqrt{5}-1)-2y_0}{2\sqrt{5}}}.$$

Il en résulte que

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}, x_n = \frac{(1+\sqrt{5})x_0+2y_0}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{x_0(\sqrt{5}-1)-2y_0}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}.$$

On sait que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a

$$y_{n+1} = x_n.$$

Donc

$$\forall n\geq 1, y_n = \frac{(1+\sqrt{5})x_0+2y_0}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + \frac{x_0(\sqrt{5}-1)-2y_0}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}.$$

Vérifions que la formule de droite est égale à y_0 lorsque $n=0$. On a

$$\begin{aligned}
\tfrac{(1+\sqrt{5})x_0+2y_0}{2\sqrt{5}}\left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{-1} + \tfrac{x_0(\sqrt{5}-1)-2y_0}{2\sqrt{5}}\left(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{-1} &= \tfrac{1}{2\sqrt{5}}\left(2x_0+\tfrac{4y_0}{1+\sqrt{5}}-2x_0-\tfrac{4y_0}{1-\sqrt{5}}\right). \\
&= \tfrac{4y_0}{2\sqrt{5}}\left(\tfrac{1-\sqrt{5}-1-\sqrt{5}}{(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})}\right) \\
&= \tfrac{4y_0}{2\sqrt{5}}\cdot\tfrac{-2}{-4} \\
&= y_0.
\end{aligned}$$

Par conséquent, on a en fait

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}, y_n = \frac{(1+\sqrt{5})x_0+2y_0}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + \frac{x_0(\sqrt{5}-1)-2y_0}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}.}$$

4. On suppose qu'il y a temps 0 une cellule immature et aucune cellule mature. Autrement dit, $x_0=0$ et $y_0=1$. En remplaçant dans la formule de la question 3, on en déduit que

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}, x_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)}.$$

5. Soit $n\in\mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned}
x_n &= \tfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right). \\
&= \tfrac{1}{2^n\sqrt{5}}\left(\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}\sqrt{5}^k - \sum_{k=0}^n\binom{n}{k}(-\sqrt{5})^k\right) \text{ (en appliquant la formule du binôme)}
\end{aligned}$$

En séparant les sommes suivant les indices pairs et impairs, on obtient

$$x_n = \frac{1}{2^n\sqrt{5}}\left(\sum_{\substack{0\leq k\leq n,\\ k \text{ pair}}}\binom{n}{k}\sqrt{5}^k + \sum_{\substack{0\leq k\leq n,\\ k \text{ impair}}}\binom{n}{k}\sqrt{5}^k - \sum_{\substack{0\leq k\leq n,\\ k \text{ pair}}}\binom{n}{k}\sqrt{5}^k - \sum_{\substack{0\leq k\leq n,\\ k \text{ impair}}}\binom{n}{k}(-\sqrt{5})^k\right).$$

Or$(-1)^k = 1$ si k est pair et $(-1)^k = -1$ si k est impair. Donc

$$x_n = \frac{1}{2^{n-1}\sqrt{5}} \left(\sum_{\substack{0 \leq k \leq n,\\ k \text{ impair}}} \binom{n}{k} \sqrt{5}^k \right).$$

On pose $k = 2k'+1$ avec $k' \in \mathbb{N}$. On a donc $\frac{-1}{2} \leq k' \leq \frac{n-1}{2}$. k' étant naturel, on a donc $\frac{-1}{2} \leq k' \leq \frac{n-1}{2}$. D'où

$$x_n = \frac{1}{2^{n-1}\sqrt{5}} \left(\sum_{k'=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k'+1} \sqrt{5}^{2k'+1} \right).$$

Par conséquent,

$$\boxed{x_n = \frac{1}{2^{n-1}} \left(\sum_{k'=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k'+1} 5^{k'} \right).}$$

B1 - Étude du modèle général

6. On définit `suite` de la manière suivante :

```
def suite(n,a,b,c,d,x0,y0) :
    x=x0
    y=y0
    for i in range(0,n) :
        aux=x
        x=a*x+b*y
        y=c*aux+d*y
    return x,y
```

7. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$x_{n+2} = ax_{n+1} + by_{n+1}.$$

Or, d'après la deuxième relation,

$$by_{n+1} = bcx_n + bdy_n.$$

D'où

$$x_{n+2} = ax_{n+1} + bcx_n + bdy_n.$$

Or

$$x_{n+1} = ax_n + by_n.$$

Donc

$$bdy_n = dx_{n+1} - adx_n.$$

D'où

$$x_{n+2} = ax_{n+1} + bcx_n + dx_{n+1} - adx_n.$$

Autrement dit

$$\boxed{x_{n+2} = (a+d)x_{n+1} + (bc-ad)x_n.}$$

8. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned} y_{n+2} &= cx_{n+1} + dy_{n+1} \\ &= cax_n + cby_n + dy_{n+1} \end{aligned}$$

Or $y_{n+1} = cx_n + dy_n$. Donc $acx_n = ay_{n+1} - ady_n$. D'où

$$y_{n+2} = ay_{n+1} - ady_n + bcy_n + dy_{n+1}$$

Par conséquent,

$$\boxed{y_{n+2} = (a+d)y_n + (bc-ad)y_n.}$$

9. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose
$$P(n) : x_{n+1} = ax_n + by_n, y_{n+1} = cx_n + dy_n.$$
Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.
— Initialisation : $P(0)$ est vraie par hypothèse sur x_1 et y_1.
— Hérédité : on suppose que $P(n)$ est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $P(n+1)$ est vraie. Par définition de x_{n+2},
$$\begin{aligned} x_{n+2} - ax_{n+1} - by_{n+1} &= (a+d)x_{n+1} + (bc-ad)x_n - ax_{n+1} - by_{n+1} \\ &= dx_{n+1} + (bc-ad)x_n - by_{n+1} \\ &= d(ax_n + by_n) + (bc-ad)x_n - b(cx_n + dy_n) \quad \text{(P(n) vraie)} \\ &= 0 \end{aligned}$$
De même, par définition de y_{n+2},
$$\begin{aligned} y_{n+2} - cx_{n+1} - dy_{n+1} &= (a+d)y_{n+1} + (bc-ad)y_n - cx_{n+1} - dy_{n+1} \\ &= ay_{n+1} + (bc-ad)y_n - cx_{n+1} \\ &= a(cx_n + dy_n) + (bc-ad)y_n - c(ax_n + by_n) \quad \text{(P(n) vraie)} \\ &= 0 \end{aligned}$$
Donc $P(n+1)$ est vraie.
— Conclusion : d'après le principe de récurrence, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\boxed{x_{n+1} = ax_n + by_n,\ y_{n+1} = cx_n + dy_n.}$$
Remarque : En écrivant la preuve de cette manière, on constate qu'il n'y a pas besoin de faire une récurrence sur deux termes.

10. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est suite récurrence linéaire d'ordre 2. On a alors comme équation caractéristique :
$$X^2 - (a+d)X + (ad-bc) = 0. \tag{4}$$
Déterminons son discriminant : $\Delta = (a+d)^2 - 4(ad-bc)$. Or on suppose que $\Delta = 0$. La solution de l'équation (4) est donc : $r = \frac{a+d}{2}$. Il en résulte que
$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n = (A+Bn)r^n.$$
Déterminons A et B en fonction des conditions initiales.
$$\begin{cases} x_0 = A \\ x_1 = (A+B)(\frac{a+d}{2}) \end{cases}$$
— Cas 1 : $a+d = 0$. On a alors $\forall n \geq 1, x_n = 0$.
— Cas 2 : $(a+d) \neq 0$. On a alors $B = \frac{2x_1}{a+d} - x_0$, avec $x_1 = ax_0 + by_0$. D'où, $B = \frac{2ax_0 + 2by_0 - ax_0 - dy_0}{a+d} = \frac{(a-d)x_0 + 2by_0}{a+d}$.
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, x_n = (x_0 + \frac{(a-d)x_0 + 2by_0}{a+d} n)\left(\frac{a+d}{2}\right)^n.}$$

B2 - Application : une espèce vouée à disparaître

11. Pour cet exemple, en gardant les notations du système (E), on a
$$a = 0, b = 2, c = -2, d = 2.$$
D'après les questions 7 et 8, on sait que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient la même relation de récurrence à savoir
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = (a+d)u_{n+1} + (bc-ad)u_n.$$

En remplaçant par les valeurs, on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+2} = 2x_{n+1} - 4x_n, y_{n+2} = 2y_{n+1} - 4y_n.$$

Les deux suites ont alors comme équation caractéristique

$$X^2 - 2X + 4 = 0.$$

On obtient $\Delta = 4 - 16 = -12 < 0$. Et les solutions complexes sont

$$r_1 = 1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}, r_2 = 1 - i\sqrt{3} = 2e^{\frac{-i\pi}{3}}.$$

On en déduit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont de la forme

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n = (A\cos(\frac{n\pi}{3}) + B\sin(\frac{n\pi}{3}))2^n, y_n = (C\cos(\frac{n\pi}{3}) + D\sin(\frac{n\pi}{3}))2^n$$

Déterminons les valeurs de A, B, C, D. Par hypothèse, au temps 0, il y a deux reproducteurs et 0 parasite. Donc $x_0 = 0, y_0 = 2$. En appliquant les formules pour x_1 et y_1, on a donc

$$x_1 = 4, y_1 = 4.$$

On obtient les systèmes suivant pour A, B et C, D :

$$\begin{cases} 0 = A \\ 4 = (\frac{A}{2} + B\frac{\sqrt{3}}{2})2 \end{cases} \begin{cases} 2 = C \\ 4 = (\frac{C}{2} + D\frac{\sqrt{3}}{2})2 \end{cases}$$

D'où

$$A = 0,\ B = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3},\ C = 2,\ D = (\frac{4}{2} - \frac{2}{2})\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

On a donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ x_n = \frac{2^{n+2}\sqrt{3}}{3}\sin\left(n\frac{\pi}{3}\right),\ y_n = 2^{n+1}\left(\cos\left(n\frac{\pi}{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{3}\sin\left(n\frac{\pi}{3}\right)\right).}$$

12. Pour $n = 3$, $\sin(\frac{3\pi}{3}) = 0$, donc $x_3 = 0$. Pour $n = 4$, on a alors $x_n = 2^6\frac{\sqrt{3}}{3}\sin(4\frac{\pi}{3}) = 2^6\frac{\sqrt{3}}{3}(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = -2^5 < 0$. Donc $x_4 < 0$. Il existe bien des n pour lesquels x_n est négatif.
Remarque : De manière générale, le signe de x_n pour $n \geq 1$ dépend uniquement du signe de $\sin(\frac{n\pi}{3})$. Déterminons son signe :

$$\sin(n\tfrac{\pi}{3}) \leq 0 \Leftrightarrow \tfrac{n\pi}{3} \in \cup_{k\in\mathbb{Z}}[\pi + 2k\pi, 2(k+1)\pi]$$

Autrement dit, le sinus est s négatif si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\begin{aligned} \pi + 2k\pi \leq \tfrac{n\pi}{3} \leq 2(k+1)\pi &\Leftrightarrow 2k + 1 \leq \tfrac{n}{3} \leq 2(k+1) \\ &\Leftrightarrow 6k + 3 \leq n \leq 6k + 6 \end{aligned}$$

Autrement dit, on a $n = 6k + i$ avec $i \in \{3, 4, 5, 6\}$. n étant strictement positif, on en déduit que le sinus est négatif si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 6k + i$ avec $i \in \{3, 4, 5, 6\}$. De plus, comme $x_{n+1} = 2y_n$, on en déduit qu'il existe aussi des valeurs de y_n qui vont être négatives.

B3 - Un modèle tue-mouche

13. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $y_{n+1} = ay_n$ car le taux de croissance des D.melanogaster est de a et $x_{n+1} = ax_n - by_n$ car le taux de croissance des D. simulans est de a, mais by_n d'entre eux disparaissent car elles se font éliminées par les D.melanogaster.
14. On a donc le système de récurrence suivant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} &= ax_n - by_n \\ y_{n+1} &= ay_n \end{cases}$$

On constate que l'on a un système du même type que (E). On en déduit que les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient les récurrences d'ordre 2 suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+2} = 2ax_{n+1} - a^2x_n,\ y_{n+2} = 2ay_{n+1} - a^2y_n.$$

On a alors comme équation caractéristique

$$X^2 - 2aX + a^2 = 0$$

on constate que a est racine double de $X^2 - 2aX + a^2$. On en déduit que l'on

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_n = (A + Bn)a^n,\ y_n = (C + Dn)a^n.$$

Déterminons A, B, C, D.

$$\begin{cases} x_0 = A \\ x_1 = (A + B)a \end{cases} \begin{cases} y_0 = C \\ y_1 = (C + D)a \end{cases}$$

On obtient alors ($a \neq 0$) :

$$x_0 = A,\ B = \frac{x_1}{a} - x_0 = \frac{x_1 - ax_0}{a} = \frac{-by_0}{a},\ C = y_0,\ D = 0.$$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n = (x_0 - \frac{by_0}{a}n)a^n, y_n = y_0a^n.$$

15. a étant strictement positif, on en déduit que le signe de x_n dépend uniquement de $(x_0 - \frac{by_0}{a}n)$. On a

$$\begin{aligned} x_0 - \tfrac{by_0}{a}n \leq 0 &\Leftrightarrow x_0 \leq \tfrac{by_0}{a}n \\ &\Leftrightarrow \tfrac{ax_0}{by_0} \leq n \quad (b > 0, y_0 > 0, a > 0) \end{aligned}$$

On en déduit qu'à partir du premier entier n_0 tel que $n_0 \geq \frac{ax_0}{by_0}$, la population de simulans aura disparu.
16. Le premier programme termine et affiche le premier temps n_0 pour lequel il n'y a plus de simulans.

Le deuxième programme ne termine jamais : en effet, on ne modifie jamais la variable `simulans` qui était strictement positif, donc on ne sort pas de la boucle.

Si on remplace la variable `simulans` par la variable `melanogaster`, on constate que le programme ne termine jamais car la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est toujours strictement positive.

Remarque : Le programme ne s'exécute pas correctement si la variable `simulans` n'est pas défini préalablement.

C - Une population structurée en trois classes

17. 80 signifie qu'un insecte adulte donne naissance à 80 larves. $\frac{1}{20}$ signifie que seul 5% des larves arrivent à l'âge adulte. $\frac{1}{2}$ signifie que la moitié des insectes à l'âge adulte arrive à la classe âgée. La variable z_n n'apparaît pas dans les récurrences car la population âgée disparaît entre le temps n et le temps $n + 1$.
18. Voici une manière d'écrire cette fonction :

```
def population(n) :
    x=float(input())
    y=float(input())
    z=float(input())
    for i in range(0,n) :
        A=x
        B=y
        C=z
        x=80*y
        y=(1/20)*A
        z=(1/2)*B
    return x,y,z
```

Remarque : Il est possible de rajouter d'autres paramètres à la fonction `population`.

19. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $x_{n+2} = 80y_{n+1}$. Or $y_{n+1} = \frac{1}{20}x_n$. On en déduit

$$\forall n \in \mathbb{N} x_{n+2} = 4x_n.$$

20. En résolvant l'équation caractéristique, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n = A2^n + B(-2)^n = (A + B(-1)^n)2^n.$$

On a $x_0 = 100, y_0 = 0, z_0 = 0$. Donc $x_1 = 0$. D'où

$$\forall n \in \mathbb{N}, A = 50, B = 50.$$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n = 50 \cdot 2^n(1 + (-1)^n).$$

On sait que $y_{n+1} = \frac{1}{20}x_n$. D'où

$$\forall n \geq 1, y_n = 5 \cdot 2^{n-2}(1 + (-1)^{n-1}).$$

On constate que la formule coïncide aussi en 0. On a donc

$$\forall n \geq 0, y_n = 5 \cdot 2^{n-2}(1 + (-1)^{n-1}).$$

De même, on sait que $z_{n+1} = \frac{y_n}{2}$. D'où

$$\forall n \geq 1, z_n = 5 \cdot 2^{n-3}(1 + (-1)^{n-2})$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la population totale P_n est donnée par $P_n = x_n + y_n + z_n$. Pour $n = 0$, on a donc $P_0 = 100$. Pour tout $n \geq 1$, on a

$$\begin{aligned} P_n = x_n + y_n + z_n &= 5 \cdot 2^n(1 + (-1)^n) + 5 \cdot 2^{n-2}(1 + (-1)^{n-1}) + 5 \cdot 2^{n-3}(1 + (-1)^{n-2}) \\ &= 5 \cdot 2^{n-3}\left(8(1 + (-1)^n) + 2(1 + (-1)^{n-1}) + (1 + (-1)^{n-2})\right) \\ &= 5 \cdot 2^{n-3}\left(11 + 7(-1)^n\right) \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\forall n \geq 1, P_n = 5 \cdot 2^{n-3}\left(11 + 7(-1)^n\right).}$$

21. Ce modèle semble approprié lorsque la population ne cesse de croître. Mais il ne prend pas en compte d'autres aspects d'un développement d'une population : limitation des ressources, interaction avec d'autres espèces (comme les prédateurs de ces insectes, ou des espèces partageant les mêmes ressources etc.)

Remarque : Le modèle présenté, communément appelé modèle de Leslie, se généralise à une structuration en n classes. On obtient alors dans ce cas un système de n récurrences linéaires pouvant être étudié à l'aide du calcul matriciel. Il peut être utilisé dans divers contextes comme en biologie de la conservation ou en démographie humaine.

Problème 2 (Méthodes de calcul et raisonnement)

La ferme expérimentale de Grignon souhaite mettre en place une nouvelle salle de traite automatique donnant plus de liberté aux vaches et sans avoir besoin de chien «super-intelligent» pour diriger le troupeau. Cette nouvelle salle contient n stalles alignées numérotées de 1 à n (où $n \in \mathbb{N}^\star$ est un entier fixé). Dès que les stalles sont libres un sas s'ouvre sur un enclos d'attente pour laisser passer n vaches l'une après l'autre. Chaque vache a une stalle de traite préférée. Pour chaque $k \in [\![1,n]\!] = \{1,2,3,\ldots,n\}$, on note $s_k \in [\![1,n]\!]$ le numéro de stalle préférée de la k-ième vache arrivant dans la salle de traite. Si la stalle numéro s_k est déjà occupée, la k-ième vache se déplacera jusqu'à la prochaine stalle libre. Les problèmes surviennent lorsqu'aucune stalle restante n'est disponible puisque les vaches ne peuvent pas faire demi-tour.

L'application $k \mapsto s_k$ est simplement représentée par le n-uplet $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n) \in [\![1,n]\!]^n$ et on dit que s est une fonction de parcage si les n vaches se répartissent dans la salle de traite sans problèmes, c'est-à-dire si chacune occupe une stalle avant le début de la traite. Par exemple pour $n = 6$: $(3,5,1,2,3,2)$ est une fonction de parcage au contraire de $(2,5,6,5,1,2)$ (voir les figures 3 et 4). De plus, on dit que s est croissante si l'application $k \mapsto s_k$ est croissante, c'est-à-dire si $s_1 \leqslant s_2 \leqslant \cdots \leqslant s_n$.

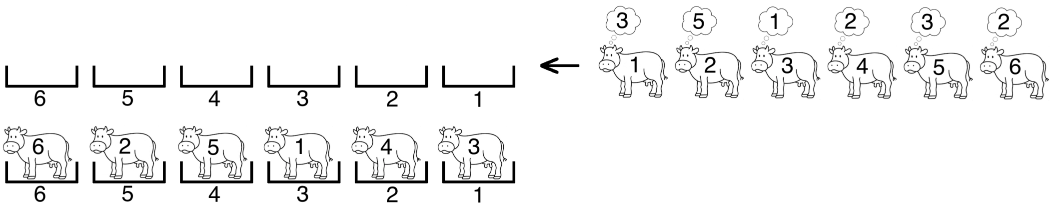


FIGURE 3 – $(3,5,1,2,3,2)$ est une fonction de parcage.

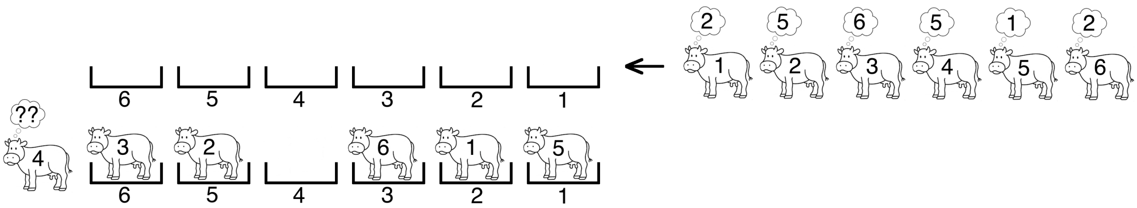


FIGURE 4 – $(2,5,6,5,1,2)$ n'est pas une fonction de parcage.

On note $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des fonctions de parcage et $\mathcal{P}_n^+$ le sous-ensemble des fonctions de parcage croissantes. Le but de ce problème est de dénombrer ces deux ensembles.

1. (a) *Rappeler le nombre total d'applications de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$.*

   ▶ Le nombre total d'applications de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$ est

$$\mathrm{card}\left([\![1,n]\!]^{[\![1,n]\!]}\right) = \mathrm{card}([\![1,n]\!])^{\mathrm{card}([\![1,n]\!])} = \boxed{n^n}.$$

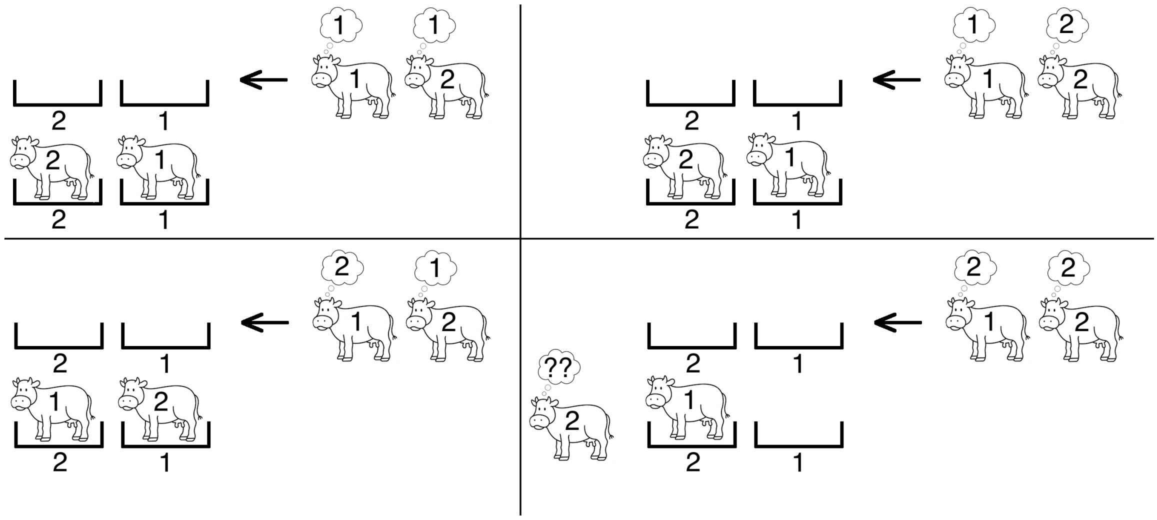
   (b) *Montrer que $\mathcal{P}_2 = \{(1,1),(1,2),(2,1)\}$.*

   ▶ D'après le résultat précédent, il y a $2^2 = 4$ applications de $[\![1,2]\!]$ dans $[\![1,2]\!]$. Il s'agit de :

$$(1,1), \quad (1,2), \quad (2,1) \quad \text{et} \quad (2,2).$$

   Les trois premières permettent de répartir les vaches dans la salle de traite sans problèmes mais pas la quatrième comme le montre le schéma ci-dessous.
   On en déduit bien que l'ensemble des fonctions de parcage pour $n = 2$ est :

$$\boxed{\mathcal{P}_2 = \{(1,1),(1,2),(2,1)\}}.$$



Attention : il ne suffit pas de montrer que $(1,1)$, $(1,2)$ et $(2,1)$ sont des fonctions de parcage (ceci prouve seulement l'inclusion $\supset$), il faut aussi montrer que $(2,2)$ n'est pas une fonction de parcage (ce qui prouve l'inclusion $\subset$ puisqu'on reconnaît l'ensemble des fonctions de $[\![1,2]\!]$ dans $[\![1,2]\!]$ privé de $(2,2)$). Un dessin est le moyen le plus simple de justifier la réponse ici.

(c) *Donner, sans justifier, les éléments de $\mathcal{P}_3$ et en déduire que $\text{card}(\mathcal{P}_3) = 16$.*

▶

Il suffit de procéder comme à la question précédente en testant au brouillon les $3^3 = 27$ applications de $[\![1,3]\!]$ dans $[\![1,3]\!]$ une par une.

On a :

$$\boxed{\mathcal{P}_3 = \left\{ \begin{array}{l} (1,1,1),(1,1,2),(1,1,3),(1,2,1),(1,2,2),(1,2,3),(1,3,1),(1,3,2), \\ (2,1,1),(2,1,2),(2,1,3),(2,2,1),(2,3,1),(3,1,1),(3,1,2),(3,2,1) \end{array} \right\}}$$

et donc $\boxed{\text{card}(\mathcal{P}_3) = 16}$.

2. *On note Θ l'application qui à chaque $s \in [\![1,n]\!]^n$ associe le n-uplet ayant les mêmes composantes que s réordonnées dans l'ordre croissant, par exemple pour $n = 6$: $\Theta(3,5,1,2,3,2) = (1,2,2,3,3,5)$.*

(a) *Discuter brièvement de l'injectivité et de la surjectivité de l'application $\Theta : [\![1,n]\!]^n \to [\![1,n]\!]^n$.*

▶ L'application $\boxed{\Theta : [\![1,n]\!]^n \to [\![1,n]\!]^n \text{ n'est pas injective}}$ car il existe au moins deux n-uplets différents de $[\![1,n]\!]^n$ qui ont la même image par Θ : par exemple $s_1 = (1,2,1,1,\dots,1)$ et $s_2 = (2,1,1,1,\dots,1)$ sont tels que $\Theta(s_1) = \Theta(s_2) = s_1$. Et $\boxed{\Theta : [\![1,n]\!]^n \to [\![1,n]\!]^n \text{ n'est pas surjective}}$ car il existe au moins un n-uplet de $[\![1,n]\!]^n$ qui n'admet pas d'antécédents par Θ : par exemple $s_1 = (1,2,1,1,\dots,1)$ n'admet pas d'antécédents puisque ses composantes ne sont pas ordonnées dans l'ordre croissant.

Attention : n est un entier quelconque dans l'énoncé. Il n'est donc pas suffisant de donner des contre-exemples pour une valeur de n fixée. Par exemple $\Theta(3,5,1,2,3,2) = \Theta(1,2,2,3,3,5) = (1,2,2,3,3,5)$ prouve seulement que $\Theta : [\![1,n]\!]^n \to [\![1,n]\!]^n$ n'est pas injective quand $n = 6$, mais ce contre-exemple ne justifie rien pour les autres valeurs de n.

(b) *Dans les 2 questions suivantes, on fixe $s = (s_1, s_2, \dots, s_n) \in [\![1,n]\!]^n$ et on note $t = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ l'image de s par Θ. Ainsi on a $t_1 \leqslant t_2 \leqslant \dots \leqslant t_n$.*

i. *Pour cette question, on suppose que $t_k > k$ pour un certain $k \in [\![1,n]\!]$. En observant les vaches ayant les préférences $t_k, t_{k+1}, \dots, t_n$, justifier que s n'est pas une fonction de parcage.*

▶ On raisonne par l'absurde en supposant que s est une fonction de parcage. Puisque t est croissante (en tant qu'image de s par Θ) et que $t_k > k$ (par hypothèse), on en déduit que chaque préférence $t_k, t_{k+1}, \dots, t_n$ est strictement plus grande que k et donc que les vaches ayant ces préférences vont chacune occuper une stalle dont le numéro est compris entre $k+1$ et n. Ce qui fait un maximum de $n-(k+1)+1 = n-k$ stalles pour $n-k+1$ vaches. Ceci est absurde d'après le principe des tiroirs puisque $n-k+1 > n-k$. Donc $\boxed{s \text{ n'est pas une fonction de parcage}}$.

On peut également considérer l'application f qui a chaque vache associe la stalle qu'elle occupe avant le début de la traite. Si s est une fonction de parcage, alors cette application est (bien définie et) bijective. En particulier, la restriction de cette application à l'ensemble A des vaches ayant les préférences $t_k, t_{k+1}, \dots, t_n$ est injective, donc $\operatorname{card}(A) \leqslant \operatorname{card}(f(A))$. Ce qui est absurde car $\operatorname{card}(A) = n-k+1$ et $\operatorname{card}(f(A)) \leqslant n-k$.

ii. *Pour cette question, on suppose que s n'est pas une fonction de parcage et on note k le plus petit numéro des stalles qui restent inoccupées. En observant les vaches ayant les préférences $t_1, t_2, \dots, t_k$, justifier par l'absurde que $t_k > k$.*

► On raisonne par l'absurde en supposant que $t_k \leqslant k$. Puisque t est croissante (en tant qu'image de s par Θ), on en déduit que chaque préférence $t_1, t_2, \dots, t_k$ est inférieure ou égale à k. Or on a supposé que la stalle numéro k est vide, donc chaque préférence $t_1, t_2, \dots, t_k$ est en fait strictement inférieure à k (sinon au moins une des vaches ayant ces préférences se déplacerait directement dans la stalle numéro k). De plus, les vaches ayant ces préférences vont chacune occuper une stalle dont le numéro est compris entre 1 et $k-1$ avant le début de la traite (sinon une de ces vaches passerait devant la stalle numéro k qui est libre). Ce qui fait un maximum de $(k-1)-1+1 = k-1$ stalles pour $k-1+1 = k$ vaches. Ceci est absurde d'après le principe des tiroirs puisque $k > k-1$. Donc $\boxed{t_k > k}$.

De même, on peut également considérer l'application f qui a chaque vache associe la stalle qu'elle occupe avant le début de la traite. Si $t_k \leqslant k$, alors la restriction de cette application à l'ensemble B des vaches ayant les préférences $t_1, t_2, \dots, t_k$ est (bien définie) et injective, donc $\operatorname{card}(B) \leqslant \operatorname{card}(f(B))$. Ce qui est absurde car $\operatorname{card}(B) = k$ et $\operatorname{card}(f(B)) \leqslant k-1$.

(c) *En déduire la description suivante de l'ensemble des fonctions de parcage :*

$$\boxed{\mathcal{P}_n = \Big\{ s \in [\![1,n]\!]^n \mid \forall k \in [\![1,n]\!],\ t_k \leqslant k \text{ où } (t_1, t_2, \dots, t_n) = \Theta(s) \Big\}}.$$

► On pose

$$E = \Big\{ s \in [\![1,n]\!]^n \mid \forall k \in [\![1,n]\!],\ t_k \leqslant k \text{ où } (t_1, t_2, \dots, t_n) = \Theta(s) \Big\}$$

et on raisonne par double inclusion pour montrer que $\mathcal{P}_n = E$.
1re inclusion : on fixe $s \in \mathcal{P}_n$. On note $t = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ l'image de s par Θ, c'est-à-dire $(t_1, t_2, \dots, t_n) = \Theta(s)$. Par l'absurde, on suppose qu'il existe $k \in [\![1,n]\!]$ tel que $t_k > k$. D'après le résultat de la question 2(b)i, s n'est pas une fonction de parcage, ce qui est absurde puisque $s \in \mathcal{P}_n$. Par conséquent, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$ on a $t_k \leqslant k$. Ainsi on a montré que $s \in E$, ce qui est vrai pour tout $s \in \mathcal{P}_n$, donc $\mathcal{P}_n \subset E$.
2e inclusion : on fixe $s \in E$. Donc, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, on a $t_k \leqslant k$ où $(t_1, t_2, \dots, t_n) = \Theta(s)$, c'est-à-dire où $t = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ est l'image de s par Θ. Par l'absurde, on suppose que s n'est pas une fonction de parcage. D'après le résultat de la question 2(b)ii, il existe $k \in [\![1,n]\!]$ tel que $t_k > k$, ce qui est absurde puisque $t_k \leqslant k$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$. Par conséquent, s est une fonction de parcage. Ainsi on a montré que $s \in \mathcal{P}_n$, ce qui est vrai pour tout $s \in E$, donc $E \subset \mathcal{P}_n$.
Conclusion : par double inclusion, on a montré que $\mathcal{P}_n = E$, c'est-à-dire :

$$\boxed{\mathcal{P}_n = \Big\{ s \in [\![1,n]\!]^n \mid \forall k \in [\![1,n]\!],\ t_k \leqslant k \text{ où } (t_1, t_2, \dots, t_n) = \Theta(s) \Big\}}.$$

Démontrer cette égalité d'ensembles revient en fait à prouver l'équivalence suivante pour tout $s \in [\![1,n]\!]^n$ (en posant $(t_1, t_2, \dots, t_n) = \Theta(s)$) :

$$s \text{ est une fonction de parcage} \iff \forall k \in [\![1,n]\!],\ t_k \leqslant k.$$

Or le résultat de la question 2(b)i. est :

$$\exists k \in [\![1,n]\!],\ t_k > k \Longrightarrow s \text{ n'est pas une fonction de parcage}$$

et celui de la question 2(b)ii. est :

$$s \text{ n'est pas une fonction de parcage} \Longrightarrow \exists k \in [\![1,n]\!],\ t_k > k.$$

Il suffit donc d'écrire les contraposées et de raisonner par double implication.

3. *Pour chaque $t = (t_1, t_2, \dots, t_n) \in [\![1,n]\!]^n$ croissant, c'est-à-dire tel que $t_1 \leqslant t_2 \leqslant \dots \leqslant t_n$, on note $\mathcal{A}_t$ l'ensemble des antécédents de t par l'application Θ, c'est-à-dire : $\mathcal{A}_t = \{s \in [\![1,n]\!]^n \mid \Theta(s) = t\}$. Par définition de l'application Θ, $\mathcal{A}_t$ est donc l'ensemble des n-uplets ayant les mêmes composantes que t dans un ordre quelconque, autrement dit $\mathcal{A}_t$ est l'ensemble des anagrammes de t.*

 (a) *Montrer que si $t \in [\![1,n]\!]^n$ et $t' \in [\![1,n]\!]^n$ sont distincts et croissants, alors $\mathcal{A}_t \cap \mathcal{A}_{t'} = \emptyset$.*

 ► Soient $t \in [\![1,n]\!]^n$ et $t' \in [\![1,n]\!]^n$ distincts et croissants. On suppose qu'il existe au moins un élément dans l'intersection $\mathcal{A}_t \cap \mathcal{A}_{t'}$ et on le note s. Alors $\Theta(s) = t$ (car $s \in \mathcal{A}_t$) et $\Theta(s) = t'$ (car $s \in \mathcal{A}_{t'}$). Par conséquent $t = t'$ ce qui est absurde car t et t' sont distincts. Ainsi il n'existe pas d'éléments dans l'intersection $\mathcal{A}_t \cap \mathcal{A}_{t'}$, autrement dit : $\boxed{\mathcal{A}_t \cap \mathcal{A}_{t'} = \emptyset}$.

 (b) *À l'aide du résultat de la question 2, montrer que si $t \in \mathcal{P}_n^+$, alors $\mathcal{A}_t \subset \mathcal{P}_n$.*

 ► Soient $t = (t_1, t_2, \dots, t_n) \in \mathcal{P}_n^+$ et $s \in \mathcal{A}_t$. Alors $\Theta(s) = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ par définition de $\mathcal{A}_t$. D'après le résultat de la question 2, il suffit de prouver que

$$\forall k \in [\![1,n]\!],\ t_k \leqslant k$$

 pour démontrer que $s \in \mathcal{P}_n$. Or t est une fonction de parcage croissante. Puisque t est croissante, $\Theta(t) = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ (car les composantes de t sont déjà ordonnées dans l'ordre croissant) Et puisque $t \in \mathcal{P}_n$, on déduit du résultat de la question 2 que

$$\forall k \in [\![1,n]\!],\ t_k \leqslant k.$$

 Finalement, on a bien montrer que $s \in \mathcal{P}_n$ pour tout $s \in \mathcal{A}_t$, donc $\boxed{\mathcal{A}_t \subset \mathcal{P}_n}$.

 (c) *Prouver que l'union des ensembles $\mathcal{A}_t$ où t décrit $\mathcal{P}_n^+$ est égal à $\mathcal{P}_n$ et en déduire que*

$$\boxed{\operatorname{card}(\mathcal{P}_n) = \sum_{t \in \mathcal{P}_n^+} \operatorname{card}(\mathcal{A}_t)}.$$

 ► On raisonne par double inclusion pour montrer que $\bigcup_{t \in \mathcal{P}_n^+} \mathcal{A}_t = \mathcal{P}_n$.
 <u>1^re inclusion</u> : soit $s \in \bigcup_{t \in \mathcal{P}_n^+} \mathcal{A}_t$. Donc il existe au moins un $t \in \mathcal{P}_n^+$ tel que $s \in \mathcal{A}_t$. Or $\mathcal{A}_t \subset \mathcal{P}_n$ d'après le résultat de la question précédente, donc $s \in \mathcal{P}_n$. Puisque ceci est vrai pour tout $s \in \bigcup_{t \in \mathcal{P}_n^+} \mathcal{A}_t$, on a montré que $\bigcup_{t \in \mathcal{P}_n^+} \mathcal{A}_t \subset \mathcal{P}_n$.
 <u>2^e inclusion</u> : soit $s \in \mathcal{P}_n$. Pour démontrer que $s \in \bigcup_{t \in \mathcal{P}_n^+} \mathcal{A}_t$, il suffit de trouver au moins un $t \in \mathcal{P}_n^+$ tel que $s \in \mathcal{A}_t$. On pose $t = (t_1, t_2, \dots, t_n) = \Theta(s)$. Ainsi $s \in \mathcal{A}_t$ par définition de $\mathcal{A}_t$. Il reste à prouver que $t \in \mathcal{P}_n^+$. Or t est croissante par définition de Θ. Et puisque $s \in \mathcal{P}_n$, on a d'après le résultat de la question 2 :

$$\forall k \in [\![1,n]\!],\ t_k \leqslant k$$

 Or $\Theta(t) = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ (car t est croissante) donc $t \in \mathcal{P}_n$ d'après le résultat de la question 2. Ainsi t est une fonction de parcage croissante, c'est-à-dire $t \in \mathcal{P}_n^+$. Finalement, on a montré que

$s \in \bigcup_{t\in\mathcal{P}_n^+} \mathcal{A}_t$, ce qui est vrai pour tout $s \in \mathcal{P}_n$, donc $\mathcal{P}_n \subset \bigcup_{t\in\mathcal{P}_n^+} \mathcal{A}_t$.
Conclusion : on a démontré par double inclusion que

$$\boxed{\bigcup_{t\in\mathcal{P}_n^+} \mathcal{A}_t = \mathcal{P}_n}.$$

De plus, les ensembles de cette union sont deux à deux disjoints d'après le résultat de la question 3(a) donc :

$$\boxed{\operatorname{card}(\mathcal{P}_n) = \operatorname{card}\left(\bigcup_{t\in\mathcal{P}_n^+} \mathcal{A}_t\right) = \sum_{t\in\mathcal{P}_n^+} \operatorname{card}(\mathcal{A}_t)}.$$

N'oubliez pas de justifier que les ensembles de l'union sont deux à deux disjoints pour utiliser la formule permettant de calculer le cardinal d'une union comme la somme des cardinaux.

4. (a) *Écrire $\mathcal{P}_2$ sous la forme $\bigcup_{t\in\mathcal{P}_2^+} \mathcal{A}_t$ en déterminant $\mathcal{P}_2^+$ et chaque ensemble $\mathcal{A}_t$ où t décrit $\mathcal{P}_2^+$.*

▶ On a d'après le résultat de la question 1(b) :

$$\mathcal{P}_2 = \{(1,1),(1,2),(2,1)\}.$$

Parmi ces trois fonctions, seules $(1,1)$ et $(1,2)$ sont croissantes, donc :

$$\boxed{\mathcal{P}_2^+ = \{(1,1),(1,2)\}}.$$

De plus $\Theta(1,1) = (1,1)$, $\Theta(1,2) = (1,2)$ et $\Theta(2,1) = (1,2)$. On en déduit que :

$$\boxed{\mathcal{A}_{(1,1)} = \{(1,1)\}} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathcal{A}_{(1,2)} = \{(1,2),(2,1)\}}.$$

On retrouve bien l'égalité $\mathcal{P}_2 = \bigcup_{t\in\mathcal{P}_2^+} \mathcal{A}_t$.

(b) *Même question pour $\mathcal{P}_3$.*

▶ On a d'après le résultat de la question 1(c) :

$$\mathcal{P}_3 = \left\{ \begin{array}{l} (1,1,1),(1,1,2),(1,1,3),(1,2,1),(1,2,2),(1,2,3),(1,3,1),(1,3,2), \\ (2,1,1),(2,1,2),(2,1,3),(2,2,1),(2,3,1),(3,1,1),(3,1,2),(3,2,1) \end{array} \right\}.$$

On en déduit que :

$$\boxed{\mathcal{P}_3^+ = \{(1,1,1),(1,1,2),(1,1,3),(1,2,2),(1,2,3)\}}$$

et que :

$$\boxed{\begin{array}{ll} \mathcal{A}_{(1,1,1)} &= \{(1,1,1)\} \\ \mathcal{A}_{(1,1,2)} &= \{(1,1,2),(1,2,1),(2,1,1)\} \\ \mathcal{A}_{(1,1,3)} &= \{(1,1,3),(1,3,1),(3,1,1)\} \\ \mathcal{A}_{(1,2,2)} &= \{(1,2,2),(2,1,2),(2,2,1)\} \\ \mathcal{A}_{(1,2,3)} &= \{(1,2,3),(1,3,2),(2,1,3),(2,3,1),(3,1,2),(3,2,1)\} \end{array}}.$$

On retrouve bien l'égalité $\mathcal{P}_3 = \bigcup_{t\in\mathcal{P}_3^+} \mathcal{A}_t$.

(c) *Dans les trois questions suivantes, on s'intéresse au cas $n = 4$.*

i. *À l'aide du résultat de la question 2, donner, sans justifier, les éléments de $\mathcal{P}_4^+$.*

▶

D'après le résultat de la question 2, une fonction croissante $t = (t_1, t_2, \dots, t_n) \in [\![1, n]\!]^n$ est de parcage si et seulement si $t_k \leqslant k$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ (car $\Theta(t) = (t_1, t_2, \dots, t_n)$). Cette question consiste donc à dresser la liste de tous les quadruplets $t = (t_1, t_2, t_3, t_4) \in [\![1, 4]\!]$ tels que $t_1 \leqslant t_2 \leqslant t_3 \leqslant t_4$ (afin que t soit croissant) et tels que :

$$t_1 \leqslant 1 \text{ donc } t_1 = 1, \qquad t_2 \leqslant 2 \text{ donc } t_2 \in \{1, 2\},$$
$$t_3 \leqslant 3 \text{ donc } t_3 \in [\![t_2, 3]\!] \text{ et } t_4 \leqslant 4 \text{ donc } t_4 \in [\![t_3, 4]\!].$$

On a :

$$\boxed{\mathcal{P}_4^+ = \left\{ \begin{array}{l} (1,1,1,1), (1,1,1,2), (1,1,1,3), (1,1,1,4), (1,1,2,2), (1,1,2,3), (1,1,2,4), \\ (1,1,3,3), (1,1,3,4), (1,2,2,2), (1,2,2,3), (1,2,2,4), (1,2,3,3), (1,2,3,4) \end{array} \right\}}.$$

ii. Pour chaque $t \in \mathcal{P}_4^+$, déterminer $\operatorname{card}(\mathcal{A}_t)$, c'est-à-dire le nombre d'anagrammes de t.

▶ En dénombrant les anagrammes de chacun des éléments de $\mathcal{P}_4^+$ obtenus à la question précédente, on a :

$$\boxed{\operatorname{card}(\mathcal{A}_{(1,1,1,1)}) = \underbrace{\binom{4}{4}}_{\text{placement des «1»}} = 1},$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \operatorname{card}(\mathcal{A}_{(1,1,1,2)}) = \operatorname{card}(\mathcal{A}_{(1,1,1,3)}) = \operatorname{card}(\mathcal{A}_{(1,1,1,4)}) \\ = \underbrace{\binom{4}{3}}_{\text{placement des «1»}} \times \underbrace{\binom{4-3}{1}}_{\text{placement du dernier chiffre}} = 4 \times 1 = 4 \end{array}},$$

$$\boxed{\operatorname{card}(\mathcal{A}_{(1,1,2,2)}) = \underbrace{\binom{4}{2}}_{\text{placement des «1»}} \times \underbrace{\binom{4-2}{2}}_{\text{placement des «2»}} = 6 \times 1 = 6},$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \operatorname{card}(\mathcal{A}_{(1,1,2,3)}) = \operatorname{card}(\mathcal{A}_{(1,1,2,4)}) \\ = \underbrace{\binom{4}{2}}_{\text{placement des «1»}} \times \underbrace{\binom{4-2}{1}}_{\text{placement du «2»}} \times \underbrace{\binom{4-2-1}{1}}_{\text{placement du dernier chiffre}} = 6 \times 2 \times 1 = 12 \end{array}},$$

$$\boxed{\operatorname{card}(\mathcal{A}_{(1,1,3,3)}) = \underbrace{\binom{4}{2}}_{\text{placement des «1»}} \times \underbrace{\binom{4-2}{2}}_{\text{placement des «3»}} = 6 \times 1 = 6},$$

$$\boxed{\operatorname{card}(\mathcal{A}_{(1,1,3,4)}) = \underbrace{\binom{4}{2}}_{\text{placement des «1»}} \times \underbrace{\binom{4-2}{1}}_{\text{placement du «3»}} \times \underbrace{\binom{4-2-1}{1}}_{\text{placement du «4»}} = 6 \times 2 \times 1 = 12},$$

$$\boxed{\operatorname{card}(\mathcal{A}_{(1,2,2,2)}) = \underbrace{\binom{4}{1}}_{\text{placement du «1»}} \times \underbrace{\binom{4-1}{3}}_{\text{placement des «2»}} = 4 \times 1 = 4},$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \operatorname{card}(\mathcal{A}_{(1,2,2,3)}) = \operatorname{card}(\mathcal{A}_{(1,2,2,4)}) \\ = \underbrace{\binom{4}{1}}_{\text{placement du «1»}} \times \underbrace{\binom{4-1}{2}}_{\text{placement des «2»}} \times \underbrace{\binom{4-1-2}{1}}_{\text{placement du dernier chiffre}} = 4 \times 3 \times 1 = 12 \end{array}},$$

$$\boxed{\mathrm{card}(\mathcal{A}_{(1,2,3,3)}) = \underbrace{\binom{4}{1}}_{\text{placement du «1»}} \times \underbrace{\binom{4-1}{1}}_{\text{placement du «2»}} \times \underbrace{\binom{4-1-1}{2}}_{\text{placement des «3»}} = 4 \times 3 \times 1 = 12},$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\mathrm{card}(\mathcal{A}_{(1,2,3,4)}) \\ = \underbrace{\binom{4}{1}}_{\text{placement du «1»}} \times \underbrace{\binom{4-1}{1}}_{\text{placement du «2»}} \times \underbrace{\binom{4-1-1}{1}}_{\text{placement du «3»}} \times \underbrace{\binom{4-1-1-1}{1}}_{\text{placement du «4»}} = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24\end{array}}.$$

On retrouve bien sûr le nombre de permutations de quatre éléments différents pour le dénombrement des anagrammes de $(1, 2, 3, 4)$.

iii. *En déduire que* $\mathrm{card}(\mathcal{P}_4) = 125$.

▶ D'après le résultat de la question 3(c), on a :

$$\mathrm{card}\,(\mathcal{P}_4) = \sum_{t \in \mathcal{P}_4^+} \mathrm{card}\,(\mathcal{A}_t)\,.$$

Pour calculer $\mathrm{card}(\mathcal{P}_4)$, il suffit donc de faire la somme de chacun des cardinaux obtenus à la question précédente :

$$\mathrm{card}\,(\mathcal{P}_4) = 1 + 3 \times 4 + 6 + 2 \times 12 + 6 + 12 + 4 + 2 \times 12 + 12 + 24 = \boxed{125}.$$

5. *Pour chaque $n \in \mathbb{N}^\star$ et chaque $(i, j) \in [\![1, n+1]\!]^2$, on définit les ensembles suivants :*

$$\mathcal{E}_n^i = \Big\{(t_1, t_2, \dots, t_n) \in \mathcal{P}_n^+ \mid t_n = i\Big\} \text{ et } \mathcal{F}_{n+1}^{i,j} = \Big\{(t_1, t_2, \dots, t_n, t_{n+1}) \in \mathcal{P}_{n+1}^+ \mid (t_n, t_{n+1}) = (i, j)\Big\}.$$

De plus, on note E_n^i le cardinal de $\mathcal{E}_n^i$.

(a) *Calculer E_n^1 et E_n^{n+1}.*

▶ $\mathcal{E}_n^1$ est l'ensemble des fonctions de parcages croissantes $(t_1, t_2, \dots, t_n)$ telles que $t_n = 1$. Puisque ces fonctions sont croissantes, on a $t_1 \leqslant t_2 \leqslant \cdots \leqslant t_n = 1$, donc $t_1 = t_2 = \cdots = t_n = 1$. Par conséquent, $(1, 1, \dots, 1)$ est le seul élément de $\mathcal{E}_n^1$ et $\boxed{E_n^1 = \mathrm{card}(\mathcal{E}_n^1) = 1}$.
$\mathcal{E}_n^{n+1}$ est l'ensemble des fonctions de parcages croissantes $(t_1, t_2, \dots, t_n)$ telles que $t_n = n+1$. Or l'ensemble $\mathcal{P}_n^+$ des fonctions de parcages croissantes est un sous-ensemble de $[\![1, n]\!]^n$, donc $t_n \in [\![1, n]\!]$. En particulier t_n ne peut pas être égal à $n + 1$. On en déduit que l'ensemble $\mathcal{E}_n^{n+1}$ est vide et que $\boxed{E_n^{n+1} = \mathrm{card}(\mathcal{E}_n^{n+1}) = 0}$.

(b) *Dans les quatre questions suivantes, on fixe $(i, j) \in [\![1, n+1]\!]^2$ tel que $i \leqslant j$ et on pose :*

$$\varphi : \mathcal{E}_n^i \to \mathcal{F}_{n+1}^{i,j},\ (t_1, t_2, \dots, t_n) \mapsto (t_1, t_2, \dots, t_n, j).$$

i. *Justifier que si $(t_1, t_2, \dots, t_n) \in \mathcal{P}_n^+$, alors $(t_1, t_2, \dots, t_n, \ell) \in \mathcal{P}_{n+1}^+$ pour tout $\ell \in [\![t_n, n+1]\!]$.*

▶ Soient $(t_1, t_2, \dots, t_n) \in \mathcal{P}_n^+$ et $\ell \in [\![t_n, n+1]\!]$. Donc $(t_1, t_2, \dots, t_n, \ell) \in [\![n+1]\!]^{n+1}$ est une fonction de parcage puisque les n premières vaches numérotées de 1 à n vont chacune occuper une stalle dont le numéro est compris entre 1 et n (car $(t_1, t_2, \dots, t_n)$ est une fonction de parcage), et la dernière vache de numéro $n + 1$ se déplacera jusqu'à la dernière stalle de numéro $n + 1$ qui est libre. De plus, $(t_1, t_2, \dots, t_n, \ell) \in [\![n+1]\!]^{n+1}$ est croissante puisque $t_1 \leqslant t_2 \leqslant \cdots \leqslant t_n$ (car $(t_1, t_2, \dots, t_n)$ est croissante) et $t_n \leqslant \ell$ (par hypothèse). Finalement, $\boxed{(t_1, t_2, \dots, t_n, \ell) \in \mathcal{P}_{n+1}^+}$.

ii. *En déduire que φ est bien définie, c'est-à-dire que $\varphi(t) \in \mathcal{F}_{n+1}^{i,j}$ pour tout $t \in \mathcal{E}_n^i$.*

▶ Soit $t = (t_1, t_2, \dots, t_n) \in \mathcal{E}_n^i$. Alors $\varphi(t) = (t_1, t_2, \dots, t_n, j)$. Pour prouver que $\varphi(t) \in \mathcal{F}_{n+1}^{i,j}$, il suffit de montrer que $(t_1, t_2, \dots, t_n, j) \in \mathcal{P}_{n+1}^+$ et que $(t_n, j) = (i, j)$ par définition de $\mathcal{F}_{n+1}^{i,j}$.

Or, par définition de $\mathcal{E}_n^i$, on a $(t_1, t_2, \dots, t_n) \in \mathcal{P}_n^+$ et $t_n = i$. Donc $(t_1, t_2, \dots, t_n, j) \in \mathcal{P}_{n+1}^+$ d'après le résultat de la question précédente (en posant $\ell = j \in [\![t_n, n+1]\!]$ car $j \in [\![1, n+1]\!]$, $i \leqslant j$ et $t_n = i$) et $(t_n, j) = (i, j)$. Finalement, on a bien montré que $\varphi(t) \in \mathcal{F}_{n+1}^{i,j}$ pour tout $t \in \mathcal{E}_n^i$, c'est-à-dire que $\boxed{\varphi \text{ est bien définie}}$.

iii. *Justifier que si $(t_1, t_2, \dots, t_n, t_{n+1}) \in \mathcal{P}_{n+1}^+$, alors $(t_1, t_2, \dots, t_n) \in \mathcal{P}_n^+$.*

► Soit $(t_1, t_2, \dots, t_n, t_{n+1}) \in \mathcal{P}_{n+1}^+$.

Attention : puisque $(t_1, t_2, \dots, t_n, t_{n+1}) \in [\![1, n+1]\!]^{n+1}$ on a seulement que $(t_1, t_2, \dots, t_n) \in [\![1, n+1]\!]^n$. La première chose à justifier est donc que $(t_1, t_2, \dots, t_n) \in [\![1, n]\!]^n$.

On suppose par l'absurde que $(t_1, t_2, \dots, t_n) \notin [\![1, n]\!]^n$ alors au moins une de ces composantes est égale à $n+1$ et puisque $t_1 \leqslant t_2 \leqslant \cdots \leqslant t_n \leqslant t_{n+1}$ (car $(t_1, t_2, \dots, t_n, t_{n+1})$ est croissante), on en déduit que $t_n = t_{n+1} = n+1$. Or ceci est absurde car sinon les deux dernières vaches de numéro n et $n+1$ se déplaceront jusqu'à la dernière stalle de numéro $n+1$ et la dernière vache de numéro $n+1$ ne trouvera pas de stalles libres. Par conséquent $(t_1, t_2, \dots, t_n) \in [\![1, n]\!]^n$. De plus $(t_1, t_2, \dots, t_n)$ est une fonction de parcage puisque $(t_1, t_2, \dots, t_n, t_{n+1})$ est une fonction de parcage et le raisonnement précédent prouve que la dernière stalle de numéro $n+1$ sera occupée par la dernière vache de numéro $n+1$ avant le début de la traite (donc les n premières vaches numérotées de 1 à n vont chacune occuper une stalle dont le numéro est compris entre 1 et n). Enfin $(t_1, t_2, \dots, t_n)$ puisque $t_1 \leqslant t_2 \leqslant \cdots \leqslant t_n \leqslant t_{n+1}$ (car $(t_1, t_2, \dots, t_n, t_{n+1})$ est croissante). Finalement, $\boxed{(t_1, t_2, \dots, t_n) \in \mathcal{P}_n^+}$.

iv. *Montrer que $\varphi : \mathcal{E}_n^i \to \mathcal{F}_{n+1}^{i,j}$ est bijective et que $\operatorname{card}\left(\mathcal{F}_{n+1}^{i,j}\right) = E_n^i$.*

► Injectivité. Soient $t = (t_1, t_2, \dots, t_n) \in \mathcal{E}_n^i$ et $t' = (t'_1, t'_2, \dots, t'_n) \in \mathcal{E}_n^i$ tels que $\varphi(t) = \varphi(t')$. Alors :

$$(t_1, t_2, \dots, t_n, j) = \varphi(t_1, t_2, \dots, t_n) = \varphi(t) = \varphi(t') = \varphi(t'_1, t'_2, \dots, t'_n) = (t'_1, t'_2, \dots, t'_n, j).$$

Par identification des composantes, on en déduit que :

$$t_1 = t'_1, \quad t_2 = t'_2, \quad \dots, \quad t_n = t'_n \quad \text{et} \quad j = j.$$

En particulier, on obtient que $t = (t_1, t_2, \dots, t_n) = (t'_1, t'_2, \dots, t'_n) = t'$ et donc φ est injective.
Surjectivité. On fixe $t = (t_1, t_2, \dots, t_n, t_{n+1}) \in \mathcal{F}_{n+1}^{i,j}$ et on cherche $s =\in \mathcal{E}_n^i$ tel que $\varphi(s) = t$. On pose $s = (t_1, t_2, \dots, t_n)$. Par définition de $\mathcal{F}_{n+1}^{i,j}$, on a $(t_1, t_2, \dots, t_n, t_{n+1}) \in \mathcal{P}_{n+1}^+$ et $(t_n, t_{n+1}) = (i, j)$. Donc $(t_1, t_2, \dots, t_n) \in \mathcal{P}_n^+$ d'après le résultat de la question précédente et $t_n = i$. Par conséquent $s = (t_1, t_2, \dots, t_n) \in \mathcal{E}_n^i$ par définition de $\mathcal{E}_n^i$. De plus :

$$\varphi(s) = \varphi(t_1, t_2, \dots, t_n) = (t_1, t_2, \dots, t_n, j) = (t_1, t_2, \dots, t_n, t_{n+1}) = t \quad \text{car } t_{n+1} = j.$$

Ainsi, on a bien trouvé $s =\in \mathcal{E}_n^i$ tel que $\varphi(s) = t$, donc φ est surjective.
Conclusion. Finalement $\boxed{\text{l'application } \varphi : \mathcal{E}_n^i \to \mathcal{F}_{n+1}^{i,j} \text{ est bijective}}$ et par conséquent :

$$\boxed{E_n^i = \operatorname{card}\left(E_n^i\right) = \operatorname{card}\left(\mathcal{F}_{n+1}^{i,j}\right)}.$$

(c) *Pour cette question, on fixe $j \in [\![1, n+1]\!]$. Prouver que $\bigcup_{i=1}^{j} \mathcal{F}_{n+1}^{i,j} = \mathcal{E}_{n+1}^j$ et en déduire que*

$$E_{n+1}^j = \sum_{i=1}^{j} E_n^i.$$

► 1re inclusion. Soit $t = (t_1, t_2, \dots, t_n, t_{n+1}) \in \bigcup_{i=1}^{j} \mathcal{F}_{n+1}^{i,j}$. Donc il existe au moins un $i \in [\![1, j]\!]$ tel que $t \in \mathcal{F}_{n+1}^{i,j}$. Par définition de $t \in \mathcal{F}_{n+1}^{i,j}$, on a $(t_1, t_2, \dots, t_n, t_{n+1}) \in \mathcal{P}_{n+1}^+$ et $(t_n, t_{n+1}) = (i, j)$.

En particulier, on a $(t_1, t_2, \dots, t_n, t_{n+1}) \in \mathcal{P}^+_{n+1}$ et $t_{n+1} = j$, donc $t \in \mathcal{E}^j_{n+1}$ par définition de $\mathcal{E}^j_{n+1}$. Puisque ceci est vrai pour tout $t \in \bigcup_{i=1}^j \mathcal{F}^{i,j}_{n+1}$, on en déduit que $\bigcup_{i=1}^j \mathcal{F}^{i,j}_{n+1} \subset \mathcal{E}^j_{n+1}$.
<u>2e inclusion.</u> Soit $t = (t_1, t_2, \dots, t_n, t_{n+1}) \in \mathcal{E}^j_{n+1}$. Par définition de $\mathcal{E}^j_{n+1}$, on a $(t_1, t_2, \dots, t_n, t_{n+1}) \in \mathcal{P}^+_{n+1}$ et $t_{n+1} = j$. On pose $i = t_n$. Puisque t est croissante, on a $i = t_n \leqslant t_{n+1} = j$ donc $i \in [\![1, j]\!]$. De plus $t \in \mathcal{F}^{i,j}_{n+1}$ par définition de $\mathcal{F}^{i,j}_{n+1}$. Par conséquent $t \in \bigcup_{i=1}^j \mathcal{F}^{i,j}_{n+1}$. Puisque ceci est vrai pour tout $t \in \mathcal{E}^j_{n+1}$, on en déduit que $\mathcal{E}^j_{n+1} \subset \bigcup_{i=1}^j \mathcal{F}^{i,j}_{n+1}$.
<u>Conclusion.</u> Par double inclusion, on a démontré que :

$$\boxed{\bigcup_{i=1}^{j} \mathcal{F}^{i,j}_{n+1} = \mathcal{E}^j_{n+1}.}$$

De plus, les ensembles de cette union sont deux à deux disjoints car s'il existe au moins un élément $t = (t_1, t_2, \dots, t_n, t_{n+1})$ dans l'intersection $\mathcal{F}^{i,j}_{n+1} \cap \mathcal{F}^{i',j}_{n+1}$ où $(i, i') \in [\![1, j]\!]^2$, alors $t_n = i = i'$. On en déduit que :

$$E^j_{n+1} = \operatorname{card}\left(\mathcal{E}^j_{n+1}\right) = \operatorname{card}\left(\bigcup_{i=1}^{j} \mathcal{F}^{i,j}_{n+1}\right) = \sum_{i=1}^{j} \operatorname{card}\left(\mathcal{F}^{i,j}_{n+1}\right).$$

Encore une fois, n'oubliez pas de justifier que les ensemble de l'union sont deux à deux disjoints pour utiliser la formule permettant de calculer le cardinal d'une union comme la somme des cardinaux.

Enfin, on obtient à l'aide du résultat de la question précédente :

$$\boxed{E^j_{n+1} = \sum_{i=1}^{j} E^i_n}.$$

(d) Montrer que

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, \ \sum_{\ell=0}^{p} \binom{q+\ell}{\ell} = \binom{p+q+1}{p}$$

(indication : utiliser après l'avoir justifié que $\binom{q+\ell}{\ell} = \binom{q+\ell+1}{\ell} - \binom{q+\ell}{\ell-1}$ pour tout $\ell \in \mathbb{Z}$).

► Soit $(p, q) \in \mathbb{N}^2$. D'après la formule de Pascal on a pour tout $\ell \in \mathbb{Z}$:

$$\binom{q+\ell+1}{\ell} = \binom{q+\ell}{\ell} + \binom{q+\ell}{\ell-1} \quad \text{donc} \quad \binom{q+\ell}{\ell} = \binom{q+\ell+1}{\ell} - \binom{q+\ell}{\ell-1}.$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}
&\sum_{\ell=0}^{p} \binom{q+\ell}{\ell} \\
&= \sum_{\ell=0}^{p} \left[\binom{q+\ell+1}{\ell} - \binom{q+\ell}{\ell-1}\right] \\
&= \left[\binom{q+1}{0} - \binom{q}{-1}\right] + \left[\binom{q+2}{1} - \binom{q+1}{0}\right] + \dots + \left[\binom{q+p+1}{p} - \binom{q+p}{p-1}\right] \\
&= -\binom{q}{-1} + \binom{q+p+1}{p} \quad \text{(en reconnaissant une somme télescopique)} \\
&= \boxed{\binom{q+p+1}{p}} \quad \left(\text{car } \binom{q}{\ell} = 0 \text{ si } \ell < 0\right).
\end{aligned}$$

(e) *À l'aide des résultats précédents, démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ on a :*

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ E_n^i = \binom{n+i-2}{i-1} - \binom{n+i-2}{i-2}.$$

▶

Il faut reconnaître une récurrence forte ici.

Initialisation. Soit $i \in [\![1, 1]\!]$ donc $i = 1$. D'après le résultat de la question 5(a) on a $E_1^1 = 1$. De plus :

$$\binom{1+1-2}{1-1} - \binom{1+1-2}{1-2} = \binom{0}{0} - \binom{0}{-1} = 1 - 0 = 1.$$

Donc le résultat est vrai pour $n = 1$.

Hérédité. On suppose le résultat vrai pour $n \in \mathbb{N}^\star$ fixé. Soit $i \in [\![1, n+1]\!]$. On a d'après le résultat de la question 5(c) :

$$E_{n+1}^i = \sum_{k=1}^{i} E_n^k.$$

Et on a par hypothèse de récurrence :

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ E_n^k = \binom{n+k-2}{k-1} - \binom{n+k-2}{k-2}.$$

1^er^ cas : $i \in [\![1, n]\!]$. Alors pour tout $k \in [\![1, i]\!]$ on a $k \in [\![1, n]\!]$ et donc :

$$\begin{aligned}
E_{n+1}^i &= \sum_{k=1}^{i} \left[\binom{n+k-2}{k-1} - \binom{n+k-2}{k-2}\right] \\
&= \sum_{k=1}^{i} \binom{n+k-2}{k-1} - \sum_{k=1}^{i} \binom{n+k-2}{k-2} \quad \text{(par linéarité de la somme)} \\
&= \sum_{\ell=0}^{i-1} \binom{n+\ell-1}{\ell} - \sum_{\ell'=-1}^{i-2} \binom{n+\ell'}{\ell'} \quad \text{(en posant } \ell = k-1 \text{ et } \ell' = k-2\text{)} \\
&= \underbrace{\sum_{\ell=0}^{i-1} \binom{(n-1)+\ell}{\ell}}_{p=i-1 \text{ et } q=n-1} - \underbrace{\sum_{\ell'=0}^{i-2} \binom{n+\ell'}{\ell'}}_{p=i-2 \text{ et } q=n} - \underbrace{\binom{n-1}{-1}}_{=0} \\
&\quad \text{on reconnaît la somme calculée à la question précédente} \\
&= \binom{(n-1)+(i-1)+1}{i-1} - \binom{n+(i-2)+1}{i-2} \\
&= \binom{(n+1)+i-2}{i-1} - \binom{(n+1)+i-2}{i-2}.
\end{aligned}$$

1^er^ cas : $i = n+1$. Alors :

$$E_{n+1}^{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} E_n^k = \sum_{k=1}^{n} E_n^k + E_n^{n+1}.$$

Or $E_n^{n+1} = 0$ d'après le résultat de la question 5(a). Donc :

$$\begin{aligned}
E_{n+1}^{n+1} &= \sum_{k=1}^{n} E_n^k = E_{n+1}^n \quad \text{(d'après le résultat de la question 5(c))} \\
&= \binom{(n+1)+n-2}{n-1} - \binom{(n+1)+n-2}{n-2} \quad \text{(en utilisant le 1}^{\text{er}}\text{ cas pour } i = n\text{)} \\
&= \binom{2n-1}{n-1} - \binom{2n-1}{n-2}.
\end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}
&\binom{(n+1)+(n+1)-2}{(n+1)-1} - \binom{(n+1)+(n+1)-2}{(n+1)-2} \\
&= \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} \\
&= \left[\binom{2n-1}{n} + \binom{2n-1}{n-1}\right] - \left[\binom{2n-1}{n-1} + \binom{2n-1}{n-2}\right] \quad \text{(d'après la formule de Pascal)} \\
&= \binom{2n-1}{n} - \binom{2n-1}{n-2} \\
&= \binom{2n-1}{(2n-1)-n} - \binom{2n-1}{n-2} \quad \text{(par symétrie des coefficients binomiaux)} \\
&= \binom{n-1}{n} - \binom{2n-1}{n-2}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient :

$$E_{n+1}^{n+1} = \binom{(n+1)+(n+1)-2}{(n+1)-1} - \binom{(n+1)+(n+1)-2}{(n+1)-2}.$$

Conclusion de la disjonction. On a montré dans tous les cas que :

$$E_{n+1}^{i} = \binom{(n+1)+i-2}{i-1} - \binom{(n+1)+i-2}{i-2}.$$

Et ceci est vrai pour tout $i \in [\![1, n+1]\!]$. Par conséquent, le résultat est vrai au rang $n+1$ dès qu'il est vrai au rang n.
Conclusion de la récurrence. D'après le principe de récurrence, on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad \boxed{\forall i \in [\![1, n]\!],\ E_n^i = \binom{n+i-2}{i-1} - \binom{n+i-2}{i-2}}.$$

(f) Justifier brièvement que $\mathcal{P}_n^+$ est égal à l'union disjointe des $\mathcal{E}_n^1, \mathcal{E}_n^2, \ldots, \mathcal{E}_n^n$, puis en déduire que

$$\operatorname{card}\left(\mathcal{P}_n^+\right) = \sum_{i=1}^{n} E_n^i = \binom{2n-1}{n-1} - \binom{2n-1}{n-2}.$$

► En raisonnant comme à la question 5(c), on peut démontrer par double inclusion que

$$\boxed{\bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{E}_n^i = \mathcal{P}_n^+}.$$

De plus, comme à la question 5(c), les ensembles de cette union sont deux à deux disjoints. On en déduit que :

$$\operatorname{card}\left(\mathcal{P}_n^+\right) = \operatorname{card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{E}_n^i\right) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{card}\left(\mathcal{E}_n^i\right) = \sum_{i=1}^{n} E_n^i.$$

Puis on obtient en utilisant le résultat de la question précédente :

$$\begin{aligned}
\operatorname{card}\left(\mathcal{P}_n^+\right) &= \sum_{i=1}^{n} E_n^i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left[\binom{n+i-2}{i-1} - \binom{n+i-2}{i-2} \right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \binom{n+i-2}{i-1} - \sum_{i=1}^{n} \binom{n+i-2}{i-2} \quad \text{(par linéarité de la somme)} \\
&= \sum_{\ell=0}^{n-1} \binom{n+\ell-1}{\ell} - \sum_{\ell'=-1}^{n-2} \binom{n+\ell'}{\ell'} \quad \text{(en posant } \ell = i-1 \text{ et } \ell' = i-2\text{)} \\
&= \underbrace{\sum_{\ell=0}^{n-1} \binom{(n-1)+\ell}{\ell}}_{p=n-1 \text{ et } q=n-1} - \underbrace{\sum_{\ell'=0}^{n-2} \binom{n+\ell'}{\ell'}}_{p=n-2 \text{ et } q=n} - \underbrace{\binom{n-1}{-1}}_{=0}
\end{aligned}$$

on reconnaît la somme calculée à la question 5(d)

$$\begin{aligned}
&= \binom{(n-1)+(n-1)+1}{n-1} - \binom{n+(n-2)+1}{n-2} \\
&= \boxed{\binom{2n-1}{n-1} - \binom{2n-1}{n-2}}.
\end{aligned}$$

(g) Conclure que

$$\boxed{\operatorname{card}\left(\mathcal{P}_n^+\right) = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}}.$$

▶ D'après le résultat de la question précédente et la définition des coefficients binomiaux, on a :

$$\begin{aligned}
\operatorname{card}\left(\mathcal{P}_n^+\right) &= \binom{2n-1}{n-1} - \binom{2n-1}{n-2} \\
&= \frac{(2n-1)!}{(n-1)!((2n-1)-(n-1))!} - \frac{(2n-1)!}{(n-2)!((2n-1)-(n-2))!} \\
&= \frac{(2n-1)!}{(n-1)!n!} - \frac{(2n-1)!}{(n-2)!(n+1)!} \\
&= \frac{(n+1)\times(2n-1)! - (n-1)\times(2n-1)!}{(n-1)!(n+1)!} = \frac{2\times(2n-1)!}{(n-1)!(n+1)!}.
\end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} &= \frac{1}{n+1} \times \frac{(2n)!}{n!(2n-n)!} = \frac{1}{n+1} \times \frac{(2n)!}{n!n!} \\
&= \frac{2n\times(2n-1)!}{(n+1)\times n!(n-1)!\times n} = \frac{2\times(2n-1)!}{(n+1)!(n-1)!}.
\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\boxed{\operatorname{card}\left(\mathcal{P}_n^+\right) = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}}.$$

6. (a) À l'aide du résultat précédent, déterminer le nombre d'éléments de $\mathcal{P}_5^+$.

▶ Pour $n = 5$, on a :

$$\operatorname{card}\left(\mathcal{P}_5^+\right) = \frac{1}{6}\binom{10}{5} = \frac{252}{6} = \boxed{42}.$$

Pour calculer la valeur du coefficient binomial $\binom{10}{5}$, on peut soit dresser rapidement le triangle de Pascal jusqu'à la 10e ligne, soit (méthode encore plus rapide) utiliser la définition avec les factoriels :

$$\binom{10}{5} = \frac{10!}{5!5!} = \frac{6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10}{2 \times 3 \times 4 \times 5} = 7 \times 4 \times 9 = 6 \times 42.$$

(b) *En s'inspirant de la question 4(c), expliquer comment on pourrait déterminer* $\mathrm{card}(\mathcal{P}_5)$.

▶ D'après le résultat de la question 3(c), on a :

$$\mathrm{card}\left(\mathcal{P}_5\right) = \sum_{t \in \mathcal{P}_5^+} \mathrm{card}\left(\mathcal{A}_t\right).$$

Pour calculer $\mathrm{card}(\mathcal{P}_5)$, il suffit donc de calculer $\mathrm{card}(\mathcal{A}_t)$ pour chacune des 42 fonctions de parcage croissantes $t \in \mathcal{P}_5^+$, c'est-à-dire le nombre d'anagrammes de chacune des 42 fonctions de parcage croissantes, puis de faire la somme de chacun de ces cardinaux.

Pour les curieux, on obtient $\mathrm{card}(\mathcal{P}_5) = 1296$. *En fait, on peut démontrer avec un argument non présenté dans ce sujet que*

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad \boxed{\mathrm{card}\left(\mathcal{P}_n\right) = (n+1)^{n-1}}.$$

DS n° 4 de mathématiques et d'informatique

durée : 4 heures

Exercice 1

On écrira toutes les fonctions demandées en langage Python. Les trois questions sont indépendantes.

1. Écrire la fonction `recherche(L,elem)` qui renvoie :
   - `-1` si l'élément `elem` n'est pas dans la liste `L`,
   - l'indice de l'élément `elem` dans la liste `L` sinon.
2. On considère la fonction mystère suivante :

```
def mystere(L,d,f) :
    ind = d
    for i in range(d,f) :
        if L[i] < L[ind] :
            ind = i
    return ind
```

   (a) Donner ce que renvoie cette fonction lorsqu'elle prend en arguments le tableau `L=[5,9,2,5,1,12,13]` ainsi que les valeurs : `d=0` et `f=7`, puis `d=0` et `f=4`.

   (b) Expliquer ce que fait cette fonction mystère.

3. Écrire la fonction `triSelection(L)` qui trie la liste `L` de la manière suivante :
   - rechercher le plus petit élément du tableau
     et l'échanger avec l'élément d'indice 0 (le tableau est désormais trié jusqu'à l'indice 0),
   - rechercher le plus petit élément du tableau à partir de l'indice 1
     et l'échanger avec l'élément d'indice 1 (le tableau est désormais trié jusqu'à l'indice 1),
   - rechercher le plus petit élément du tableau à partir de l'indice 2
     et l'échanger avec l'élément d'indice 2 (le tableau est désormais trié jusqu'à l'indice 2),
   - etc.,
   - continuer de cette façon jusqu'à ce que le tableau soit entièrement trié.

   Indication : on pourra utiliser la fonction mystère de l'exercice 2.

Exercice 2

On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 0 & -4 \\ -4 & 2 & 2 \\ 18 & 0 & -7 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

On propose de calculer les puissances successives de A par trois méthodes différentes et indépendantes.

1. (Binôme de Newton.) On pose $B = A - 2\mathrm{I}_3$ où I_3 est la matrice identité d'ordre 3.

   (a) Calculer B^2 puis exprimer B^k en fonction de B et $k \in \mathbb{N}^\star$.

   (b) En déduire une expression de A^n en fonction de A, I_3 et $n \in \mathbb{N}$.

2. (Diagonalisation.) On pose

$$P = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

   (a) Montrer que P est inversible et calculer son inverse.

   (b) Calculer $D = PAP^{-1}$.

(c) En déduire une expression de A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

(d) Justifier brièvement que D puis A sont inversibles.

(e) Exprimer A^{-n} en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

3. (Polynôme annulateur.) On pose $f : x \mapsto x^2 - 3x + 2$.

(a) Montrer que $f(A) = 0_3$ où 0_3 est la matrice carrée nulle d'ordre 3.

(b) Prouver par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $(x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$ tel que $A^n = x_n A + y_n \mathrm{I}_3$.

(c) Montrer que les suites $(x_n)_{n\geqslant 0}$ et $(y_n)_{n\geqslant 0}$ sont récurrentes linéaires d'ordre 2.

(d) En déduire des expressions de x_n et y_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$, puis de A^n en fonction de A, I_3 et $n \in \mathbb{N}$.

(e) À l'aide de la relation $f(A) = 0_3$, justifier que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A et I_3.

(f) Conjecturer une expression de A^{-n} en fonction de A, I_3 et $n \in \mathbb{N}$ puis démontrer cette conjecture.

Exercice 3

On propose de résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) - f(x) = \frac{x^3 + 3x + 3}{x^2 + 2x + 2} e^x + \cos(x) \tag{E}$$

où la fonction inconnue f est supposée dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Dans cette question, on cherche une solution particulière f_1 de l'équation différentielle suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) - f(x) = h(x) e^x \quad \text{où} \quad h(x) = \frac{x^3 + 3x + 3}{x^2 + 2x + 2} \tag{E1}$$

de la forme $f_1 : x \mapsto g_1(x) e^x$ où g_1 est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

(a) Montrer que f_1 est solution de (E1) si et seulement si g_1 est une primitive de h.

(b) Determiner un quadruplet $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = ax + b + \frac{c(x+1)}{x^2 + 2x + 2} + \frac{d}{x^2 + 2x + 2}.$$

(c) Déterminer une primitive de la fonction $x \mapsto (x+1)/(x^2 + 2x + 2)$.

(d) Déterminer une primitive de la fonction $x \mapsto 1/(x^2 + 2x + 2)$ à l'aide d'un changement de variable.

(e) En déduire une solution particulière f_1 de (E1).

2. On note g_2 une primitive de la fonction $x \mapsto \cos(x) e^{-x}$.

(a) On fixe $x \in \mathbb{R}$ pour cette question. Exprimer $g_2(x)$ en fonction de $g_2(x)$ à l'aide de primitivations par parties (on choisira toutes les constantes d'intégration égales à 0).

(b) En déduire une expression de $g_2(x)$ en fonction de $x \in \mathbb{R}$.

(c) En s'inspirant de la question 1, déterminer une solution particulière f_2 de l'équation différentielle suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) - f(x) = \cos(x). \tag{E2}$$

3. Conclure.

Problème

On appelle suite des moyennes de Cesàro (du nom du mathématicien italien Ernesto Cesàro, 1859-1906) d'une suite réelle $(u_n)_{n\geqslant 1}$, la suite $(\sigma_n)_{n\geqslant 1}$ définie par :

$$\forall n \geqslant 1, \quad \sigma_n = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k.$$

Le but de ce problème est de démontrer le lemme de Cesàro énoncé ci-dessous et d'étudier sa réciproque.

> Si une suite réelle $(u_n)_{n\geqslant 1}$ admet une limite (finie ou infinie) alors la suite $(\sigma_n)_{n\geqslant 1}$ de ses moyennes de Cesàro admet la même limite.

A) Cas de convergence. On suppose dans cette partie que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$.

1. Pour cette question, on fixe un réel $\varepsilon > 0$.
   (a) Justifier l'existence d'un entier $N_1 \geqslant 1$ tel que pour tout $k \geqslant N_1$ on ait $|u_k - \ell| \leqslant \varepsilon/2$.
   (b) Montrer que pour tout $n \geqslant N_1$ on a :
   $$|\sigma_n - \ell| = \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(u_k - \ell)\right| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_1-1}|u_k - \ell| + \left(\frac{n - N_1 + 1}{n}\right)\frac{\varepsilon}{2}.$$
   (c) Justifier l'existence d'un entier $N_2 \geqslant 1$ tel que pour tout $n \geqslant N_2$ on ait $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_1-1}|u_k - \ell| \leqslant \varepsilon/2$.
   (d) En déduire l'existence d'un entier $N \geqslant 1$ tel que pour tout $n \geqslant N$ on ait $|\sigma_n - \ell| \leqslant \varepsilon$.
   (e) Conclure.

B) Cas de divergence de 1re espèce. On suppose dans cette partie que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ tend vers $+\infty$.

2. Pour cette question, on fixe un réel $A \in \mathbb{R}$ et on pose $B = \max\{1, A\}$ de sorte que $B > 0$ et $B \geqslant A$.
   (a) Justifier l'existence d'un entier $N_0 \geqslant 1$ tel que pour tout $k \geqslant N_0$ on ait $u_k \geqslant 2B$.
   (b) Montrer que pour tout $n \geqslant N_0$ on a :
   $$\sigma_n \geqslant C_n \quad \text{où} \quad C_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_0-1} u_k + \left(\frac{n - N_0 + 1}{n}\right)2B.$$
   (c) Déterminer la limite de C_n quand n tend vers $+\infty$.
   (d) En déduire l'existence d'un entier $N \geqslant 1$ tel que pour tout $n \geqslant N$ on ait $C_n \geqslant B$.
   (e) Conclure.
3. Que se passe-t-il si $(u_n)_{n\geqslant 1}$ tend vers $-\infty$?

C) Réciproque.

4. En étudiant l'exemple $(u_n = (-1)^n)_{n\geqslant 1}$, discuter de la réciproque du lemme de Cesàro.
5. Pour cette question, on suppose que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est croisante.
   (a) Montrer que $(\sigma_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante.
   (b) Montrer que $\sigma_n \leqslant u_n \leqslant \frac{2n-1}{n}\sigma_{2n-1} - \frac{n-1}{n}\sigma_{n-1}$ pour tout $n \geqslant 2$.
   (c) En déduire que la réciproque du lemme de Cesàro est vérifiée lorsque $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante (on distinguera le cas où la suite $(\sigma_n)_{\geqslant 1}$ n'est pas majorée du cas où elle l'est).
6. Que se passe-t-il si $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante ?

Corrigé du DS n° 4 de mathématiques et d'informatique

Exercice 1

On écrira toutes les fonctions demandées en langage Python. Les trois questions sont indépendantes.

1. *Écrire la fonction* `recherche(L,elem)` *qui renvoie :*
   - `-1` *si l'élément* `elem` *n'est pas dans la liste* `L`,
   - *l'indice de l'élément* `elem` *dans la liste* `L` *sinon.*

   ▶ Par exemple :

```
def recherche(L,elem) :
    i = 0
    longueur = len(L)
    while i < longueur and L[i] != elem :
        i = i+1
    if i == longueur :
        return -1
    else :
        return i
```

2. *On considère la fonction mystère suivante :*

```
def mystere(L,d,f) :
    ind = d
    for i in range(d,f) :
        if L[i] < L[ind] :
            ind = i
    return ind
```

   (a) *Donner ce que renvoie cette fonction lorsqu'elle prend en arguments le tableau* `L=[5,9,2,5,1,12,13]` *ainsi que les valeurs :* `d=0` *et* `f=7`, *puis* `d=0` *et* `f=4`.

   ▶
   — Pour `d=0` et `f=7`, la fonction mystère renvoie 4 qui correspond à l'indice du minimum des éléments du tableau (qui vaut 1),
   — Pour `d=0` et `f=4`, la fonction mystère renvoie 2 qui correspond à l'indice du minimum des quatre premiers éléments du tableau (qui vaut 2).

   (b) *Expliquer ce que fait cette fonction mystère.*

   ▶ La fonction mystère compare un par un chaque élément de la liste `L[d:f]` avec le plus petit élément qu'elle a trouvé. Puis elle renvoie le premier indice du minimum de `L[d:f]`.

3. *Écrire la fonction* `triSelection(L)` *qui trie la liste* `L` *de la manière suivante :*
   - *rechercher le plus petit élément du tableau et l'échanger avec l'élément d'indice 0 (le tableau est désormais trié jusqu'à l'indice 0),*
   - *rechercher le plus petit élément du tableau à partir de l'indice 1 et l'échanger avec l'élément d'indice 1 (le tableau est désormais trié jusqu'à l'indice 1),*
   - *rechercher le plus petit élément du tableau à partir de l'indice 2 et l'échanger avec l'élément d'indice 2 (le tableau est désormais trié jusqu'à l'indice 2),*
   - *etc.,*
   - *continuer de cette façon jusqu'à ce que le tableau soit entièrement trié.*

Indication : on pourra utiliser la fonction mystère de l'exercice 2.

▶ Par exemple :

```
def triSelection(L) :
    i = 0
    n = len(L)
    while i < n :
        k = mystere(L,i,n)
        if k != i :
            z = L[i]
            L[i] = L[k]
            L[k] = z
        i = i+1
```

Exercice 2

On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 0 & -4 \\ -4 & 2 & 2 \\ 18 & 0 & -7 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

On propose de calculer les puissances successives de A par trois méthodes différentes et indépendantes.

1. *(Binôme de Newton.) On pose $B = A - 2\mathrm{I}_3$ où I_3 est la matrice identité d'ordre 3.*

   (a) *Calculer B^2 puis exprimer B^k en fonction de B et $k \in \mathbb{N}^\star$.*

   ▶ On a :

$$B = A - 2\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 10 & 0 & -4 \\ -4 & 2 & 2 \\ 18 & 0 & -7 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & -4 \\ -4 & 0 & 2 \\ 18 & 0 & -9 \end{pmatrix}$$

$$\text{et} \quad B^2 = \begin{pmatrix} 8 & 0 & -4 \\ -4 & 0 & 2 \\ 18 & 0 & -9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & 0 & -4 \\ -4 & 0 & 2 \\ 18 & 0 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 64-72 & 0 & -32+36 \\ -32+36 & 0 & 16-18 \\ 144-162 & 0 & -72+81 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & -2 \\ -18 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

donc $\boxed{B^2 = -B}$. On en déduit que $B^3 = B \times B^2 = -B^2 = B$, $B^4 = B \times B^3 = B^2 = -B$, etc. Par conséquent, on conjecture que $B^k = (-1)^{k-1}B$ pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$ ce qu'on va démontrer par récurrence.

Attention au signe : il s'agit de $(-1)^{k-1}$ (ou $(-1)^{k+1}$ qui revient au même) et non de $(-1)^k$. De plus, n'oubliez pas de démontrer précisément votre conjecture par récurrence.

Initialisation : pour $k = 1$ on a bien $B^1 = B = (-1)^0 B = (-1)^{1-1}B$.
Hérédité : on suppose que $B^k = (-1)^{k-1}B$ pour un entier $k \geqslant 1$ fixé. Alors on a :

$$B^{k+1} = B \times B^k = B \times (-1)^{k-1}B = (-1)^{k-1}B^2 = -(-1)^{k-1}B = (-1)^k B = (-1)^{(k+1)-1}B.$$

Donc la relation est vérifiée au rang $k+1$ dès qu'elle est vérifiée au rang k. Et ceci est vrai pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$.
Conclusion : d'après le principe de récurrence, on a bien démontré que :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^\star,\ B^k = (-1)^{k-1}B}.$$

   (b) *En déduire une expression de A^n en fonction de A, I_3 et $n \in \mathbb{N}$.*

   ▶ Par définition de B, on a $A = B + 2\mathrm{I}_3$. Or les matrices B et $2\mathrm{I}_3$ commutent car :

$$B \times (2\mathrm{I}_3) = 2(B\mathrm{I}_3) = 2B = 2(\mathrm{I}_3 B) = (2\mathrm{I}_3) \times B.$$

N'oubliez pas de justifier que les matrices commutent avant d'appliquer la formule du binôme de Newton pour les matrices.

D'après la formule du binôme de Newton, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
A^n &= (B+2\mathrm{I}_3)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k (2\mathrm{I}_3)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} B^k = \binom{n}{0} 2^{n-0} B^0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} B^k \\
&= 2^n \mathrm{I}_3 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} (-1)^{k-1} B \quad \text{d'après le résultat de la question précédente} \\
&= 2^n \mathrm{I}_3 + \left(-\binom{n}{0} 2^{n-0} (-1)^{0-1} - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} (-1)^k \right) B = 2^n \mathrm{I}_3 + (2^n - (-1+2)^n) B \\
&= 2^n \mathrm{I}_3 + (2^n - 1)(A - 2\mathrm{I}_3) = \boxed{(2^n-1)A + (2-2^n)\mathrm{I}_3}.
\end{aligned}$$

2. *(Diagonalisation.) On pose*

$$P = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

(a) *Montrer que P est inversible et calculer son inverse.*

► On utilise la méthode du pivot de Gauss :

$$P = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftrightarrow L_3 \\ \\ L_3 \leftrightarrow L_1 \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & -1 \\ 0 & -9 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 5L_1 \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \; L_3 \leftarrow -L_3 + 2L_2 \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftrightarrow L_3 \\ L_3 \leftrightarrow L_2 \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \; L_3 \leftarrow -L_3 - 4L_2 \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & -9 & -2 \end{pmatrix}.$$

On obtient une matrice échelonnée de rang 3. Donc le rang de P est maximal et par conséquent $\boxed{P \text{ est inversible}}$. En poursuivant la méthode du pivot de Gauss, on obtient :

$$\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \; L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \qquad \boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & -9 & -2 \end{pmatrix}}.$$

(b) *Calculer $D = PAP^{-1}$.*

▶ On a :

$$D = PAP^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 0 & -4 \\ -4 & 2 & 2 \\ 18 & 0 & -7 \end{pmatrix} P^{-1}$$
$$= \begin{pmatrix} 50-4-36 & 2 & -20+2+14 \\ 20-18 & 0 & -8+7 \\ 10-8 & 4 & -4+4 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 10 & 2 & -4 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -4 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & -9 & -2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 20-2-16 & -40+4+36 & -10+2+8 \\ 4-4 & -8+9 & -2+2 \\ 4-4 & -8+8 & -2+4 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}.$$

(c) *En déduire une expression de A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.*

▶ Montrons par récurrence que $A^n = P^{-1}D^nP$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Initialisation : pour $n = 0$ on a bien $A^0 = \mathrm{I}_3 = P^{-1}P = P^{-1}\mathrm{I}_3P = P^{-1}D^0P$.
Hérédité : on suppose que $A^n = P^{-1}D^nP$ pour $n \in \mathbb{N}$ fixé. Alors on a :

$$A^{n+1} = A \times A^n = A \times P^{-1}D^nP = (P^{-1}P)A(P^{-1}P)P^{-1}D^nP \quad \text{car } P^{-1}P = \mathrm{I}_3$$
$$= P^{-1}(PAP^{-1})(PP^{-1})D^nP = P^{-1}DD^nP = P^{-1}D^{n+1}P.$$

Donc la relation est vérifiée au rang $n+1$ dès qu'elle est vérifiée au rang n. Et ceci est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Conclusion : d'après le principe de récurrence, on a bien démontré que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = P^{-1}D^nP.$$

Or D est une matrice diagonale d'après le résultat de la question précédente, donc

$$\forall n \in \mathbb{N},\ D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$A^n = P^{-1}D^nP = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & -9 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} P$$
$$= \begin{pmatrix} 2\times 2^n & -4 & -2^n \\ -2^n & 2 & 2^n \\ 4\times 2^n & -9 & -2\times 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 10\times 2^n - 8 - 2^n & 2\times 2^n - 2\times 2^n & -4\times 2^n + 4 \\ -5\times 2^n + 4 + 2^n & -2^n + 2\times 2^n & 2\times 2^n - 2 \\ 20\times 2^n - 18 - 2\times 2^n & 4\times 2^n - 4\times 2^n & -8\times 2^n + 9 \end{pmatrix}$$
$$= \boxed{\begin{pmatrix} 9\times 2^n - 8 & 0 & -4\times 2^n + 4 \\ -4\times 2^n + 4 & 2^n & 2\times 2^n - 2 \\ 18\times 2^n - 18 & 0 & -8\times 2^n + 9 \end{pmatrix}}.$$

(d) *Justifier brièvement que D puis A sont inversibles.*

▶ D'après le résultat de la question 2(b), D est une matrice diagonale dont tous les coefficients sont non nuls, donc $\boxed{D \text{ est inversible}}$. De plus, $A = P^{-1}DP$ d'après la relation démontrée par récurrence dans la question précédente pour $n = 1$, donc $\boxed{A \text{ est inversible}}$ comme produit de matrices inversibles.

(e) *Exprimer A^{-n} en fonction de $n \in \mathbb{N}$.*

▶ On a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} A^{-n} &= (A^n)^{-1} \quad \text{par définition de la puissance négative d'une matrice inversible} \\ &= (P^{-1}D^nP)^{-1} \quad \text{d'après la relation démontrée par récurrence à la question 2(c)} \\ &= P^{-1}(D^n)^{-1}(P^{-1})^{-1} \quad \text{d'après l'inverse d'un produit de matrices inversibles} \\ &= P^{-1}(D^{-1})^nP. \end{aligned}$$

Pensez à utiliser le cours et les résultats précédents pour faire le moins possible de produits matriciels très chronophages.

Or D est une matrice diagonale d'après le résultat de la question 2(b), donc :

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ (D^{-1})^n = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{-n} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{-n} \end{pmatrix}.$$

En utilisant les mêmes calculs que ceux de la question 2(c) (en remplaçant 2^n par 2^{-n}), on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$A^{-n} = P^{-1}(D^{-1})^nP = \boxed{\begin{pmatrix} 9 \times 2^{-n} - 8 & 0 & -4 \times 2^{-n} + 4 \\ -4 \times 2^{-n} + 4 & 2^{-n} & 2 \times 2^{-n} - 2 \\ 18 \times 2^{-n} - 18 & 0 & -8 \times 2^{-n} + 9 \end{pmatrix}}.$$

3. *(Polynôme annulateur.) On pose $f : x \mapsto x^2 - 3x + 2$.*

(a) *Montrer que $f(A) = 0_3$ où 0_3 est la matrice carrée nulle d'ordre 3.*

▶ On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 10 & 0 & -4 \\ -4 & 2 & 2 \\ 18 & 0 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 0 & -4 \\ -4 & 2 & 2 \\ 18 & 0 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 - 72 & 0 & -40 + 28 \\ -40 - 8 + 36 & 4 & 16 + 4 - 14 \\ 180 - 126 & 0 & -72 + 49 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 & 0 & -12 \\ -12 & 4 & 6 \\ 54 & 0 & -23 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, on obtient :

$$f(A) = A^2 - 3A + 2\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 28 & 0 & -12 \\ -12 & 4 & 6 \\ 54 & 0 & -23 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 10 & 0 & -4 \\ -4 & 2 & 2 \\ 18 & 0 & -7 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{0_3}.$$

(b) *Prouver par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $(x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$ tel que $A^n = x_nA + y_n\mathrm{I}_3$.*

▶ Initialisation : pour $n = 0$ on a $A^0 = \mathrm{I}_3 = 0A + 1\mathrm{I}_3$. Si on pose $x_0 = 0$ et $y_0 = 1$, on a bien trouvé $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tel que $A^0 = x_0A + y_0\mathrm{I}_3$.

Hérédité : on suppose qu'il existe $(x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$ tel que $A^n = x_nA + y_n\mathrm{I}_3$ pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé. Alors on a :

$$A^{n+1} = A \times A^n = A(x_nA + y_n\mathrm{I}_3) = x_nA^2 + y_nA.$$

Or $A^2 - 3A + 2\mathrm{I}_3 = f(A) = 0_3$ d'après le résultat de la question précédente, donc $A^2 = 3A - 2\mathrm{I}_3$. En reportant, on obtient :

$$A^{n+1} = x_n(3A - 2\mathrm{I}_3) + y_nA = (3x_n + y_n)A - 2x_n\mathrm{I}_3.$$

Si on pose $x_{n+1} = 3x_n + y_n$ et $y_{n+1} = -2x_n$, on a bien trouvé $(x_{n+1}, y_{n+1}) \in \mathbb{R}^2$ tel que $A^{n+1} = x_{n+1}A + y_{n+1}\mathrm{I}_3$. Ainsi la proposition est vérifiée au rang $n+1$ dès qu'elle est vérifiée au rang n. Et ceci est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Conclusion : d'après le principe de récurrence, on a bien démontré que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \exists (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2,\ A^n = x_nA + y_n\mathrm{I}_3}.$$

(c) Montrer que les suites $(x_n)_{n\geqslant 0}$ et $(y_n)_{n\geqslant 0}$ sont récurrentes linéaires d'ordre 2.

▶ En reprenant la récurrence de la question précédente, on a prouvé que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} x_{n+1} = 3x_n + y_n \\ y_{n+1} = -2x_n \end{cases}$$

En particulier, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} & x_{n+2} = 3x_{n+1} + y_{n+1} = 3x_{n+1} - 2x_n \\ \text{et} \quad & y_{n+2} = -2x_{n+1} = -2(3x_n + y_n) = -6x_n - 2y_n = 3(-2x_n) - 2y_n = 3y_{n+1} - 2y_n. \end{aligned}$$

Donc $\boxed{(x_n)_{n\geqslant 0} \text{ et } (y_n)_{n\geqslant 0} \text{ sont récurrentes linéaires d'ordre 2}}$ et vérifient la même relation de récurrence.

(d) En déduire des expressions de x_n et y_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$, puis de A^n en fonction de A, I_3 et $n \in \mathbb{N}$.

▶ L'équation caractéristique $q^2 = 3q - 2$ admet pour discriminant $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 1 > 0$ donc elle a deux solutions réelles qui sont :

$$q_1 = \frac{-(-3) - \sqrt{1}}{2 \times 1} = 1 \quad \text{et} \quad q_2 = \frac{-(-3) + \sqrt{1}}{2 \times 1} = 2.$$

On en déduit qu'il existe $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ et $(\lambda_1', \lambda_2') \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n = \lambda_1 q_1^n + \lambda_2 q_2^n = \lambda_1 + \lambda_2 2^n \quad \text{et} \quad y_n = \lambda_1' + \lambda_2' 2^n.$$

Or on a $(x_0, y_0) = (0, 1)$ car $A^0 = \mathrm{I}_3 = 0A + 1\mathrm{I}_3$ et $(x_1, y_1) = (1, 0)$ car $A^1 = A = 1A + 0\mathrm{I}_3$. On en déduit que $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ et $(\lambda_1', \lambda_2') \in \mathbb{R}^2$ sont solutions des systèmes linéaires suivants :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x_0 = \lambda_1 + \lambda_2 2^0 \\ x_1 = \lambda_1 + \lambda_2 2^1 \end{cases} & & \begin{cases} y_0 = \lambda_1' + \lambda_2' 2^0 \\ y_1 = \lambda_1' + \lambda_2' 2^1 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} 0 = \lambda_1 + \lambda_2 \\ 1 = \lambda_1 + 2\lambda_2 \end{cases} & \iff & \begin{cases} 1 = \lambda_1' + \lambda_2' \\ 0 = \lambda_1' + 2\lambda_2' \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} 0 = \lambda_1 + \lambda_2 \\ 1 = \lambda_2 \qquad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \end{cases} & \iff & \begin{cases} 1 = \lambda_1' + \lambda_2' \\ -1 = \lambda_2' \qquad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} \lambda_1 = -\lambda_2 = -1 \\ \lambda_2 = 1 \end{cases} & \iff & \begin{cases} \lambda_1' = 1 - \lambda_2' = 2 \\ \lambda_2' = -1 \end{cases}. \end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} x_n = -1 + 2^n \\ y_n = 2 - 2^n \end{cases}}.$$

Finalement, on a en reportant ces expressions :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \ A^n = (-1 + 2^n)A + (2 - 2^n)\mathrm{I}_3}.$$

(e) À l'aide de la relation $f(A) = 0_3$, justifier que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A et I_3.

▶ Puisque $A^2 - 3A + 2\mathrm{I}_3 = f(A) = 0_3$, on a :

$$\mathrm{I}_3 = \frac{1}{2}\left(3A - A^2\right) = A\left(\frac{3}{2}\mathrm{I}_3 - \frac{1}{2}A\right) = \left(\frac{3}{2}\mathrm{I}_3 - \frac{1}{2}A\right)A.$$

Si on pose $B = \frac{3}{2}\mathrm{I}_3 - \frac{1}{2}A$, on a trouvé $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $AB = \mathrm{I}_3$ et $BA = \mathrm{I}_3$. On en déduit que $\boxed{A \text{ est inversible}}$ et que $\boxed{A^{-1} = B = \frac{3}{2}\mathrm{I}_3 - \frac{1}{2}A}$.

(f) Conjecturer une expression de A^{-n} en fonction de A, I_3 et $n \in \mathbb{N}$ puis démontrer cette conjecture.

► On remarque que l'expression obtenue à la question 3(d) est aussi vraie pour $n = -1$ car :

$$(-1+2^{-1})A + (2-2^{-1})\mathrm{I}_3 = \left(-1+\frac{1}{2}\right)A + \left(2-\frac{1}{2}\right)\mathrm{I}_3 = -\frac{1}{2}A + \frac{3}{2}\mathrm{I}_3 = A^{-1}$$

d'après le résultat de la question précédente. On conjecture que cette expression est aussi vraie pour tous les entiers négatifs, c'est-à-dire que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A^{-n} = (-1+2^{-n})A + (2-2^{-n})\mathrm{I}_3.$$

Or on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
&A^n \times \left[(-1+2^{-n})A + (2-2^{-n})\mathrm{I}_3\right] \\
=&\left[(-1+2^{n})A + (2-2^{n})\mathrm{I}_3\right]\left[(-1+2^{-n})A + (2-2^{-n})\mathrm{I}_3\right] \\
=&(-1+2^n)(-1+2^{-n})A^2 + (-1+2^n)(2-2^{-n})A \\
&\quad + (2-2^n)(-1+2^{-n})A + (2-2^n)(2-2^{-n})\mathrm{I}_3 \\
=&(1-2^n-2^{-n}+1)A^2 + \left(-2+2\times 2^n+2^{-n}-1\right)A \\
&\quad + (-2+2^n+2\times 2^{-n}-1)A + (4-2\times 2^n - 2\times 2^{-n}+1)\mathrm{I}_3 \\
=&(2-2^n-2^{-n})A^2 + (-6+3\times 2^n+3\times 2^{-n})A + (5-2\times 2^n-2\times 2^{-n})\mathrm{I}_3 \\
=&(2-2^n-2^{-n})\underbrace{(A^2-3A+2\mathrm{I}_3)}_{=f(A)=0_3} + \mathrm{I}_3 = \mathrm{I}_3
\end{aligned}$$

et de même :

$$\begin{aligned}
&\left[(-1+2^{-n})A + (2-2^{-n})\mathrm{I}_3\right] \times A^n \\
=&\left[(-1+2^{-n})A + (2-2^{-n})\mathrm{I}_3\right]\left[(-1+2^{n})A + (2-2^{n})\mathrm{I}_3\right] \\
=&(-1+2^n)(-1+2^{-n})A^2 + (-1+2^n)(2-2^{-n})A \\
&\quad + (2-2^n)(-1+2^{-n})A + (2-2^n)(2-2^{-n})\mathrm{I}_3 \\
=&\mathrm{I}_3 \quad \text{puisqu'on retrouve la même expression que précedemment.}
\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ A^{-n} = (A^n)^{-1} = (-1+2^{-n})A + (2-2^{-n})\mathrm{I}_3}.$$

On peut aussi démontrer ce résultat par récurrence en utilisant la relation $f(A) = 0_3$ qui entraîne $A^{-2} = \frac{3}{2}A^{-1} - \frac{1}{2}\mathrm{I}_3$.

.

Exercice 3

On propose de résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) - f(x) = \frac{x^3+3x+3}{x^2+2x+2}e^x + \cos(x) \tag{E}$$

où la fonction inconnue f est supposée dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. *Dans cette question, on cherche une solution particulière f_1 de l'équation différentielle suivante :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) - f(x) = h(x)e^x \quad \text{où} \quad h(x) = \frac{x^3+3x+3}{x^2+2x+2} \tag{E1}$$

de la forme $f_1 : x \mapsto g_1(x)e^x$ où g_1 est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

(a) *Montrer que f_1 est solution de (E1) si et seulement si g_1 est une primitive de h.*

► La fonction $f_1 : x \mapsto g_1(x)e^x$ est dérivable comme produit de fonctions dérivables et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_1'(x) = g_1'(x)e^x + g_1(x)e^x.$$

Donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_1'(x) - f_1(x) = g_1'(x)e^x + g_1(x)e^x - g_1(x)e^x = g_1'(x)e^x.$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} & \forall x \in \mathbb{R}, \quad f_1'(x) - f_1(x) = h(x)e^x \qquad \text{(E1)} \\ \iff & \forall x \in \mathbb{R}, \quad g_1'(x)e^x = h(x)e^x \\ \iff & \forall x \in \mathbb{R}, \quad g_1'(x) = h(x) \quad (\text{car } e^x \neq 0). \end{aligned}$$

On en déduit que $\boxed{f_1 \text{ est solution de (E1) si et seulement si } g_1 \text{ est une primitive de } h}$.

(b) *Determiner un quadruplet $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = ax + b + \frac{c(x+1)}{x^2+2x+2} + \frac{d}{x^2+2x+2}.$$

► On cherche $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} & h(x) = ax + b + \frac{c(x+1)}{x^2+2x+2} + \frac{d}{x^2+2x+2} \\ \iff & \frac{x^3+3x+3}{x^2+2x+2} = \frac{(ax+b)(x^2+2x+2) + c(x+1) + d}{x^2+2x+2} \\ \iff & x^3 + 3x + 3 = ax^3 + (2a+b)x^2 + (2a+2b+c)x + (2b+c+d) \\ & \text{car } x^2 + 2x + 2 \neq 0 \text{ (puisque de discriminant } \Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times 2 = -4 < 0). \end{aligned}$$

Puisque cette égalité est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$, on en déduit par identification des coefficients d'un polynôme :

$$\begin{cases} 1 = a \\ 0 = 2a + b \\ 3 = 2a + 2b + c \\ 3 = 2b + c + d \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = -2a = -2 \\ c = 3 - 2a - 2b = 5 \\ d = 3 - 2b - c = 2 \end{cases}.$$

Finalement on obtient $\boxed{(a, b, c, d) = (1, -2, 5, 2)}$.

(c) *Déterminer une primitive de la fonction $x \mapsto (x+1)/(x^2+2x+2)$.*

► On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{x+1}{x^2+2x+2} = \frac{1}{2} \times \frac{2x+2}{x^2+2x+2} = \frac{1}{2} \times \frac{u'(x)}{u(x)} \quad \text{avec} \quad u(x) = x^2 + 2x + 2.$$

On en déduit que cette fonction admet pour primitive :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad \int \frac{x+1}{x^2+2x+2} \mathrm{d}x &= \frac{1}{2} \int \frac{u'(x)}{u(x)} \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \ln |u(x)| = \frac{1}{2} \ln \left| x^2 + 2x + 2 \right| \\ &= \boxed{\frac{1}{2} \ln(x^2 + 2x + 2)} \quad \text{car } x^2 + 2x + 2 > 0. \end{aligned}$$

(d) *Déterminer une primitive de la fonction $x \mapsto 1/(x^2 + 2x + 2)$ à l'aide d'un changement de variable.*

► On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{x^2+2x+2} = \frac{1}{(x+1)^2+1}.$$

On pose la fonction $\psi : x \mapsto x + 1$. Alors :

— $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est bijective (de bijection réciproque $\psi^{-1} : t \mapsto t-1$),
— ψ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (de dérivée $\psi' : x \mapsto 1$),
— ψ' est continue et sur $\mathbb{R}$,
— et ψ' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

N'oubliez pas de justifier chacune des hypothèses du théorème de changement de variable pour les calculs de primitive.

À l'aide du changement de variable $t = \psi(x)$, cette fonction admet pour primitive :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+2} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\psi(x)^2+1} = \int \frac{1}{t^2+1} \times \frac{\mathrm{d}t}{\psi'(\psi^{-1}(t))} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = \arctan(t)$$
$$= \boxed{\arctan(x+1)}.$$

(e) *En déduire une solution particulière f_1 de (E1).*

▶ À l'aide des résultats précédents, la fonction h admet pour primitive :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \quad \int h(x)\mathrm{d}x &= \int \left(x-2+\frac{5(x+1)}{x^2+2x+2}+\frac{2}{x^2+2x+2}\right)\mathrm{d}x \\ &= \int (x-2)\mathrm{d}x + 5\int \frac{x+1}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x + 2\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+2} \quad \text{par linéarité} \\ &= \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{5}{2}\ln(x^2+2x+2) + 2\arctan(x+1).\end{aligned}$$

D'après le résultat de la question 1(a), on en déduit que la fonction

$$\boxed{f_1 : x \mapsto \left(\frac{x^2}{2} - 2x + \frac{5}{2}\ln(x^2+2x+2) + 2\arctan(x+1)\right)e^x}$$

est une solution particulière de (E1).

2. *On note g_2 une primitive de la fonction $x \mapsto \cos(x)e^{-x}$.*

(a) *On fixe $x \in \mathbb{R}$ pour cette question. Exprimer $g_2(x)$ en fonction de $g_2(x)$ à l'aide de primitivations par parties (on choisira toutes les constantes d'intégration égales à 0).*

▶ On a :

$$\begin{aligned} g_2(x) &= \int \cos(x)e^{-x}\mathrm{d}x = \int u_1(x)v_1'(x)\mathrm{d}x \\ &\quad \text{en posant } \begin{cases} u_1(x) = \cos(x) \\ v_1'(x) = e^{-x} \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} u_1'(x) = -\sin(x) \\ v_1(x) = -e^{-x} \end{cases} \\ &= u_1(x)v_1(x) - \int u_1'(x)v_1(x)\mathrm{d}x = -\cos(x)e^{-x} - \int -\sin(x)e^{-x}\mathrm{d}x \\ &= -\cos(x)e^{-x} - \int \sin(x)e^{-x}\mathrm{d}x = -\cos(x)e^{-x} - \int u_2(x)v_2'(x)\mathrm{d}x \\ &\quad \text{en posant } \begin{cases} u_2(x) = \sin(x) \\ v_2'(x) = e^{-x} \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} u_2'(x) = \cos(x) \\ v_2(x) = -e^{-x} \end{cases} \\ &= -\cos(x)e^{-x} - u_2(x)v_2(x) + \int u_2'(x)v_2(x)\mathrm{d}x \\ &= -\cos(x)e^{-x} + \sin(x)e^{-x} - \int \cos(x)e^{-x}\mathrm{d}x = \boxed{-\cos(x)e^{-x} + \sin(x)e^{-x} - g_2(x)}.\end{aligned}$$

(b) *En déduire une expression de $g_2(x)$ en fonction de $x \in \mathbb{R}$.*

▶ D'après le résultat de la question précédente, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 2g_2(x) = -\cos(x)e^{-x} + \sin(x)e^{-x}$$

et donc :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_2(x) = \frac{1}{2}\left(\sin(x) - \cos(x)\right)e^{-x}}.$$

(c) *En s'inspirant de la question 1, déterminer une solution particulière f_2 de l'équation différentielle suivante :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) - f(x) = \cos(x). \tag{E2}$$

▶ On pose $f_2 : x \mapsto g_2(x)e^x$. Alors f_2 est dérivable comme produit de fonctions dérivables et on a avec des calculs similaires à ceux de la question 1(a) :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_2'(x) - f_2(x) = g_2'(x)e^x = \cos(x)e^{-x}e^x = \cos(x).$$

La fonction f_2 est donc une solution particulière de (E2), et on a d'après le résultat de la question précédente :

$$\boxed{f_2 : x \mapsto \frac{1}{2}\left(\sin(x) - \cos(x)\right)e^{-x}e^x = \frac{1}{2}\left(\sin(x) - \cos(x)\right)}.$$

3. *Conclure.*

▶ L'équation différentielle (E) est linéaire d'ordre 1 à coefficients constants. L'équation différentielle homogène associée admet pour ensemble de solutions :

$$\left\{f_0 : x \mapsto \lambda e^{-(-x)} = \lambda e^x \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}.$$

D'après la structure de l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire et le principe de superposition, on en déduit que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) est de la forme :

$$\begin{aligned} &\{f : x \mapsto \lambda e^x + f_1(x) + f_2(x) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \\ =&\boxed{\begin{aligned}\Big\{f : x \mapsto \lambda e^x + \left(\tfrac{x^2}{2} - 2x + \tfrac{5}{2}\ln(x^2+2x+2) + 2\arctan(x+1)\right)e^x \\ +\tfrac{1}{2}\left(\sin(x) - \cos(x)\right) \mid \lambda \in \mathbb{R}\Big\}\end{aligned}}. \end{aligned}$$

Problème

On appelle suite des moyennes de Cesàro (du nom du mathématicien italien Ernesto Cesàro, 1859-1906) d'une suite réelle $(u_n)_{n\geqslant 1}$, la suite $(\sigma_n)_{n\geqslant 1}$ définie par :

$$\forall n \geqslant 1, \quad \sigma_n = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k.$$

Le but de ce problème est de démontrer le lemme de Cesàro énoncé ci-dessous et d'étudier sa réciproque.

> *Si une suite réelle $(u_n)_{n\geqslant 1}$ admet une limite (finie ou infinie) alors la suite $(\sigma_n)_{n\geqslant 1}$ de ses moyennes de Cesàro admet la même limite.*

A) Cas de convergence. *On suppose dans cette partie que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$.*

1. *Pour cette question, on fixe un réel $\varepsilon > 0$.*

(a) *Justifier l'existence d'un entier $N_1 \geqslant 1$ tel que pour tout $k \geqslant N_1$ on ait $|u_k - \ell| \leqslant \varepsilon/2$.*

► L'hypothèse que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ tend vers ℓ entraîne par définition de la convergence :

$$\forall \varepsilon' > 0,\ \exists N \geqslant 1,\ \forall n \geqslant N,\ |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon'.$$

Attention à ne pas utiliser ε puisque cette variable est déjà fixée dans l'énoncé.

Puisque ceci est vrai pour tout $\varepsilon' > 0$, on a en particulier pour $\varepsilon' = \varepsilon/2 > 0$ (car $\varepsilon > 0$) l'existence d'un entier $N_1 = N \geqslant 1$ tel que pour tout $k = n \geqslant N = N_1$ on ait $|u_k - \ell| = |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon' = \varepsilon/2$. Donc :

$$\boxed{\exists N_1 \geqslant 1,\ \forall k \geqslant N_1,\ |u_k - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}}.$$

(b) *Montrer que pour tout $n \geqslant N_1$ on a :*

$$|\sigma_n - \ell| = \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(u_k - \ell)\right| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_1-1}|u_k - \ell| + \left(\frac{n - N_1 + 1}{n}\right)\frac{\varepsilon}{2}.$$

► Soit $n \geqslant N_1$. On a :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(u_k - \ell) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}u_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ell = \sigma_n - \frac{1}{n}n\ell = \sigma_n - \ell \quad \text{par linéarité.}$$

Puis d'après l'inégalité triangulaire :

$$|\sigma_n - \ell| = \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(u_k - \ell)\right| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|u_k - \ell| = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_1-1}|u_k - \ell| + \frac{1}{n}\sum_{k=N_1}^{n}|u_k - \ell|.$$

Or on a d'après le résultat de la question précédente :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=N_1}^{n}|u_k - \ell| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=N_1}^{n}\frac{\varepsilon}{2} = \frac{1}{n}(n - N_1 + 1)\frac{\varepsilon}{2}.$$

Finalement on a bien :

$$\boxed{|\sigma_n - \ell| = \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(u_k - \ell)\right| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_1-1}|u_k - \ell| + \left(\frac{n - N_1 + 1}{n}\right)\frac{\varepsilon}{2}}.$$

(c) *Justifier l'existence d'un entier $N_2 \geqslant 1$ tel que pour tout $n \geqslant N_2$ on ait $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_1-1}|u_k - \ell| \leqslant \varepsilon/2$.*

► On pose :

$$N_2 = \left\lfloor \frac{2}{\varepsilon}\sum_{k=1}^{N_1-1}|u_k - \ell| \right\rfloor + 1.$$

Alors N_2 est bien un entier supérieur ou égal à 1 car $\frac{2}{\varepsilon}\sum_{k=1}^{N_1-1}|u_k - \ell| > 0$. De plus on a pour tout $n \geqslant N_2$:

$$n \geqslant N_2 = \left\lfloor \frac{2}{\varepsilon}\sum_{k=1}^{N_1-1}|u_k - \ell| \right\rfloor + 1 > \frac{2}{\varepsilon}\sum_{k=1}^{N_1-1}|u_k - \ell| \quad \text{par définition de la partie entière.}$$

Puisque tous les termes de cette inégalité sont strictement positifs, on en déduit que :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_1-1}|u_k - \ell| \leqslant \varepsilon/2.$$

Finalement, on a bien montré que :

$$\boxed{\exists N_2 \geqslant 1,\ \forall n \geqslant N_2,\ \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_1-1}|u_k - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}}.$$

On peut aussi remarquer que $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_1-1}|u_k-\ell|=0$ puis on raisonne comme à la question 1(a) avec la définition de la convergence vers 0. Le point clef est que $\sum_{k=1}^{N_1-1}|u_k-\ell|$ est une constante indépendante de n ce qui justifie que la limite précédente est bien nulle et que la définition de N_2 ci-dessus ne dépend pas de n.

(d) *En déduire l'existence d'un entier $N\geqslant 1$ tel que pour tout $n\geqslant N$ on ait $|\sigma_n-\ell|\leqslant\varepsilon$.*

▶ On pose $N=\max\{N_1,N_2\}$. Soit $n\geqslant N$. Puisque $n\geqslant N\geqslant N_1$, on a d'après le résultat de la question 1(b) :

$$|\sigma_n-\ell|\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_1-1}|u_k-\ell|+\left(\frac{n-N_1+1}{n}\right)\frac{\varepsilon}{2}.$$

Et puisque $n\geqslant N\geqslant N_2$, on a d'après le résultat de la question précédente :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_1-1}|u_k-\ell|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}.$$

Par conséquent, on a :

$$\begin{aligned}|\sigma_n-\ell|&\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\left(\frac{n-N_1+1}{n}\right)\frac{\varepsilon}{2}\\&\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\left(\frac{n-1+1}{n}\right)\frac{\varepsilon}{2}\quad\text{car }N_1\geqslant 1\\&\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

Finalement, on a bien montré que :

$$\boxed{\exists N\geqslant 1,\ \forall n\geqslant N,\ |\sigma_n-\ell|\leqslant\varepsilon}.$$

(e) *Conclure.*

▶ Puisque le résultat de la question précédente est vrai pour tout $\varepsilon>0$, on a finalement :

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists N\geqslant 1,\ \forall n\geqslant N,\ |\sigma_n-\ell|\leqslant\varepsilon.$$

On reconnaît la définition de la convergence, on a donc prouvé que la suite $\boxed{(\sigma_n)_{n\geqslant1}\text{ tend vers la limite }\ell}$. Ceci démontre $\boxed{\text{le lemme de Cesàro dans le cas où }(u_n)_{n\geqslant1}\text{ converge}}$.

B) Cas de divergence de 1re espèce. *On suppose dans cette partie que $(u_n)_{n\geqslant1}$ tend vers $+\infty$.*

2. *Pour cette question, on fixe un réel $A\in\mathbb{R}$ et on pose $B=\max\{1,A\}$ de sorte que $B>0$ et $B\geqslant A$.*

(a) *Justifier l'existence d'un entier $N_0\geqslant1$ tel que pour tout $k\geqslant N_0$ on ait $u_k\geqslant 2B$.*

▶ L'hypothèse que $(u_n)_{n\geqslant1}$ tend vers $+\infty$ entraîne par définition de la divergence de 1re espèce :

$$\forall A'\in\mathbb{R},\ \exists N\geqslant1,\ \forall n\geqslant N,\ u_n\geqslant A.$$

Attention à ne pas utiliser A puisque cette variable est déjà fixée dans l'énoncé.

Puisque ceci est vrai pour tout $A\in\mathbb{R}$, on a en particulier pour $A=2B\in\mathbb{R}$ l'existence d'un entier $N_0=N\geqslant1$ tel que pour tout $k=n\geqslant N=N_0$ on ait $u_k=u_n\geqslant A=2B$. Donc :

$$\boxed{\exists N_0\geqslant1,\ \forall k\geqslant N_0,\ u_k\geqslant 2B}.$$

(b) *Montrer que pour tout $n \geqslant N_0$ on a :*

$$\sigma_n \geqslant C_n \quad \text{où} \quad C_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_0-1} u_k + \left(\frac{n-N_0+1}{n}\right)2B.$$

▶ Soit $n \geqslant N_0$. On a :

$$\sigma_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_0-1} u_k + \frac{1}{n}\sum_{k=N_0}^{n} u_k.$$

Or on a d'après le résultat de la question précédente :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=N_0}^{n} u_k \geqslant \frac{1}{n}\sum_{k=N_0}^{n} 2B = \frac{1}{n}(n-N_0+1)2B.$$

Finalement, on a bien :

$$\boxed{\sigma_n \geqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_0-1} u_k + \left(\frac{n-N_0+1}{n}\right)2B = C_n}.$$

(c) *Déterminer la limite de C_n quand n tend vers $+\infty$.*

▶ Puisque $\sum_{k=1}^{N_0-1} u_k$ est une constante indépendante de n, on en déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_0-1} u_k = 0.$$

D'autre part, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n-N_0+1}{n} = \lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{-N_0+1}{n} = 1.$$

Finalement, on obtient que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} C_n = 0 + 1 \times 2B = 2B}.$$

(d) *En déduire l'existence d'un entier $N \geqslant 1$ tel que pour tout $n \geqslant N$ on ait $C_n \geqslant B$.*

▶ Le résultat de la question précédente entraîne par définition de la convergence :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \geqslant 1,\ \forall n \geqslant N,\ |C_n - 2B| \geqslant \varepsilon.$$

Puisque ceci est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on a en particulier pour $\varepsilon = B > 0$ l'existence d'un entier $N \geqslant 1$ tel que pour tout $n \geqslant N$ on ait $|C_n - 2B| \geqslant \varepsilon = B$; ce qui implique par définition de la valeur absolue que $C_n \in [2B - B, 2B + B] = [B, 3B]$ et donc $C_n \geqslant B$. Ainsi :

$$\boxed{\exists N \geqslant 1,\ \forall n \in \mathbb{N},\ C_n \geqslant B}.$$

(e) *Conclure.*

▶ D'après les résultats des questions précédentes, on a :

$$\exists N \geqslant 1,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \sigma_n \geqslant C_n \geqslant B \geqslant A.$$

Puisque ceci est vrai pour tout $A \in \mathbb{R}$, on a finalement :

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N \geqslant 1,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \sigma_n \geqslant A.$$

On reconnaît la définition de la divergence de 1^{re} espèce, on a donc prouvé que la suite $\boxed{(\sigma_n)_{n\geqslant 1}}$ $\boxed{\text{tend vers } +\infty}$. Ceci démontre $\boxed{\text{le lemme de Cesàro dans le cas où } (u_n)_{n\geqslant 1} \text{ tend vers } +\infty}$.

3. *Que se passe-t-il si $(u_n)_{n\geqslant 1}$ tend vers $-\infty$?*

▶ On suppose que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ tend vers $-\infty$. Alors la suite $(u'_n = -u_n)_{n\geqslant 1}$ tend vers $+\infty$. D'après le résultat de la question précédente, on en déduit que la suite $(\sigma'_n)_{n\geqslant 1}$ des moyennes de Cesàro de $(u'_n)_{n\geqslant 1}$ tend aussi vers $+\infty$. Or :

$$\forall n \geqslant 1, \quad \sigma_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} -u'_k = -\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u'_k\right) = -\sigma'_n.$$

On en déduit que $\boxed{(\sigma'_n)_{n\geqslant 1} \text{ tend vers } -\infty}$. Ceci démontre $\boxed{\text{le lemme de Cesàro dans le cas où}}$ $\boxed{(u_n)_{n\geqslant 1} \text{ tend vers } +\infty}$ et ça conclut la preuve du $\boxed{\text{lemme de Cesàro}}$.

C) Réciproque.

4. *En étudiant l'exemple $(u_n = (-1)^n)_{n\geqslant 1}$, discuter de la réciproque du lemme de Cesàro.*

▶ On a :

$$\lim_{n\to+\infty} u_{2n} = \lim_{n\to+\infty} (-1)^{2n} = \lim_{n\to+\infty} 1 = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} = \lim_{n\to+\infty} (-1)^{2n+1} = \lim_{n\to+\infty} -1 = -1.$$

Donc la suite $(u_n = (-1)^n)_{n\geqslant 1}$ est divergente de 2ᵉ espèce d'après le théorème des suites extraites. De plus on a pour tout $n \geqslant 1$:

$$\begin{aligned}
\sigma_{2n} &= \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n} u_k = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k = \frac{1}{2n}(-1+1-1+\cdots-1+1)\\
&= \frac{1}{2n}\left(\underbrace{(-1+1)+(-1+1)+\cdots+(-1+1)}_{n \text{ fois}}\right) = \frac{1}{2n}(n\times 0) = 0\\
\text{et} \quad \sigma_{2n+1} &= \frac{1}{2n+1}\sum_{k=1}^{2n+1} u_k = \frac{1}{2n+1}\sum_{k=1}^{2n+1}(-1)^k = \frac{1}{2n+1}(-1+1-1+\cdots-1+1-1)\\
&= \frac{1}{2n+1}\left(\underbrace{(-1+1)+(-1+1)+\cdots+(-1+1)}_{n \text{ fois}}-1\right) = \frac{1}{2n+1}(n\times 0-1) = \frac{-1}{2n+1}.
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\lim_{n\to+\infty} \sigma_{2n} = \lim_{n\to+\infty} 0 = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \sigma_{2n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{-1}{2n+1} = 0.$$

Donc la suite $(\sigma_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente et tend vers 0 d'après le théorème des suites extraites. Finalement, on en déduit que $\boxed{\text{la réciproque du lemme de Cesàro est fausse}}$.

5. *Pour cette question, on suppose que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante.*

   (a) *Montrer que $(\sigma_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante.*

   ▶ Soit $n \geqslant 1$. On a :

$$\begin{aligned}
\sigma_{n+1} - \sigma_n &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} u_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{1}{n(n+1)}\left(n\sum_{k=1}^{n+1} u_k - (n+1)\sum_{k=1}^{n} u_k\right)\\
&= \frac{1}{n(n+1)}\left(n\sum_{k=1}^{n} u_k + nu_{n+1} - (n+1)\sum_{k=1}^{n} u_k\right) = \frac{1}{n(n+1)}\left(nu_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} u_k\right)\\
&= \frac{1}{n(n+1)}\left(\sum_{k=1}^{n} u_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} u_k\right) = \frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}(u_{n+1}-u_k).
\end{aligned}$$

   Puisque $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante par hypothèse, on a en particulier $u_{n+1} \geqslant u_k$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. En reportant dans l'expression précédente, on obtient que $\sigma_{n+1} - \sigma_n \geqslant 0$, ce qui est vrai pour tout $n \geqslant 1$. On en déduit que $\boxed{(\sigma_n)_{n\geqslant 1} \text{ est croissante}}$.

(b) *Montrer que $\sigma_n \leqslant u_n \leqslant \frac{2n-1}{n}\sigma_{2n-1} - \frac{n-1}{n}\sigma_{n-1}$ pour tout $n \geqslant 2$.*

► Soit $n \geqslant 2$. Puisque $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante par hypothèse, on a en particulier $u_k \leqslant u_n$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. On en déduit que :

$$\sigma_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_n = \frac{1}{n} n u_n = u_n \quad \text{donc} \quad \boxed{\sigma_n \leqslant u_n}.$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}\frac{2n-1}{n}\sigma_{2n-1} - \frac{n-1}{n}\sigma_{n-1} &= \frac{2n-1}{n(2n-1)}\sum_{k=1}^{2n-1} u_k - \frac{n-1}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{n-1} u_k \\ &= \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{2n-1} u_k - \sum_{k=1}^{n-1} u_k\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1} u_k.\end{aligned}$$

Puisque $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante, on a en particulier $u_k \geqslant u_n$ pour tout $k \in [\![n, 2n-1]\!]$. On en déduit que :

$$\frac{2n-1}{n}\sigma_{2n-1} - \frac{n-1}{n}\sigma_{n-1} = \frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1} u_k \geqslant \frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1} u_n = \frac{1}{n}(2n-1-n+1) = u_n$$

$$\text{donc} \quad \boxed{u_n \leqslant \frac{2n-1}{n}\sigma_{2n-1} - \frac{n-1}{n}\sigma_{n-1}}.$$

(c) *En déduire que la réciproque du lemme de Cesàro est vérifiée lorsque $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante (on distinguera le cas où la suite $(\sigma_n)_{\geqslant 1}$ n'est pas majorée du cas où elle l'est).*

► <u>1er cas</u> : on suppose que $(\sigma_n)_{\geqslant 1}$ n'est pas majorée. Alors, puisque $(\sigma_n)_{\geqslant 1}$ est croissante d'après le résultat de la question 5(a), on a $\lim_{n\to+\infty} \sigma_n = +\infty$ d'après le théorème de la limite monotone. En utilisant le résultat de la question précédente, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ d'après le théorème de la limite par comparaison.

<u>2e cas</u> : on suppose que $(\sigma_n)_{\geqslant 1}$ est majorée. Alors, puisque $(\sigma_n)_{\geqslant 1}$ est croissante d'après le résultat de la question 5(a), $(\sigma_n)_{\geqslant 1}$ est convergente d'après le théorème de la limite monotone. On pose $\ell = \lim_{n\to+\infty} \sigma_n \in \mathbb{R}$. Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n-1}{n}\sigma_{2n-1} - \frac{n-1}{n}\sigma_{n-1} = \lim_{n\to+\infty} \left(2 - \frac{1}{n}\right)\sigma_{2n-1} - \left(1 - \frac{1}{n}\right)\sigma_{n-1} = 2\ell - 1 \times \ell = \ell.$$

En utilisant le résultat de la question précédente, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$ d'après le théorème de la limite par encadrement.

<u>Conclusion</u> : dans tous les cas, la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ admet la même limite que la suite $(\sigma_n)_{n\geqslant 1}$ ce qui prouve $\boxed{\text{la réciproque du lemme de Cesàro dans le cas où } (u_n)_{n\geqslant 1} \text{ est croissante}}$.

6. *Que se passe-t-il si $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante ?*

► On suppose que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante. Puisque $(u'_n = -u_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante, la suite $(u'_n)_{n\geqslant 1}$ admet la même limite que la suite $(\sigma'_n)_{n\geqslant 1}$ de ses moyennes de Cesàro d'après le résultat de la question précédente. On en déduit que la suite $(u_n = -u'_n)_{n\geqslant 1}$ admet la même limite que la suite $(\sigma_n = -\sigma'_n)$ en raisonnant comme à la question 3, ce qui prouve $\boxed{\text{la réciproque du lemme de Cesàro dans le cas où } (u_n)_{n\geqslant 1} \text{ est croissante}}$.

DS n° 5 de mathématiques

durée : 3 heures

Exercice 1

On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -6 & -2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

On propose de calculer les puissances successives de A par trois méthodes différentes et indépendantes.

1. (Binôme de Newton.) On pose $B = A - \mathrm{I}_3$ où I_3 est la matrice identité d'ordre 3.
   (a) Calculer B^2 puis exprimer B^k en fonction de B et $k \in \mathbb{N}^\star$.
   (b) En déduire une expression de A^n en fonction de A, I_3 et $n \in \mathbb{N}$.
2. (Diagonalisation.) On pose

$$P = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

   (a) Montrer que P est inversible et calculer son inverse.
   (b) Calculer $D = PAP^{-1}$.
   (c) En déduire une expression de A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
   (d) Justifier brièvement que D puis A sont inversibles.
   (e) Exprimer A^{-n} en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
3. (Polynôme annulateur.) On pose $f : x \mapsto x^2 - 4x + 3$.
   (a) Montrer que $f(A) = 0_3$ où 0_3 est la matrice carrée nulle d'ordre 3.
   (b) Prouver par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $(x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$ tel que $A^n = x_n A + y_n \mathrm{I}_3$.
   (c) Montrer que les suites $(x_n)_{n\geqslant 0}$ et $(y_n)_{n\geqslant 0}$ sont récurrentes linéaires d'ordre 2.
   (d) En déduire des expressions de x_n et y_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$, puis de A^n en fonction de A, I_3 et $n \in \mathbb{N}$.
   (e) À l'aide de la relation $f(A) = 0_3$, justifier que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A et I_3.
   (f) Conjecturer une expression de A^{-n} en fonction de A, I_3 et $n \in \mathbb{N}$ puis démontrer cette conjecture.

Exercice 2

Dans le plan affine muni d'un repère, on considère les points $M_0(1,1)$ et $M_1(4,2)$. Pour chaque $k \geqslant 1$, on définit par récurrence le point $M_k(x_k, y_k)$ par :

$$M_k = \mathrm{Bar}\Big((M_{k-1}, 1), (M_{k-2}, 2)\Big).$$

Étudier les coordonnées de chaque point M_k et en déduire que la suite $(M_k)_{k\geqslant 0}$ converge vers un point limite. Puis montrer que ce point point limite peut s'écrire comme un barycentre de M_0 et M_1 dont on déterminera les poids.

Exercice 3

Dans l'espace affine muni d'un repère orthonormé, on considère les droites de représentations paramétriques suivantes :

$$\mathcal{D}_1 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 + t \\ z = -1 - t \end{cases},\ t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \mathcal{D}_2 : \begin{cases} x = 5 + t \\ y = -2 - 2t \\ z = 3 + t \end{cases},\ t \in \mathbb{R}.$$

Montrer qu'il existe une unique droite Δ perpendiculaire commune à $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ dont on déterminera une représentation paramétrique.

Problème

On appelle suite des moyennes de Cesàro (du nom du mathématicien italien Ernesto Cesàro, 1859-1906) d'une suite réelle $(u_n)_{n\geqslant 1}$, la suite $(\sigma_n)_{n\geqslant 1}$ définie par :

$$\forall n \geqslant 1, \quad \sigma_n = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k.$$

Dans ce problème, on admet le lemme de Cesàro énoncé ci-dessous et on propose d'étudier quelques applications.

> Si une suite réelle $(u_n)_{n\geqslant 1}$ admet une limite (finie ou infinie) alors la suite $(\sigma_n)_{n\geqslant 1}$ de ses moyennes de Cesàro admet la même limite.

A) Limite d'un produit. On considère la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ définie par :

$$\forall n \geqslant 1, \quad a_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k/n}.$$

1. Montrer que $(\sigma_n = \ln(a_n))_{n\geqslant 1}$ est la suite des moyennes de Cesàro d'une suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ à déterminer.
2. Déterminer la limite de $n\ln(1+\frac{1}{n})$ quand n tend vers $+\infty$.
3. En déduire que la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ converge à l'aide du lemme de Cesàro et déterminer sa limite.

B) Croissance comparée. On fixe un réel $b > 0$.

4. En s'inspirant de la partie A, montrer que $\sqrt[n]{n!}$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.
5. À l'aide du résultat précédent, retrouver que la suite $(b^n)_{n\geqslant 1}$ est négligeable devant la suite $(n!)_{n\geqslant 1}$.

C) Équivalent d'une suite récurrente (1^er^ exemple). On considère la suite $(c_n)_{\geqslant 1}$ définie par :

$$c_1 \in]2,+\infty[\quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 1, \quad c_{n+1} = \frac{c_n^2}{c_n - 1}.$$

6. (a) Étudier les variations de la fonction $f : x \mapsto x^2/(x-1)$.
   (b) Montrer que $(c_n)_{\geqslant 1}$ est bien définie et strictement croissante.
   (c) Prouver que $(c_n)_{\geqslant 1}$ diverge et admet pour limite $+\infty$.
7. Déterminer la limite de $u_n = c_{n+1} - c_n$ quand n tend vers $+\infty$.
8. En déduire que $(c_n - c_1)/(n-1)$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$ à l'aide du lemme de Cesàro.
9. Déterminer un équivalent simple de la suite $(c_n)_{n\geqslant 1}$.

D) Équivalent d'une suite récurrente (2^e^ exemple). On considère la suite $(d_n)_{\geqslant 1}$ définie par :

$$d_1 \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[\quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 1, \quad d_{n+1} = \sin(d_n).$$

10. Prouver que $(d_n)_{\geqslant 1}$ converge et admet pour limite 0.
11. (a) Montrer pour tout $x \in [0,\frac{\pi}{2}]$ que $\sin(x) \geqslant x - \frac{x^3}{6}$, puis que $\sin(x) \leqslant x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$.
    (b) En déduire que :
    $$\sin^2(d_n) - (d_n)^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{(d_n)^4}{3}.$$
    (c) Déterminer la limite de $u_n = (d_{n+1})^{-2} - (d_n)^{-2}$ quand n tend vers $+\infty$.
12. En déduire que $((d_n)^{-2} - (d_1)^{-2})/(n-1)$ tend vers $1/3$ quand n tend vers $+\infty$ à l'aide du lemme de Cesàro.
13. Déterminer un équivalent simple de la suite $(d_n)_{n\geqslant 1}$.

Corrigé du DS n° 5 de mathématiques

Exercice 1

On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -6 & -2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

On propose de calculer les puissances successives de A par trois méthodes différentes et indépendantes.

1. *(Binôme de Newton.) On pose $B = A - \mathrm{I}_3$ où I_3 est la matrice identité d'ordre 3.*

(a) *Calculer B^2 puis exprimer B^k en fonction de B et $k \in \mathbb{N}^\star$.*

► On a :

$$B = A - \mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -6 & -2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -6 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{et} \quad B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -6 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -6 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ -12 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

donc $\boxed{B^2 = 2B}$. On en déduit que $B^3 = B \times B^2 = 2B^2 = 4B$, $B^4 = B \times B^3 = 4B^2 = 8B$, etc. Par conséquent, on conjecture que $B^k = 2^{k-1}B$ pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$ ce qu'on va démontrer par récurrence.

N'oubliez pas de démontrer précisément votre conjecture par récurrence.

Initialisation : pour $k = 1$ on a bien $B^1 = B = 2^0 B = 2^{1-1}B$.
Hérédité : on suppose que $B^k = 2^{k-1}B$ pour un entier $k \geqslant 1$ fixé. Alors on a :

$$B^{k+1} = B \times B^k = B \times 2^{k-1}B = 2^{k-1}B^2 = 2^{k-1} \times 2B = 2^k B = 2^{(k+1)-1}B.$$

Donc la relation est vérifiée au rang $k+1$ dès qu'elle est vérifiée au rang k. Et ceci est vrai pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$.
Conclusion : d'après le principe de récurrence, on a bien démontré que :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^\star, \ B^k = 2^{k-1}B}.$$

(b) *En déduire une expression de A^n en fonction de A, I_3 et $n \in \mathbb{N}$.*

► Par définition de B, on a $A = B + \mathrm{I}_3$. Or les matrices B et I_3 commutent car $B \times \mathrm{I}_3 = B = \mathrm{I}_3 \times B$.

N'oubliez pas de justifier que les matrices commutent avant d'appliquer la formule du binôme de Newton pour les matrices.

D'après la formule du binôme de Newton, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} A^n = (B + \mathrm{I}_3)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k \mathrm{I}_3^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k = \binom{n}{0} B^0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} B^k \\ &= \mathrm{I}_3 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^{k-1} B \quad \text{d'après le résultat de la question précédente} \\ &= \mathrm{I}_3 + \left(\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k 1^{n-k} - \frac{1}{2} \binom{n}{0} 2^0 1^{n-0} \right) B = \mathrm{I}_3 + \left(\frac{1}{2}(2+1)^n - \frac{1}{2} \right)(A - \mathrm{I}_3) \\ &= \mathrm{I}_3 + \frac{1}{2}(3^n - 1)A - \frac{1}{2}(3^n - 1)\mathrm{I}_3 = \boxed{\frac{1}{2}(3^n - 1)A + \frac{1}{2}(3 - 3^n)\mathrm{I}_3}. \end{aligned}$$

2. *(Diagonalisation.) On pose*
$$P = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

(a) *Montrer que P est inversible et calculer son inverse.*

▶ On utilise la méthode du pivot de Gauss :

$$P = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow 4L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow 4L_3 - 3L_1 \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftrightarrow L_3 \\ L_3 \leftrightarrow L_2 \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 4 \\ -3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 + 7L_2 \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 4 \\ -24 & 4 & 28 \end{pmatrix}.$$

On obtient une matrice échelonnée de rang 3. Donc le rang de P est maximal et par conséquent $\boxed{P \text{ est inversible}}$. En poursuivant la méthode du pivot de Gauss, on obtient :

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow -L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{4}L_3 \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -4 \\ -6 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ \\ \\ \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 3 & 0 & -4 \\ -6 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow \frac{1}{4}L_1 \\ \\ \\ \end{matrix} \qquad \boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -4 \\ -6 & 1 & 7 \end{pmatrix}}.$$

(b) *Calculer $D = PAP^{-1}$.*

▶ On a :

$$\begin{aligned} D = PAP^{-1} &= \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -6 & -2 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 12 & -3 & 0 \\ 9-6 & 3-2 & 1 \\ 9 & -3 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 12 & -3 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 9 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -4 \\ -6 & 1 & 7 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 12-9 & 0 & -12+12 \\ 3+3-6 & 1 & -3-4+7 \\ 9-9 & 0 & -9+12 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}. \end{aligned}$$

(c) *En déduire une expression de A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.*

▶ Montrons par récurrence que $A^n = P^{-1}D^nP$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : pour $n = 0$ on a bien $A^0 = \mathrm{I}_3 = P^{-1}P = P^{-1}\mathrm{I}_3P = P^{-1}D^0P$.

Hérédité : on suppose que $A^n = P^{-1}D^nP$ pour $n \in \mathbb{N}$ fixé. Alors on a :

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A \times A^n = A \times P^{-1}D^nP = (P^{-1}P)A(P^{-1}P)P^{-1}D^nP \quad \text{car } P^{-1}P = \mathrm{I}_3 \\ &= P^{-1}(PAP^{-1})(PP^{-1})D^nP = P^{-1}DD^nP = P^{-1}D^{n+1}P. \end{aligned}$$

Donc la relation est vérifiée au rang $n+1$ dès qu'elle est vérifiée au rang n. Et ceci est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Conclusion : d'après le principe de récurrence, on a bien démontré que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = P^{-1}D^nP.$$

Or D est une matrice diagonale d'après le résultat de la question précédente, donc

$$\forall n \in \mathbb{N},\ D^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} A^n = P^{-1}D^nP &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -4 \\ -6 & 1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} P \\ &= \begin{pmatrix} 3^n & 0 & -3^n \\ 3 \times 3^n & 0 & -4 \times 3^n \\ -6 \times 3^n & 1 & 7 \times 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 \times 3^n - 3 \times 3^n & -3^n + 3^n & 0 \\ 12 \times 3^n - 12 \times 3^n & -3 \times 3^n + 4 \times 3^n & 0 \\ -24 \times 3^n + 3 + 21 \times 3^n & 6 \times 3^n + 1 - 7 \times 3^n & 1 \end{pmatrix} \\ &= \boxed{\begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ -3 \times 3^n + 3 & -3^n + 1 & 1 \end{pmatrix}}. \end{aligned}$$

(d) *Justifier brièvement que D puis A sont inversibles.*

▶ D'après le résultat de la question 2(b), D est une matrice diagonale dont tous les coefficients sont non nuls, donc $\boxed{D \text{ est inversible}}$. De plus, $A = P^{-1}DP$ d'après la relation démontrée par récurrence dans la question précédente pour $n = 1$, donc $\boxed{A \text{ est inversible}}$ comme produit de matrices inversibles.

(e) *Exprimer A^{-n} en fonction de $n \in \mathbb{N}$.*

▶ On a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} A^{-n} &= (A^n)^{-1} \quad \text{par définition de la puissance négative d'une matrice inversible} \\ &= (P^{-1}D^nP)^{-1} \quad \text{d'après la relation démontrée par récurrence à la question 2(c)} \\ &= P^{-1}(D^n)^{-1}(P^{-1})^{-1} \quad \text{d'après l'inverse d'un produit de matrices inversibles} \\ &= P^{-1}(D^{-1})^nP. \end{aligned}$$

Pensez à utiliser le cours et les résultats précédents pour faire le moins possible de produits matriciels très chronophages.

Or D est une matrice diagonale d'après le résultat de la question 2(b), donc :

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ (D^{-1})^n = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{3}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^{-n} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3^{-n} \end{pmatrix}.$$

En utilisant les mêmes calculs que ceux de la question 2(c) (en remplaçant 3^n par 3^{-n}), on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$A^{-n} = P^{-1}(D^{-1})^n P = \boxed{\begin{pmatrix} 3^{-n} & 0 & 0 \\ 0 & 3^{-n} & 0 \\ -3 \times 3^{-n} + 3 & -3^{-n} + 1 & 1 \end{pmatrix}}.$$

3. *(Polynôme annulateur.) On pose $f : x \mapsto x^2 - 4x + 3$.*

(a) *Montrer que $f(A) = 0_3$ où 0_3 est la matrice carrée nulle d'ordre 3.*

▶ On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -6 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -6 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ -18 - 6 & -6 - 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ -24 & -8 & 1 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, on obtient :

$$f(A) = A^2 - 4A + 3\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ -24 & -8 & 1 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -6 & -2 & 1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{0_3}.$$

(b) *Prouver par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $(x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$ tel que $A^n = x_n A + y_n \mathrm{I}_3$.*

▶ Initialisation : pour $n = 0$ on a $A^0 = \mathrm{I}_3 = 0A + 1\mathrm{I}_3$. Si on pose $x_0 = 0$ et $y_0 = 1$, on a bien trouvé $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tel que $A^0 = x_0 A + y_0 \mathrm{I}_3$.
Hérédité : on suppose qu'il existe $(x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$ tel que $A^n = x_n A + y_n \mathrm{I}_3$ pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé. Alors on a :

$$A^{n+1} = A \times A^n = A(x_n A + y_n \mathrm{I}_3) = x_n A^2 + y_n A.$$

Or $A^2 - 4A + 3\mathrm{I}_3 = f(A) = 0_3$ d'après le résultat de la question précédente, donc $A^2 = 4A - 3\mathrm{I}_3$. En reportant, on obtient :

$$A^{n+1} = x_n(4A - 3\mathrm{I}_3) + y_n A = (4x_n + y_n)A - 3x_n \mathrm{I}_3.$$

Si on pose $x_{n+1} = 4x_n + y_n$ et $y_{n+1} = -3x_n$, on a bien trouvé $(x_{n+1}, y_{n+1}) \in \mathbb{R}^2$ tel que $A^{n+1} = x_{n+1}A + y_{n+1}\mathrm{I}_3$. Ainsi la proposition est vérifiée au rang $n+1$ dès qu'elle est vérifiée au rang n. Et ceci est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Conclusion : d'après le principe de récurrence, on a bien démontré que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \exists (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2,\ A^n = x_n A + y_n \mathrm{I}_3}.$$

(c) *Montrer que les suites $(x_n)_{n \geqslant 0}$ et $(y_n)_{n \geqslant 0}$ sont récurrentes linéaires d'ordre 2.*

▶ En reprenant la récurrence de la question précédente, on a prouvé que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} = 4x_n + y_n \\ y_{n+1} = -3x_n \end{cases}$$

En particulier, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$x_{n+2} = 4x_{n+1} + y_{n+1} = 4x_{n+1} - 3x_n$$
$$\text{et} \quad y_{n+2} = -3x_{n+1} = -3(4x_n + y_n) = -12x_n - 3y_n = 4(-3x_n) - 3y_n = 4y_{n+1} - 3y_n.$$

Donc $\boxed{(x_n)_{n \geqslant 0} \text{ et } (y_n)_{n \geqslant 0} \text{ sont récurrentes linéaires d'ordre 2}}$ et vérifient la même relation de récurrence.

(d) *En déduire des expressions de x_n et y_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$, puis de A^n en fonction de A, I_3 et $n \in \mathbb{N}$.*

▶ L'équation caractéristique $q^2 = 4q - 3$ admet pour discriminant $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 4 > 0$ donc elle a deux solutions réelles qui sont :

$$q_1 = \frac{-(-4) - \sqrt{4}}{2 \times 1} = 1 \quad \text{et} \quad q_2 = \frac{-(-4) + \sqrt{4}}{2 \times 1} = 3.$$

On en déduit qu'il existe $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ et $(\lambda_1', \lambda_2') \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n = \lambda_1 q_1^n + \lambda_2 q_2^n = \lambda_1 + \lambda_2 3^n \quad \text{et} \quad y_n = \lambda_1' + \lambda_2' 3^n.$$

Or on a $(x_0, y_0) = (0, 1)$ car $A^0 = \mathrm{I}_3 = 0A + 1\mathrm{I}_3$ et $(x_1, y_1) = (1, 0)$ car $A^1 = A = 1A + 0\mathrm{I}_3$. On en déduit que (λ_1, λ_2) et (λ_1', λ_2') sont solutions des systèmes linéaires suivants :

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} x_0 = \lambda_1 + \lambda_2 3^0 \\ x_1 = \lambda_1 + \lambda_2 3^1 \end{cases} \\
\iff &\begin{cases} 0 = \lambda_1 + \lambda_2 \\ 1 = \lambda_1 + 3\lambda_2 \end{cases} \\
\iff &\begin{cases} 0 = \lambda_1 + \lambda_2 \\ 1 = 2\lambda_2 \qquad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \end{cases} \\
\iff &\begin{cases} \lambda_1 = -\lambda_2 = -1/2 \\ \lambda_2 = 1/2 \end{cases}
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
&\begin{cases} y_0 = \lambda_1' + \lambda_2' 3^0 \\ y_1 = \lambda_1' + \lambda_2' 3^1 \end{cases} \\
\iff &\begin{cases} 1 = \lambda_1' + \lambda_2' \\ 0 = \lambda_1' + 3\lambda_2' \end{cases} \\
\iff &\begin{cases} 1 = \lambda_1' + \lambda_2' \\ -1 = 2\lambda_2' \qquad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \end{cases} \\
\iff &\begin{cases} \lambda_1' = 1 - \lambda_2' = 3/2 \\ \lambda_2' = -1/2 \end{cases}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_n = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}3^n \\ y_n = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}3^n \end{cases}}.$$

Finalement, on a en reportant ces expressions :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \ A^n = \frac{1}{2}(-1 + 3^n)A + \frac{1}{2}(3 - 3^n)\mathrm{I}_3}.$$

(e) *À l'aide de la relation $f(A) = 0_3$, justifier que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A et I_3.*

▶ Puisque $A^2 - 4A + 3\mathrm{I}_3 = f(A) = 0_3$, on a :

$$\mathrm{I}_3 = \frac{1}{3}\left(4A - A^2\right) = A\left(\frac{4}{3}\mathrm{I}_3 - \frac{1}{3}A\right) = \left(\frac{4}{3}\mathrm{I}_3 - \frac{1}{3}A\right)A.$$

Si on pose $B = \frac{4}{3}\mathrm{I}_3 - \frac{1}{3}A$, on a trouvé $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $AB = \mathrm{I}_3$ et $BA = \mathrm{I}_3$. On en déduit que $\boxed{A \text{ est inversible}}$ et que $\boxed{A^{-1} = B = \frac{4}{3}\mathrm{I}_3 - \frac{1}{3}A}$.

(f) *Conjecturer une expression de A^{-n} en fonction de A, I_3 et $n \in \mathbb{N}$ puis démontrer cette conjecture.*

▶ On remarque que l'expression obtenue à la question 3(d) est aussi vraie pour $n = -1$ car :

$$\frac{1}{2}(-1 + 3^{-1})A + \frac{1}{2}(3 - 3^{-1})\mathrm{I}_3 = \frac{1}{2}\left(-1 + \frac{1}{3}\right)A + \frac{1}{2}\left(3 - \frac{1}{3}\right)\mathrm{I}_3 = -\frac{1}{3}A + \frac{4}{3}\mathrm{I}_3 = A^{-1}$$

d'après le résultat de la question précédente. On conjecture que cette expression est aussi vraie pour tous les entiers négatifs, c'est-à-dire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ A^{-n} = \frac{1}{2}(-1 + 3^{-n})A + \frac{1}{2}(3 - 3^{-n})\mathrm{I}_3.$$

Or on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
&A^n \times \left[\frac{1}{2}(-1+3^{-n})A + \frac{1}{2}(3-3^{-n})\mathrm{I}_3\right] \\
=&\left[\frac{1}{2}(-1+3^{n})A + \frac{1}{2}(3-3^{n})\mathrm{I}_3\right]\left[\frac{1}{2}(-1+3^{-n})A + \frac{1}{2}(3-3^{-n})\mathrm{I}_3\right] \\
=&\frac{1}{4}\Big[(-1+3^n)(-1+3^{-n})A^2 + (-1+3^n)(3-3^{-n})A \\
&\qquad + (3-3^n)(-1+3^{-n})A + (3-3^n)(3-3^{-n})\mathrm{I}_3\Big] \\
=&\frac{1}{4}\Big[(1-3^n-3^{-n}+1)A^2 + \big(-3+3\times 3^n+3^{-n}-1\big)\,A \\
&\qquad + (-3+3^n+3\times 3^{-n}-1)A + (9-3\times 3^n - 3\times 3^{-n}+1)\mathrm{I}_3\Big] \\
=&\frac{1}{4}\Big[(2-3^n-3^{-n})A^2 + (-8+4\times 3^n+4\times 3^{-n})A + (10-3\times 3^n-3\times 3^{-n})\mathrm{I}_3\Big] \\
=&\frac{1}{4}\Big[(2-3^n-3^{-n})\underbrace{(A^2-4A+3\mathrm{I}_3)}_{=f(A)=0_3}+4\mathrm{I}_3\Big] = \mathrm{I}_3
\end{aligned}$$

et de même :

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{1}{2}(-1+3^{-n})A + \frac{1}{2}(3-3^{-n})\mathrm{I}_3\right] \times A^n \\
=&\left[\frac{1}{2}(-1+3^{-n})A + \frac{1}{2}(3-3^{-n})\mathrm{I}_3\right]\left[\frac{1}{2}(-1+3^{n})A + \frac{1}{2}(3-3^{n})\mathrm{I}_3\right] \\
=&\frac{1}{4}\Big[(-1+3^n)(-1+3^{-n})A^2 + (-1+3^n)(3-3^{-n})A \\
&\qquad + (3-3^n)(-1+3^{-n})A + (3-3^n)(3-3^{-n})\mathrm{I}_3\Big] \\
=&\mathrm{I}_3 \quad \text{puisqu'on retrouve la même expression que précedemment.}
\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ A^{-n} = (A^n)^{-1} = \frac{1}{2}(-1+3^{-n})A + \frac{1}{2}(3-3^{-n})\mathrm{I}_3}.$$

On peut aussi démontrer ce résultat par récurrence en utilisant la relation $f(A) = 0_3$ qui entraîne $A^{-2} = \frac{4}{3}A^{-1} - \frac{1}{3}\mathrm{I}_3$.

.

Exercice 2

Dans le plan affine muni d'un repère, on considère les points $M_0(1,1)$ et $M_1(4,2)$. Pour chaque $k \geqslant 1$, on définit par récurrence le point $M_k(x_k, y_k)$ par :

$$M_k = \mathrm{Bar}\Big((M_{k-1}, 1), (M_{k-2}, 2)\Big).$$

Étudier les coordonnées de chaque point M_k et en déduire que la suite $(M_k)_{k\geqslant 0}$ converge vers un point limite. Puis montrer que ce point point limite peut s'écrire comme un barycentre de M_0 et M_1 dont on déterminera les poids.

► D'après l'expression des coordonnées du barycentre, on a :

$$\forall k \geqslant 1, \quad \begin{cases} x_k = \dfrac{1 \times x_{k-1} + 2 \times x_{k-2}}{1+2} = \dfrac{1}{3}x_{k-1} + \dfrac{2}{3}x_{k-2} \\[2ex] y_k = \dfrac{1 \times y_{k-1} + 2 \times y_{k-2}}{1+2} = \dfrac{1}{3}y_{k-1} + \dfrac{2}{3}y_{k-2} \end{cases}.$$

On peut aussi retrouver l'expression de ces coordonnées en utilisant la définition du barycentre, c'est-à-dire :

$$1 \times \overrightarrow{M_kM_{k-1}} + 2 \times \overrightarrow{M_kM_{k-2}} = \overrightarrow{0}.$$

On en déduit que les suites $(x_k)_{k\geqslant 0}$ et $(y_k)_{k\geqslant 0}$ sont récurrentes linéaires d'ordre 2 et vérifient la même relation de récurrence d'équation caractéristique :

$$q^2 = \frac{1}{3}q + \frac{2}{3}.$$

Cette équation admet pour discriminant $\Delta = (-1/3)^2 - 4 \times 1 \times (-2/3) = 1/9 + 8/3 = 25/9 > 0$ donc elle a deux solutions réelles qui sont :

$$q_1 = \frac{-(-1/3) - \sqrt{25/9}}{2 \times 1} = \frac{1/3 - 5/3}{2} = -\frac{2}{2} \quad \text{et} \quad q_2 = \frac{-(-1/3) + \sqrt{25/9}}{2 \times 1} = 1.$$

On en déduit qu'il existe $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ et $(\lambda_1', \lambda_2') \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$\forall k \geqslant 0, \quad x_k = \lambda_1 q_1^k + \lambda_2 q_2^k = \lambda_1 \left(-\frac{2}{3}\right)^k + \lambda_2 \quad \text{et} \quad y_k = \lambda_1' \left(-\frac{2}{3}\right)^k + \lambda_2'.$$

Or on a $(x_0, y_0) = (1, 1)$ et $(x_1, y_1) = (4, 2)$ d'après l'énoncé. On en déduit que (λ_1, λ_2) et (λ_1', λ_2') sont solutions des systèmes linéaires suivants :

$$\begin{cases} x_0 = \lambda_1(-\frac{2}{3})^0 + \lambda_2 \\ x_1 = \lambda_1(-\frac{2}{3})^1 + \lambda_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_0 = \lambda_1'(-\frac{2}{3})^0 + \lambda_2' \\ y_1 = \lambda_1'(-\frac{2}{3})^1 + \lambda_2' \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 1 = \lambda_1 + \lambda_2 \\ 4 = -\frac{2}{3}\lambda_1 + \lambda_2 \end{cases} \qquad \iff \begin{cases} 1 = \lambda_1' + \lambda_2' \\ 2 = -\frac{2}{3}\lambda_1' + \lambda_2' \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 1 = \lambda_1 + \lambda_2 \\ 3 = -\frac{5}{3}\lambda_1 \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \end{cases} \qquad \iff \begin{cases} 1 = \lambda_1' + \lambda_2' \\ 1 = -\frac{5}{3}\lambda_1' \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 = -9/5 \\ \lambda_2 = 1 - \lambda_1 = 14/5 \end{cases} \qquad \iff \begin{cases} \lambda_1' = -3/5 \\ \lambda_2' = 1 - \lambda_1' = 8/5 \end{cases}.$$

Par conséquent, on obtient :

$$\forall k \geqslant 1, \quad \begin{cases} x_k = -\frac{9}{5}\left(-\frac{2}{3}\right)^k + \frac{14}{5} \\ \\ y_k = -\frac{3}{5}\left(-\frac{2}{3}\right)^k + \frac{8}{5} \end{cases}.$$

Or $(-2/3)^k$ tend vers 0 quand k tend vers $+\infty$ car $-2/3 \in]-1, 1[$. On en déduit que :

$$\lim_{k\to+\infty} x_k = \frac{14}{5} \quad \text{et} \quad \lim_{k\to+\infty} y_k = \frac{8}{5}.$$

Par conséquent, $\boxed{\text{la suite } (M_k)_{k\geqslant 0} \text{ converge vers le point de coordonnées } (14/5, 8/5)}$.

On cherche maintenant des poids $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que ce point limite soit égal à $\mathrm{Bar}((M_0, \alpha), (M_1, \beta))$ avec $\alpha + \beta \neq 0$. En exprimant les coordonnées, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{14}{5} = \frac{\alpha \times x_0 + \beta \times x_1}{\alpha + \beta} = \frac{\alpha + 4\beta}{\alpha + \beta} \\ \\ \frac{8}{5} = \frac{\alpha \times y_0 + \beta \times y_1}{\alpha + \beta} = \frac{\alpha + 2\beta}{\alpha + \beta} \end{cases} \iff \begin{cases} 14(\alpha + \beta) = 5(\alpha + 4\beta) \\ 8(\alpha + \beta) = 5(\alpha + 2\beta) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 9\alpha - 6\beta = 0 \\ 3\alpha - 2\beta = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 9\alpha - 6\beta = 0 \\ 0 = 0 \quad L_2 \leftarrow 3L_2 - L_1 \end{cases} \iff \alpha = \frac{2}{3}\beta.$$

On a un système linéaire avec une équation auxiliaire compatible et une inconnue auxiliaire, donc il y a une infinité de solutions de la forme $(\alpha, \beta) = (\frac{2}{3}\beta, \beta)$ où $\beta \in \mathbb{R}^\star$. En particulier pour $\beta = 3$, on a bien que $\boxed{\text{le point limite de la suite } (M_k)_{k\geqslant 0} \text{ est le barycentre } \mathrm{Bar}((M_0, 2), (M_1, 3))}$.

Attention : on ne peut pas choisir $\beta = 0$ car sinon la masse du système de points serait $\alpha + \beta = 0 + 0 = 0$. Par contre, n'importe quelle valeur non nulle de β convient.

Exercice 3

Dans l'espace affine muni d'un repère orthonormé, on considère les droites de représentations paramétriques suivantes :

$$\mathcal{D}_1 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 + t \\ z = -1 - t \end{cases},\ t \in \mathbb{R} \quad \textit{et} \quad \mathcal{D}_2 : \begin{cases} x = 5 + t \\ y = -2 - 2t \\ z = 3 + t \end{cases},\ t \in \mathbb{R}.$$

Montrer qu'il existe une unique droite Δ perpendiculaire commune à $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ dont on déterminera une représentation paramétrique.

► D'après les représentations paramétriques de l'énoncé, les vecteurs

$$\overrightarrow{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{u_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sont respectivement des vecteurs directeurs de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$. Or on a :

$$\mathrm{rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{matrix} = \mathrm{rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 \leftarrow 3L_3 + 2L_2 \end{matrix} = 2.$$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ ne sont pas colinéaires. On en déduit que les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ ne sont ni parallèles ni confondues et donc qu'il existe une unique droite Δ perpendiculaire commune à $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.

Ce raisonnement n'est pas nécessaire puisqu'on retrouvera forcément ce résultat par le calcul mais il est souvent bon en géométrie d'interpréter et donner du sens à ce qu'on fait pour savoir quoi faire et surtout ne pas se perdre dans des calculs trop abstraits.

Puisque $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ sont des vecteurs directeurs des droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$, ils sont normaux à la perpendiculaire commune Δ. De plus $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ ne sont pas colinéaires. Donc Δ admet une représentation cartésienne de la forme :

$$\begin{cases} 1 \times x + 1 \times y + (-1) \times z + d = 0 \\ 1 \times x + (-2) \times y + 1 \times z + d' = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y - z + d = 0 \\ x - 2y + z + d' = 0 \end{cases} \quad \text{avec } (d, d') \in \mathbb{R}^2.$$

Puisque Δ est perpendiculaire à $\mathcal{D}_1$, les droites Δ et $\mathcal{D}_1$ se coupent en un unique point et donc le système linéaire suivant d'inconnue $t \in \mathbb{R}$ admet une unique solution :

$$\begin{cases} (1 + t) + (-1 + t) - (-1 - t) + d = 0 \\ (1 + t) - 2(-1 + t) + (-1 - t) + d' = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3t = -1 - d \\ -2t = -2 - d' \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 3t = -1 - d \\ 0 = 3(-2 - d') + 2(-1 - d) = -2d - 3d' - 8 \quad L_2 \leftarrow 3L_2 + 2L_1 \end{cases}.$$

On a un système linéaire avec une équation auxiliaire et aucune inconnue auxiliaire. Puisqu'il admet une unique solution, on en déduit que l'équation auxiliaire est compatible, donc que $-2d - 3d' - 8 = 0$.

De même en utilisant que Δ est perpendiculaire à $\mathcal{D}_2$, sait que le système linéaire suivant d'inconnue $t \in \mathbb{R}$ admet une unique solution :

$$\begin{cases} (5 + t) + (-2 - 2t) - (3 + t) + d = 0 \\ (5 + t) - 2(-2 - 2t) + (3 + t) + d' = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -2t = -d \\ 6t = -12 - d' \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -2t = -d \\ 0 = -12 - d' + 3(-d) = -3d - d' - 12 \quad L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1 \end{cases}.$$

De même, puisque ce système linéaire admet une unique solution, on en déduit que l'équation auxiliaire est compatible, donc que $-3d - d' - 12 = 0$.

En regroupant ces deux conditions, on obtient un système linéaire vérifié par les inconnues $(d, d') \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} -2d - 3d' - 8 = 0 \\ -3d - d' - 12 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2d + 3d' = -8 \\ 3d + d' = -12 \end{cases} \iff \begin{cases} 2d + 3d' = -8 \\ -7d' = -24 + 24 = 0 \quad L_2 \leftarrow 2L_2 - 3L_1 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} d = (3d' + 8)/(-2) = -4 \\ d' = 0 \end{cases}.$$

Ainsi la droite Δ admet pour représentation cartésienne :

$$\begin{cases} x + y - z - 4 = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}.$$

On obtient une représentation paramétrique en posant le paramètre $z = t$:

$$\begin{cases} x + y - t - 4 = 0 \\ x - 2y + t = 0 \\ z = t \end{cases} \iff \begin{cases} x + y = 4 + t \\ x - 2y = -t \\ z = t \end{cases} \iff \begin{cases} x + y = 4 + t \\ -3y = -4 - 2t \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ z = t \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x = 4 + t - y = 4 + t - (\frac{4}{3} + \frac{2}{3}t) = \frac{8}{3} + \frac{1}{3}t \\ y = \frac{4}{3} + \frac{2}{3}t \\ z = t \end{cases}.$$

Finalement, on obtient comme représentation paramétrique de Δ :

$$\boxed{\begin{cases} x = \dfrac{8}{3} + \dfrac{1}{3}t \\ y = \dfrac{4}{3} + \dfrac{2}{3}t \quad , \quad t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}}.$$

Il existe de nombreuses méthodes pour résoudre cet exercice. On peut par exemple chercher directement une représentation paramétrique de Δ (donc un vecteur directeur) sans utiliser une représentation cartésienne. Le plus important est de ne pas se perdre dans les calculs et de savoir ce qu'on est en train de faire à chaque étape du raisonnement.

Problème

On appelle suite des moyennes de Cesàro (du nom du mathématicien italien Ernesto Cesàro, 1859-1906) d'une suite réelle $(u_n)_{n\geqslant 1}$, la suite $(\sigma_n)_{n\geqslant 1}$ définie par :

$$\forall n \geqslant 1, \quad \sigma_n = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k.$$

Dans ce problème, on admet le lemme de Cesàro énoncé ci-dessous et on propose d'étudier quelques applications.

Si une suite réelle $(u_n)_{n\geqslant 1}$ admet une limite (finie ou infinie) alors la suite $(\sigma_n)_{n\geqslant 1}$ de ses moyennes de Cesàro admet la même limite.

A) Limite d'un produit. *On considère la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ définie par :*

$$\forall n \geqslant 1, \quad a_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k/n}.$$

1. *Montrer que $(\sigma_n = \ln(a_n))_{n\geqslant 1}$ est la suite des moyennes de Cesàro d'une suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ à déterminer.*

▶ Soit $n \geqslant 1$. On a :

$$\begin{aligned}
\ln(a_n) &= \ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k/n}\right) = \ln\left(\left(1+\frac{1}{1}\right)^{1/n}\times\left(1+\frac{1}{2}\right)^{2/n}\times\cdots\times\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n/n}\right)\\
&= \ln\left(\left(1+\frac{1}{1}\right)^{1/n}\right)+\ln\left(\left(1+\frac{1}{2}\right)^{2/n}\right)+\cdots+\ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n/n}\right) = \sum_{k=1}^{n}\ln\left(\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k/n}\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}k\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}u_k \quad \text{en posant} \quad u_k = k\ln\left(1+\frac{1}{k}\right).
\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{(\sigma_n = \ln(a_n))_{n\geqslant 1} \text{ est la suite des moyennes de Cesàro de la suite } (u_n = n\ln(1+\frac{1}{n}))_{n\geqslant 1}}$.

2. *Déterminer la limite de $n\ln(1+\frac{1}{n})$ quand n tend vers $+\infty$.*

▶ Puisque $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0$, on a :

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n} \quad \text{donc} \quad n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{n} = 1 \quad \text{par produit d'équivalents.}$$

On en déduit que $\boxed{n\ln(1+\frac{1}{n}) \text{ tend vers 1 quand } n \text{ tend vers } +\infty}$.

N'oubliez pas de préciser que $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0$ pour justifier l'utilisation de l'équivalent usuel.

3. *En déduire que la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ converge à l'aide du lemme de Cesàro et déterminer sa limite.*

▶ D'après le résultat de la question précédente, la suite $(u_n = n\ln(1+\frac{1}{n}))_{n\geqslant 1}$ converge vers 1. Or $(\sigma_n = \ln(a_n))_{n\geqslant 1}$ est la suite des moyennes de Cesàro de $(u_n)_{n\geqslant 1}$ d'après le résultat de la question 1. D'après le lemme de Cesàro, on en déduit que $(\sigma_n = \ln(a_n))_{n\geqslant 1}$ converge aussi vers 1. Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} e^{\ln(a_n)} = \lim_{x\to 1} e^x = e^1 = e \quad \text{par composition de limites.}$$

Par conséquent, $\boxed{\text{la suite } (a_n)_{n\geqslant 1} \text{ converge vers } e}$.

N'oubliez aucun argument nécessaire, mais n'en rajoutez pas non plus. Montrez que vous savez être précis et concis dans vos raisonnements !

B) Croissance comparée. *On fixe un réel $b > 0$.*

4. *En s'inspirant de la partie A, montrer que $\sqrt[n]{n!}$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.*

▶ Soit $n \geqslant 1$. On a :

$$\ln\left(\sqrt[n]{n!}\right) = \ln\left((1\times 2\times\cdots\times n)^{1/n}\right) = \frac{1}{n}\left(\ln(1)+\ln(2)+\cdots+\ln(n)\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(k).$$

Ainsi $(\sigma_n = \ln(\sqrt[n]{n!}))_{n\geqslant 1}$ est la suite des moyennes de Cesàro de la suite $(u_n = \ln(n))_{n\geqslant 1}$. Or $\ln(n)$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$. D'après le lemme de Cesàro, on en déduit que $\ln\left(\sqrt[n]{n!}\right)$ tend aussi vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$. Donc :

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n!} = \lim_{n\to+\infty}\exp\left(\ln\left(\sqrt[n]{n!}\right)\right) = \lim_{x\to+\infty}\exp(x) = \boxed{+\infty} \quad \text{par composition de limites.}$$

5. *À l'aide du résultat précédent, retrouver que la suite $(b^n)_{n\geqslant 1}$ est négligeable devant la suite $(n!)_{n\geqslant 1}$.*

▶ On a pour tout $n \geqslant 1$:

$$\frac{b^n}{n!} = \frac{b^n}{\left(\sqrt[n]{n!}\right)^n} = \left(\frac{b}{\sqrt[n]{n!}}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(\frac{b}{\sqrt[n]{n!}}\right)\right).$$

Or $\sqrt[n]{n!}$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ d'après le résultat de la question précédente. Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b}{\sqrt[n]{n!}} = 0^+ \quad \text{par quotient de limites et car } b>0,$$

$$\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{b}{\sqrt[n]{n!}}\right) = \lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty \quad \text{par composition de limites,}$$

$$\lim_{n\to+\infty} n\ln\left(\frac{b}{\sqrt[n]{n!}}\right) = -\infty \quad \text{par produit de limites,}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b^n}{n!} = \lim_{n\to+\infty} \exp\left(n\ln\left(\frac{b}{\sqrt[n]{n!}}\right)\right) = \lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0 \quad \text{par composition de limites.}$$

On en déduit que $\boxed{(b^n)_{n\geqslant 1} \text{ est négligeable } (n!)_{n\geqslant 1}}$.

C) *Équivalent d'une suite récurrente (1^{er} exemple).* *On considère la suite $(c_n)_{\geqslant 1}$ définie par :*

$$c_1 \in]2,+\infty[\quad \textit{et} \quad \forall n \geqslant 1, \quad c_{n+1} = \frac{c_n^2}{c_n - 1}.$$

6. (a) *Étudier les variations de la fonction $f : x \mapsto x^2/(x-1)$.*

▶ La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ comme quotient de fonctions polynomiales dont le dénominateur est non nul. De plus :

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}, \quad f'(x) = \frac{2x\times(x-1) - x^2\times 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}.$$

D'où le tableau de signes de f' et des variations de f :

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$(x-2)$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x-1)^2$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$ $\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

car

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{1-\frac{1}{x}} = -\infty \quad \text{et de même} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty,$$

$$f(0) = \frac{0^2}{0-1} = 0 \quad \text{et} \quad f(2) = \frac{2^2}{2-1} = 4,$$

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-} \frac{x^2}{x-1} = -\infty \quad \text{et de même} \quad \lim_{x\to1^+} f(x) = +\infty.$$

(b) *Montrer que $(c_n)_{\geqslant 1}$ est bien définie et strictement croissante.*

▶

D'après le tableau des variations de la question précédente, on remarque que $c_2 \in]4, +\infty[$ car $c_1 \in]2, +\infty[$. En particulier $c_2 \in]2, +\infty[$. De même on peut montrer que $c_3 \in]2, +\infty[$, $c_4 \in]2, +\infty[$, etc. Ceci suffit à montrer que la suite est bien définie puisque f est bien définie sur $]2, +\infty[$. Aidez vous du tableau des variations pour savoir quoi démontrer par récurrence.

Montrons par récurrence que $2 < c_n < c_{n+1}$ pour tout $n \geqslant 1$.
Initialisation. On a bien $2 < c_1$ car $c_1 \in]2, +\infty[$ d'après l'énoncé. De plus :

$$c_2 - c_1 = \frac{c_1^2}{c_1 - 1} - c_1 = \frac{c_1^2 - c_1(c_1 - 1)}{c_1 - 1} = \frac{c_1}{c_1 - 1} > 0 \quad \text{car } c_1 > 2 \text{ (donc } c_1 > 0 \text{ et } c_1 - 1 > 0).$$

Ainsi $c_1 < c_2$ et la proposition est démontrée pour $n = 1$.
Hérédité. On suppose que $2 < c_n < c_{n+1}$ pour un entier $n \geqslant 1$ fixé. Puisque f est strictement croissante sur $]2, +\infty[$ d'après le tableau des variations de la question précédente, on a :

$$f(2) < f(c_n) < f(c_{n+1}) \quad \text{donc} \quad 4 < c_{n+1} < c_{n+2}.$$

Puisque $2 < 4$, on a en particulier $2 < c_{n+1} < c_{n+2}$. Donc la proposition est vraie au rang $n+1$ dès qu'elle est vraie au rang n, et ceci est vrai pour tout entier $n \geqslant 1$.
Conclusion. D'après le principe de récurrence, on a démontré que $2 < c_n < c_{n+1}$ pour tout $n \geqslant 1$. On en déduit que $\boxed{(c_n)_{\geqslant 1} \text{ est bien définie}}$ car la fonction f est bien définie sur $]2, +\infty[$, et $\boxed{(c_n)_{\geqslant 1} \text{ est strictement croissante}}$.

(c) *Prouver que $(c_n)_{\geqslant 1}$ diverge et admet pour limite $+\infty$.*

▶ Par l'absurde, on suppose que $(c_n)_{\geqslant 1}$ est majorée. Puisque $(c_n)_{\geqslant 1}$ est croissante d'après le résultat de la question précédente, on en déduit que $(c_n)_{\geqslant 1}$ est convergente d'après le théorème de la limite monotone. On note $\ell \in \mathbb{R}$ sa limite. On a pour tout $n \geqslant 1$:

$$c_{n+1} = \frac{c_n^2}{c_n - 1}$$

d'où en passant à la limite quand n tend vers $+\infty$:

$$\ell = 1 \quad \text{ou bien} \quad \ell = \frac{\ell^2}{\ell - 1}.$$

Attention : $\ell = \ell^2/(\ell - 1)$ n'est pas définie si $\ell = 1$. Il est donc nécessaire de distinguer le cas où $\ell = 1$.

Or :

$$\ell = \frac{\ell^2}{\ell - 1} \iff \ell(\ell - 1) = \ell^2 \iff -\ell = 0.$$

Par conséquent, on a $\ell = 1$ ou bien $\ell = 0$. Or on a $c_n > c_1 > 2$ pour tout $n \geqslant 1$ car $(c_n)_{\geqslant 1}$ est strictement croissante d'après le résultat de la question précédente et $c_1 > 2$ d'après l'énoncé. En passant à la limite quand n tend vers $+\infty$, on obtient que $\ell \geqslant 2$ ce qui est absurde puisqu'on a démontré que $\ell = 1$ ou $\ell = 0$.

Par conséquent, $(c_n)_{\geqslant 1}$ n'est pas majorée. Puisque $(c_n)_{\geqslant 1}$ est croissante d'après le résultat de la question précédente, on en déduit que $\boxed{(c_n)_{\geqslant 1} \text{ diverge et admet pour limite } +\infty}$.

7. *Déterminer la limite de $u_n = c_{n+1} - c_n$ quand n tend vers $+\infty$.*

▶ On a pour tout $n \geqslant 1$:

$$u_n = c_{n+1} - c_n = \frac{c_n^2}{c_n - 1} - c_n = \frac{c_n^2 - c_n(c_n - 1)}{c_n - 1} = \frac{c_n}{c_n - 1} = \frac{1}{1 - \frac{1}{c_n}}.$$

Puisque $\lim_{n\to+\infty} c_n = +\infty$ d'après le résultat de la question précédente, on en déduit que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 1}.$$

8. *En déduire que $(c_n - c_1)/(n-1)$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$ à l'aide du lemme de Cesàro.*
▶ D'après le lemme de Cesàro, la suite $(\sigma_n)_{n\geqslant 1}$ des moyennes de Cesàro de $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge aussi vers 1. Or la suite $(\sigma_n)_{n\geqslant 1}$ des moyennes de Cesàro de $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est définie par :

$$\begin{aligned}
\forall n \geqslant 1, \quad \sigma_n &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(c_{k+1}-c_k) = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} c_{k+1} - \sum_{k=1}^{n} c_k\right) \\
&= \frac{1}{n}(c_{n+1}-c_n) \quad \text{en reconnaissant une somme télescopique} \\
&= \frac{c_{n+1}-c_1}{n}.
\end{aligned}$$

Ainsi $\lim_{n\to+\infty}(c_{n+1}-c_1)/n = \lim_{n\to+\infty}\sigma_n = \lim_{n\to+\infty} u_n = 1$. En remplaçant la variable n par $n-1$ (car $\lim_{n\to+\infty}(n-1) = +\infty$), on en déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{c_{(n-1)+1}-c_1}{n-1} = \boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{c_n - c_1}{n-1} = 1}.$$

9. *Déterminer un équivalent simple de la suite $(c_n)_{n\geqslant 1}$.*
▶ Par définition de l'équivalence et d'après le résultat de la question précédente, on a :

$$(c_n - c_1) \underset{n\to+\infty}{\sim} (n-1) = n\left(1 - \frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} n.$$

De plus :

$$(c_n - c_1) = c_n\left(1 - \frac{c_1}{c_n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} c_n \quad \text{car } \lim_{n\to+\infty} c_n = +\infty \text{ d'après le résultat de la question 6.}$$

On en déduit par transitivité que :

$$\boxed{c_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n}.$$

D) Équivalent d'une suite récurrente (2^e^ exemple). *On considère la suite $(d_n)_{\geqslant 1}$ définie par :*

$$d_1 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 1, \quad d_{n+1} = \sin(d_n).$$

10. *Prouver que $(d_n)_{\geqslant 1}$ converge et admet pour limite 0.*
▶

Un petit croquis rapide de la courbe représentative de la fonction sinus permet de savoir ce qu'il faut démontrer par récurrence. Ici, on remarque que la suite $(d_n)_{\geqslant 1}$ est décroissante et minorée par 0. Exploitez les méthodes apprises pour répondre le plus rapidement possible à ce type de question classique.

Montrons par récurrence que $0 < d_{n+1} \leqslant d_n < \frac{\pi}{2}$ pour tout $n \geqslant 1$.
Initialisation. On a bien $0 < d_1 < \frac{\pi}{2}$ car $d_1 \in]0, \frac{\pi}{2}[$ d'après l'énoncé. De plus $d_2 = \sin(d_1)$ donc :

$$0 < d_2 \leqslant d_1 < \frac{\pi}{2} \quad \text{car} \begin{cases} \sin(x) \leqslant x \text{ pour tout } x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ \sin(x) > 0 \text{ pour tout } x \in]0, \frac{\pi}{2}[\end{cases}.$$

Ne perdez pas de temps à démontrer ces inégalités, c'est du cours !

Ainsi la proposition est démontrée pour $n = 1$.
Hérédité. On suppose que $0 < d_{n+1} \leqslant d_n < \frac{\pi}{2}$ pour un entier $n \geqslant 1$ fixé. Puisque la fonction sinus est strictement croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, on a :

$$\sin(0) < \sin(d_{n+1}) \leqslant \sin(d_n) < \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{donc} \quad 0 < d_{n+2} \leqslant d_{n+1} < 1.$$

Puisque $1 < \frac{\pi}{2}$, on a en particulier $0 < d_{n+2} \leqslant d_{n+1} < \frac{\pi}{2}$. Donc la proposition est vraie au rang $n+1$ dès qu'elle est vraie au rang n, et ceci est vrai pour tout entier $n \geqslant 1$.
Conclusion. D'après le principe de récurrence, on a démontré que $0 < d_{n+1} \leqslant d_n < \frac{\pi}{2}$ pour tout $n \geqslant 1$ pour tout $n \geqslant 1$. On en déduit en particulier que $(d_n)_{\geqslant 1}$ est décroissante et minorée par 0. Donc $(d_n)_{\geqslant 1}$ est convergente d'après le théorème de la limite monotone. On note $\ell \in \mathbb{R}$ sa limite. Or on a pour tout $n \geqslant 1$:

$$d_{n+1} = \sin(d_n)$$

d'où en passant à la limite quand n tend vers $+\infty$:

$$\ell = \sin(\ell).$$

On en déduit que $\ell = 0$ car le seul point d'intersection entre la courbe représentative de la fonction sinus et la première bissectrice est l'origine.

Encore une fois, utilisez ce que vous avez appris (ici les courbes représentatives des fonctions usuelles) pour gagner du temps.

Finalement, $\boxed{(d_n)_{\geqslant 1} \text{ converge et admet pour limite } 0}$.

11. (a) Montrer pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ que $\sin(x) \geqslant x - \frac{x^3}{6}$, puis que $\sin(x) \leqslant x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$.

▶ On pose :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad f(x) = \sin(x) - \left(x - \frac{x^3}{6}\right) = \sin(x) - x + \frac{x^3}{6}.$$

La fonction f est dérivable comme somme de fonctions dérivables, et on a :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad f'(x) = \cos(x) - 1 + \frac{3x^2}{6} = \cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2}.$$

La fonction f' est dérivable comme somme de fonctions dérivables, et on a :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad f''(x) = -\sin(x) - 0 + \frac{2x}{2} = -\sin(x) + x \geqslant 0 \quad \text{car } 0 \leqslant \sin(x) \leqslant x.$$

D'où le tableau des signes et des variations suivant :

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$f''(x)$		$+$	
$f'(x)$	$f'(0) = 0$	$\nearrow$	
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$f(0) = 0$	$\nearrow$	

On en déduit que f est positive sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et donc que :

$$\boxed{\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \sin(x) \geqslant x - \frac{x^3}{6}}.$$

De même, on pose :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad g(x) = \sin(x) - \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right) = \sin(x) - x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120}.$$

La fonction g est dérivable comme somme de fonctions dérivables, et on a :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad g'(x) = \cos(x) - 1 + \frac{3x^2}{6} - \frac{5x^4}{120} = \cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}.$$

La fonction g' est dérivable comme somme de fonctions dérivables, et on a :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad g''(x) = -\sin(x) - 0 + \frac{2x}{2} - \frac{4x^3}{24} = -\sin(x) + x - \frac{x^3}{6} = -f(x) \leqslant 0.$$

D'où le tableau des signes et des variations suivant :

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$g''(x)$		$-$	
$g'(x)$	$g'(0) = 0$	$\searrow$	
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	$g(0) = 0$	$\searrow$	

On en déduit que g est négative sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et donc que :

$$\boxed{\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \sin(x) \leqslant x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}}.$$

(b) *En déduire que :*

$$\sin^2(d_n) - (d_n)^2 \underset{n \to +\infty}{\sim} -\frac{(d_n)^4}{3}.$$

► Soit $n \geqslant 1$. On a montré à la question 10 que $d_n \in]0, \frac{\pi}{2}[$, d'où d'après le résultat de la question précédente :

$$d_n - \frac{(d_n)^3}{6} \leqslant \sin(d_n) \leqslant d_n - \frac{(d_n)^3}{6} + \frac{(d_n)^5}{120}.$$

Or $d_n - \frac{(d_n)^3}{6} = d_n(1 - \frac{(d_n)^2}{6})$ avec $d_n > 0$ et $\lim_{n \to +\infty}(1 - \frac{(d_n)^2}{6}) = 1 > 0$ d'après le résultat de la question 10. On en déduit qu'il existe un entier $N \geqslant 1$ tel que $d_n - \frac{(d_n)^3}{6} \geqslant 0$ pour tout $n \geqslant N$.

N'oubliez pas justifier que tout est positif avant de passer au carré car la fonction $x \mapsto x^2$ n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$! On peut également utiliser que $d_n < \frac{\pi}{2}$ pour montrer que $(1 - \frac{(d_n)^2}{6}) > 0$ pour tout $n \geqslant 1$.

En utilisant la croissance de la fonction $x \mapsto x^2$, on obtient pour tout entier $n \geqslant N$ que :

$$\begin{aligned}
\left(d_n - \frac{(d_n)^3}{6}\right)^2 &\leqslant \sin^2(d_n) \leqslant \left(d_n - \frac{(d_n)^3}{6} + \frac{(d_n)^5}{120}\right)^2 \\
(d_n)^2 - 2\frac{(d_n)^4}{6} + \frac{(d_n)^6}{6^2} &\leqslant \sin^2(d_n) \leqslant (d_n)^2 - 2\frac{(d_n)^4}{6} + 2\frac{(d_n)^6}{120} + \frac{(d_n)^6}{6^2} - 2\frac{(d_n)^8}{6\times 120} + \frac{(d_n)^{10}}{120^2} \\
(d_n)^2 - \frac{(d_n)^4}{3} + \frac{(d_n)^6}{36} &\leqslant \sin^2(d_n) \leqslant (d_n)^2 - \frac{(d_n)^4}{3} + \frac{2(d_n)^6}{45} - \frac{(d_n)^8}{360} + \frac{(d_n)^{10}}{14400}.
\end{aligned}$$

et puisque $-(d_n)^4/3 < 0$:

$$\begin{aligned}
\frac{-\frac{(d_n)^4}{3} + \frac{(d_n)^6}{36}}{-(d_n)^4/3} &\geqslant \frac{\sin^2(d_n) - (d_n)^2}{-(d_n)^4/3} \geqslant \frac{-\frac{(d_n)^4}{3} + \frac{2(d_n)^6}{45} - \frac{(d_n)^8}{360} + \frac{(d_n)^{10}}{14400}}{-(d_n)^4/3} \\
1 - \frac{(d_n)^2}{12} &\geqslant \frac{\sin^2(d_n) - (d_n)^2}{-(d_n)^4/3} \geqslant 1 - \frac{2(d_n)^2}{15} + \frac{(d_n)^4}{120} - \frac{(d_n)^6}{4800}.
\end{aligned}$$

Or on a d'après le résultat de la question 10 :

$$\lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{(d_n)^2}{12} = \lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{2(d_n)^2}{15} + \frac{(d_n)^4}{120} - \frac{(d_n)^6}{4800} = 1.$$

On en déduit d'après le théorème de la limite par encadrement :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin^2(d_n) - (d_n)^2}{-(d_n)^4/3} = 1 \quad \text{donc} \quad \boxed{\sin^2(d_n) - (d_n)^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{(d_n)^4}{3}}.$$

(c) *Déterminer la limite de $u_n = (d_{n+1})^{-2} - (d_n)^{-2}$ quand n tend vers $+\infty$.*

▶ On a pour tout $n \geqslant 1$:

$$u_n = (d_{n+1})^{-2} - (d_n)^{-2} = \frac{1}{(d_{n+1})^2} - \frac{1}{(d_n)^2} = \frac{(d_n)^2 - (d_{n+1})^2}{(d_{n+1})^2(d_n)^2} = \frac{(d_n)^2 - \sin^2(d_n)}{\sin^2(d_n)(d_n)^2}.$$

Puisque $\lim_{n\to+\infty} d_n = 0$ d'après le résultat de la question 10, on a :

$$\sin(d_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} d_n \quad \text{donc} \quad \sin^2(d_n)(d_n)^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} (d_n)^4 \quad \text{par produit d'équivalents.}$$

D'où en utilisant le résultat de la question précédente :

$$u_n = -\frac{\sin^2(d_n) - (d_n)^2}{(d_n)^2\sin^2(d_n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{-(d_n)^4/3}{(d_n)^4} = \frac{1}{3} \quad \text{par quotient d'équivalents.}$$

Par conséquent, $\boxed{u_n = (d_{n+1})^{-2} - (d_n)^{-2} \text{ tend vers } 1/3 \text{ quand } n \text{ tend vers } +\infty}$.

12. *En déduire que $((d_n)^{-2} - (d_1)^{-2})/(n-1)$ tend vers $1/3$ quand n tend vers $+\infty$ à l'aide du lemme de Cesàro.*

▶ D'après le lemme de Cesàro, la suite $(\sigma_n)_{n\geqslant 1}$ des moyennes de Cesàro de $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge aussi vers $1/3$. Or la suite $(\sigma_n)_{n\geqslant 1}$ des moyennes de Cesàro de $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est définie par :

$$\begin{aligned}
\forall n \geqslant 1, \quad \sigma_n &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left((d_{k+1})^{-2} - (d_k)^{-2}\right) = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}(d_{k+1})^{-2} - \sum_{k=1}^{n}(d_k)^{-2}\right) \\
&= \frac{1}{n}\left((d_{n+1})^{-2} - (d_1)^{-2}\right) \quad \text{en reconnaissant une somme télescopique} \\
&= \frac{(d_{n+1})^{-2} - (d_1)^{-2}}{n}.
\end{aligned}$$

Ainsi $\lim_{n\to+\infty}((d_{n+1})^{-2} - (d_1)^{-2})/n = \lim_{n\to+\infty}\sigma_n = \lim_{n\to+\infty} u_n = 1/3$. En remplaçant la variable n par $n-1$ (car $\lim_{n\to+\infty}(n-1) = +\infty$), on en déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(d_{(n-1)+1})^{-2} - (d_1)^{-2}}{n-1} = \boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{(d_n)^{-2} - (d_1)^{-2}}{n-1} = \frac{1}{3}}.$$

13. Déterminer un équivalent simple de la suite $(d_n)_{n\geqslant 1}$.

▶ Par définition de l'équivalence et d'après le résultat de la question précédente, on a :

$$\left((d_n)^{-2}-(d_1)^{-2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{3}(n-1)=\frac{n}{3}\left(1-\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{3}.$$

De plus :

$$\left((d_n)^{-2}-(d_1)^{-2}\right)=(d_n)^{-2}\left(1-\frac{(d_n)^2}{(d_1)^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} (d_n)^{-2} \quad \text{car } \lim_{n\to+\infty} d_n=0.$$

On en déduit par transitivité que :

$$(d_n)^{-2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{3} \quad \text{donc} \quad d_n=\left((d_n)^{-2}\right)^{-1/2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{3}\right)^{-1/2}=\sqrt{\frac{3}{n}}.$$

Finalement, on a :

$$\boxed{d_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3}{n}}}.$$

DS n^o 6 de mathématiques et d'informatique

durée : 3 heures

Exercice 1

Les trois questions sont indépendantes.

1. On suppose que la fonction `randint` est importée. On rappelle qu'elle prend en argument deux entiers a et b et qu'elle permet de tirer un entier au hasard compris entre a et b. Par exemple, `randint(1,3)` renvoie un élément de $\{1, 2, 3\}$ pris au hasard. On rappelle également que `a%3` est le reste de la division euclidienne de a par 3. Par exemple, `5%3` a pour valeur 2.

   On considère le programme suivant :

```
a=0
while(a%2==0) :
a=randint(0,10)
```

   Quelles sont les valeurs possibles de a lorsque l'on sort de la boucle ?

2. Si on dispose de deux suites adjacentes $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il est possible de déterminer un encadrement de la limite commune l à ϵ près. En effet, l étant comprise entre ces deux suites, il suffit de trouver un entier n tel que $|u_n - v_n| \leq \epsilon$. Si on représente les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ respectivement par des fonctions u et v, l'algorithme précédent peut s'écrire en pseudo-code de la manière suivante :

```
approximation(u,v,epsilon) :
On commence n à 0.
tant que |u(n)-v(n)|>epsilon :
on augmente n de 1.
on retourne la liste [u(n),v(n)]
```

   Écrire une fonction en Python `approximation(u,v,epsilon)` effectuant ce qui est décrit dans le pseudo-code. On supposera que :
   — `epsilon` est un réel strictement positif.
   — `u` est une fonction telle que pour tout entier n, la valeur de `u(n)` est u_n.
   — `v` est une fonction telle que pour tout entier n, la valeur de `v(n)` est v_n.

3. On dit que B est le miroir d'une matrice A si la matrice B est obtenue en parcourant les lignes de A de droite à gauche. Par exemple, le miroir de $A = [[1, 3], [2, 18]]$ est $B = [[3, 1], [18, 2]]$.

   Écrire une fonction `miroir(A)` qui prend en argument une matrice A et qui retourne son miroir.

Problème 1

Ce problème propose d'étudier les déplacements d'une souris qui cherche un morceau de fromage dans un labyrinthe. À l'instant initial, on place la souris à l'entrée E (voir la figure 1). Ensuite elle choisit aléatoirement et avec la même probabilité un des trois chemins partant de E. Après son premier déplacement, elle peut :

— soit être revenue à l'entrée E et dans ce cas elle recommence en choisissant avec la même probabilité un des trois chemins partant de E pour son prochain déplacement ;

— soit avoir trouvé le bon chemin qui mène au fromage F et dans ce cas elle ne se déplace plus et reste au même endroit pour manger le fromage.

On note $n \in \mathbb{N}$ le nombre de déplacements de la souris, E_n l'événement que la souris se situe à l'entrée E après le n-ième déplacement, F_n l'événement que la souris soit en train de manger le fromage F après le n-ième déplacement et f_n la probabilité de l'événement F_n. Ainsi $\mathrm{f}_0 = 0$ et $\mathrm{f}_1 = \frac{1}{3}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Déterminer les probabilités conditionnelles $P_{E_n}(F_{n+1})$ et $P_{F_n}(F_{n+1})$ à l'aide de l'énoncé.
2. Montrer que $\mathrm{f}_{n+1} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\mathrm{f}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. En déduire l'expression de f_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
4. Calculer $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{f}_n$ et interpréter le résultat.

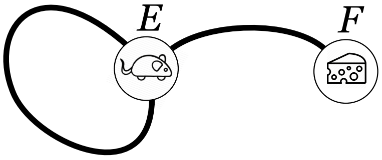


Figure 1

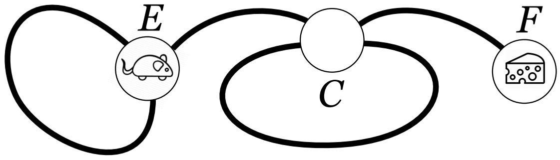


Figure 2

À l'instant initial, on place désormais la souris à l'entrée E d'un second labyrinthe (voir la figure 2) qui contient, en plus du fromage F, un croisement C. Lorsque la souris arrive après un déplacement au croisement C, elle choisit aléatoirement et avec la même probabilité un des quatre chemins partant de C pour son prochain déplacement. De plus, on note C_n l'événement que la souris se situe au croisement C après le n-ième déplacement et c_n la probabilité de l'événement C_n. Ainsi $c_0 = \mathrm{f}_0 = 0$, $c_1 = \frac{1}{3}$ et $\mathrm{f}_1 = 0$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Déterminer $P_{E_n}(C_{n+1})$, $P_{C_n}(C_{n+1})$, $P_{F_n}(C_{n+1})$, $P_{E_n}(F_{n+1})$, $P_{C_n}(F_{n+1})$ et $P_{F_n}(F_{n+1})$.
6. Montrer que $c_{n+1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}c_n - \frac{1}{3}\mathrm{f}_n$ et $\mathrm{f}_{n+1} = \frac{1}{4}c_n + \mathrm{f}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
7. Trouver $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\mathrm{f}_{n+2} = a\mathrm{f}_{n+1} + b\mathrm{f}_n + c$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
8. Trouver $\alpha \in \mathbb{R}$ afin que la suite $(u_n = \mathrm{f}_n - \alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ soit récurrente linéaire d'ordre 2.
9. En déduire que $\mathrm{f}_n = 1 - \left(\frac{5\sqrt{13}+13}{26}\right)\left(\frac{7+\sqrt{13}}{12}\right)^n + \left(\frac{5\sqrt{13}-13}{26}\right)\left(\frac{7-\sqrt{13}}{12}\right)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
10. Calculer $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{f}_n$ (en justifiant précisément chaque affirmation utilisée) et interpréter le résultat.

Exercice 2

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice à coefficients complexes. On définit :

— la trace de A (notée $\mathrm{tr}(A)$) par la quantité $a + d$.
— Le déterminant de A (noté $\det(A)$) par la quantité $ad - bc$.
— Le polynôme caractéristique de A (noté $P_A(X)$) par $X^2 - \mathrm{tr}(A)X + \det(A)$.

On note $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $0_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Par définition, $P_A(A)$ est la matrice $A^2 - \mathrm{tr}(A)A + \det(A)I_2$.

1. (a) Montrer que $P_A(A) = 0_2$.
   (b) On suppose que $\det(A) \neq 0$. À l'aide de la question 1a, retrouver la formule de A^{-1}.

Dans toute la suite de l'exercice, on suppose qu'il existe α et β des complexes différents tels que :

$$P_A(X) = (X - \alpha)(X - \beta).$$

2. Montrer que $\alpha + \beta = \mathrm{tr}(A)$, $\alpha\beta = \det(A)$.
3. En considérant la trace, montrer que $A \neq \alpha I_2$ et $A \neq \beta I_2$.
4. Montrer que $(A - \alpha I_2)(A - \beta I_2) = 0_2$. En déduire que $A - \alpha I_2$ et $A - \beta I_2$ ne sont pas inversibles.
5. Montrer que $\alpha = a \Leftrightarrow \beta = d$.

On suppose désormais que $\alpha \neq a$. On pose : $P = \begin{pmatrix} -b & d-\beta \\ a-\alpha & -c \end{pmatrix}$ et $\Delta = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$.

6. Montrer que les ensembles des solutions des systèmes

$$\begin{cases} (a-\alpha)x + by = 0 \\ cx + (d-\alpha)y = 0 \end{cases} \quad (5) \text{ et } \quad \begin{cases} (a-\beta)x + by = 0 \\ cx + (d-\beta)y = 0 \end{cases} \quad (6)$$

sont respectivement $S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{-bt}{a-\alpha} \\ t \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{C} \right\}$ et $S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ \frac{-ct}{d-\beta} \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{C} \right\}$

7. Montrer que $AP = P\Delta$.
8. Montrer que $\det(P) = (\alpha - a)(\alpha - \beta)$ (indication : exprimer bc et d en fonction de a, α, β).
   En déduire que P est inversible et que $P^{-1}AP = \Delta$.
9. Déterminer une matrice Q inversible pour que l'on ait $Q^{-1}(A^T)Q = \Delta$ où A^T est la transposée de A.

Problème 2

Pour chaque $x > 0$ fixé, on considère l'équation suivante d'inconnue $y > 0$.

$$x\ln(x) = y\ln(y) \tag{E}$$

Le but de ce problème est d'étudier les solutions de (E) en fonction des valeurs de $x > 0$.

1. On considère la fonction $f : t \mapsto t\ln(t)$.
   (a) Déterminer $\lim_{t\to 0} f(t)$ et $\lim_{t\to+\infty} f(t)$.
   (b) Dresser le tableau des variations de f et y faire figurer l'image de $t = 1$.
2. On fixe $x > 0$ pour cette question et on pose $g_x : y \mapsto f(y) - f(x)$.
   (a) Dresser le tableau des variations de g_x et y faire figurer l'image de $y = 1$.
   (b) Démontrer chacun des points suivants.
   — Si $x \in]0, \frac{1}{e}[$ alors (E) a deux solutions : x dans $]0, \frac{1}{e}[$ et une solution dans $]\frac{1}{e}, 1[$ notée $\varphi_1(x)$.
   — Si $x = \frac{1}{e}$ alors (E) a une seule solution : $x = \frac{1}{e}$.
   — Si $x \in]\frac{1}{e}, 1[$ alors (E) a deux solutions : une solution dans $]0, \frac{1}{e}[$ notée $\varphi_2(x)$ et x dans $]\frac{1}{e}, 1[$.
   — Si $x \in [1, +\infty[$ alors (E) a une seule solution : x dans $[1, +\infty[$.
3. On étudie l'application $\varphi_1 :]0, \frac{1}{e}[\to]\frac{1}{e}, 1[$ dans cette question.
   (a) Montrer que $f(\varphi_1(x)) > f(\varphi_1(x'))$ si $0 < x < x' < \frac{1}{e}$, puis en déduire que φ_1 est strictement décroissante.
   (b) On fixe $x \in]0, \frac{1}{e}[$ pour cette question et on pose $\ell^- = \lim_{x'\to x^-} \varphi_1(x')$ et $\ell^+ = \lim_{x'\to x^+} \varphi_1(x')$.
      i. Quel résultat du cours permet de justifier que ℓ^- et ℓ^+ existent et sont finies ? Pour chacune de ces limites, donner les hypothèses précises qui permettent d'appliquer ce résultat.
      ii. Montrer que ℓ^- et ℓ^+ appartiennent à $[\frac{1}{e}, 1]$.
      iii. Montrer que $f(\ell^-) = f(x) = f(\ell^+)$, puis que $\ell^- = \varphi_1(x) = \ell^+$.
      iv. En déduire que φ_1 est continue sur $]0, \frac{1}{e}[$.
   (c) Justifier que φ_1 admet des limites finies en 0 et en $\frac{1}{e}$, puis déterminer ces limites.
4. On étudie l'application $\varphi_2 :]\frac{1}{e}, 1[\to]0, \frac{1}{e}[$ dans cette question.
   (a) Montrer que $f(\varphi_2(\varphi_1(x))) = f(x)$ si $x \in]0, \frac{1}{e}[$ et que $f(\varphi_1(\varphi_2(x))) = f(x)$ si $x \in]\frac{1}{e}, 1[$.
   (b) En déduire que φ_2 est la bijection réciproque de φ_1.
   (c) À l'aide des résultats de la question 3, justifier que φ_2 est continue et dresser son tableau des variations.
5. Discuter du prolongement par continuité sur $[0, 1]$ de la fonction suivante :

$$\varphi :]0, 1[\setminus \{\tfrac{1}{e}\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} \varphi_1(x) \text{ si } x \in]0, \frac{1}{e}[\\ \varphi_2(x) \text{ si } x \in]\frac{1}{e}, 1[\end{cases}.$$

Corrigé du DS n° 6 de mathématiques et d'informatique

Exercice 1
Énoncé et corrigé de V. Vong

1. On reste dans la boucle tant que le nombre choisi est pair. Donc Les valeurs possibles sont les nombres impairs entre 0 et 10, c'est-à-dire $1, 3, 5, 7, 9$.
2. Par exemple :

```
def approximation(u,v,epsilon) :
n=0
while (abs(u(n)-v(n)))>epsilon :
n=n+1
return [u(n),v(n)]
```

3. Par exemple :

```
def miroir(A) :
if A==[] :
return A
else :
nblignes=len(A)
nbcolonnes=len(A[0])
B=[]
for i in range(nblignes) :
B=B+[[A[i][j] for j in range(nbcolonnes-1,-1,-1)]]
return B
```

Problème 1

Ce problème propose d'étudier les déplacements d'une souris qui cherche un morceau de fromage dans un labyrinthe. À l'instant initial, on place la souris à l'entrée E (voir la figure 1). Ensuite elle choisit aléatoirement et avec la même probabilité un des trois chemins partant de E. Après son premier déplacement, elle peut :

— *soit être revenue à l'entrée E et dans ce cas elle recommence en choisissant avec la même probabilité un des trois chemins partant de E pour son prochain déplacement ;*

— *soit avoir trouvé le bon chemin qui mène au fromage F et dans ce cas elle ne se déplace plus et reste au même endroit pour manger le fromage.*

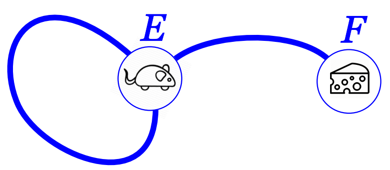


Figure 1

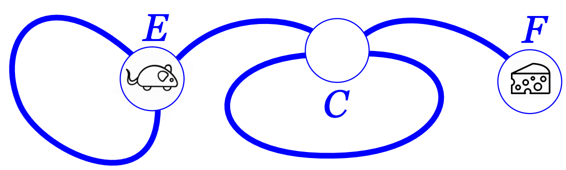


Figure 2

On note $n \in \mathbb{N}$ le nombre de déplacements de la souris, E_n l'événement que la souris se situe à l'entrée E après le n-ième déplacement, F_n l'événement que la souris soit en train de manger le fromage F après le n-ième déplacement et f_n la probabilité de l'événement F_n. Ainsi $\mathrm{f}_0 = 0$ et $\mathrm{f}_1 = \frac{1}{3}$.

1. *Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Déterminer les probabilités conditionnelles $P_{E_n}(F_{n+1})$ et $P_{F_n}(F_{n+1})$.*

   ▶ D'après l'énoncé, lorsque la souris est située à l'entrée E, elle choisit aléatoirement et avec la même probabilité un des trois chemins partant de E. La probabilité conditionnelle P_{E_n} sachant que la souris est située à l'entrée E après le n-ième déplacement est donc une probabilité uniforme. Puisqu'un seul des trois chemins partant de E mène à F, on en déduit que :

$$\boxed{P_{E_n}(F_{n+1}) = \frac{1}{3}}.$$

   De plus, lorsque la souris est en train de manger le fromage F, elle ne se déplace plus. En particulier, sachant que la souris est en train de manger le fromage après le n-ième déplacement, il est certain qu'elle est toujours en train de manger le fromage après le $(n+1)$-ième déplacement. Donc :

$$\boxed{P_{F_n}(F_{n+1}) = 1}.$$

2. *Montrer que $\mathrm{f}_{n+1} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\mathrm{f}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

   ▶ Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque la souris est située à l'entrée E ou bien en train de manger le fromage après le n-ième déplacement, les événements E_n et F_n forment un système complet d'événements. On en déduit d'après la formule des probabilités totales que :

$$\mathrm{f}_{n+1} = P(F_{n+1}) = P(E_n)P_{E_n}(F_{n+1}) + P(F_n)P_{F_n}(F_{n+1}).$$

   N'oubliez pas de préciser quel système complet d'événements vous utilisez pour appliquer la formule des probabilités totales, ni de justifier rapidement qu'il s'agit bien d'un système complet d'événements.

   Or E_n est l'événement complémentaire de F_n donc $P(E_n) = 1 - P(F_n) = 1 - \mathrm{f}_n$. On obtient donc d'après les résultats de la question précédente :

$$\mathrm{f}_{n+1} = P(E_n)P_{E_n}(F_{n+1}) + P(F_n)P_{F_n}(F_{n+1}) = (1 - \mathrm{f}_n) \times \frac{1}{3} + \mathrm{f}_n \times 1 = \boxed{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\mathrm{f}_n}.$$

   Et ceci est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. *En déduire l'expression de f_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.*

   ▶ D'après le résultat de la question précédente, $(\mathrm{f}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique. On cherche $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\alpha = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\alpha \iff \left(1 - \frac{2}{3}\right)\alpha = \frac{1}{3} \iff \alpha = 1.$$

   Alors la suite $(u_n = \mathrm{f}_n - \alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique car :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = (\mathrm{f}_{n+1} - \alpha) = \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\mathrm{f}_n\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\alpha\right) = \frac{2}{3}(\mathrm{f}_n - \alpha) = \frac{2}{3}u_n.$$

   On en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 \left(\frac{2}{3}\right)^n = (\mathrm{f}_0 - \alpha)\left(\frac{2}{3}\right)^n = (0 - 1)\left(\frac{2}{3}\right)^n = -\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

   et par conséquent :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{f}_n = u_n + \alpha = \boxed{-\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1}.$$

4. *Calculer $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{f}_n$ et interpréter le résultat.*

▶ D'après le résultat de la question précédente :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{f}_n = \lim_{n\to+\infty} -\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1 = 0 + 1 = \boxed{1} \quad \text{car } \tfrac{2}{3} \in]0,1[.$$

Ainsi, $\boxed{\text{après un très grand nombre de déplacement, il est presque certain que la souris soit en train}}$ $\boxed{\text{de manger le fromage}}$. Ce qui est cohérent avec le labyrinthe de la figure 1.

À l'instant initial, on place désormais la souris à l'entrée E d'un second labyrinthe (voir la figure 2) qui contient, en plus du fromage F, un croisement C. Lorsque la souris arrive après un déplacement au croisement C, elle choisit aléatoirement et avec la même probabilité un des quatre chemins partant de C pour son prochain déplacement. De plus, on note C_n l'événement que la souris se situe au croisement C après le n-ième déplacement et c_n la probabilité de l'événement C_n. Ainsi $c_0 = \mathrm{f}_0 = 0$, $c_1 = \frac{1}{3}$ et $\mathrm{f}_1 = 0$.

5. *Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Déterminer $P_{E_n}(C_{n+1})$, $P_{C_n}(C_{n+1})$, $P_{F_n}(C_{n+1})$, $P_{E_n}(F_{n+1})$, $P_{C_n}(F_{n+1})$ et $P_{F_n}(F_{n+1})$.*

▶ D'après l'énoncé, les probabilités conditionnelles P_{E_n} et P_{C_n} sont des probabilités uniformes. On en déduit que :

$\boxed{P_{E_n}(C_{n+1}) = \dfrac{1}{3}}$ car un seul des trois chemins partant de E mène à C,

$\boxed{P_{E_n}(F_{n+1}) = \dfrac{0}{3} = 0}$ car aucun des trois chemins partant de E mène à F,

$\boxed{P_{C_n}(C_{n+1}) = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}}$ car exactement deux des quatre chemins partant de C reviennent à C,

$\boxed{P_{C_n}(F_{n+1}) = \dfrac{1}{4}}$ car un seul des quatre chemins partant de C mène à F.

De plus, sachant que la souris est en train de manger le fromage F après le n-ième déplacement, il est certain qu'elle est toujours en train de manger le fromage après le $(n+1)$-ième déplacement, en particulier il est impossible qu'elle soit située au croisement C après le $(n+1)$-ième déplacement. Donc :

$$\boxed{P_{F_n}(F_{n+1}) = 1} \quad \text{et} \quad \boxed{P_{F_n}(C_{n+1}) = 0}.$$

6. *Montrer que $c_{n+1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}c_n - \frac{1}{3}\mathrm{f}_n$ et $\mathrm{f}_{n+1} = \frac{1}{4}c_n + \mathrm{f}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

▶ Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque la souris est située à l'entrée E ou bien au croisement C ou bien en train de manger le fromage après le n-ième déplacement, les événements E_n, C_n et F_n forment un système complet d'événements. On en déduit d'après la formule des probabilités totales que :

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= P(C_{n+1}) = P(E_n)P_{E_n}(C_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(C_{n+1}) + P(F_n)P_{F_n}(C_{n+1}) \\ \text{et} \quad \mathrm{f}_{n+1} &= P(F_{n+1}) = P(E_n)P_{E_n}(F_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(F_{n+1}) + P(F_n)P_{F_n}(F_{n+1}). \end{aligned}$$

Puisque E_n, C_n et F_n forment un système complet d'événements, on a :

$$1 = P(E_n) + P(C_n) + P(F_n) \quad \text{donc} \quad P(E_n) = 1 - P(C_n) - P(F_n) = 1 - c_n - \mathrm{f}_n.$$

On obtient donc d'après les résultats de la question précédente :

$$\begin{aligned}
c_{n+1} &= P(E_n)P_{E_n}(C_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(C_{n+1}) + P(F_n)P_{F_n}(C_{n+1}) \\
&= (1 - c_n - \mathrm{f}_n) \times \frac{1}{3} + c_n \times \frac{1}{2} + \mathrm{f}_n \times 0 \\
&= \boxed{\frac{1}{3} + \frac{1}{6}c_n - \frac{1}{3}\mathrm{f}_n} \\
\text{et} \quad \mathrm{f}_{n+1} &= P(E_n)P_{E_n}(F_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(F_{n+1}) + P(F_n)P_{F_n}(F_{n+1}) \\
&= (1 - c_n - \mathrm{f}_n) \times 0 + c_n \times \frac{1}{4} + \mathrm{f}_n \times 1 \\
&= \boxed{\frac{1}{4}c_n + \mathrm{f}_n}.
\end{aligned}$$

Et ceci est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

7. *Trouver $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\mathrm{f}_{n+2} = a\mathrm{f}_{n+1} + b\mathrm{f}_n + c$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

   ▶ Soit $n \in \mathbb{N}$. On a d'après les résultats de la question précédente :

$$\mathrm{f}_{n+2} = \frac{1}{4}c_{n+1} + \mathrm{f}_{n+1} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}c_n - \frac{1}{3}\mathrm{f}_n\right) + \left(\frac{1}{4}c_n + \mathrm{f}_n\right) = \frac{1}{12} + \frac{7}{24}c_n + \frac{11}{12}\mathrm{f}_n.$$

   On cherche $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\frac{1}{12} + \frac{7}{24}c_n + \frac{11}{12}\mathrm{f}_n = \mathrm{f}_{n+2} = a\mathrm{f}_{n+1} + b\mathrm{f}_n + c = a\left(\frac{1}{4}c_n + \mathrm{f}_n\right) + b\mathrm{f}_n + c = c + \frac{a}{4}c_n + (a+b)\mathrm{f}_n.$$

   Il suffit donc de poser $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\boxed{c = \frac{1}{12}}, \quad \frac{a}{4} = \frac{7}{24} \text{ donc } \boxed{a = \frac{7}{6}} \quad \text{et} \quad a + b = \frac{11}{12} \text{ donc } \boxed{b = \frac{11}{12} - \frac{7}{6} = -\frac{1}{4}}.$$

   Attention à votre raisonnement ici : il ne s'agit pas d'une identification (comme pour les nombres complexes ou les polynômes). Vous n'avez pas besoin de raisonner par équivalences : il suffit de trouver un triplet (a, b, c) qui vérifie l'énoncé. Il est plus difficile (et ce n'est pas demandé) de montrer que les valeurs trouvées sont nécessaires, c'est-à-dire qu'il n'en existe pas d'autres.

8. *Trouver $\alpha \in \mathbb{R}$ afin que la suite $(u_n = \mathrm{f}_n - \alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ soit récurrente linéaire d'ordre 2.*

   ▶ Soit $n \in \mathbb{N}$. On a d'après le résultat de la question précédente :

$$\begin{aligned}
u_{n+2} = \mathrm{f}_{n+2} - \alpha = a\mathrm{f}_{n+1} + b\mathrm{f}_n + c - \alpha &= \frac{7}{6}(u_{n+1} + \alpha) - \frac{1}{4}(u_n + \alpha) + \frac{1}{12} - \alpha \\
&= \frac{7}{6}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n + \left(\frac{7}{6}\alpha - \frac{1}{4}\alpha + \frac{1}{12} - \alpha\right) = \frac{7}{6}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n + \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{12}\alpha\right).
\end{aligned}$$

   Si on pose $\boxed{\alpha = 1}$, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+2} = \frac{7}{6}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$$

   donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

9. *En déduire que $\mathrm{f}_n = 1 - \left(\frac{5\sqrt{13}+13}{26}\right)\left(\frac{7+\sqrt{13}}{12}\right)^n + \left(\frac{5\sqrt{13}-13}{26}\right)\left(\frac{7-\sqrt{13}}{12}\right)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

   ▶ En reprenant les calculs de la question précédente, l'équation caractéristique de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est :

$$q^2 = \frac{7}{6}q - \frac{1}{4} \iff q^2 - \frac{7}{6}q + \frac{1}{4} = 0.$$

Elle admet pour discriminant $\Delta = (-\frac{7}{6})^2 - 4 \times 1 \times \frac{1}{4} = \frac{13}{6^2} > 0$ et pour solutions :

$$q_1 = \frac{-\left(-\frac{7}{6}\right) + \sqrt{\frac{13}{6^2}}}{2 \times 1} = \frac{7+\sqrt{13}}{12} \quad \text{et} \quad q_2 = \frac{7-\sqrt{13}}{12}.$$

Par conséquent, il existe $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda_1 q_1^n + \lambda_2 q_2^n.$$

Or $\mathrm{f}_0 = \mathrm{f}_1 = 0$ donc $u_0 = u_1 = 0 - \alpha = 0 - 1 = -1$ d'après le résultat de la question précédente. On en déduit que (λ_1, λ_2) est solution du système linéaire suivant :

$$\begin{cases} -1 = \lambda_1 + \lambda_2 \\ -1 = \lambda_1 q_1 + \lambda_2 q_2 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ q_1 & q_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Or $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ q_1 & q_2 \end{pmatrix} = q_2 - q_1 \neq 0$ (car $q_1 \neq q_2$) donc ce système n'admet qu'une seule solution :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ q_1 & q_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{q_2 - q_1} \begin{pmatrix} q_2 & -1 \\ -q_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{q_2 - q_1} \begin{pmatrix} -q_2 + 1 \\ q_1 - 1 \end{pmatrix}.$$

Profitez de tout ce qu'on a vu depuis le début de l'année pour gagner du temps dans vos calculs ! En particulier, pensez à la formule de l'inverse des matrices d'ordre 2 pour résoudre efficacement des systèmes linéaires de deux équations à deux inconnues.

On obtient donc :

$$\lambda_1 = \frac{-q_2 + 1}{q_2 - q_1} = \frac{-\frac{7-\sqrt{13}}{12} + 1}{\frac{7-\sqrt{13}}{12} - \frac{7+\sqrt{13}}{12}} = \frac{\frac{5+\sqrt{13}}{12}}{-2\frac{\sqrt{13}}{12}} = \frac{5+\sqrt{13}}{-2\sqrt{13}} = -\frac{5\sqrt{13}+13}{26}$$

$$\text{et} \quad \lambda_2 = \frac{q_1 - 1}{q_2 - q_1} = \frac{\frac{7+\sqrt{13}}{12} - 1}{\frac{7-\sqrt{13}}{12} - \frac{7+\sqrt{13}}{12}} = \frac{\frac{-5+\sqrt{13}}{12}}{-2\frac{\sqrt{13}}{12}} = \frac{-5+\sqrt{13}}{-2\sqrt{13}} = \frac{5\sqrt{13}-13}{26}.$$

Par conséquent :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{f}_n = u_n + \alpha = \lambda_1 q_1^n + \lambda_2 q_2^n + 1$$
$$= \boxed{1 - \left(\frac{5\sqrt{13}+13}{26}\right)\left(\frac{7+\sqrt{13}}{12}\right)^n + \left(\frac{5\sqrt{13}-13}{26}\right)\left(\frac{7-\sqrt{13}}{12}\right)^n}.$$

10. *Calculer $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{f}_n$ (en justifiant précisément chaque affirmation utilisée) et interpréter le résultat.*

▶ On a $9 < 13 < 16$ donc $3 < \sqrt{13} < 4$ car $x \mapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante. Par conséquent :

$$0 < \frac{5}{6} = \frac{7+3}{12} < \frac{7+\sqrt{13}}{12} < \frac{7+4}{12} = \frac{11}{12} < 1 \quad \text{et} \quad 0 < \frac{1}{4} = \frac{7-4}{12} < \frac{7-\sqrt{13}}{12} < \frac{7-3}{12} = \frac{1}{3} < 1.$$

On en déduit que $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{7+\sqrt{13}}{12}\right)^n = 0$ et $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{7-\sqrt{13}}{12}\right)^n = 0$ et donc d'après le résultat de la question précédente :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \mathrm{f}_n = 1}.$$

Ainsi, comme pour le premier labyrinthe, après un très grand nombre de déplacement, il est presque certain que la souris soit en train de manger le fromage. Ce qui est cohérent la figure 2.

Exercice 2
Énoncé et corrigé de V. Vong

1. (a) Calcul de A^2 :

$$A^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ca+dc & cb+d^2 \end{pmatrix}$$

Par linéarité de la somme de matrices, on en déduit que

$$A^2 - \mathrm{tr}(A)A + \det(A)I_2 = \begin{pmatrix} a^2+bc-(a+d)a+(ad-bc) & ab+bd-(a+d)b \\ ca+dc-(a+d)c & cb+d^2-(a+d)d+(ad-bc) \end{pmatrix}$$

En développant les différents termes, on obtient

$$P_A(A) = \begin{pmatrix} a^2+bc-a^2+da+ad-bc & ab+bd-ab-db \\ ca+dc-ac-dc & cb+d^2-ad-d^2+ad-bc \end{pmatrix}$$

Après simplification, on a

$$\boxed{P_A(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

(b) On a

$$A^2 - \mathrm{tr}(A)A + \det(A)I_2 = 0_2.$$

Donc

$$\det(A)I_2 = \mathrm{tr}(A)A - A^2.$$

Or $\det(A) \neq 0$. Donc

$$I_2 = \frac{1}{\det(A)}(\mathrm{tr}(A)A - A^2)$$

Donc

$$I_2 = (\frac{1}{\det(A)}(\mathrm{tr}(A)I_2 - A))A = A(\frac{1}{\det(A)}(\mathrm{tr}(A)I_2 - A)).$$

A est donc inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}(\mathrm{tr}(A)I_2 - A)$$

D'où

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} a+d-a & -b \\ -c & a+d-d \end{pmatrix}$$

On a bien

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

2. On a

$$P_A(X) = (X-\alpha)(X-\beta).$$

En développant, on en déduit que

$$P_A(X) = X^2 - (\alpha+\beta)X + \alpha\beta.$$

Par définition de P_A, on a donc

$$X^2 - \mathrm{tr}(A)X + \det(A) = X^2 - (\alpha+\beta)X + \alpha\beta.$$

Par unicité de l'écriture d'un polynôme sous la forme $\sum a_k X^k$, on en déduit que

$$\boxed{\mathrm{tr}(A) = \alpha+\beta, \det(A) = \alpha\beta}.$$

3. On a $\operatorname{tr}(A) = \alpha + \beta$ et $\operatorname{tr}(\alpha I_2) = 2\alpha$. Or $\alpha \neq \beta$. Donc $\alpha + \beta \neq 2\alpha$. Donc $\operatorname{tr}(A) \neq \operatorname{tr}(\alpha I_2)$. La trace étant une application sur les matrices, il en résulte que $A \neq I_2$. De même, on a $\operatorname{tr}(\beta I_2) = 2\beta$. Comme $\alpha \neq \beta$, on a $\operatorname{tr}(A) \neq \operatorname{tr}(\beta I_2)$. Par conséquent, les matrices A et βI_2 sont différentes.
4. En développant, on a

$$(A - \alpha I_2)(A - \beta I_2) = A^2 - \beta A - \alpha A + \alpha\beta I_2 = P_A(A) = 0_2$$

d'après la question 1.a. Donc

$$\boxed{(A - \alpha I_2)(A - \beta I_2) = 0_2}.$$

5. Si $(A - \alpha I_2)$ était inversible, en multipliant à gauche l'égalité $(A - \alpha I_2)(A - \beta I_2) = 0_2$ par cet inverse, on en déduirait que $A - \beta I_2 = 0_2$, ce qui contredirait la question 3. Par conséquent $A - \alpha I_2$ est nécessairement non inversible. De même, si $(A - \beta I_2)$ était inversible, en multipliant à droite l'égalité $(A - \alpha I_2)(A - \beta I_2) = 0_2$ par $(A - \beta I_2)^{-1}$, on en déduirait que $A - \alpha I_2 = 0_2$, ce qui contredirait la question 3. Donc $A - \beta I_2$ n'est pas inversible.
6. Supposons que $a = \alpha$ Comme on a $a + d = \alpha + \beta$, il en résulte que $d = \beta$. Réciproquement, supposons que $d = \beta$. En simplifiant dans la même égalité, on en déduit que $a = \alpha$. On a bien

$$a = \alpha \Leftrightarrow d = \beta.$$

7. Comme $a - \alpha \neq 0$, en appliquant $L_2 \leftarrow L_2 - \frac{c}{a-\alpha}L_1$, à (1), le système est équivalent à

$$\begin{cases} (a-\alpha)x + by & = 0 \\ \left((d-\alpha) - \frac{bc}{a-\alpha}\right) y & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-\alpha)x + by & = 0 \\ \left((d-\alpha)(a-\alpha) - bc\right) y & = 0 \end{cases}$$

Or $(d-\alpha)(a-\alpha) - bc = ad - bc - (a+d)\alpha + \alpha^2 = P_A(\alpha) = 0$. Donc le système (1) est équivalent à

$$(a-\alpha)x + by = 0.$$

En mettant y en paramètre, on en déduit que

$$\boxed{S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{-bt}{a-\alpha} \\ t \end{pmatrix} t \in \mathbb{C} \right\}}$$

Comme $a \neq \alpha$, on a aussi $d \neq \beta$, d'après la question 5. En appliquant $L_1 \leftarrow L_1 - \frac{b}{d-\beta}L_2$ au système (2), on en déduit que le système est équivalent à

$$\begin{cases} \left((a-\beta) - \frac{cb}{d-\beta}\right) x & = 0 \\ cx + (d-\beta)y & = 0 \end{cases}$$

En multipliant par $(d - \beta)$ la première ligne, on a comme système équivalent

$$\begin{cases} \left((a-\beta)(d-\beta) - cb\right) x & = 0 \\ cx + (d-\beta)y & = 0 \end{cases}$$

Or $(a-\beta)(d-\beta) - bc = ad - bc - (a+d)\beta + \beta^2 = P_A(\beta) = 0$. Donc le système (2) est équivalent à

$$cx + (d-\beta)y = 0$$

En mettant x en paramètre, on en déduit que

$$\boxed{S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ \frac{-ct}{d-\beta} \end{pmatrix} t \in \mathbb{C} \right\}}.$$

8. Calculons AP et $P\Delta$:

$$AP = \begin{matrix} -\alpha b & ad - a\beta - bc \\ -bc + da - \alpha d & -\beta c \end{matrix}, P\Delta = \begin{matrix} -\alpha b & (d-\beta)\beta \\ (a-\alpha)\alpha & -\beta c \end{matrix}$$

Les coefficients diagonaux étant clairement égaux, il reste à montrer que

$$-bc + da - \alpha d = (a-\alpha)\alpha, ad - bc - a\beta = (d-\beta)\beta.$$

Or $ad - bc = \alpha\beta$. Donc $-bc + da - \alpha d = \alpha\beta - \alpha d = (\beta - d)\alpha$. De plus $\alpha + \beta = a + d$. Donc $\beta - d = a - \alpha$. D'où $\boxed{-bc + da - \alpha\beta = (a-\alpha)\alpha}$.

De même, en utilisant les précédentes égalités, $ad - bc - a\beta = \alpha\beta - a\beta = (\alpha - a)\beta = (d-\beta)\beta$. D'où $\boxed{ad - bc - a\beta = (d-\beta)\beta)}$.

Par conséquent, $\boxed{AP = P\Delta}$. On a

$$\begin{aligned} \det(P) &= bc - (a-\alpha)(d-\beta) \\ &= bc - ad + a\beta + \alpha d - \alpha\beta \\ &= -\alpha\beta + a\beta + \alpha(\alpha + \beta - a) - \alpha\beta \ (ad - bc = \alpha\beta, d = \alpha + \beta - a) \\ &= \alpha^2 + a\beta - \alpha\beta - a\alpha \\ &= (\alpha - a)(\alpha - \beta) \end{aligned}$$

Or $\alpha \neq a$ et $\alpha \neq \beta$, donc ce déterminant est non nul. Par conséquent P est inversible. En multipliant à gauche l'égalité de la question 7 par P^{-1} on obtient alors

$$P^{-1}AP = \Delta.$$

9. On a $P^{-1}AP = \Delta$. En transposant, on obtient :

$$(P^{-1}AP)^T = \Delta^T.$$

Or Δ est diagonal. Donc $\Delta^T = \Delta$. Or pour des matrices M, N, on a $(MN)^T = N^T M^T$ D'où :

$$P^T A^T (P^{-1})^T = \Delta$$

Mais $(P^{-1})^T = (P^T)^{-1}$. Il suffit donc de poser $Q = (P^T)^{-1}$.

Problème 2

Pour chaque $x > 0$ fixé, on considère l'équation suivante d'inconnue $y > 0$.

$$x\ln(x) = y\ln(y) \tag{E}$$

Le but de ce problème est d'étudier les solutions de (E) en fonction des valeurs de $x > 0$.

1. *On considère la fonction $f : t \mapsto t\ln(t)$.*

   (a) *Déterminer $\lim_{t\to 0} f(t)$ et $\lim_{t\to+\infty} f(t)$.*

   ▶ On a :

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0} f(t) &= \lim_{t\to 0^+} t\ln(t) = \lim_{X\to+\infty} \frac{1}{X}\ln\left(\frac{1}{X}\right) \quad \text{en posant } t = \frac{1}{X} \iff X = \frac{1}{t} \\ &= \lim_{X\to+\infty} -\frac{\ln(X)}{X} = \boxed{0} \quad \text{d'après le théorème des croissances comparées} \end{aligned}$$

$$\text{et} \quad \lim_{t\to+\infty} f(t) = \lim_{t\to+\infty} t\ln(t) = \boxed{+\infty} \quad \text{par produit de limites usuelles.}$$

(b) *Dresser le tableau des variations de f et y faire figurer l'image de $t = 1$.*

▶ La fonction f est définie et dérivable sur $]0, +\infty[$ comme produit de fonctions usuelles. On a :

$$\forall t > 0,\ f'(t) = 1 \times \ln(t) + t \times \frac{1}{t} = \ln(t) + 1$$

donc :

$$f'(t) > 0 \iff \ln(t) > -1 \iff t > \exp(-1) = \frac{1}{e}.$$

De plus, $f(\frac{1}{e}) = \frac{1}{e}\ln(\frac{1}{e}) = -\frac{1}{e}$ et $f(1) = 1\ln(1) = 0$. D'où le tableau des variations de f :

t	0		$\frac{1}{e}$		1		$+\infty$
$f'(t)$	‖	$-$	0	$+$			
$f(t)$	‖ 0	↘	$-\frac{1}{e}$	↗	0	↗	$+\infty$

2. *On fixe $x > 0$ pour cette question et on pose $g_x : y \mapsto f(y) - f(x)$.*

(a) *Dresser le tableau des variations de g_x et y faire figurer l'image de $y = 1$.*

▶ Puisque x est fixé, $f(x)$ est une constante. On déduit donc le tableau des variations de la fonction $g_x = f - f(x)$ à partir de celui de la fonction f.

y	0		$\frac{1}{e}$		1		$+\infty$
$g_x(y)$	‖ $-f(x)$	↘	$-\frac{1}{e} - f(x)$	↗	$-f(x)$	↗	$+\infty$

Utilisez les questions précédentes pour éviter de perdre du temps en calculs inutiles (comme le calcul de la dérivée de g_x et l'étude de son signe ici).

(b) *Démontrer chacun des points suivants.*

- *Si $x \in]0, \frac{1}{e}[$ alors (E) a deux solutions : x dans $]0, \frac{1}{e}[$ et une solution dans $]\frac{1}{e}, 1[$ notée $\varphi_1(x)$.*
- *Si $x = \frac{1}{e}$ alors (E) a une seule solution : $x = \frac{1}{e}$.*
- *Si $x \in]\frac{1}{e}, 1[$ alors (E) a deux solutions : une solution dans $]0, \frac{1}{e}[$ notée $\varphi_2(x)$ et x dans $]\frac{1}{e}, 1[$.*
- *Si $x \in [1, +\infty[$ alors (E) a une seule solution : x dans $[1, +\infty[$.*

▶ L'équation (E) est équivalente à l'équation $g_x(y) = 0$ d'inconnue $y > 0$ par définition de g_x. De plus, on remarque que $y = x$ est une solution évidente (car $f(x) = f(x)$). On raisonne par disjonction de cas.

<u>1^er^ cas</u> : $x \in]0, \frac{1}{e}[$. D'après le tableau des variations de f, on a $f(x) \in]-\frac{1}{e}, 0[$, donc :

$$-\frac{1}{e} - f(x) < 0 < -f(x).$$

D'après le tableau des variations de g_x et le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit que l'équation (E) admet deux solutions : $\boxed{\text{la solution évidente } x \in]0, \tfrac{1}{e}[\text{ et une solution } \varphi_1(x) \in]\tfrac{1}{e}, 1[}$.

<u>2^e^ cas</u> : $x = \frac{1}{e}$. Alors $f(x) = -\frac{1}{e}$ et $-\frac{1}{e} - f(x) = 0$. D'après le tableau des variations de g_x et le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit que l'équation (E) n'a qu'une solution : $\boxed{\text{la solution évidente } x = \tfrac{1}{e}}$.

<u>3^e^ cas</u> : $x \in]\frac{1}{e}, 1[$. D'après le tableau des variations de f, on a $f(x) \in]-\frac{1}{e}, 0[$, donc :

$$-\frac{1}{e} - f(x) < 0 < -f(x).$$

En raisonnant comme dans le 1er cas, on en déduit que l'équation (E) admet deux solutions : $\boxed{\text{une solution } \varphi_2(x) \in]0, \frac{1}{e}[\text{ et la solution évidente } x \in]\frac{1}{e}, 1[}$.

4e cas : $x \in [1, +\infty[$. D'après le tableau des varaitions de f, on a $f(x) \geqslant 0$, donc :

$$-\frac{1}{e} - f(x) < -f(x) \leqslant 0.$$

D'après le tableau des variations de g_x et le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit que l'équation (E) n'a qu'une solution : $\boxed{\text{la solution évidente } x \in [1, +\infty[}$.

3. *On étudie l'application $\varphi_1 :]0, \frac{1}{e}[\to]\frac{1}{e}, 1[$ dans cette question.*

(a) *Montrer que $f(\varphi_1(x)) > f(\varphi_1(x'))$ si $0 < x < x' < \frac{1}{e}$, puis en déduire que φ_1 est strictement décroissante.*

► Soit $(x, x') \in]0, \frac{1}{e}[^2$ tel que $x < x'$. Puisque $\varphi_1(x)$ est solution de l'équation (E) d'après le résultat de la question précédente, on a $g_x(\varphi_1(x)) = 0$, c'est-à-dire $f(\varphi_1(x)) = f(x)$. De même, on a $g_{x'}(\varphi_1(x')) = 0$, c'est-à-dire $f(\varphi_1(x')) = f(x')$. Or f est strictement décroissante sur $]0, \frac{1}{e}[$, donc :

$$f(\varphi_1(x)) = f(x) > f(x') = f(\varphi_1(x')) \quad \text{car } x < x'.$$

On en déduit bien que $\boxed{f(\varphi_1(x)) > f(\varphi_1(x'))}$ pour tout $0 < x < x' < \frac{1}{e}$. De plus, on sait que $\varphi_1(x) \in]\frac{1}{e}, 1[$ et $\varphi_1(x') \in]\frac{1}{e}, 1[$ par définition de φ_1, et f est strictement croissante sur $]\frac{1}{e}, 1[$. Par conséquent, $\boxed{\varphi_1(x) > \varphi_1(x')}$ pour tout $0 < x < x' < \frac{1}{e}$ ce qui prouve que l'application $\boxed{\varphi_1 \text{ est strictement décroissante}}$.

(b) *On fixe $x \in]0, \frac{1}{e}[$ pour cette question et on pose $\ell^- = \lim_{x' \to x^-} \varphi_1(x')$ et $\ell^+ = \lim_{x' \to x^+} \varphi_1(x')$.*

i. *Quel résultat du cours permet de justifier que ℓ^- et ℓ^+ existent et sont finies ? Pour chacune de ces limites, donner les hypothèses précises qui permettent d'appliquer ce résultat.*

► On justifie que ℓ^- et ℓ^+ existent et sont finies d'après le $\boxed{\text{théorème de la limite monotone}}$. Plus précisément :

— $\boxed{\varphi_1 \text{ est strictement décroissante et minorée par } \frac{1}{e} \text{ sur }]0, x[}$ donc $\ell^- = \lim_{x' \to x^-} \varphi_1(x')$ existe et est finie d'après le théorème de la limite monotone ;

— $\boxed{\varphi_1 \text{ est strictement décroissante et majorée par 1 sur }]x, \frac{1}{e}[}$ donc $\ell^+ = \lim_{x' \to x^+} \varphi_1(x')$ existe et est finie d'après le théorème de la limite monotone.

Soyez précis dans l'énoncé de vos hypothèses pour appliquer le théorème de la limite monotone !

ii. *Montrer que ℓ^- et ℓ^+ appartiennent à $[\frac{1}{e}, 1]$.*

► On sait que $\varphi_1(x') \in]\frac{1}{e}, 1[$ pour tout $x' \in]0, \frac{1}{e}[$ par définition de φ_1, c'est-à-dire :

$$\forall x' \in]0, \tfrac{1}{e}[, \quad \frac{1}{e} < \varphi_1(x') < 1$$

ce qui donne en passant à la limite quand $x' \to x^-$ et quand $x' \to x^+$:

$$\frac{1}{e} \leqslant \ell^- = \lim_{x' \to x^-} \varphi_1(x') \leqslant 1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{e} \leqslant \ell^+ = \lim_{x' \to x^+} \varphi_1(x') \leqslant 1.$$

N'oubliez pas de passer aux inégalités larges quand on passe à la limite dans des inégalités !

On obtient bien que $\boxed{\ell^- \in [\frac{1}{e}, 1]}$ et $\boxed{\ell^+ \in [\frac{1}{e}, 1]}$.

iii. *Montrer que $f(\ell^-) = f(x) = f(\ell^+)$, puis que $\ell^- = \varphi_1(x) = \ell^+$.*

► Soit $x' \in]0, \frac{1}{e}[$. Puisque $g_{x'}(\varphi_1(x')) = 0$ d'après ce qu'on a vu à la question 2(b), on a :

$$\forall x \in]0, \tfrac{1}{e}[, \quad f(\varphi_1(x')) = f(x')$$

ce qui donne en passant à la limite quand $x' \to x^-$ et quand $x' \to x^+$:

$$\lim_{x' \to x^-} f(\varphi_1(x')) = \lim_{x' \to x^-} f(x') \quad \text{et} \quad \lim_{x' \to x^+} f(\varphi_1(x')) = \lim_{x' \to x^+} f(x').$$

Or f est continue sur $]0, +\infty[$ comme produit de fonctions usuelles continues. En particulier f est continue en x donc :

$$\lim_{x' \to x^-} f(x') = \lim_{x' \to x^+} f(x') = f(x)$$

et f est continue en $\lim_{x' \to x^-} \varphi_1(x') = \ell^-$ car $\ell^- \geqslant \frac{1}{e} > 0$ d'après le résultat de la question précédente et en $\lim_{x' \to x^+} \varphi_1(x') = \ell^+$ (pour les mêmes raisons) donc :

$$\lim_{x' \to x^-} f(\varphi_1(x')) = f(\ell^-) \quad \text{et} \quad \lim_{x' \to x^+} f(\varphi_1(x')) = f(\ell^+).$$

N'oubliez pas de préciser que f est continue pour pouvoir passer à la limite ! Cet argument est nécessaire pour justifier ces calculs de limites.

Par conséquent :

$$\boxed{f(\ell^-) = f(x)} \quad \text{et} \quad \boxed{f(\ell^+) = f(x)}.$$

En particulier, on en déduit que ℓ^- et ℓ^+ sont solutions de l'équation (E). Or $x \in]0, \frac{1}{e}[$ (par hypothèse), $\ell^- \in [\frac{1}{e}, 1]$ et $\ell^+ \in [\frac{1}{e}, 1]$ (d'après le résultat de la question 3(b)ii). D'après le résultat de la question 2(b), on en déduit que ℓ^- et ℓ^+ sont nécessairement égaux à la solution $\varphi_1(x)$ de (E), d'où :

$$\boxed{\ell^- = \ell^+ = \varphi_1(x)}.$$

iv. *En déduire que φ_1 est continue sur $]0, \frac{1}{e}[$.*

▶ La fonction φ_1 est continue en x si et seulement si $\lim_{x' \to x} \varphi_1(x') = \varphi_1(x)$.

Sautez sur l'occasion pour montrer que vous connaissez votre cours !

Or on a montré à la question précédente que :

$$\lim_{x' \to x^-} \varphi_1(x') = \ell^- = \varphi_1(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x' \to x^+} \varphi_1(x') = \ell^+ = \varphi_1(x).$$

On en déduit bien que $\lim_{x' \to x} \varphi_1(x') = \varphi_1(x)$ et donc que φ_1 est continue en x. Puisque ceci est vrai pour tout $x \in]0, \frac{1}{e}[$, on obtient que $\boxed{\varphi_1 \text{ est continue sur }]0, \frac{1}{e}[}$.

(c) *Justifier que φ_1 admet des limites finies en 0 et en $\frac{1}{e}$, puis déterminer ces limites.*

▶ φ_1 est strictement décroissante et majorée par 1 sur $]0, \frac{1}{e}[$. Donc $\lim_{x \to 0} \varphi_1(x)$ existe et est finie d'après le théorème de la limite monotone. On note ℓ_0 cette limite. Soit $x \in]0, \frac{1}{e}[$. Puisque $g_x(\varphi_1(x)) = 0$ d'après ce qu'on a vu à la question 2(b), on a :

$$\forall x \in]0, \tfrac{1}{e}[, \quad f(\varphi_1(x)) = f(x)$$

ce qui donne en passant à la limite quand $x \to 0$:

$$\lim_{x \to 0} f(\varphi_1(x)) = \lim_{x \to 0} f(x) = 0 \quad \text{d'après le résultat de la question 1(a).}$$

Or $\ell_0 = \lim_{x \to 0} \varphi_1(x) \in [\frac{1}{e}, 1]$ en raisonnant comme à la question 3(b)ii, donc f est continue en $\ell_0 > 0$ ce qui donne :

$$0 = \lim_{x \to 0} f(\varphi_1(x)) = f(\ell_0).$$

Or, d'après le tableau des variations de f de la question 1(b), 1 est le seul antécédent de 0 par la fonction f. On en déduit que $\ell_0 = 1$, c'est-à-dire que :

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \varphi_1(x) = 1}.$$

De même, φ_1 est strictement décroissante et minorée par $\frac{1}{e}$ sur $]0, \frac{1}{e}[$ donc $\ell_{1/e} = \lim_{x \to 1/e} \varphi_1(x)$ existe et est finie d'après le théorème de la limite monotone. En raisonnant de même, on obtient que :

$$f(\ell_{1/e}) = \lim_{x \to 1/e} f(\varphi_1(x)) = \lim_{x \to 1/e} f(x) = -\frac{1}{e}.$$

Or, d'après le tableau des variations de f de la question 1(b), $\frac{1}{e}$ est le seul antécédent de $-\frac{1}{e}$ par la fonction f. On en déduit que $\ell_{1/e} = \frac{1}{e}$, c'est-à-dire que :

$$\boxed{\lim_{x \to 1/e} \varphi_1(x) = \frac{1}{e}}.$$

4. *On étudie l'application $\varphi_2 :]\frac{1}{e}, 1[\to]0, \frac{1}{e}[$ dans cette question.*

   (a) *Montrer que $f(\varphi_2(\varphi_1(x))) = f(x)$ si $x \in]0, \frac{1}{e}[$ et que $f(\varphi_1(\varphi_2(x))) = f(x)$ si $x \in]\frac{1}{e}, 1[$.*

   ▶ Soit $x \in]0, \frac{1}{e}[$. Alors $\varphi_1(x) \in]\frac{1}{e}, 1[$ par définition de φ_1. Puisque $g_{\varphi_1(x)}(\varphi_2(\varphi_1(x))) = 0$ d'après ce qu'on a vu à la question 2(b), on a $f(\varphi_2(\varphi_1(x))) = f(\varphi_1(x))$. Or $g_x(\varphi_1(x)) = x$ d'après ce qu'on a vu à la question 2(b), donc $\boxed{f(\varphi_2(\varphi_1(x))) = f(\varphi_1(x)) = f(x)}$ pour tout $x \in]0, \frac{1}{e}[$.
   De même, si $x \in]\frac{1}{e}, 1[$ alors $\varphi_2(x) \in]0, \frac{1}{e}[$ par définition de φ_2. On en déduit d'après ce qu'on a vu à la question 2(b) que $\boxed{f(\varphi_1(\varphi_2(x))) = f(\varphi_2(x)) = f(x)}$ pour tout $x \in]\frac{1}{e}, 1[$.

   (b) *En déduire que φ_2 est la bijection réciproque de φ_1.*

   ▶ Soit $x \in]0, \frac{1}{e}[$. Puisque $f(\varphi_2(\varphi_1(x))) = f(x)$ d'après le résultat de la question précédente, on en déduit que $\varphi_2(\varphi_1(x))$ est une solution de (E). Or $\varphi_2(\varphi_1(x)) \in]0, \frac{1}{e}[$ par définition de φ_1 et φ_2, donc $\varphi_2(\varphi_1(x))$ est égal à la solution évidente $x \in]0, \frac{1}{e}[$ d'après le résultat de la question 2(b). Puisque ceci est vrai pour tout $x \in]0, \frac{1}{e}[$, on en déduit que :

   $$\boxed{\varphi_2 \circ \varphi_1 = \mathrm{Id}_{]0, \frac{1}{e}[}}.$$

   De même, si $x \in]\frac{1}{e}, 1[$ alors $\varphi_1(\varphi_2(x))$ est une solution de (E) d'après le résultat de la question précédente et $\varphi_1(\varphi_2(x)) \in]\frac{1}{e}, 1[$ par définition de φ_1 et φ_2, donc $\varphi_1(\varphi_2(x))$ est égal à la solution évidente $x \in]\frac{1}{e}, 1[$ d'après le résultat de la question 2(b). Puisque ceci est vrai pour tout $x \in]\frac{1}{e}, 1[$, on en déduit que :

   $$\boxed{\varphi_1 \circ \varphi_2 = \mathrm{Id}_{]\frac{1}{e}, 1[}}.$$

   Finalement, on a obtenu que $\varphi_2 :]\frac{1}{e}, 1[\to]0, \frac{1}{e}[$ est l'application inverse de $\varphi_1 :]0, \frac{1}{e}[\to]\frac{1}{e}, 1[$, c'est-à-dire que $\boxed{\varphi_2 \text{ est la bijection réciproque de } \varphi_1}$.

   (c) *À l'aide des résultats de la question 3, justifier que φ_2 est continue et dresser son tableau des variations.*

   ▶ La fonction φ_1 est strictement décroissante (d'après le résultat de la question 3(a)) et continue sur l'intervalle $]0, \frac{1}{e}[$ (d'après le résultat de la question 3(b)). D'après le théorème de la bijection continue, on en déduit que la bijection réciproque de φ_1 est continue. Or $\varphi_2 = (\varphi_1)^{-1}$ d'après le résultat de la question précédente, donc $\boxed{\varphi_2 \text{ est continue}}$.
   D'autre part, d'après les résultats des questions 3(a) et 3(c), on obtient le tableau des variations de φ_1 :

x	0		$\frac{1}{e}$
$\varphi_1(x)$	1	$\searrow$	$\frac{1}{e}$

   Or on sait que la courbe représentative de la bijection réciproque $\varphi_2 = (\varphi_1)^{-1}$ est symétrique de la courbe représentative de φ_1 par rapport à la première bissectrice. On en déduit le tableau des variations de φ_2 :

x	$\frac{1}{e}$		1
$\varphi_2(x)$	$\Vert$ $\frac{1}{e}$	$\searrow$	0 $\Vert$

5. *Discuter du prolongement par continuité sur* $[0,1]$ *de la fonction suivante :*

$$\varphi :]0,1[\backslash\{\tfrac{1}{e}\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} \varphi_1(x) & si\ x \in]0, \frac{1}{e}[\\ \varphi_2(x) & si\ x \in]\frac{1}{e}, 1[\end{cases}.$$

► D'après les résultats de la question 3(c) et ceux de la question précédente, on a :

$$\lim_{x\to 0} \varphi_1(x) = 1, \quad \lim_{x\to 1/e} \varphi_1(x) = \lim_{x\to 1/e} \varphi_2(x) = \frac{1}{e} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 1} \varphi_2(x) = 0.$$

Par définition de la fonction φ, on en déduit que :

$$\lim_{x\to 0} \varphi(x) = 1, \quad \lim_{x\to 1/e^-} \varphi(x) = \lim_{x\to 1/e^+} \varphi(x) = \frac{1}{e} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 1} \varphi(x) = 0.$$

Par conséquent, $\boxed{\text{la fonction } \varphi :]0,1[\backslash\{\tfrac{1}{e}\} \to \mathbb{R} \text{ est prolongeable par continuité sur }]0,1[}$ en posant :

$$\boxed{\varphi :]0,1[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \varphi_1(x) & \text{si } x \in]0, \frac{1}{e}[\\ \frac{1}{e} & \text{si } x = \frac{1}{e} \\ \varphi_2(x) & \text{si } x \in]\frac{1}{e}, 1[\\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}}.$$

DS n$^{\text{o}}$ 7 de mathématiques

durée : 3 heures

Questions de cours

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini. Les justifications aux questions suivantes ne sont pas demandées.

1. Soit $Y = g(X)$ une variable aléatoire composée. On note f_X et f_Y les lois de probabilité de X et Y.
   (a) Rappeler l'expression de $f_Y(y)$ en fonction de $y \in Y(\Omega)$ à l'aide de f_X et g.
   (b) Rappeler la formule du théorème de transfert à l'aide des notations de l'énoncé.
2. Soit X une variable aléatoire. On note $m = E(X)$ et $\sigma = \sqrt{V(X)}$.
   (a) Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à l'aide des notations de l'énoncé.
   (b) Donner l'expression d'un intervalle de confiance pour X de probabilité supérieure à 99%.
3. Soit U une variable aléatoire qui suit une loi uniforme de paramètre $n \in \mathbb{N}^\star$. Rappeler :
   (a) l'ensemble des valeurs images de U,
   (b) la loi de probabilité de U,
   (c) l'espérance de U.
4. Soit B une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres $(n, p) \in \mathbb{N} \times [0, 1]$. Rappeler :
   (a) l'ensemble des valeurs images de B,
   (b) la loi de probabilité de B,
   (c) l'espérance de B,
   (d) la variance de B.
5. Soit H une variable aléatoire qui suit une loi hypergéométrique de paramètres $(N, n, p) \in \mathbb{N} \times [\![0, N]\!] \times [0, 1]$ avec $Np \in \mathbb{N}$. Rappeler :
   (a) la loi de probabilité de H,
   (b) l'espérance de H.

Exercice

On note $\mathcal{C} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_4})$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et on considère les sous-ensembles de $\mathbb{R}^4$ suivants :

$$V : \begin{cases} x = \lambda + \mu \\ y = 2\lambda + 2\mu \\ z = -2\lambda + \nu \\ t = \lambda + 3\mu + \nu \end{cases}, (\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3 \quad \text{et} \quad W : \begin{cases} x - y - z + t = 0 \\ 2y + z - t = 0 \\ 3x + y - z + t = 0 \end{cases}.$$

1. Justifier que V et W sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$.
2. Déterminer une base $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})$ de V.
3. Déterminer une base $(\overrightarrow{w_3}, \overrightarrow{w_4})$ de W.
4. Déterminer le rang de la famille $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{w_3}, \overrightarrow{w_4})$. Est-elle libre ? Est-elle génératrice de $\mathbb{R}^4$?
5. Extraire de la famille $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{w_3}, \overrightarrow{w_4})$ une base de $F = \text{Vect}\,(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{w_3}, \overrightarrow{w_4})$.
6. On considère les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{f}_1} = (2, 1, -1, 0)$, $\overrightarrow{\mathrm{f}_2} = (3, 0, 0, -1)$ et $\overrightarrow{\mathrm{f}_3} = (2, 1, 0, 1)$.
   Montrer que la famille $\left(\overrightarrow{\mathrm{f}_1}, \overrightarrow{\mathrm{f}_2}, \overrightarrow{\mathrm{f}_3}\right)$ est une base de F.
7. Montrer que la famille $\mathcal{B} = \left(\overrightarrow{\mathrm{f}_1}, \overrightarrow{\mathrm{f}_2}, \overrightarrow{\mathrm{f}_3}, \overrightarrow{e_4}\right)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
8. Déterminer la matrice des coordonnées de la famille $\mathcal{C}$ dans la base $\mathcal{B}$.
9. Montrer que pour chaque $\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^4$, il existe un unique couple $(\overrightarrow{\mathrm{f}}, \tau) \in F \times \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{\mathrm{f}} + \tau\overrightarrow{e_4}$.

Problème

Le but de ce problème est d'étudier l'efficacité de deux méthodes numériques permettant de calculer une approximation du nombre réel $\ln(2)$. Pour tout le problème, on fixe une précision 10^{-p} où $p \in \mathbb{N}$ et on admet que $2 < e < 3$.

A) Méthode de dichotomie.

On considère la fonction $f : x \mapsto e^x - 2$. On pose $a_0 = 0$, $b_0 = 1$ et on définit par récurrence pour tout $n \geqslant 0$:

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n \text{ si } f(c_n) > 0 \\ c_n \text{ sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \begin{cases} c_n \text{ si } f(c_n) > 0 \\ b_n \text{ sinon} \end{cases} \quad \text{où} \quad c_n = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

1. Justifier que $\ln(2)$ est l'unique solution de l'équation $f(x) = 0$. Puis montrer que $a_0 < \ln(2) < b_0$.
2. Prouver que les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ sont adjacentes.
3. En déduire que la suite $(c_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers $\ln(2)$.
4. Montrer que $|c_n - \ln(2)| < (1/2)^{n+1}$ pour tout $n \geqslant 0$.
5. Montrer que si n est supérieur à $A = \frac{\ln(10)}{\ln(2)} p$ alors c_n est une approximation de $\ln(2)$ à 10^{-p} près.

B) Méthode de Newton.

On considère la fonction $F : x \mapsto x - f(x)/f'(x)$. On pose $u_0 = 1$ et on définit par récurrence pour tout $n \geqslant 0$:

$$u_{n+1} = F(u_n).$$

6. Justifier que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
7. Pour chaque $n \geqslant 0$, justifier que u_{n+1} est l'unique solution de l'équation $T_n(x) = 0$ où T_n est la fonction dont la courbe représentative est la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse u_n.
8. Étudier les variations de la fonction F. Puis montrer que $\ln(2) < u_1 < u_0$.
9. En déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante et que chacun de ses termes appartient à $]\ln(2), 1]$.
10. Prouver que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers $\ln(2)$.
11. Montrer que
$$\forall x \in]\ln(2), 1], \quad \frac{F(x) - \ln(2)}{x - \ln(2)} < \frac{1}{3}.$$
12. En déduire que $0 < u_n - \ln(2) < (1/3)^n$ pour tout $n \geqslant 0$.
13. Montrer que si n est supérieur à $B = \frac{\ln(10)}{\ln(3)} p$ alors u_n est une approximation de $\ln(2)$ à 10^{-p} près.
14. Comparer la constante B avec la constante A de la question 5. Puis conjecturer la méthode la plus efficace.

C) Raffinement de l'estimation de la vitesse de convergence.

15. Pour cette question, on fixe $x \in]\ln(2), 1]$ et on considère la fonction
$$g : t \mapsto F(x) - F(t) - F'(t)(x - t) - \lambda(x - t)^2 \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{R} \text{ est une constante.}$$
    (a) On fixe la constante λ afin que $g(\ln(2)) = g(x)$. Exprimer λ en fonction de x.
    (b) À l'aide d'un résultat du cours, justifier l'existence d'un réel $c \in]\ln(2), x[$ tel que $F''(c) = 2\lambda$.
    (c) Déduire des résultats précédents que
$$\frac{F(x) - \ln(2)}{\big(x - \ln(2)\big)^2} < \frac{1}{2}.$$
16. En déduire que $0 < u_n - \ln(2) < (1/2)^{2^n - 1}$ pour tout $n \geqslant 0$.
17. Montrer qu'on peut remplacer la constante B de la question 13 par la constante
$$C = \ln\left(\tfrac{\ln(10)}{\ln(2)} p + 1\right) / \ln(2).$$
18. Calculer la limite quand p tend vers $+\infty$ du rapport C/A où A est la constante de la question 5. Que peut-on en déduire quant à la conjecture émise à la question 14 ?

Corrigé du DS n° 7 de mathématiques

Questions de cours

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini. Les justifications aux questions suivantes ne sont pas demandées.

1. *Soit $Y = g(X)$ une variable aléatoire composée. On note f_X et f_Y les lois de probabilité de X et Y.*

   (a) *Rappeler l'expression de $f_Y(y)$ en fonction de $y \in Y(\Omega)$ à l'aide de f_X et g.*

   ▶
$$\boxed{\forall y \in Y(\Omega), \quad f_Y(y) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ g(x)=y}} f_X(x)}$$

   (b) *Rappeler la formule du théorème de transfert à l'aide des notations de l'énoncé.*

   ▶
$$\boxed{E(Y) = \sum_{x \in X(\Omega)} g(x) f_X(x)}$$

2. *Soit X une variable aléatoire. On note $m = E(X)$ et $\sigma = \sqrt{V(X)}$.*

   (a) *Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à l'aide des notations de l'énoncé.*

   ▶
$$\boxed{\forall \alpha > 0, \quad P\Big(|X-m| \geqslant \alpha\Big) \leqslant \frac{\sigma^2}{\alpha^2}}$$

   (b) *Donner l'expression d'un intervalle de confiance pour X de probabilité supérieure à 99%.*

   ▶ D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a pour tout $\alpha > 0$:
$$P\Big(X \in]m-\alpha, m+\alpha[\Big) = P\Big(|X-m| < \alpha\Big) = 1 - P\Big(|X-m| \geqslant \alpha\Big) \geqslant 1 - \frac{\sigma^2}{\alpha^2}.$$
   Or on a :
$$1 - \frac{\sigma^2}{\alpha^2} = \frac{99}{100} \iff \frac{1}{100} = \frac{\sigma^2}{\alpha^2} \iff \alpha^2 = 100\sigma^2 \iff \alpha = 10\sigma$$
   car α et σ sont positifs. On en déduit en posant $\alpha = 10\sigma$ que :
$$P\Big(X \in]m-10\sigma, m+10\sigma[\Big) \geqslant \frac{99}{100}.$$
   Par conséquent, $\boxed{]m-10\sigma, m+10\sigma[}$ est un intervalle de confiance pour X de probabilité supérieure à 99%.

3. *Soit U une variable aléatoire qui suit une loi uniforme de paramètre $n \in \mathbb{N}^\star$. Rappeler :*

   (a) *l'ensemble des valeurs images de U,*

   ▶
$$\boxed{U(\Omega) = [\![1, n]\!]}$$

(b) la loi de probabilité de U,

▶

$$\boxed{\forall k \in [\![1,n]\!], \quad P(U=k) = \frac{1}{n}}$$

(c) l'espérance de U.

▶

$$\boxed{E(U) = \frac{n+1}{2}}$$

4. Soit B une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres $(n,p) \in \mathbb{N} \times [0,1]$. Rappeler :

(a) l'ensemble des valeurs images de B,

▶

$$\boxed{B(\Omega) = [\![0,n]\!]}$$

(b) la loi de probabilité de B,

▶

$$\boxed{\forall k \in [\![0,n]\!], \quad P(B=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}} \quad \text{où } q = 1-p$$

(c) l'espérance de B,

▶

$$\boxed{E(B) = np}$$

(d) la variance de B.

▶

$$\boxed{V(B) = npq} \quad \text{où } q = 1-p$$

5. Soit H une variable aléatoire qui suit une loi hypergéométrique de paramètres $(N,n,p) \in \mathbb{N} \times [\![0,N]\!] \times [0,1]$ avec $Np \in \mathbb{N}$. Rappeler :

(a) la loi de probabilité de H,

▶

$$\boxed{\forall k \in [\![0,n]\!], \quad P(H=k) = \frac{\binom{Np}{k}\binom{Nq}{n-k}}{\binom{N}{n}}} \quad \text{où } Nq = N - Np$$

(b) l'espérance de H.

▶

$$\boxed{E(H) = np}$$

Exercice

On note $\mathcal{C} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_4})$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et on considère les sous-ensembles de $\mathbb{R}^4$ suivants :

$$V : \begin{cases} x = \lambda + \mu \\ y = 2\lambda + 2\mu \\ z = -2\lambda + \nu \\ t = \lambda + 3\mu + \nu \end{cases}, (\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3 \quad \text{et} \quad W : \begin{cases} x - y - z + t = 0 \\ 2y + z - t = 0 \\ 3x + y - z + t = 0 \end{cases}.$$

1. *Justifier que V et W sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$.*

▶ On a d'après la représentation paramétrique de V :

$$\begin{aligned} V &= \Big\{(x,y,z,t) = (\lambda+\mu, 2\lambda+2\mu, -2\lambda+\nu, \lambda+3\mu+\nu) \mid (\lambda,\mu,\nu) \in \mathbb{R}^3\Big\} \\ &= \Big\{(x,y,z,t) = \lambda(1,2,-2,1)+\mu(1,2,0,3)+\nu(0,0,1,1) \mid (\lambda,\mu,\nu) \in \mathbb{R}^3\Big\} \\ &= \mathrm{Vect}\Big((1,2,-2,1),(1,2,0,3),(0,0,1,1)\Big). \end{aligned}$$

En particulier, $\boxed{V \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^4}$ comme sous-espace vectoriel engendré par trois vecteurs de $\mathbb{R}^4$.

On a $\overrightarrow{0} = (0,0,0,0) \in W$ car :

$$\left\{\begin{array}{r} 0-0-0+0=0 \\ 2\times 0+0-0=0 \\ 3\times 0+0-0+0=0 \end{array}\right. .$$

Soient $\overrightarrow{u_1} \in W$, $\overrightarrow{u_2} \in W$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On note $\overrightarrow{u_1} = (x_1,y_1,z_1,t_1)$ et $\overrightarrow{u_2} = (x_2,y_2,z_2,t_2)$ les composantes des vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$. Alors les composantes du vecteur $\lambda\overrightarrow{u_1}+\overrightarrow{u_2}$ sont :

$$\lambda\overrightarrow{u_1}+\overrightarrow{u_2} = \lambda(x_1,y_1,z_1,t_1)+(x_2,y_2,z_2,t_2) = (\lambda x_1+x_2, \lambda y_1+y_2, \lambda z_1+z_2, \lambda t_1+t_2).$$

De plus, on a par linéarité :

$$(\lambda x_1+x_2)-(\lambda y_1+y_2)-(\lambda z_1+z_2)+(\lambda t_1+t_2) = \lambda(x_1-y_1-z_1+t_1)+(x_2-y_2-z_2+t_2).$$

Or $\overrightarrow{u_1} \in W$ donc les composantes de $\overrightarrow{u_1}$ vérifient les équations cartésiennes de W. En particulier on a $x_1-y_1-z_1+t_1=0$. De même $x_2-y_2-z_2+t_2=0$ car $\overrightarrow{u_2} \in W$. Donc :

$$(\lambda x_1+x_2)-(\lambda y_1+y_2)-(\lambda z_1+z_2)+(\lambda t_1+t_2) = \lambda\times 0+0 = 0.$$

On raisonne de même pour les deux autres équations cartésiennes de W :

$$\begin{aligned} 2(\lambda y_1+y_2)+(\lambda z_1+z_2)-(\lambda t_1+t_2) &= \lambda\underbrace{(2y_1+z_1-t_1)}_{=0 \text{ car } \overrightarrow{u_1}\in W}+\underbrace{(2y_2+z_2-t_2)}_{=0 \text{ car } \overrightarrow{u_2}\in W} \\ &= \lambda\times 0+0=0 \\ 3(\lambda x_1+x_2)+(\lambda y_1+y_2)-(\lambda z_1+z_2)+(\lambda t_1+t_2) &= \lambda\underbrace{(3x_1+y_1-z_1+t_1)}_{=0 \text{ car } \overrightarrow{u_1}\in W}+\underbrace{(3x_2+y_2-z_2+t_2)}_{=0 \text{ car } \overrightarrow{u_2}\in W} \\ &= \lambda\times 0+0=0. \end{aligned}$$

Ainsi les composantes du vecteur $\lambda\overrightarrow{u_1}+\overrightarrow{u_2}$ vérifient les équations cartésiennes de W. On en déduit que $\lambda\overrightarrow{u_1}+\overrightarrow{u_2} \in W$ pour tout $\overrightarrow{u_1} \in W$, $\overrightarrow{u_2} \in W$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Finalement, $\boxed{W \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^4}$ par définition.

On peut également remarquer que chaque équation cartésienne de W représente un hyperplan de $\mathbb{R}^4$ et donc que W est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ comme intersection de sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$.

2. *Déterminer une base $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})$ de V.*

▶ D'après la représentation paramétrique de V, la famille $((1,2,-2,1),(1,2,0,3),(0,0,1,1))$ est génératrice de V. De plus :

$$\begin{aligned} &\mathrm{rang}\Big((1,2,-2,1),(1,2,0,3),(0,0,1,1)\Big) = \mathrm{rang}\Big(\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}\Big((1,2,-2,1),(1,2,0,3),(0,0,1,1)\Big)\Big) \\ &= \mathrm{rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2-2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3+2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4-L_1 \end{array} = \mathrm{rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_2 \leftrightarrow L_3 \\ L_3 \leftrightarrow L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4-L_3 \end{array} = 2. \end{aligned}$$

On en déduit que la famille $((1,2,-2,1),(1,2,0,3),(0,0,1,1))$ n'est pas libre. On peut donc en extraire une base. Or :

$$\dim\Big(\mathrm{Vect}\big((1,2,-2,1),(1,2,0,3),(0,0,1,1)\big)\Big) = \mathrm{rang}\big((1,2,-2,1),(1,2,0,3),(0,0,1,1)\big) = 2$$

$$\text{et} \quad \mathrm{rang}\big((1,2,-2,1),(1,2,0,3)\big) = 2 \quad \text{car } (1,2,-2,1) \text{ et } (1,2,0,3) \text{ ne sont pas colinéaires.}$$

Ainsi, $((1,2,-2,1),(1,2,0,3))$ est une famille libre maximale de

$$\mathrm{Vect}\big((1,2,-2,1),(1,2,0,3),(0,0,1,1)\big) = V.$$

On en déduit que $\boxed{(\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2}) = ((1,2,-2,1),(1,2,0,3)) \text{ est une base de } V}$.

On peut aussi remarquer que $(0,0,1,1) = -\frac{1}{2}(1,2,-2,1)+\frac{1}{2}(1,2,0,3)$ donc $V = \mathrm{Vect}\left((1,2,-2,1),(1,2,0,3),(0,0,1,1)\right) = \mathrm{Vect}\left((1,2,-2,1),(1,2,0,3)\right)$ puis on conclut en utilisant que $(1,2,-2,1)$ et $(1,2,0,3)$ ne sont pas colinéaires.

3. *Déterminer une base $(\overrightarrow{w_3},\overrightarrow{w_4})$ de W.*

▶ On a :

$$W : \left\{\begin{array}{r} x-y-z+t=0 \\ 2y+z-t=0 \\ 3x+y-z+t=0 \end{array}\right. \iff \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\y\\z\\t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\y\\z\\t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\y\\z\\t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \quad .$$

On obtient un système linéaire de trois équations à quatre inconnues de rang 2 avec une équation auxiliaire compatible et deux inconnues auxiliaires. Il y a donc une infinité de solutions qu'on peut exprimer en fonction des inconnues auxiliaires z et t vues comme des paramètres.

$$W : \left\{\begin{array}{l} x-y = z-t \\ \quad 2y = -z+t \\ \quad\ z = z \\ \quad\ t = t \end{array}\right. , (z,t)\in\mathbb{R}^2$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ll} x = z-t+\frac{1}{2}(-z+t) = \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}t & L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1}{2}L_2 \\ y = -\frac{1}{2}z+\frac{1}{2}t & L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2 \\ z = z & \\ t = t & \end{array}\right. , (z,t)\in\mathbb{R}^2.$$

On obtient une représentation paramétrique de W et donc :

$$\begin{aligned} W &= \left\{(x,y,z,t) = (\tfrac{1}{2}z-\tfrac{1}{2}t, -\tfrac{1}{2}z+\tfrac{1}{2}t, z, t) \mid (z,t)\in\mathbb{R}^2\right\} \\ &= \left\{(x,y,z,t) = z(\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},1,0)+t(-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},0,1) \mid (z,t)\in\mathbb{R}^2\right\} \\ &= \mathrm{Vect}\big((\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},1,0),(-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},0,1)\big). \end{aligned}$$

On en déduit que la famille $((\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1,0),(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,1))$ est génératrice de W. De plus :

$$\text{rang}\Big((\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},1,0),(-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},0,1)\Big) = \text{rang}\left(\text{Mat}_{\mathcal{C}}\Big((\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},1,0),(-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},0,1)\Big)\right)$$

$$= \text{rang}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{rang}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{matrix} = \text{rang}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftrightarrow L_3 \\ L_3 \leftrightarrow L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_3 \end{matrix} = 2.$$

Par conséquent, la famille $((\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1,0),(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,1))$ est libre.

Finalement, $\boxed{(\overrightarrow{w_3},\overrightarrow{w_4}) = \big((\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1,0),(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,1)\big) \text{ est une base de } W}$.

On peut utiliser des méthodes différentes. Par exemple : on commence par trouver un vecteur $\overrightarrow{w_3} \in W \setminus \{\overrightarrow{0}\}$ à l'aide de la représentation cartésienne de W, puis on complète avec un autre vecteur $\overrightarrow{w_4} \in W \setminus \{\overrightarrow{0}\}$ non colinéaire à $\overrightarrow{w_3}$.

4. *Déterminer le rang de la famille $(\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{w_3},\overrightarrow{w_4})$. Est-elle libre ? Est-elle génératrice de $\mathbb{R}^4$?*

▶ On a :

$$\text{rang}\Big(\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{w_3},\overrightarrow{w_4}\Big) = \text{rang}\left(\text{Mat}_{\mathcal{C}}\Big(\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{w_3},\overrightarrow{w_4}\Big)\right)$$

$$= \text{rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 2 & 2 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{matrix}$$

$$= \text{rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftrightarrow L_3 \\ L_3 \leftrightarrow L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_3 \end{matrix}$$

$$= \text{rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ L_4 \leftarrow L_4 - \frac{5}{3}L_3 \end{matrix}$$

$$= \boxed{3}.$$

Puisque le rang n'est pas maximal, $\boxed{\text{la famille } (\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{w_3},\overrightarrow{w_4}) \text{ n'est pas libre}}$.

De plus $\dim(\mathbb{R}^4) = 4 \neq 3$ donc $\boxed{\text{la famille } (\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{w_3},\overrightarrow{w_4}) \text{ n'est pas génératrice de } \mathbb{R}^4}$.

5. *Extraire de la famille $(\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{w_3},\overrightarrow{w_4})$ une base de $F = \text{Vect}\,(\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{w_3},\overrightarrow{w_4})$.*

▶ On a :

$$\dim\left(\text{Vect}\Big(\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{w_3},\overrightarrow{w_4}\Big)\right) = \text{rang}\Big(\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{w_3},\overrightarrow{w_4}\Big) = 3$$

$$\text{et}\quad \text{rang}\Big(\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{w_3}\Big) = \text{rang}\left(\text{Mat}_{\mathcal{C}}\Big(\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{w_3}\Big)\right)$$

$$= \text{rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 2 & -\frac{1}{2} \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \cdots = \text{rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

à l'aide des mêmes opérations sur les lignes que celles de la question précédente. Ainsi $(\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{w_3})$ est une famille libre maximale de

$$\text{Vect}\Big(\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{w_3},\overrightarrow{w_4}\Big) = F.$$

On en déduit que $\boxed{(\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{w_3}) \text{ est une base de } F}$.

6. *On considère les vecteurs* $\overrightarrow{f_1} = (2,1,-1,0)$, $\overrightarrow{f_2} = (3,0,0,-1)$ *et* $\overrightarrow{f_3} = (2,1,0,1)$. *Montrer que la famille* $\left(\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}\right)$ *est une base de* F.

   ▶ On a :

$$
\begin{aligned}
\operatorname{rang}\left(\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}\right) &= \operatorname{rang}\left(\operatorname{Mat}_{\mathcal{C}}\left(\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}\right)\right) \\
&= \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftrightarrow L_2 \\ L_2 \leftrightarrow L_1 \text{ puis } L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ \end{matrix} \\
&= \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ L_4 \leftarrow L_4 + \frac{1}{3}L_2 \text{ puis } L_4 \leftarrow L_4 - L_3 \end{matrix} = 3.
\end{aligned}
$$

Donc la famille $\left(\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}\right)$ est libre.

On montre maintenant que le vecteur $\overrightarrow{f_1}$ appartient à F. Puisque la famille $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{w_3})$ est en particulier génératrice de F d'après le résultat de la question précédente, il suffit de montrer que $\overrightarrow{f_1}$ s'écrit comme une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ et $\overrightarrow{w_3}$. Il suffit donc de montrer que l'équation $\overrightarrow{f_1} = \lambda_1\overrightarrow{v_1} + \lambda_2\overrightarrow{v_2} + \lambda_3\overrightarrow{w_3}$ d'inconnue $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ admet au moins une solution. En remplaçant chacun des vecteurs par ses composantes, on obtient le système linéaire suivant :

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 2 & -\frac{1}{2} \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} \\
\iff \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{matrix} \\
\iff \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftrightarrow L_3 \\ L_3 \leftrightarrow L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_3 \end{matrix} \\
\iff \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ L_4 \leftarrow L_4 - \frac{5}{3}L_3 \end{matrix} .
\end{aligned}
$$

On obtient un système linéaire de quatre équations à trois inconnues de rang 3 avec une équation auxiliaire compatible et aucune inconnue auxiliaire. Il y a donc une seule solution. On en déduit que le vecteur $\overrightarrow{f_1}$ appartient bien à F.

Inutile de perdre du temps à résoudre ce système linéaire. Il suffit de prouver qu'il existe au moins une solution pour conclure.

De même, pour montrer que le vecteur $\overrightarrow{f_2}$ appartient à F, il suffit de montrer que l'équation $\overrightarrow{f_2} = \lambda_1\overrightarrow{v_1} + \lambda_2\overrightarrow{v_2} + \lambda_3\overrightarrow{w_3}$ d'inconnue $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ admet au moins une solution. On obtient un système linéaire avec les mêmes inconnues et les mêmes coefficients que celui obtenu pour le vecteur $\overrightarrow{f_1}$ mais avec un second membre différent. À l'aide des mêmes opérations sur les lignes, le second membre devient :

$$
\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{matrix} \to \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -6 \\ -10 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftrightarrow L_3 \\ L_3 \leftrightarrow L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_3 \end{matrix} \to \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ L_4 \leftarrow L_4 - \frac{5}{3}L_3 \end{matrix} .
$$

De même que pour le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{f}_1}$, l'équation auxiliaire est compatible et donc le système linéaire admet une seule solution. On en déduit que le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{f}_2}$ appartient bien à F.
On raisonne de même pour le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{f}_3}$. On a :

$$\begin{pmatrix}2\\1\\0\\1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}2\\-3\\4\\-1\end{pmatrix} \begin{matrix}L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1\\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1\\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1\end{matrix} \to \begin{pmatrix}2\\4\\-3\\-5\end{pmatrix} \begin{matrix}L_2 \leftrightarrow L_3\\ L_3 \leftrightarrow L_2\\ L_4 \leftarrow L_4 - L_3\end{matrix} \to \begin{pmatrix}2\\4\\-3\\0\end{pmatrix} \; L_4 \leftarrow L_4 - \frac{5}{3}L_3$$

donc le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{f}_3}$ appartient bien à F.
D'autre part, on a $\dim(F) = 3$ car $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{w_3})$ est une base de F d'après le résultat de la question précédente. Par conséquent, $(\overrightarrow{\mathrm{f}_1}, \overrightarrow{\mathrm{f}_2}, \overrightarrow{\mathrm{f}_3})$ est une famille libre maximale de F. On en déduit que $\boxed{(\overrightarrow{\mathrm{f}_1}, \overrightarrow{\mathrm{f}_2}, \overrightarrow{\mathrm{f}_3}) \text{ est une base de } F}$.

On peut utiliser des méthodes différentes. Par exemple : montrer que tout vecteur appartenant à F, c'est-à-dire toute toute combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ et $\overrightarrow{w_3}$ d'après le résultat de la question précédente, s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{f}_1}$, $\overrightarrow{\mathrm{f}_2}$ et $\overrightarrow{\mathrm{f}_3}$.

7. *Montrer que la famille $\mathcal{B} = \left(\overrightarrow{\mathrm{f}_1}, \overrightarrow{\mathrm{f}_2}, \overrightarrow{\mathrm{f}_3}, \overrightarrow{e_4}\right)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.*

► On a :

$$\begin{aligned}
\operatorname{rang}\left(\overrightarrow{\mathrm{f}_1}, \overrightarrow{\mathrm{f}_2}, \overrightarrow{\mathrm{f}_3}, \overrightarrow{e_4}\right) &= \operatorname{rang}\left(\operatorname{Mat}_{\mathcal{C}}\left(\overrightarrow{\mathrm{f}_1}, \overrightarrow{\mathrm{f}_2}, \overrightarrow{\mathrm{f}_3}, \overrightarrow{e_4}\right)\right)\\
&= \operatorname{rang}\begin{pmatrix}2&3&2&0\\1&0&1&0\\-1&0&0&0\\0&-1&1&1\end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&3&0&0\\0&0&1&0\\0&-1&1&1\end{pmatrix} \begin{matrix}L_1 \leftrightarrow L_2\\ L_2 \leftrightarrow L_1 \text{ puis } L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1\\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2\\ \end{matrix}\\
&= \operatorname{rang}\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&3&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} \; L_4 \leftarrow L_4 + \frac{1}{3}L_2 \text{ puis } L_4 \leftarrow L_4 - L_3 \quad = 4.
\end{aligned}$$

Donc la famille $\mathcal{B} = (\overrightarrow{\mathrm{f}_1}, \overrightarrow{\mathrm{f}_2}, \overrightarrow{\mathrm{f}_3}, \overrightarrow{e_4})$ est libre. D'autre part, on a $\dim(\mathbb{R}^4) = 4$. Par conséquent, $\mathcal{B}$ est une famille libre maximale de $\mathbb{R}^4$. On en déduit que $\boxed{\mathcal{B} \text{ est une base de } \mathbb{R}^4}$.

8. *Déterminer la matrice des coordonnées de la famille $\mathcal{C}$ dans la base $\mathcal{B}$.*

► Pour tout vecteur $\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^4$, les coordonnées de $\overrightarrow{u}$ dans la base $\mathcal{B}$ forment l'unique solution de l'équation $\overrightarrow{u} = \lambda_1 \overrightarrow{\mathrm{f}_1} + \lambda_2 \overrightarrow{\mathrm{f}_2} + \lambda_3 \overrightarrow{\mathrm{f}_3} + \lambda_4 e_4$ d'inconnue $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$. Si on note $\overrightarrow{u} = (x, y, z, t)$ les composantes du vecteur $\overrightarrow{u}$, on obtient le système linéaire suivant :

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} = \lambda_1\begin{pmatrix}2\\1\\-1\\0\end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix}3\\0\\0\\-1\end{pmatrix} + \lambda_3\begin{pmatrix}2\\1\\0\\1\end{pmatrix} + \lambda_4\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2&3&2&0\\1&0&1&0\\-1&0&0&0\\0&-1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\\\lambda_4\end{pmatrix}\\
\iff &\begin{pmatrix}y\\x-2y\\z+y\\t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&3&0&0\\0&0&1&0\\0&-1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\\\lambda_4\end{pmatrix} \begin{matrix}L_1 \leftrightarrow L_2\\ L_2 \leftrightarrow L_1 \text{ puis } L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1\\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2\\ \end{matrix}\\
\iff &\begin{pmatrix}y-(z+y)\\ \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y\\ z+y\\ t + \frac{1}{3}(x-2y) - (z+y)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\\\lambda_4\end{pmatrix} \begin{matrix}L_1 \leftarrow L_1 - L_3\\ L_2 \leftarrow \frac{1}{3}L_2\\ \\ L_4 \leftarrow L_4 + \frac{1}{3}L_2 \text{ puis } L_4 \leftarrow L_4 - L_3\end{matrix} \quad .
\end{aligned}$$

Par conséquent la matrice des coordonnées du vecteur $\overrightarrow{u}$ dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(\overrightarrow{u}\right) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left((x,y,z,t)\right) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y \\ y+z \\ \frac{1}{3}x - \frac{5}{3}y - z + t \end{pmatrix}.$$

Puisque $\overrightarrow{e_1} = (1,0,0,0)$, $\overrightarrow{e_1} = (0,1,0,0)$, $\overrightarrow{e_3} = (0,0,1,0)$ et $\overrightarrow{e_4} = (0,0,0,1)$, on en déduit que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(\overrightarrow{e_1}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(\overrightarrow{e_2}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{2}{3} \\ 1 \\ -\frac{5}{3} \end{pmatrix}, \quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(\overrightarrow{e_3}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(\overrightarrow{e_4}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Finalement, on a :

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(\mathcal{C}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{5}{3} & -1 & 1 \end{pmatrix}}.$$

9. *Montrer que pour chaque $\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^4$, il existe un unique couple $(\overrightarrow{\mathrm{f}}, \tau) \in F \times \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{\mathrm{f}} + \tau\overrightarrow{e_4}$.*

▶ Soit $\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^4$.

Unicité. On suppose qu'il existe deux couples $(\overrightarrow{\mathrm{f}}, \tau) \in F \times \mathbb{R}$ et $(\overrightarrow{\mathrm{f}'}, \tau') \in F \times \mathbb{R}$ tels que

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{\mathrm{f}} + \tau\overrightarrow{e_4} = \overrightarrow{\mathrm{f}'} + \tau'\overrightarrow{e_4}.$$

Puisque la famille $(\overrightarrow{\mathrm{f}_1}, \overrightarrow{\mathrm{f}_2}, \overrightarrow{\mathrm{f}_3})$ est en particulier génératrice de F d'après le résultat de la question 6, les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{f}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{f}'}$ s'écrivent comme combinaisons linéaires des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{f}_1}$, $\overrightarrow{\mathrm{f}_2}$ et $\overrightarrow{\mathrm{f}_3}$, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{f}} = \lambda_1\overrightarrow{\mathrm{f}_1} + \lambda_2\overrightarrow{\mathrm{f}_2} + \lambda_3\overrightarrow{\mathrm{f}_3} & \text{avec } (\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \in \mathbb{R}^3 \\ \overrightarrow{\mathrm{f}'} = \lambda_1'\overrightarrow{\mathrm{f}_1} + \lambda_2'\overrightarrow{\mathrm{f}_2} + \lambda_3'\overrightarrow{\mathrm{f}_3} & \text{avec } (\lambda_1',\lambda_2',\lambda_3') \in \mathbb{R}^3 \end{cases}.$$

Donc :

$$\overrightarrow{u} = \lambda_1\overrightarrow{\mathrm{f}_1} + \lambda_2\overrightarrow{\mathrm{f}_2} + \lambda_3\overrightarrow{\mathrm{f}_3} + \tau\overrightarrow{e_4} = \lambda_1'\overrightarrow{\mathrm{f}_1} + \lambda_2'\overrightarrow{\mathrm{f}_2} + \lambda_3'\overrightarrow{\mathrm{f}_3} + \tau'\overrightarrow{e_4}.$$

Puisque la famille $\mathcal{B} = (\overrightarrow{\mathrm{f}_1}, \overrightarrow{\mathrm{f}_2}, \overrightarrow{\mathrm{f}_3}, \overrightarrow{e_4})$ est une base de $\mathbb{R}^4$ d'après le résultat de la question 7, on en déduit que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(\overrightarrow{u}\right) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1' \\ \lambda_2' \\ \lambda_3' \\ \tau' \end{pmatrix}.$$

Par unicité des coordonnées, on obtient que $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) = (\lambda_1',\lambda_2',\lambda_3')$ et $\tau = \tau'$. En particulier on a :

$$\overrightarrow{\mathrm{f}} = \lambda_1\overrightarrow{\mathrm{f}_1} + \lambda_2\overrightarrow{\mathrm{f}_2} + \lambda_3\overrightarrow{\mathrm{f}_3} = \lambda_1'\overrightarrow{\mathrm{f}_1} + \lambda_2'\overrightarrow{\mathrm{f}_2} + \lambda_3'\overrightarrow{\mathrm{f}_3} = \overrightarrow{\mathrm{f}'}.$$

Finalement, les couples $(\overrightarrow{\mathrm{f}}, \tau)$ et $(\overrightarrow{\mathrm{f}'}, \tau')$ sont égaux, ce qui prouve l'unicité.

Existence. Puisque la famille $\mathcal{B} = (\overrightarrow{\mathrm{f}_1}, \overrightarrow{\mathrm{f}_2}, \overrightarrow{\mathrm{f}_3}, \overrightarrow{e_4})$ est en particulier génératrice de $\mathbb{R}^4$ d'après le résultat de la question 7, le vecteur $\overrightarrow{u}$ s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{f}_1}$, $\overrightarrow{\mathrm{f}_2}$, $\overrightarrow{\mathrm{f}_3}$ et $\overrightarrow{e_4}$, c'est-à-dire :

$$\overrightarrow{u} = \lambda_1\overrightarrow{\mathrm{f}_1} + \lambda_2\overrightarrow{\mathrm{f}_2} + \lambda_3\overrightarrow{\mathrm{f}_3} + \lambda_4\overrightarrow{e_4} \quad \text{avec } (\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4) \in \mathbb{R}^4.$$

On pose $\overrightarrow{\mathrm{f}} = \lambda_1\overrightarrow{\mathrm{f}_1} + \lambda_2\overrightarrow{\mathrm{f}_2} + \lambda_3\overrightarrow{\mathrm{f}_3}$ et $\tau = \lambda_4$. Puisque la famille $(\overrightarrow{\mathrm{f}_1}, \overrightarrow{\mathrm{f}_2}, \overrightarrow{\mathrm{f}_3})$ est en particulier génératrice de F d'après le résultat de la question 6, on en déduit que le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{f}}$ appartient F

comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{f}_1}$, $\overrightarrow{\mathrm{f}_2}$ et $\overrightarrow{\mathrm{f}_3}$. Ainsi, on a bien trouvé un couple $(\overrightarrow{\mathrm{f}}, \tau) \in F \times \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{\mathrm{f}} + \tau\overrightarrow{e_4}$.
Conclusion. Puisque ceci est vrai pour tout vecteur $\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^4$, on a bien montré que :

$$\boxed{\forall \overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^4,\ \exists!\left(\overrightarrow{\mathrm{f}}, \tau\right) \in F \times \mathbb{R},\ \overrightarrow{u} = \overrightarrow{\mathrm{f}} + \tau\overrightarrow{e_4}}.$$

Problème

Le but de ce problème est d'étudier l'efficacité de deux méthodes numériques permettant de calculer une approximation du nombre réel $\ln(2)$. Pour tout le problème, on fixe une précision 10^{-p} où $p \in \mathbb{N}$ et on admet que $2 < e < 3$.

A) Méthode de dichotomie.

On considère la fonction $f : x \mapsto e^x - 2$. On pose $a_0 = 0$, $b_0 = 1$ et on définit par récurrence pour tout $n \geqslant 0$:

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n \text{ si } f(c_n) > 0 \\ c_n \text{ sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \begin{cases} c_n \text{ si } f(c_n) > 0 \\ b_n \text{ sinon} \end{cases} \quad \text{où} \quad c_n = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

1. *Justifier que $\ln(2)$ est l'unique solution de l'équation $f(x) = 0$. Puis montrer que $a_0 < \ln(2) < b_0$.*

► On a :

$$f(x) = 0 \iff e^x - 2 = 0 \iff e^x = 2 \iff x = \ln(2)$$

car l'application $\exp : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ et $\ln :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ sont bijections réciproques l'une de l'autre. Par conséquent $\boxed{\ln(2) \text{ est l'unique solution de l'équation } f(x) = 0}$. De plus on a :

$$1 < 2 < e \quad \text{donc} \quad \boxed{a_0 = 0 = \ln(1) < \ln(2) < \ln(e) = 1 = b_0}$$

car la fonction ln est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

2. *Prouver que les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ sont adjacentes.*

► Il suffit de prouver que :
— $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante,
— $(b_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante,
— $\lim_{n\to+\infty} b_n - a_n = 0$.

Montrez que vous connaissez votre cours ! !

Montrons tout d'abord par récurrence que $b_n - a_n = (\frac{1}{2})^n$ pour tout $n \geqslant 0$.
Initialisation. On a $b_0 - a_0 = 1 - 0 = 1$ et $(\frac{1}{2})^0 = 1$ donc la proposition est initialisée.
Hérédité. On suppose que $b_n - a_n = (\frac{1}{2})^n$ pour un $n \geqslant 0$ fixé. On raisonne par disjonction de cas.
1^er cas : $f(c_n) > 0$. Alors :

$$b_{n+1} - a_{n+1} = c_n - a_n = \frac{a_n + b_n}{2} - a_n = \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{(\frac{1}{2})^n}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}.$$

2^e cas : sinon $f(c_n) \leqslant 0$. Alors :

$$b_{n+1} - a_{n+1} = b_n - c_n = b_n - \frac{a_n + b_n}{2} = \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{(\frac{1}{2})^n}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}.$$

Conclusion : dans tous les cas on a montré que $b_{n+1} - a_{n+1} = (\frac{1}{2})^{n+1}$ dès que $b_n - a_n = (\frac{1}{2})^n$, et ceci est vrai pour tout $n \geqslant 0$. Donc la proposition est héréditaire.
Conclusion. D'après le principe de récurrence, on a bien montré que $b_n - a_n = (\frac{1}{2})^n$ pour tout $n \geqslant 0$.
En particulier, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} b_n - a_n = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0.$$

Soit maintenant $n \geqslant 0$ fixé. On raisonne par disjonction de cas.
<u>1er cas</u> : $f(c_n) > 0$. Alors :

$$a_{n+1} - a_n = a_n - a_n = 0 \quad \text{et} \quad b_{n+1} - b_n = c_n - b_n = \frac{a_n + b_n}{2} - b_n = \frac{a_n - b_n}{2} = \frac{-(\frac{1}{2})^n}{2} \leqslant 0.$$

<u>2e cas</u> : sinon $f(c_n) \leqslant 0$. Alors :

$$a_{n+1} - a_n = c_n - a_n = \frac{a_n + b_n}{2} - a_n = \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{(\frac{1}{2})^n}{2} \geqslant 0 \quad \text{et} \quad b_{n+1} - b_n = b_n - b_n = 0.$$

<u>Conclusion</u> : dans tous les cas on a $a_{n+1} \geqslant a_n$ et $b_{n+1} \leqslant b_n$ et ceci est vrai pour tout $n \geqslant 0$. On en déduit que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante. Finalement, on a bien montré que les suites $\boxed{(a_n)_{n\geqslant 0} \text{ et } (b_n)_{n\geqslant 0} \text{ sont adjacentes}}$.

3. En déduire que la suite $(c_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers $\ln(2)$.

▶ Montrons tout d'abord par récurrence que $f(a_n)f(b_n) \leqslant 0$ pour tout $n \geqslant 0$.
<u>Initialisation</u>. On a :

$$f(a_0)f(b_0) = f(0)f(1) = (e^0 - 2)(e^1 - 2) = -(e-2) < 0 \quad \text{car } e > 2.$$

Donc la proposition est initialisée.
<u>Hérédité</u>. On suppose que $f(a_n)f(b_n) \leqslant 0$ pour un $n \geqslant 0$ fixé. Puisque $a_n \leqslant b_n$ (car $b_n - a_n = (\frac{1}{2})^2 \geqslant 0$ d'après ce qu'on a vu à la question précédente) et $f : x \mapsto e^x - 2$ est strictement croissante, on en déduit que $f(a_n) \leqslant 0$ et $f(b_n) \geqslant 0$. On raisonne par disjonction de cas.

<u>1er cas</u> : $f(c_n) > 0$. Alors :

$$f(a_{n+1})f(b_{n+1}) = f(a_n)f(c_n) \leqslant 0 \quad \text{car } f(a_n) \leqslant 0 \text{ et } f(c_n) > 0.$$

<u>2e cas</u> : sinon $f(c_n) \leqslant 0$. Alors :

$$f(a_{n+1})f(b_{n+1}) = f(c_n)f(b_n) \leqslant 0 \quad \text{car } f(c_n) \leqslant 0 \text{ et } f(b_n) \geqslant 0.$$

<u>Conclusion</u> : dans tous les cas on a montré que $f(a_{n+1})f(b_{n+1}) \leqslant 0$ dès que $f(a_n)f(b_n) \leqslant 0$, et ceci est vrai pour tout $n \geqslant 0$. Donc la proposition est héréditaire.

<u>Conclusion</u>. D'après le principe de récurrence, on a bien montré que $f(a_n)f(b_n) \leqslant 0$ pour tout $n \geqslant 0$. Or les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ sont adjacentes d'après le résultat de la question précédente, donc elles convergent vers la même limite. On note $\ell = \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n$. En passant à la limite dans l'inégalité qu'on vient de démontrer par récurrence, on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} f(a_n)f(b_n) \leqslant 0.$$

Or $\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = \lim_{n\to+\infty} f(b_n) = f(\ell)$ et $= f(\ell)$ car $f : x \mapsto e^x - 2$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc en particulier continue en ℓ.

> *N'oubliez pas de préciser que f est en continue en ℓ pour justifier cette limite. La continuité est un argument essentiel !!*

Par conséquent :

$$f(\ell)f(\ell) \leqslant 0 \quad \text{donc} \quad f(\ell) = 0.$$

Or $\ln(2)$ est l'unique solution de l'équation $f(x) = 0$ d'après le résultat de la question 1. On en déduit que $\ell = \ln(2)$ et par conséquent, les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ convergent vers $\ln(2)$. Finalement :

$$\lim_{n\to+\infty} c_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n + b_n}{2} = \frac{\ln(2) + \ln(2)}{2} = \boxed{\ln(2)}.$$

> *Comme la question précédente, il suffit d'adapter la démonstration du théorème de dichotomie du cours dans le cas particulier de la fonction f de l'énoncé.*

4. *Montrer que $|c_n - \ln(2)| < (1/2)^{n+1}$ pour tout $n \geqslant 0$.*

▶ Soit $n \geqslant 0$. D'après ce qu'on a vu à la question 1, on a $a_n \leqslant \ln(2) \leqslant b_n$ et donc :

$$c_n - \ln(2) = \frac{a_n + b_n}{2} - \ln(2) \leqslant \frac{a_n + b_n}{2} - a_n = \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{(\frac{1}{2})^n}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$\text{et} \quad c_n - \ln(2) = \frac{a_n + b_n}{2} - \ln(2) \geqslant \frac{a_n + b_n}{2} - b_n = \frac{a_n - b_n}{2} = \frac{-(\frac{1}{2})^n}{2} = -\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}.$$

On en déduit que $c_n - \ln(2) \in [-(\frac{1}{2})^{n+1}, (\frac{1}{2})^{n+1}]$ et ceci est vrai pour tout $n \geqslant$, d'où :

$$\boxed{\forall n \geqslant 0, \quad \left|c_n - \ln(2)\right| < \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}.$$

5. *Montrer que si n est supérieur à $A = \frac{\ln(10)}{\ln(2)}p$ alors c_n est une approximation de $\ln(2)$ à 10^{-p} près.*

▶ Soit $n \geqslant A$. Alors :

$$n + 1 \geqslant n \geqslant A = \frac{\ln(10)}{\ln(2)}p \quad \text{donc} \quad \ln\left(2^{n+1}\right) = (n+1)\ln(2) \geqslant p\ln(10) = \ln\left(10^p\right) \quad \text{car } \ln(2) > 0$$

$$\text{donc} \quad 2^{n+1} \geqslant 10^p \quad \text{car ln est strictement croissante}$$

$$\text{donc} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}} \leqslant \frac{1}{10^p} = 10^{-p}.$$

D'après le résultat de la question précédente, on en déduit que :

$$\left|c_n - \ln(2)\right| < 10^{-p}.$$

Par conséquent, $\boxed{c_n \text{ est une approximation de } \ln(2) \text{ à } 10^{-p} \text{ près}}$.

B) Méthode de Newton.

On considère la fonction $F : x \mapsto x - f(x)/f'(x)$. On pose $u_0 = 1$ et on définit par récurrence pour tout $n \geqslant 0$:

$$u_{n+1} = F(u_n).$$

6. *Justifier que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.*

▶ La fonction $f : x \mapsto e^x - 2$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions usuelles. Donc sa dérivée $f' : x \mapsto e^x$ est aussi de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. D'autre part, $f'(x) = e^x \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc $\boxed{F \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}}$ comme somme et quotient dont le dénominateur est non nul de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

N'oubliez pas de préciser que le dénominateur est non nul !!

7. *Pour chaque $n \geqslant 0$, justifier que u_{n+1} est l'unique solution de l'équation $T_n(x) = 0$ où T_n est la fonction dont la courbe représentative est la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse u_n.*

▶ Soit $n \geqslant 0$. La tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse u_n admet pour équation :

$$y = f(u_n) + f'(u_n)(x - u_n)$$

donc $T_n : x \mapsto f(u_n) + f'(u_n)(x - u_n)$. On en déduit que :

$$T_n(x) = 0 \iff f(u_n) + f'(u_n)(x - u_n) = 0 \iff x = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)} = F(u_n) = u_{n+1} \quad \text{car } f'(u_n) \neq 0.$$

Ainsi, $\boxed{u_{n+1} \text{ est l'unique solution de l'équation } T_n(x) = 0}$.

8. *Étudier les variations de la fonction F. Puis montrer que $\ln(2) < u_1 < u_0$.*

▶ On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{e^x - 2}{e^x} = x - 1 + 2e^{-x} \quad \text{donc} \quad F'(x) = 1 - 2e^{-x}.$$

Ainsi :

$$F'(x) > 0 \iff 1 - 2e^{-x} > 0 \iff e^x > 2 \iff x > \ln(2) \quad \text{car ln est strictement croissante.}$$

De plus, on a :
— $\lim_{x\to-\infty} F(x) = \lim_{x\to-\infty}(x-1+2e^{-x}) = \lim_{X\to+\infty} e^X(-\frac{X}{e^X} - \frac{1}{e^X} + 2) = +\infty$ en posant $X = -x$ et d'après le théorème des croissances comparées,
— $F(\ln(2)) = \ln(2) - \frac{f(\ln(2))}{f'(\ln(2))} = \ln(2)$ car $f(\ln(2)) = 0$,
— et $\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty}(x - 1 + 2e^{-x}) = +\infty$.

On en déduit le tableau des variations de la fonction F.

x	$-\infty$		$\ln(2)$		$+\infty$
$F'(x)$		$-$	0	$+$	
$F(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\ln(2)$	$\nearrow$	$+\infty$

On a $u_0 = 1 > \ln(2)$ en raisonnant comme à la question 1. Donc $\boxed{u_1 = F(u_0) > F(\ln(2)) = \ln(2)}$ car F est strictement croissante sur $[\ln(2), +\infty[$. De plus, on a :

$$\boxed{u_1 = F(u_0) = F(1) = 1 - 1 + 2e^{-1} = \frac{2}{e} < 1 = u_0} \quad \text{car } 2<\text{e}.$$

9. *En déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante et que chacun de ses termes appartient à $]\ln(2), 1]$.*

▶ Montrons par récurrence que $\ln(2) < u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1$ pour tout $n \geqslant 0$.
Initialisation. On a $\ln(2) < u_1 < u_0 = 1$ d'après le résultat de la question précédent donc la proposition est initialisée.
Hérédité. On suppose que $\ln(2) < u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1$ pour un $n \geqslant 0$ fixé. Puisque F est strictement croissante sur $[\ln(2), +\infty[$, on a :

$$\underbrace{F(\ln(2))}_{=\ln(2)} < \underbrace{F(u_{n+1})}_{=u_{n+2}} \leqslant \underbrace{F(u_n)}_{=u_{n+1}} \leqslant \underbrace{F(1)}_{=F(u_0)=u_1<u_0=1} \quad \text{donc} \quad \ln(2) < u_{n+2} \leqslant_{n+1} \leqslant 1.$$

Ainsi la proposition est vérifiée au rang $n+1$ dès qu'elle est vérifiée au rang n, et ceci est vrai pour tout $n \geqslant 0$. Donc la proposition est héréditaire.
Conclusion. D'après le principe de récurrence, on a bien montré que $\ln(2) < u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1$ pour tout $n \geqslant 0$. On en déduit que la suite $\boxed{(u_n)_{n\geqslant 0} \text{ est décroissante et que chacun de ses termes appartient au}}$ $\boxed{\text{segment }]\ln(2), 1]}$.

10. *Prouver que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers $\ln(2)$.*

▶ D'après le résultat de la question précédente, la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante et minorée. On en déduit qu'elle converge d'après le théorème de la limite monotone. On note $\ell = \lim_{n\to+\infty} u_n$. En passant à la limite dans la définition par récurrence de $(u_n)_{n\geqslant 0}$, on obtient :

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} F(u_n) = F(\ell)$$

car F est continue sur $\mathbb{R}$ donc en particulier continue en ℓ.

Comme pour la question 3, la continuité est un argument essentiel. N'oubliez pas de la préciser.

Or :

$$\ell = F(\ell) \iff \ell = \ell - \frac{f(\ell)}{f'(\ell)} \iff f(\ell) = 0 \iff \ell = \ln(2) \quad \text{d'après le résultat de la question 1.}$$

Finalement, la suite $\boxed{(u_n)_{n\geqslant 0} \text{ converge vers } \ln(2)}$.

11. *Montrer que*

$$\forall x \in]\ln(2), 1], \quad \frac{F(x) - \ln(2)}{x - \ln(2)} < \frac{1}{3}.$$

► Soit $x \in]\ln(2), 1]$. Puisque la fonction F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ d'après le résultat de la question 6, elle est en particulier continue sur $[\ln(2), x]$ et dérivable sur $]\ln(2), x[$. On a donc d'après le théorème des accroissements finis :

$$\exists c \in]\ln(2), x[, \quad \frac{F(x) - F(\ln(2))}{x - \ln(2)} = F'(c).$$

Vérifiez bien chacune des hypothèses d'un théorème avant de l'appliquer.

Or on sait que $F(\ln(2)) = \ln(2)$ et $F'(c) = 1 - 2e^{-c}$ d'après ce qu'on a vu à la question 8. De plus, on a :

$$\begin{aligned} c < x \leqslant 1 \quad &\text{donc} \quad e^{-c} \geqslant e^{-1} \quad \text{car exp est strictement croissante} \\ &\text{donc} \quad F'(c) = 1 - 2e^{-c} \leqslant 1 - 2e^{-1} = 1 - \frac{2}{e} \\ &\text{donc} \quad F'(c) \leqslant 1 - \frac{2}{e} < 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \quad \text{car } e < 3. \end{aligned}$$

Finalement, on a bien montré que :

$$\boxed{\frac{F(x) - \ln(2)}{x - \ln(2)} < \frac{1}{3}}$$

et ceci est vrai pour tout $x \in]\ln(2), 1]$.

12. *En déduire que $0 < u_n - \ln(2) < (1/3)^n$ pour tout $n \geqslant 0$.*

► On raisonne par récurrence.

Initialisation. On a $u_0 - \ln(2) = 1 - \ln(2) \in]0, 1[$ car $\ln(2) \in]0, 1[$ d'après le résultat de la question 1. Donc la proposition est initialisée car $0 < u_0 - \ln(2) < 1 = (\frac{1}{3})^0$.

Hérédité. On suppose que $0 < u_n - \ln(2) < (\frac{1}{3})^n$ pour un $n \geqslant 0$ fixé. D'après le résultat de la question précédente on a en posant $x = u_n$ (car $u_n \in]\ln(2), 1]$ d'après le résultat de la question 9) :

$$\frac{u_{n+1} - \ln(2)}{u_n - \ln(2)} = \frac{F(u_n) - \ln(2)}{u_n - \ln(2)} < \frac{1}{3} \quad \text{donc} \quad u_{n+1} - \ln(2) < \frac{1}{3}(u_n - \ln(2)) \quad \text{car } u_n - \ln(2) > 0.$$

De plus $u_{n+1} - \ln(2) > 0$ car $u_{n+1} > \ln(2)$ d'après le résultat de la question 9. On obtient donc d'après l'hypothèse de récurrence :

$$0 < u_{n+1} - \ln(2) < \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \quad \text{car } \frac{1}{3} > 0.$$

Ainsi la proposition est vérifiée au rang $n+1$ dès qu'elle est vérifiée au rang n, et ceci est vrai pour tout $n \geqslant 0$. Donc la proposition est héréditaire.

Conclusion. D'après le principe de récurrence, on a bien montré que

$$\boxed{\forall n \geqslant 0, \quad 0 < u_n - \ln(2) < \left(\frac{1}{3}\right)^n}.$$

13. *Montrer que si n est supérieur à $B = \frac{\ln(10)}{\ln(3)}p$ alors u_n est une approximation de $\ln(2)$ à 10^{-p} près.*

▶ Soit $n \geqslant B$. Alors :

$$n \geqslant B = \frac{\ln(10)}{\ln(3)}p \quad \text{donc} \quad \ln(3^n) = n\ln(3) \geqslant p\ln(10) = \ln(10^p) \quad \text{car } \ln(3) > 0$$
$$\text{donc} \quad 3^n \geqslant 10^p \quad \text{car ln est strictement croissante}$$
$$\text{donc} \quad \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{3^n} \leqslant \frac{1}{10^p} = 10^{-p}.$$

D'après le résultat de la question précédente, on en déduit que :

$$0 < u_n - \ln(2) < 10^{-p}.$$

Par conséquent, $\boxed{u_n \text{ est une approximation de } \ln(2) \text{ à } 10^{-p} \text{ près}}$.

14. *Comparer la constante B avec la constante A de la question 5. Puis conjecturer la méthode la plus efficace.*

▶ On a $0 = \ln(1) < \ln(2) < \ln(3)$ car la fonction ln est strictement croissante. Par conséquent :

$$\boxed{A = \frac{\ln(10)}{\ln(2)} > \frac{\ln(10)}{\ln(3)} = B} \quad \text{car } \ln(10) > 0.$$

Ainsi, d'après les résultats des questions 5 et 13, il suffit de calculer moins de termes de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ que de termes de la suite $(c_n)_{n\geqslant 0}$ pour obtenir une approximation de $\ln(2)$ à 10^{-p} près. Donc $\boxed{\text{la méthode de Newton semble plus efficace que la méthode de dichotomie}}$.

ATTENTION : il s'agit seulement d'une conjecture et non d'une preuve !! En effet, nous avons montré que les conditions $n \geqslant A$ (question 5) et $n \geqslant B$ (question 13) pour obtenir une approximation de $\ln(2)$ à 10^{-p} près sont <u>suffisantes</u> mais nous n'avons pas démontré qu'elles sont <u>nécessaires</u>. Autrement dit, si n est plus petit que A et B alors il est possible que c_n soit une approximation de $\ln(2)$ à 10^{-p} près au contraire de u_n. Pour pouvoir prouver que la méthode de Newton est plus efficace que la méthode de dichotomie, il faudrait déterminer pour chaque méthode la plus petite valeur de n à partir de laquelle on a bien une approximation de $\ln(2)$ à 10^{-p} près.

C) Raffinement de l'estimation de la vitesse de convergence.

15. *Pour cette question, on fixe $x \in]\ln(2), 1]$ et on considère la fonction*

$$g : t \mapsto F(x) - F(t) - F'(t)(x-t) - \lambda(x-t)^2 \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{R} \text{ est une constante.}$$

(a) *On fixe la constante λ afin que $g(\ln(2)) = g(x)$. Exprimer λ en fonction de x.*

▶ On a :

$$\begin{aligned}
& g(\ln(2)) = g(x) = F(x) - F(x) - F'(x)(x-x) - \lambda(x-x)^2 = 0 \\
\iff & F(x) - F\big(\ln(2)\big) - F'\big(\ln(2)\big)\big(x-\ln(2)\big) - \lambda\big(x-\ln(2)\big)^2 = 0 \\
\iff & \lambda\big(x-\ln(2)\big)^2 = F(x) - F\big(\ln(2)\big) - F'\big(\ln(2)\big)\big(x-\ln(2)\big) \\
\iff & \lambda = \frac{F(x) - F\big(\ln(2)\big)}{\big(x-\ln(2)\big)^2} - \frac{F'\big(\ln(2)\big)}{\big(x-\ln(2)\big)}.
\end{aligned}$$

Or $F(\ln(2)) = \ln(2)$ et $F'(\ln(2)) = 0$ d'après ce qu'on a vu à la question 8. Finalement :

$$\boxed{\lambda = \frac{F(x) - \ln(2)}{\big(x-\ln(2)\big)^2}}.$$

(b) *À l'aide d'un résultat du cours, justifier l'existence d'un réel $c \in]\ln(2), x[$ tel que $F''(c) = 2\lambda$.*

▶ La fonction F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ d'après le résultat de la question 6. Donc sa dérivée F' aussi. Par conséquent, la fonction g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ comme somme et produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$. En particulier, la fonction g est continue sur $[\ln(2), x]$ et dérivable sur $]\ln(2), x[$. Puisque $g(\ln(2)) = g(x)$, on a d'après le théorème de Rolle :

$$\exists c \in]\ln(2), x[, \quad g'(c) = 0.$$

Or on a pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} & g(t) = F(x) - F(t) - F'(t)(x-t) - \lambda(x-t)^2 \\ \text{donc} \quad & g'(t) = 0 - F'(t) - F''(t)(x-t) - F'(t)(-1) - \lambda(-1)2(x-t) \\ & = -F'(t) - F''(t)(x-t) + F'(t) + 2\lambda(x-t) \\ & = \big(2\lambda - F''(t)\big)(x-t). \end{aligned}$$

On en déduit que $g'(c) = (2\lambda - F''(c))(x-c) = 0$ donc $\boxed{F''(c) = 2\lambda}$ car $c \neq x$.

(c) *Déduire des résultats précédents que*

$$\frac{F(x) - \ln(2)}{\big(x - \ln(2)\big)^2} < \frac{1}{2}.$$

▶ D'après les résultats des deux questions précédentes, on a :

$$\frac{F(x) - \ln(2)}{\big(x - \ln(2)\big)^2} = \lambda = \frac{F''(c)}{2}.$$

Or, on a vu à la question 8 que $F' : x \mapsto 1 - 2e^{-x}$, donc $F''(c) = 2e^{-c}$. De plus, on a :

$$\ln(2) < c \quad \text{donc} \quad 2e^{-c} < 2e^{-\ln(2)} = \frac{2}{e^{\ln(2)}} = \frac{2}{2} = 1 \quad \text{car exp est strictement croissante.}$$

Finalement, on optient :

$$\boxed{\frac{F(x) - \ln(2)}{\big(x - \ln(2)\big)^2} = \frac{F''(c)}{2} < \frac{1}{2}}.$$

16. *En déduire que $0 < u_n - \ln(2) < (1/2)^{2^n - 1}$ pour tout $n \geqslant 0$.*

▶ On raisonne par récurrence.
Initialisation. On a $u_0 - \ln(2) = 1 - \ln(2) \in]0, 1[$ car $\ln(2) \in]0, 1[$ d'après le résultat de la question 1. Donc la proposition est initialisée car $0 < u_0 - \ln(2) < 1 = (\frac{1}{2})^0 = (\frac{1}{2})^{1-1} = (\frac{1}{2})^{2^0-1}$.
Hérédité. On suppose que $0 < u_n - \ln(2) < (\frac{1}{2})^{2^n - 1}$ pour un $n \geqslant 0$ fixé. D'après le résultat de la question précédente on a en posant $x = u_n$ (car $u_n \in]\ln(2), 1]$ d'après le résultat de la question 9) :

$$\frac{u_{n+1} - \ln(2)}{\big(u_n - \ln(2)\big)^2} = \frac{F(u_n) - \ln(2)}{\big(u_n - \ln(2)\big)^2} < \frac{1}{2} \quad \text{donc} \quad u_{n+1} - \ln(2) < \frac{1}{2}\big(u_n - \ln(2)\big)^2 \quad \text{car } u_n - \ln(2) > 0.$$

De plus $u_{n+1} - \ln(2) > 0$ car $u_{n+1} > \ln(2)$ d'après le résultat de la question 9. On obtient donc d'après l'hypothèse de récurrence :

$$0 < u_{n+1} - \ln(2) < \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n - 1}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{1 + 2(2^n - 1)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{1 + 2^{n+1} - 2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n+1} - 1}.$$

Ainsi la proposition est vérifiée au rang $n+1$ dès qu'elle est vérifiée au rang n, et ceci est vrai pour tout $n \geqslant 0$. Donc la proposition est héréditaire.
Conclusion. D'après le principe de récurrence, on a bien montré que

$$\boxed{\forall n \geqslant 0, \quad 0 < u_n - \ln(2) < \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n - 1}}.$$

17. Montrer qu'on peut remplacer la constante B de la question 13 par la constante

$$C = \ln(\tfrac{\ln(10)}{\ln(2)}p + 1)/\ln(2).$$

▶ Soit $n \geqslant C$. Alors :

$$\begin{aligned}
n \geqslant C = \frac{\ln\left(\frac{\ln(10)}{\ln(2)}p+1\right)}{\ln(2)} \quad & \text{donc} \quad \ln\left(2^n\right) = n\ln(2) \geqslant \ln\left(\frac{\ln(10)}{\ln(2)}p+1\right) \quad \text{car } \ln(2)>0 \\
& \text{donc} \quad 2^n \geqslant \frac{\ln(10)}{\ln(2)}p+1 \quad \text{car ln est strictement croissante} \\
& \text{donc} \quad \ln\left(2^{2^n-1}\right) = (2^n-1)\ln(2) \geqslant \ln(10)p = \ln\left(10^p\right) \quad \text{car } \ln(2)>0 \\
& \text{donc} \quad 2^{2^n-1} \geqslant 10^p \quad \text{car ln est strictement croissante} \\
& \text{donc} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n-1} = \frac{1}{2^{2^n-1}} \leqslant \frac{1}{10^p} = 10^{-p}.
\end{aligned}$$

D'après le résultat de la question précédente, on en déduit que :

$$0 < u_n - \ln(2) < 10^{-p}.$$

Par conséquent, $\boxed{u_n \text{ est une approximation de } \ln(2) \text{ à } 10^{-p} \text{ près}}$ comme à la question 13.

18. Calculer la limite quand p tend vers $+\infty$ du rapport C/A où A est la constante de la question 5. Que peut-on en déduire quant à la conjecture émise à la question 14 ?

▶ On a :

$$\lim_{p\to+\infty} \frac{C}{A} = \lim_{p\to+\infty} \frac{\frac{\ln\left(\frac{\ln(10)}{\ln(2)}p+1\right)}{\ln(2)}}{\frac{\ln(10)}{\ln(2)}p} = \lim_{p\to+\infty} \frac{\ln\left(\frac{\ln(10)}{\ln(2)}p+1\right)}{\ln(10)p} = \lim_{p\to+\infty} \frac{\ln\left(p\left(\frac{\ln(10)}{\ln(2)}+\frac{1}{p}\right)\right)}{\ln(10)p}$$

$$\lim_{p\to+\infty} \frac{\ln(p)+\ln\left(\frac{\ln(10)}{\ln(2)}+\frac{1}{p}\right)}{\ln(10)p} = \lim_{p\to+\infty} \frac{1}{\ln(10)}\left(\frac{p}{\ln(p)} + \ln\left(\frac{\ln(10)}{\ln(2)}+\frac{1}{p}\right)\times\frac{1}{p}\right).$$

Or :

$$\lim_{p\to+\infty} \frac{p}{\ln(p)} = 0 \quad \text{d'après le théorème des croissances comparées.}$$

On en déduit que :

$$\boxed{\lim_{p\to+\infty} \frac{C}{A} = 0}.$$

Ainsi, la constante C est négligeable devant la constante A lorsque p tend vers $+\infty$. D'après les résultats des questions 5 et 17, le nombre de termes de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ qu'il est suffisant de calculer pour obtenir une approximation de $\ln(2)$ à 10^{-p} près est beaucoup plus faible que ce même nombre pour la suite $(c_n)_{n\geqslant 0}$. Ceci conforte la conjecture émise à la question 14 : $\boxed{\text{la méthode de Newton semble plus efficace que la méthode de dichotomie}}$.

Même commentaire qu'à la question 14 : ce raisonnement ne prouve rien, il ne fait que confirmer une conjecture

.

DS n$^{\text{o}}$ 8 de mathématiques et d'informatique

durée : 3 heures

Exercice 1

Pour toute variable aléatoire X telle que l'ensemble de ses valeurs images $X(\Omega)$ est un sous-ensemble fini de $\mathbb{N}$, on définit sa fonction génératrice par :

$$g_X : t \mapsto \mathrm{E}\Big(t^X\Big) \quad \text{où E désigne l'espérance.}$$

Soit X une telle variable aléatoire. On note $m \in \mathbb{N}$ sa valeur image maximale, ainsi $X(\Omega) \subset \{0, 1, 2, \ldots, m\}$.

1. Justifier que g_X est une fonction polynomiale.
2. (a) Calculer $g_X(1)$.
   (b) Montrer que $g'_X(1) = \mathrm{E}(X)$.
   (c) Montrer que $g''_X(1) = \mathrm{E}(X(X-1))$.
   (d) Exprimer $\mathrm{V}(X)$ (où V désigne la variance) en fonction de $g'_X(1)$ et $g''_X(1)$.
3. (a) Exprimer g_{X+1} à l'aide de g_X.
   (b) Exprimer g_{2X} à l'aide de g_X.
4. Dans cette question, on suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ où $(n, p) \in \mathbb{N} \times [0, 1]$.
   (a) Calculer g_X.
   (b) Retrouver les valeurs de $\mathrm{E}(X)$ et $\mathrm{V}(X)$ à l'aide de la fonction génératrice.

Exercice 2

On considère la fonction suivante :

$$f : x \mapsto x \exp(\sin^2(x)).$$

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 5 en 0 de f.
2. Justifier que f réalise une bijection de l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ vers un ensemble I à déterminer.
3. Justifier que la bijection réciproque f^{-1} de $f|_{]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I.
4. Justifier l'existence de $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $f^{-1}(x) = ax + bx^3 + cx^5 + o_{x\to 0}(x^5)$.
5. En composant les développements limités de f^{-1} et f, déterminer les valeurs des constantes a, b et c.
6. Que peut-on en déduire pour la tangente de la courbe représentative de f^{-1} au voisinage de 0 ?

Exercice 3

On propose de calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\, \mathrm{d}x.$$

Pour cela, on pose $\varphi(t) = \dfrac{1-t^2}{2t}$ pour tout $t < 0$.

1. À l'aide du changement de variable $x = \varphi(t)$ dont on vérifiera précisément les hypothèses, montrer que

$$I = \frac{1}{4} \int_{-1}^{-(1+\sqrt{2})} \frac{(1+t^2)^2}{t^3} \mathrm{d}t.$$

2. À l'aide d'un changement de variable à déterminer, montrer que

$$I = \frac{1}{4} \int_{1}^{1+\sqrt{2}} \frac{(1+t^2)^2}{t^3} \mathrm{d}t.$$

3. Conclure.

Problème 1

Pour tout $p \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ on pose $f_p(x) = \frac{1}{(1+x^2)^p}$ et $I_p = \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^p}dx$.

1. Écrire un programme permettant d'afficher la courbe de f_1 sur l'intervalle $[0,1]$. On considérera 100 points de l'intervalle.
2. Calculer I_0, I_1.
3. Écrire une fonction `sommeRiemmann(n,p)` qui retourne la valeur $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f_p(\frac{k}{n})$. On supposera $n \geq 1$.
4. On fixe $n \geq 1$.
   (a) Montrer que : $\forall k \in \{0,\cdots,n-1\},\ \forall t \in [\frac{k}{n},\ \frac{k+1}{n}], \frac{1}{1+\left(\frac{(k+1)}{n}\right)^2} \leq \frac{1}{1+t^2} \leq \frac{1}{1+(\frac{k}{n})^2}$.
   (b) En déduire que $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1+(\frac{k+1}{n})^2} \leq \frac{\pi}{4} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1+(\frac{k}{n})^2}$.
   (c) En déduire une fonction `approx(ecart)` qui retourne une liste $[a,b]$ où $a \leq \frac{\pi}{4} \leq b$ et $|b-a| \leq$ `ecart`.
5. (a) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que : $\forall p \in \mathbb{N}, I_p = 2^{-p} + 2p(I_p - I_{p+1})$.
   En déduire que
   $$\forall p \geq 1, I_{p+1} = \left(\frac{2p-1}{2p}\right) I_p + \frac{1}{p2^{p+1}}. \qquad \text{(R)}$$
   (b) En déduire une fonction `calculeI(p)` qui retourne la valeur de I_p pour $p \in \mathbb{N}$ en utilisant la relation de récurrence (R) et les valeurs de I_0, I_1. On supposera que le nombre π est donnée en Python par la variable `pi`.
6. Soit $p \in \mathbb{N}$. En étudiant le signe de $f_p - f_{p+1}$, montrer que la suite $(I_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée et en déduire sa nature.
7. On cherche à déterminer la limite de $(I_p)_{p\in\mathbb{N}}$.
   (a) Pour tout $p \geq 3$, justifier que l'on a $I_p = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{\ln(p)}}} f_p(x)dx + \int_{\frac{1}{\sqrt{\ln(p)}}}^1 f_p(x)dx$.
   (b) En déduire que pour tout $p \geq 3$, $0 \leq I_p \leq \frac{1}{\sqrt{\ln(p)}} + \frac{1}{(1+\frac{1}{\ln(p)})^p}$.
   (c) En déduire la limite de $(I_p)_{p\in\mathbb{N}}$.
8. On suppose que la variable `pi` contient la valeur de π. On considère les fonctions suivantes :

```
def test1() :
    for i in range(1,60) :
        print(calculeI(i)*(i**0.5)*2/(pi**0.5))
def test2() :
    for i in range(1,60) :
        print(calculeI(i)*i)
def test3() :
    for i in range(1,60) :
        print(calculeI(i)/i)
```

   Lorsque l'on exécute ces programmes on constate que l'on obtient les affichages suivants :

`test1()`	0.886…	1.025…	1.064…	1.071…	1.067…	1.061…	1.054…	…
`test2()`	0.785…	1.285…	1.633…	1.898…	2.115…	2.303…	2.472…	…
`test3()`	0.785…	0.321…	0.181…	0.118…	0.084…	0.063…	0.050…	…

   Déduire de ces tests informatiques un équivalent possible pour I_p. On l'écrira sous la forme Cp^{α}.

Problème 2

Soit $p \in \mathbb{N}^\star$. On note 0_p l'endomorphisme nul de $\mathbb{R}^p$ et I_p l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^p$. On rappelle que pour tout endomorphisme f de $\mathbb{R}^p$, on définit par récurrence les endomorphismes suivants :

$$f^0 = \mathrm{I}_p \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N},\ f^{k+1} = f \circ f^k.$$

On dit qu'un endomorphisme f de $\mathbb{R}^p$ est <u>nilpotent</u> s'il existe $n \in \mathbb{N}^\star$ tel que $f^n = 0_p$. Dans ce cas, le plus petit entier $n \geqslant 1$ qui vérifie cette propriété est appelé <u>l'indice de nilpotence</u> de f.

A) Dans cette partie, on considère l'application suivante :

$$f : (x, y, z, t) \mapsto (3x + y - 2z - 2t, -x + t, 2x + y - 2z - t, x - t).$$

1. Justifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$.

On note M la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

2. Calculer M^2 et M^3. En déduire que f est nilpotent et déterminer son indice de nilpotence.
3. f est-il injectif ? surjectif ?
4. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $f - \lambda \mathrm{I}_4$ est bijectif si et seulement si $\lambda \neq 0$.
5. On pose $\overrightarrow{v_2} = (1, -1, 0, 1)$.
   (a) Montrer que $\overrightarrow{v_2} \in \mathrm{Ker}(f)$.
   (b) Trouver un vecteur $\overrightarrow{v_1} \in \mathrm{Ker}(f)$ tel que $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})$ forme une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
   (c) Trouver un antécédent $\overrightarrow{v_3} \in \mathrm{Im}(f)$ de $\overrightarrow{v_2}$ par f.
   (d) Trouver un antécédent $\overrightarrow{v_4} \in \mathbb{R}^4$ de $\overrightarrow{v_3}$ par f.
   (e) Justifier que la famille $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_4})$ forme une base de $\mathbb{R}^4$.
   (f) Déterminer la matrice de f dans la base $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_4})$.
   (g) En déduire une base de $\mathrm{Im}(f)$.

B) Cette partie propose de démontrer quelques propriétés générales des endomorphismes nilpotents. On fixe donc f un endomorphisme nilpotent de $\mathbb{R}^p$ quelconque et on note n son indice de nilpotence.

1. Prouver que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $f^k \neq 0_p$ si $k < n$ et $f^k = 0_p$ si $k \geqslant n$.
2. (a) Montrer que $\mathrm{Im}(f^{n-1}) \subset \mathrm{Ker}(f)$.
   (b) En déduire que f n'est pas injectif. f est-il surjectif ?
3. Le but de cette question est de démontrer que $n \leqslant p$.
   (a) Justifier que l'ensemble $\mathbb{R}^p \setminus \mathrm{Ker}(f^{n-1})$ est non vide.

   On fixe $\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^p \setminus \mathrm{Ker}(f^{n-1})$ et on suppose qu'il existe des réels $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}$ non tous nuls vérifiant
   $$\lambda_0 \overrightarrow{u} + \lambda_1 f(\overrightarrow{u}) + \lambda_2 f^2(\overrightarrow{u}) + \cdots + \lambda_{n-1} f^{n-1}(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}.$$
   On note m le plus petit des entiers $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ tels que $\lambda_k \neq 0$.

   (b) En considérant le vecteur $f^{n-1-m}(\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k(\overrightarrow{u}))$, montrer que $\lambda_m = 0$.
   (c) Que peut-on en déduire pour la famille $(\overrightarrow{u}, f(\overrightarrow{u}), f^2(\overrightarrow{u}), \dots, f^{n-1}(\overrightarrow{u}))$?
   (d) Conclure.
4. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^\star$. On pose $g = \mathrm{I}_p + f + f^2 + \cdots + f^{n-1}$.
   (a) Simplifier $(f - \mathrm{I}_p) \circ g$.
   (b) En déduire que $f - \mathrm{I}_p$ est bijectif et déterminer sa bijection réciproque en fonction de g.
   (c) Justifier que $\frac{1}{\lambda} f$ est un endomorphisme nilpotent de $\mathbb{R}^p$ d'indice de nilpotence égal à n.
   (d) En déduire que $f - \lambda \mathrm{I}_p$ est bijectif et déterminer sa bijection réciproque en fonction de λ, f et n.

Corrigé du DS n° 8 de mathématiques et d'informatique

Exercice 1

Pour toute variable aléatoire X telle que l'ensemble de ses valeurs images $X(\Omega)$ est un sous-ensemble fini de $\mathbb{N}$, on définit sa fonction génératrice par :

$$g_X : t \mapsto \mathrm{E}\left(t^X\right) \quad \text{où E désigne l'espérance.}$$

Soit X une telle variable aléatoire. On note $m \in \mathbb{N}$ sa valeur image maximale, ainsi $X(\Omega) \subset \{0, 1, 2, \ldots, m\}$.

1. *Justifier que g_X est une fonction polynomiale.*

   ▶ On a d'après le théorème de transfert :

$$g_X : t \mapsto \mathrm{E}\left(t^X\right) = \sum_{k=0}^{m} t^k \mathrm{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{m} a_k t^k \quad \text{en posant } a_k = \mathrm{P}(X = k).$$

   Donc $\boxed{g \text{ est bien une fonction polynomiale associée au polynôme } \sum_{k=0}^{m} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]}$.

2. (a) *Calculer $g_X(1)$.*

   ▶ Par définition de g_X, on a $\boxed{g_X(1) = \mathrm{E}(1^X) = \mathrm{E}(1) = 1}$.

   On peut également retrouver ce résultat à l'aide du théorème de transfert :

$$g_X(1) = \mathrm{E}\left(1^X\right) = \sum_{k=0}^{m} 1^k \mathrm{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{m} \mathrm{P}(X = k) = \mathrm{P}\left(\bigcup_{k=0}^{m} (X = k)\right)$$
$$= \mathrm{P}\left(X \in \bigcup_{k=0}^{m} \{k\}\right) = \mathrm{P}\left(X \in \{0, 1, 2, \ldots, m\}\right) = 1.$$

   (b) *Montrer que $g_X'(1) = \mathrm{E}(X)$.*

   ▶ La fonction génératrice g_X est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction polynomiale d'après la question 1. On a d'après le théorème de transfert :

$$g_X : t \mapsto \mathrm{E}\left(t^X\right) = \sum_{k=0}^{m} t^k \mathrm{P}(X = k) \quad \text{donc :} \quad g_X' : t \mapsto \sum_{k=0}^{m} k t^{k-1} \mathrm{P}(X = k)$$

   et en particulier :

$$g_X'(1) = \sum_{k=0}^{m} k 1^{k-1} \mathrm{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{m} k \mathrm{P}(X = k) = \boxed{\mathrm{E}(X)}.$$

   (c) *Montrer que $g_X''(1) = \mathrm{E}(X(X-1))$.*

   ▶ La fonction génératrice est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ pour les mêmes raisons que celles exposées à la question précédente, et on a :

$$g_X'' : t \mapsto \sum_{k=0}^{m} k(k-1) t^{k-2} \mathrm{P}(X = k)$$

donc en particulier :

$$g_X''(1) = \sum_{k=0}^{m} k(k-1)1^{k-2}\mathrm{P}(X=k) = \sum_{k=0}^{m} k(k-1)\mathrm{P}(X=k) = \boxed{\mathrm{E}(X(X-1))}$$

d'après le théorème de transfert.

(d) Exprimer $\mathrm{V}(X)$ (où V désigne la variance) en fonction de $g_X'(1)$ et $g_X''(1)$.

▶ On a d'après la formule de Koenig-Huygens :

$$\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}\left((X-\mathrm{E}(X))^2\right) = \mathrm{E}\left(X^2\right) - \mathrm{E}(X)^2.$$

Or on a par linéarité de l'espérance :

$$\mathrm{E}(X(X-1)) = \mathrm{E}(X^2 - X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X).$$

On peut également justifier cette égalité en détaillant les calculs à l'aide du théorème de transfert et la linéarité de la somme.

D'où en utilisant les résultats des questions précédentes :

$$\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2 = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(X) - \mathrm{E}(X)^2 = \mathrm{E}(X(X-1)) + \mathrm{E}(X)\Big(1-\mathrm{E}(X)\Big)$$

$$= \boxed{g_X''(1) + g_X'(1)\Big(1 - g_X'(1)\Big)}.$$

3. (a) Exprimer g_{X+1} à l'aide de g_X.

▶ Par définition de la fonction génératrice, on a :

$$g_{X+1} : t \mapsto \mathrm{E}\Big(t^{X+1}\Big) = \mathrm{E}\Big(t^X \times t\Big) = \mathrm{E}\Big(t^X\Big) \times t = \boxed{tg_X(t)} \quad \text{par linéarité de l'espérance.}$$

On peut également retrouver ce résultat en détaillant les calculs à l'aide du théorème de transfert et la linéarité de la somme.

(b) Exprimer g_{2X} à l'aide de g_X.

▶ Par définition de la fonction génératrice, on a :

$$g_{2X} : t \mapsto \mathrm{E}\Big(t^{2X}\Big) = \mathrm{E}\Big(\left(t^2\right)^X\Big) = \boxed{g_X\left(t^2\right)}.$$

De même, on peut retrouver ce résultat en détaillant les calculs à l'aide du théorème de transfert.

4. Dans cette question, on suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ où $(n,p) \in \mathbb{N} \times [0,1]$.

(a) Calculer g_X.

▶ On a par définition de la loi binomiale :

$$X(\Omega) = \{0, 1, 2, \ldots, n\} \quad \text{et} \quad \forall k \in X(\Omega),\ P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

On en déduit d'après le théorème de transfert que :

$$g_X : t \mapsto \mathrm{E}\Big(t^X\Big) = \sum_{k=0}^{n} t^k \mathrm{P}(X=k) = \sum_{k=0}^{n} t^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (pt)^k (1-p)^{n-k}.$$

Puis on a en utilisant la formule du binôme de Newton :

$$g_X : t \mapsto \boxed{(pt+1-p)^n}.$$

(b) Retrouver les valeurs de $\mathrm{E}(X)$ et $\mathrm{V}(X)$ à l'aide de la fonction génératrice.

▶ On a d'après le résultat de la question précédente :

$$g_X' : t \mapsto np(pt+1-p)^{n-1} \quad \text{et} \quad g_X'' : t \mapsto n(n-1)p^2(pt+1-p)^{n-2}.$$

On en déduit d'après les résultat de la question 2 que :

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X) &= g_X'(1) = np(p+1-p)^{n-1} = np(1)^{n-1} = \boxed{np}\\ \mathrm{V}(X) &= g_X''(1) + g_X'(1)\Big(1 - g_X'(1)\Big) = n(n-1)p^2(p+1-p)^{n-2} + np(1-np)\\ &= np\left((n-1)p(1)^{n-2} + (1-np)\right) = np(np-p+1-np) = \boxed{np(1-p)}.\end{aligned}$$

On retrouve bien l'espérance et la variance de la loi binomiale.

Cette méthode efficace peut bien sûr être utilisée pour calculer les moments d'autres lois de probabilité finies.

Exercice 2

On considère la fonction suivante :

$$f : x \mapsto x\exp(\sin^2(x)).$$

1. *Déterminer le développement limité à l'ordre 5 en 0 de f.*

▶ On a :

$$\sin(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + o_{x\to 0}\left(x^5\right) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o_{x\to 0}\left(x^5\right)$$

donc :

$$\begin{aligned}\sin^2(x) &= \left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o_{x\to 0}\left(x^5\right)\right)^2\\ &= x^2 - \frac{2}{6}x^4 + o_{x\to 0}\left(x^5\right) = x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o_{x\to 0}\left(x^5\right).\end{aligned}$$

De plus, on a :

$$\begin{aligned}\exp(h) &= 1 + h + \frac{1}{2!}h^2 + \frac{1}{3!}h^3 + \frac{1}{4!}h^4 + \frac{1}{5!}h^5 + o_{x\to 0}\left(h^5\right)\\ &= 1 + h + \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{6}h^3 + \frac{1}{24}h^4 + \frac{1}{120}h^5 + o_{x\to 0}\left(h^5\right).\end{aligned}$$

Donc en posant $h = \sin^2(x) = x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o_{x\to 0}\left(x^5\right)$ car $\lim_{x\to 0} h = 0$, on obtient :

$$\begin{aligned}\exp(\sin^2(x)) =& 1 + \left(x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o_{x\to 0}\left(x^5\right)\right) + \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o_{x\to 0}\left(x^5\right)\right)^2\\ &+ \frac{1}{6}\left(x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o_{x\to 0}\left(x^5\right)\right)^3 + \frac{1}{24}\left(x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o_{x\to 0}\left(x^5\right)\right)^4\\ &+ \frac{1}{120}\left(x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o_{x\to 0}\left(x^5\right)\right)^5 + o_{x\to 0}\left(\left(x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o_{x\to 0}\left(x^5\right)\right)^5\right)\\ =& 1 + \left(x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o_{x\to 0}\left(x^5\right)\right) + \frac{1}{2}\left(x^4 + o_{x\to 0}\left(x^5\right)\right)\\ &+ \frac{1}{6}\left(o_{x\to 0}\left(x^5\right)\right) + \frac{1}{24}\left(o_{x\to 0}\left(x^5\right)\right) + \frac{1}{120}\left(o_{x\to 0}\left(x^5\right)\right) + o_{x\to 0}\left(x^5\right)\\ =& 1 + x^2 + \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right)x^4 + o_{x\to 0}\left(x^5\right) = 1 + x^2 + \frac{1}{6}x^4 + o_{x\to 0}\left(x^5\right).\end{aligned}$$

Finalement, on a :

$$f(x) = x\exp(\sin^2(x)) = x\left(1 + x^2 + \frac{1}{6}x^4 + o_{x\to 0}\left(x^5\right)\right) = \boxed{x + x^3 + \frac{1}{6}x^5 + o_{x\to 0}\left(x^5\right)}.$$

2. *Justifier que f réalise une bijection de l'intervalle $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ vers un ensemble I à déterminer.*

► La fonction f est le sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ comme produits et composées de fonctions usuelles dérivables. On a pour tout $x\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$:

$$f'(x)=\exp(\sin^2(x))+x\times 2\sin'(x)\sin(x)\times\exp(\sin^2(x))=\Big(1+2x\cos(x)\sin(x)\Big)\exp(\sin^2(x)).$$

On raisonne par disjonction de cas pour étudier le signe de $x\cos(x)\sin(x)$.
<u>1^er cas</u> : $x\in]-\frac{\pi}{2},0]$. Alors $x\leqslant 0$, $\cos(x)\geqslant 0$ et $\sin(x)\leqslant 0$ donc $x\cos(x)\sin(x)\geqslant 0$.
<u>2^e cas</u> : $x\in[0,\frac{\pi}{2}[$. Alors $x\geqslant 0$, $\cos(x)\geqslant 0$ et $\sin(x)\geqslant 0$ donc $x\cos(x)\sin(x)\geqslant 0$.
<u>Conclusion</u> : dans tous les cas, $x\cos(x)\sin(x)\geqslant 0$ et donc $f'(x)>0$ car $\exp(\sin^2(x))>0$.
On en déduit le tableau des variations de la fonction f :

x	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$
$f(x)$	$-\frac{\pi}{2}e$ ↗	$\frac{\pi}{2}e$

Ainsi la fonction f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ donc d'après le théorème de la bijection continue f réalise une $\boxed{\text{bijection}}$ de $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ vers l'intervalle

$$I=f(]-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}[)=\boxed{]-\tfrac{\pi}{2}e,\tfrac{\pi}{2}e[}.$$

Montrez que vous connaissez votre cours en précisant bien chacune des hypothèses du théorème de la bijection continue (continuité, stricte monotonie et intervalle) même si certaines d'entre elles sont évidentes à vérifier.

3. *Justifier que la bijection réciproque f^{-1} de $f|_{]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I.*

► La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ comme produits et composées de fonctions usuelles de classe $\mathcal{C}^\infty$. De plus, on a vu à la question précédente que $f'(x)\neq 0$ pour tout $x\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$. Donc f^{-1} est $\boxed{\text{de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } I}$ d'après le théorème de la bijection dérivable et sa dérivée est donnée par la formule :

$$(f^{-1})':x\mapsto\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

4. *Justifier l'existence de $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que $f^{-1}(x)=ax+bx^3+cx^5+o_{x\to 0}(x^5)$.*

► Puisque f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle $I=]-\frac{\pi}{2}e,\frac{\pi}{2}e[$ qui contient 0, f admet un développement limité à tout ordre en 0 d'après le théorème de Taylor-Young. En particulier, on a d'après la formule de Taylor-Young à l'ordre 5 :

$$f^{-1}(x)=f^{-1}(0)+(f^{-1})'(0)x+\frac{(f^{-1})''(0)}{2!}x^2+\frac{(f^{-1})'''(0)}{3!}x^3+\frac{(f^{-1})^{(4)}(0)}{4!}x^4+\frac{(f^{-1})^{(5)}(0)}{5!}x^5+o_{x\to0}\left(x^5\right)$$

De plus on a :

$$\forall x\in]-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}[,\quad f(-x)=(-x)\exp(\sin^2(-x))=-x\exp((-\sin(x))^2)=-x\exp(\sin^2(x))=-f(x)$$

donc :

$$\begin{aligned}\forall y\in I,\quad f^{-1}(-y)&=f^{-1}(-f(x))\quad\text{en posant } x=f^{-1}(y)\in]-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}[\text{ l'unique antécédent de } y \text{ par } f\\&=f^{-1}(f(-x))\quad\text{puisque } f \text{ est impaire sur }]-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}[\\&=-x\quad\text{par définition de } f^{-1}\\&=-f^{-1}(y)\quad\text{par définition de } x.\end{aligned}$$

On en déduit que f^{-1} est impaire sur I et donc que tous les coefficients d'ordre pair de son développement limité en 0 sont nuls. Par conséquent :

$$f^{-1}(x) = ax + bx^3 + cx^5 + o_{x\to 0}\left(x^5\right) \text{ avec } \boxed{a = (f^{-1})'(0)}, \boxed{b = \frac{(f^{-1})'''(0)}{3!}} \text{ et } \boxed{c = \frac{(f^{-1})^{(5)}(0)}{5!}}.$$

5. *En composant les développements limités de f^{-1} et f, déterminer les valeurs des constantes a, b et c.*

   ▶ Puisque $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(x + x^3 + \frac{1}{6}x^5 + o_{x\to 0}\left(x^5\right)\right) = 0$, on a par composition des développements limités :

$$\begin{aligned}
f^{-1}(f(x)) =& af(x) + bf(x)^3 + cf(x)^5 + o_{x\to 0}\left(f(x)^5\right)\\
=& a\left(x + x^3 + \frac{1}{6}x^5 + o_{x\to 0}\left(x^5\right)\right) + b\left(x + x^3 + \frac{1}{6}x^5 + o_{x\to 0}\left(x^5\right)\right)^3\\
&+ c\left(x + x^3 + \frac{1}{6}x^5 + o_{x\to 0}\left(x^5\right)\right)^5 + o_{x\to 0}\left(\left(x + x^3 + \frac{1}{6}x^5 + o_{x\to 0}\left(x^5\right)\right)^5\right)\\
=& a\left(x + x^3 + \frac{1}{6}x^5 + o_{x\to 0}\left(x^5\right)\right) + b\left(x^3 + 3x^4 + 3x^5 + o_{x\to 0}\left(x^5\right)\right)\\
&+ c(x^5 + o_{x\to 0}\left(x^5\right)) + o_{x\to 0}\left(x^5\right)\\
=& ax + (a+b)x^3 + \left(\frac{1}{6}a + 3b + c\right)x^5 + o_{x\to 0}\left(x^5\right).
\end{aligned}$$

   D'autre part, on a :

$$f^{-1}(f(x)) = x = x + o_{x\to 0}\left(x^5\right) \quad \text{par définition de } f^{-1}.$$

   D'après l'unicité du développement limité à l'ordre 5 en 0 de $f^{-1}(f(x)) = x$, on en déduit que :

$$\begin{cases} a = 1\\ a + b = 0\\ \frac{1}{6}a + 3b + c = 0 \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} a = 1\\ b = -a = -1\\ c = -\frac{1}{6}a - 3b = \frac{17}{6} \end{cases}.$$

   Finalement, $\boxed{(a, b, c) = (1, -1, \frac{17}{6})}$.

6. *Que peut-on en déduire pour la tangente de la courbe représentative de f^{-1} au voisinage de 0 ?*

   ▶ On a donc d'après les résultats des questions précédentes :

$$f^{-1}(x) = x - x^3 + \frac{17}{6}x^5 + o_{x\to 0}\left(x^5\right).$$

   Par conséquent, la tangente à la courbe représentative de f^{-1} au point d'abscisse 0 admet pour équation $\boxed{y = x}$ et :
   — au voisinage à gauche de 0, la courbe $y = f(x)$ est située au dessus de sa tangente $y = x$ en 0 ;
   — au voisinage à droite de 0, la courbe $y = f(x)$ est située au dessous de sa tangente $y = x$ en 0.

Exercice 3

On propose de calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^1 \sqrt{1 + x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Pour cela, on pose $\varphi(t) = \dfrac{1 - t^2}{2t}$ pour tout $t < 0$.

1. *À l'aide du changement de variable $x = \varphi(t)$ dont on vérifiera précisément les hypothèses, montrer que*
$$I = \frac{1}{4}\int_{-1}^{-(1+\sqrt{2})} \frac{(1+t^2)^2}{t^3}\mathrm{d}t.$$

▶ On a pour tout $t < 0$:

$$\begin{aligned} 0 = \varphi(t) &\iff 0 = \frac{1-t^2}{2t} \iff t^2 = 1 \iff t = -1 \text{ ou } t = 1 \\ &\iff t = -1 \quad \text{car } t < 0 \\ \text{et} \quad 1 = \varphi(t) &\iff 1 = \frac{1-t^2}{2t} \iff t^2 + 2t - 1 = 0 \\ &\iff t = \frac{-2-\sqrt{8}}{2} = -1-\sqrt{2} \text{ ou } t = -1+\sqrt{2} \\ &\iff t = -(1+\sqrt{2}) \quad \text{car } t < 0. \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\varphi \text{ est une fonction de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur l'intervalle } [-(1+\sqrt{2}), -1]}$ (comme quotient de fonctions polynomiales dont le dénominateur ne s'annule pas) telle que $\boxed{\varphi(-1) = 0}$ et $\boxed{\varphi(-(1+\sqrt{2})) = 1}$. Puisqu'on a vérifié les hypothèses du théorème de changement de variable, on obtient en posant $x = \varphi(t)$:
$$I = \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{-(1+\sqrt{2})} \sqrt{1+\varphi(t)^2}\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$
Or on a pour tout $t < 0$:

$$\begin{aligned} \sqrt{1+\varphi(t)^2}\varphi'(t) &= \sqrt{1+\left(\frac{1-t^2}{2t}\right)^2} \times \frac{-2t\times 2t - (1-t^2)\times 2}{(2t)^2} \\ &= \frac{\sqrt{4t^2 + (1-2t^2+t^4)}}{\sqrt{4t^2}} \times \frac{-4t^2-2+2t^2}{4t^2} \\ &= \frac{\sqrt{1+2t^2+t^4}}{\underbrace{-2t}_{\text{car } t<0}} \times \frac{-(1+t^2)}{2t^2} \\ &= \frac{\sqrt{(1+t^2)^2}\times(1+t^2)}{4t^3} = \frac{(1+t^2)^2}{4t^3} \quad \text{car } 1+t^2 \geqslant 0. \end{aligned}$$

Finalement, on obtient :
$$I = \int_{-1}^{-(1+\sqrt{2})} \frac{(1+t^2)^2}{4t^3}\mathrm{d}t = \boxed{\frac{1}{4}\int_{-1}^{-(1+\sqrt{2})} \frac{(1+t^2)^2}{t^3}\mathrm{d}t} \quad \text{par linéarité de l'intégrale.}$$

2. *À l'aide d'un changement de variable à déterminer, montrer que*
$$I = \frac{1}{4}\int_{1}^{1+\sqrt{2}} \frac{(1+t^2)^2}{t^3}\mathrm{d}t.$$

▶ La fonction $t \mapsto -t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[1, 1+\sqrt{2}]$. On obtient donc à l'aide du changement de variable $\boxed{u = -t}$ dans le résultat de la question précédente :
$$I = \frac{1}{4}\int_{-1}^{-(1+\sqrt{2})} \frac{(1+t^2)^2}{t^3}\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\int_{1}^{1+\sqrt{2}} \frac{(1+(-u)^2)^2}{(-u)^3}\times(-\mathrm{d}u) = \boxed{\frac{1}{4}\int_{1}^{1+\sqrt{2}} \frac{(1+u^2)^2}{u^3}\mathrm{d}u}.$$

3. *Conclure.*

▶ En utilisant le résultat de la question précédente, on a par linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{4}\int_1^{1+\sqrt{2}} \frac{(1+t^2)^2}{t^3}\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\int_1^{1+\sqrt{2}} \frac{1+2t^2+t^4}{t^3}\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\int_1^{1+\sqrt{2}} \left(\frac{1}{t^3}+\frac{2}{t}+t\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{4}\int_1^{1+\sqrt{2}} \frac{\mathrm{d}t}{t^3} + \frac{2}{4}\int_1^{1+\sqrt{2}} \frac{\mathrm{d}t}{t} + \frac{1}{4}\int_1^{1+\sqrt{2}} t\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{-2t^2}\right]_1^{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\Big[\ln|t|\Big]_1^{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{4}\left[\frac{t^2}{2}\right]_1^{1+\sqrt{2}} \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{-2(1+\sqrt{2})^2} - \frac{1}{-2}\right) + \frac{1}{2}\Big(\ln\left(1+\sqrt{2}\right) - \ln(1)\Big) + \frac{1}{4}\left(\frac{(1+\sqrt{2})^2}{2} - \frac{1}{2}\right) \\
&= -\frac{1}{8}\left(\frac{1}{3+2\sqrt{2}} - 1\right) + \frac{1}{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right) + \frac{1}{8}\left(3+2\sqrt{2}-1\right) \\
&= -\frac{1}{8}\left(\frac{3-2\sqrt{2}}{9-8} - 1\right) + \frac{1}{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right) + \frac{1+\sqrt{2}}{4} \\
&= -\frac{1-\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right) + \frac{1+\sqrt{2}}{4} = \boxed{\frac{\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}{2}}.
\end{aligned}$$

Problème 1
Énoncé et corrigé de V. Vong

Pour tout $p \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ on pose $f_p(x) = \frac{1}{(1+x^2)^p}$ et $I_p = \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^p}dx$.

1.
```
import matplotlib.pyplot as mpl
L=[i/99 for i in range(100)]
M=[1/(1+x**2) for x in L]
mpl.plot(L,M)
```

2. Par définition,

$$I_0 = \int_0^1 1dx = 1, I_1 = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}.$$

On a donc

$$\boxed{I_0 = 1, I_1 = \frac{\pi}{4}}.$$

3.
```
def sommeRiemann(n,p) :
    S=0
    for i in range(n) :
        S=S+1/((1+(i/n)**2)**p)
    return S/n
```

4. (a) Soit $k \in \{0, \cdots, n-1\}$. et $t \in [\frac{k}{n}, \ \frac{k+1}{n}]$. On a

$$0 \leq \frac{k}{n} \leq t \leq (\frac{k+1}{n}).$$

Par croissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}^+$,

$$0 \leq (\frac{k}{n})^2 \leq t^2 \leq (\frac{k+1}{n})^2.$$

Donc
$$1 \leq 1 + (\frac{k}{n})^2 \leq 1 + t^2 \leq 1 + (\frac{k+1}{n})^2.$$
Par décroissance de la fonction inverse sur $R^{+\star}$, on a donc
$$1 \geq \frac{1}{1+(\frac{k}{n})^2} \geq \frac{1}{1+t^2} \geq \frac{1}{1+(\frac{k+1}{n})^2} > 0.$$
Par conséquent, $\boxed{\frac{1}{1+\left(\frac{(k+1)}{n}\right)^2} \leq \frac{1}{1+t^2} \leq \frac{1}{1+(\frac{k}{n})^2}.}$

(b) Soit $k \in \{0, \cdots, n-1\}$, en intégrant sur $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$ l'inégalité de la question 3, on a
$$\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \frac{1}{1+\left(\frac{(k+1)}{n}\right)^2} dt \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \frac{1}{1+t^2} dt \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \frac{1}{1+(\frac{k}{n})^2} .dt$$
Donc
$$\frac{1}{n}\frac{1}{1+\left(\frac{(k+1)}{n}\right)^2} \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \frac{1}{1+t^2} dt \leq \frac{1}{n}\frac{1}{1+(\frac{k}{n})^2}.$$
En sommant sur $\{0, \cdots, n-1\}$, on obtient alors
$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1+(\frac{k+1}{n})^2} \leq \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt \leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1+(\frac{k}{n})^2}.$$
Autrement dit,
$$\boxed{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1+(\frac{k+1}{n})^2} \leq \frac{\pi}{4} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1+(\frac{k}{n})^2}.}$$

(c) On peut remarquer dans l'inégalité de la question 4, en soustrayant celle-ci par le membre gauche, on obtient
$$0 \leq \frac{\pi}{4} - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1+(\frac{k+1}{n})^2} \leq \frac{1}{n}(1-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2n}$$
Ainsi, pour l'écart e, il suffit d'avoir n vérifiant $\frac{1}{2n} < \text{e}$.

```
def approx(ecart) :
    n=1
    while(1/(2*n))>e :
        n=2*n
    a=0
    b=0
    for i in range(n) :
        a=a+1/(1+((i+1)/n)**2)
        b=b+1/(1+(i/n)**2)
    return [a/n,b/n]
```

5. (a) Soit $p \in \mathbb{N}$. Par définition, $I_p = \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^p} dx$. Les fonctions $u : x \mapsto 1$ et f_p étant respectivement C^0 et C^1 sur $[0,1]$, on peut effectuer une intégration par parties. De plus,
$$U(x) = x, f_p'(x) = \frac{-2px}{(1+x^2)^{p+1}}$$

D'où

$$I_p = [xf_p(x)]_{x=0}^{x=1} + 2p\int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^2)^{p+1}}dx$$

Donc

$$I_p = 2^{-p} + 2p\left(\int_0^1 \frac{x^2+1}{(1+x^2)^{p+1}}dx - \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^{p+1}}dx\right).$$

D'où

$$\boxed{I_p = 2^{-p} + 2p(I_p - I_{p+1})}.$$

Soit $p \geq 1$. On a

$$I_p = 2^{-p} + 2p(I_p - I_{p+1}).$$

Donc

$$2pI_{p+1} = 2^{-p} + (2p-1)I_p.$$

D'où

$$\boxed{I_{p+1} = 2^{-p-1} + \frac{2p-1}{2p}I_p.}$$

(b)

```
def calculeI(p) :
    if p==0 :
        return 1
    I=pi/4
    for i in range(1,p) :
        I=2**(-1-i)+((2*i-1)/(2*i))*I
    return I
```

6. Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour tout $t \in [0,1]$:

$$f_p(t) - f_{p+1}(t) = \frac{t^2+1-1}{(t^2+1)^{p+1}} = \frac{t^2}{(1+t^2)^{p+1}} \geq 0.$$

Donc, en intégrant on obtient

$$I_p - I_{p+1} \geq 0.$$

La suite $(I_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante. De plus, pour tout $p \in \mathbb{N}$, la fonction f_p est positive sur $[0,1]$. Donc I_p est positive.
On en déduit que la suite $(I_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0 donc est convergente.

7. (a) Soit $p \geq 3$. D'après la relation de Chasles, on a $I_p = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{\ln(p)}}} f_p(x)dx + \int_{\frac{1}{\sqrt{\ln(p)}}}^1 f_p(x)dx$.

(b) Soit $p \geq 3$. La fonction f_p étant l'inverse d'un polynôme qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, f_p est dérivable sur $\mathbb{R}$. On a

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_p'(x) = \frac{-2px}{(1+x^2)^{p+1}}.$$

D'où

$$\forall x \geq 0, f_p'(x) \leq 0.$$

f_p est donc décroissante sur $\mathbb{R}^+$. En particulier,

$$\forall t \in [0, \frac{1}{\sqrt{\ln(p)}}], f_p(t) \leq f_p(0) = 1.$$

En intégrant, on a donc

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{\ln(p)}}} f_p(x)dx \leq \frac{1}{\sqrt{\ln(p)}}.$$

De même, comme $p \geq 3$, $\ln(p) \geq 1$, donc $\frac{1}{\sqrt{\ln(p)}} \leq 1$. D'où

$$\forall t \in [\frac{1}{\sqrt{\ln(p)}}, 1], f_p(t) \leq f_p\left(\frac{1}{\sqrt{\ln(p)}}\right).$$

Donc, en intégrant,

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{\ln(p)}}}^{1} f_p(t)dt \leq \frac{1-\frac{1}{\sqrt{\ln(p)}}}{(1+\frac{1}{\ln(p)})^p} \leq \frac{1}{(1+\frac{1}{\ln(p)})^p}.$$

D'un côté, on a

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{\ln(p)}}} f_p(x)dx \leq \frac{1}{\sqrt{\ln(p)}}$$

De l'autre

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{\ln(p)}}}^{1} f_p(t)dt \leq \frac{1}{(1+\frac{1}{\ln(p)})^p}.$$

En sommant ces deux inégalités, on obtient alors

$$\boxed{I_p \leq \frac{1}{\sqrt{\ln(p)}} + \frac{1}{(1+\frac{1}{\ln(p)})^p}.}$$

(c) Lors que $p \to +\infty$, on a $\ln(p) \to +\infty$, donc $\lim_{p\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{\ln(p)}} = 0$.

De plus, $(1+\frac{1}{\ln(p)})^p = e^{p(\ln(1+\frac{1}{\ln(p)})}$. Or, $\lim_{p\to+\infty} \frac{1}{\ln(p)} = 0$, donc

$$\ln(1+\frac{1}{\ln(p)}) \sim_{p\to+\infty} \frac{1}{\ln(p)}.$$

D'où

$$p\ln(1+\frac{1}{\ln(p)}) \sim \frac{p}{\ln(p)}.$$

Or $\lim_{p\to+\infty} \frac{p}{\ln(p)} = +\infty$ par croissance comparée. Donc

$$\lim_{p\to+\infty} p\ln(1+\frac{1}{\ln(p)}) = +\infty.$$

Or $\lim_{X\to+\infty} e^X = +\infty$. Par composition, on a donc $\lim_{p\to+\infty}(1+\frac{1}{\ln(p)})^p = +\infty$. En passant à l'inverse, on obtient $\lim_{p\to+\infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{\ln(p)})^p} = 0$.

Par conséquent,

$$\lim_{p\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{\ln(p)}} + \frac{1}{(1+\frac{1}{\ln(p)})^p} = 0.$$

D'après le théorème d'encadrement, il en résulte que $\boxed{\lim_{p\to+\infty} I_p = 0}$.

8. Des trois tests, le premier semble nous fournir un équivalent de $(I_p)_{p\in\mathbb{N}}$. Plus précisément, il semble que l'on ait $\boxed{I_p \sim_{p\to+\infty} \sqrt{\pi}p^{-\frac{1}{2}}}$.

Problème 2

Soit $p \in \mathbb{N}^\star$. On note 0_p l'endomorphisme nul de $\mathbb{R}^p$ et I_p l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^p$. On rappelle que pour tout endomorphisme f de $\mathbb{R}^p$, on définit par récurrence les endomorphismes suivants :

$$f^0 = \mathrm{I}_p \quad \textit{et} \quad \forall k \in \mathbb{N},\ f^{k+1} = f \circ f^k.$$

On dit qu'un endomorphisme f de $\mathbb{R}^p$ est nilpotent s'il existe $n \in \mathbb{N}^\star$ tel que $f^n = 0_p$. Dans ce cas, le plus petit entier $n \geqslant 1$ qui vérifie cette propriété est appelé l'indice de nilpotence de f.

A) *Dans cette partie, on considère l'application suivante :*

$$f:(x,y,z,t)\mapsto(3x+y-2z-2t,-x+t,2x+y-2z-t,x-t).$$

1. *Justifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$.*

   ▶ Soient $\lambda\in\mathbb{R}$, $\overrightarrow{u_1}=(x_1,y_1,z_1,t_1)\in\mathbb{R}^4$ et $\overrightarrow{u_2}=(x_2,y_2,z_2,t_2)\in\mathbb{R}^4$. On a :

$$\begin{aligned}
f\left(\lambda\overrightarrow{u_1}+\overrightarrow{u_2}\right)=&f\left(\lambda x_1+x_2,\lambda y_1+y_2,\lambda z_1+z_2,\lambda t_1+t_2\right)\\
=&\begin{pmatrix}3(\lambda x_1+x_2)+(\lambda y_1+y_2)-2(\lambda z_1+z_2)-2(\lambda t_1+t_2),\\ -(\lambda x_1+x_2)+(\lambda t_1+t_2),\\ 2(\lambda x_1+x_2)+(\lambda y_1+y_2)-2(\lambda z_1+z_2)-(\lambda t_1+t_2),\\ (\lambda x_1+x_2)-(\lambda t_1+t_2)\end{pmatrix}\\
=&\lambda\begin{pmatrix}3x_1+y_1-2z_1-2t_1,\\ -x_1+t_1,\\ 2x_1+y_1-2z_1-t_1,\\ x_1-t_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3x_2+y_2-2z_2-2t_2,\\ -x_2+t_2,\\ 2x_2+y_2-2z_2-t_2,\\ x_2-t_2\end{pmatrix}\\
=&\lambda f(x_1,y_1,z_1,t_1)+f(x_2,y_2,z_2,t_2).
\end{aligned}$$

   On en déduit que f est une application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^4$, donc $\boxed{f \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}^4}$.

On note M la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

2. *Calculer M^2 et M^3. En déduire que f est nilpotent et déterminer son indice de nilpotence.*

   ▶ On a :

$$M=\begin{pmatrix}3&1&-2&-2\\-1&0&0&1\\2&1&-2&-1\\1&0&0&-1\end{pmatrix}$$

$$M^2=M\times M=\begin{pmatrix}3&1&-2&-2\\-1&0&0&1\\2&1&-2&-1\\1&0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1&-2&-2\\-1&0&0&1\\2&1&-2&-1\\1&0&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&-2&-1\\-2&-1&2&1\\0&0&0&0\\2&1&-2&-1\end{pmatrix}$$

$$M^3=M\times M^2=\begin{pmatrix}3&1&-2&-2\\-1&0&0&1\\2&1&-2&-1\\1&0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&-2&-1\\-2&-1&2&1\\0&0&0&0\\2&1&-2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

   Par conséquent, $f^3=0_4$ donc $\boxed{f \text{ est nilpotent}}$. Et puisque $f^2\neq 0_4$ (car la matrice M^2 de f^2 dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ n'est pas la matrice nulle), on en déduit que $\boxed{\text{l'indice de nilpotence de } f \text{ est égal à } 3}$.

3. *f est-il injectif ? surjectif ?*

   ▶ On a :

$$\begin{aligned}
\text{rang}(f)=\text{rang}(M)=\text{rang}&\begin{pmatrix}3&1&-2&-2\\-1&0&0&1\\2&1&-2&-1\\1&0&0&-1\end{pmatrix}=\text{rang}\begin{pmatrix}-1&0&0&1\\3&1&-2&-2\\2&1&-2&-1\\1&0&0&-1\end{pmatrix}\begin{matrix}L_1\leftrightarrow L_2\\L_2\leftrightarrow L_1\\ \\ \end{matrix}\\
=\text{rang}&\begin{pmatrix}-1&0&0&1\\0&1&-2&1\\0&1&-2&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{matrix}\\L_2\leftarrow L_2+3L_1\\L_3\leftarrow L_3+2L_1\\L_4\leftarrow L_4+L_1\end{matrix}=\text{rang}\begin{pmatrix}-1&0&0&1\\0&1&-2&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\ L_3\leftarrow L_3-L_2\\
=2&\neq 4.
\end{aligned}$$

Puisque f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ d'après le résultat de la question 1, on en déduit que $\boxed{f \text{ n'est ni injectif, ni surjectif}}$.

4. *Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $f - \lambda \mathrm{I}_4$ est bijectif si et seulement si $\lambda \neq 0$.*

► L'application $f - \lambda \mathrm{I}_4$ est linéaire comme combinaison linéaire d'applications linéaires. Puisque la matrice de I_4 dans la base canonique est la matrice identité d'ordre 4, on a :

$$\begin{aligned}
\operatorname{rang}(f-\lambda \mathrm{I}_4) &= \operatorname{rang}\left(M - \lambda\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\right) = \operatorname{rang}\begin{pmatrix}3-\lambda & 1 & -2 & -2\\ -1 & -\lambda & 0 & 1\\ 2 & 1 & -2-\lambda & -1\\ 1 & 0 & 0 & -1-\lambda\end{pmatrix}\\
&= \operatorname{rang}\begin{pmatrix}-1 & -\lambda & 0 & 1\\ 3-\lambda & 1 & -2 & -2\\ 2 & 1 & -2-\lambda & -1\\ 1 & 0 & 0 & -1-\lambda\end{pmatrix} \begin{matrix}L_1 \leftrightarrow L_2\\ L_2 \leftrightarrow L_1\\ \\ \\ \end{matrix}\\
&= \operatorname{rang}\begin{pmatrix}-1 & -\lambda & 0 & 1\\ 0 & 1-\lambda(3-\lambda) & -2 & -2+(3-\lambda)\\ 0 & 1-2\lambda & -2 & 1\\ 0 & -\lambda & 0 & -1-\lambda+1\end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2+(3-\lambda)L_1\\ L_3 \leftarrow L_3+2L_1\\ L_4 \leftarrow L_4+L_1\end{matrix}\\
&=\operatorname{rang}\begin{pmatrix}-1 & -\lambda & 0 & 1\\ 0 & \lambda^2-3\lambda+1 & -2 & 1-\lambda\\ 0 & 1 & -2 & 1+2\lambda\\ 0 & -\lambda & 0 & -\lambda\end{pmatrix} \; L_3 \leftarrow L_3 - 2L_4\\
&=\operatorname{rang}\begin{pmatrix}-1 & -\lambda & 0 & 1\\ 0 & 1 & -2 & 1+2\lambda\\ 0 & \lambda^2-3\lambda+1 & -2 & 1-\lambda\\ 0 & -\lambda & 0 & -\lambda\end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftrightarrow L_3\\ L_3 \leftrightarrow L_2\\ \\ \end{matrix}\\
&=\operatorname{rang}\begin{pmatrix}-1 & -\lambda & 0 & 1\\ 0 & 1 & -2 & 1+2\lambda\\ 0 & 0 & \star & \star\star\\ 0 & 0 & -2\lambda & -\lambda+\lambda(1+2\lambda)\end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3-(\lambda^2-3\lambda+1)L_2\\ L_4 \leftarrow L_4+\lambda L_2\end{matrix}
\end{aligned}$$

avec $\star = -2+2(\lambda^2-3\lambda+1) = 2\lambda(\lambda-3)$ et $\star\star = 1-\lambda-(\lambda^2-3\lambda+1)(1+2\lambda) = 1-\lambda-(2\lambda^3-5\lambda^2-\lambda+1) = -\lambda^2(2\lambda-5)$

$$\begin{aligned}
&=\operatorname{rang}\begin{pmatrix}-1 & -\lambda & 0 & 1\\ 0 & 1 & -2 & 1+2\lambda\\ 0 & 0 & -2\lambda & 2\lambda^2\\ 0 & 0 & 2\lambda(\lambda-3) & -\lambda^2(2\lambda-5)\end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 \leftrightarrow L_4\\ L_4 \leftrightarrow L_3\end{matrix}\\
&=\operatorname{rang}\begin{pmatrix}-1 & -\lambda & 0 & 1\\ 0 & 1 & -2 & 1+2\lambda\\ 0 & 0 & -2\lambda & 2\lambda^2\\ 0 & 0 & 0 & \star\star\star\end{pmatrix} \; L_4 \leftarrow L_4+(\lambda-3)L_3
\end{aligned}$$

avec $\star\star\star = -\lambda^2(2\lambda-5)+(\lambda-3)2\lambda^2 = \lambda^2(-2\lambda+5+2\lambda-6) = -\lambda^2$

$$=\operatorname{rang}\begin{pmatrix}-1 & -\lambda & 0 & 1\\ 0 & 1 & -2 & 1+2\lambda\\ 0 & 0 & -2\lambda & 2\lambda^2\\ 0 & 0 & 0 & -\lambda^2\end{pmatrix} = \begin{cases}2 \text{ si } \lambda = 0\\ 4 \text{ sinon}\end{cases}.$$

Or $f - \lambda \mathrm{I}_4$ est bijectif si et seulement si $\operatorname{rang}(f-\lambda \mathrm{I}_4) = 4$ (car $f-\lambda \mathrm{I}_4$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$). On en déduit que $\boxed{f-\lambda \mathrm{I}_4 \text{ est bijectif si et seulement si } \lambda \neq 0}$.

Question très classique ! Il faut savoir mener ce type de calcul de rang à paramètre sans erreurs. Organisez-vous et soignez votre présentation.

5. *On pose* $\overrightarrow{v_2} = (1, -1, 0, 1)$.

(a) *Montrer que* $\overrightarrow{v_2} \in \mathrm{Ker}(f)$.

▶ Les coordonnées de $f(\overrightarrow{v_2})$ dans la base canoniques sont égales à :

$$M \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-1-2 \\ -1+1 \\ 2-1-1 \\ 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que $f(\overrightarrow{v_2}) = \overrightarrow{0}$ et donc que $\boxed{\overrightarrow{v_2} \in \mathrm{Ker}(f)}$ par définition du noyau de f.

(b) *Trouver un vecteur* $\overrightarrow{v_1} \in \mathrm{Ker}(f)$ *tel que* $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})$ *forme une base de* $\mathrm{Ker}(f)$.

▶ On a pour tout $\overrightarrow{u} = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$:

$$f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0} \iff \begin{cases} 3x + y - 2z - 2t = 0 \\ -x + t = 0 \\ 2x + y - 2z - t = 0 \\ x - t = 0 \end{cases} \iff M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{en reprenant les mêmes opérations que celles utilisées à la question 3}.$$

On obtient un système linéaire de 4 équations à 4 inconnues de rang 2 avec 2 équations auxiliaires compatibles et 2 inconnues auxiliaires. On en déduit la représentation paramétrique suivante de $\mathrm{Ker}(f)$:

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2z - t \\ z = z \\ t = t \end{cases}, (z, t) \in \mathbb{R}^2.$$

En particulier, on a :

$$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}\Big((0, 2, 1, 0), (1, -1, 0, 1)\Big).$$

De plus $(0, 2, 1, 0)$ et $\overrightarrow{v_2} = (1, -1, 0, 1)$ forment une famille libre puisqu'ils sont non colinéaires. Finalement, il suffit de poser $\boxed{\overrightarrow{v_1} = (0, 2, 1, 0)}$. Alors on a bien que $\overrightarrow{v_1} \in \mathrm{Ker}(f)$ et que $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})$ forme une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

Il suffit de choisir n'importe quel vecteur $\overrightarrow{v_1} \in \mathrm{Ker}(f)$ *non colinéaire à* $\overrightarrow{v_2}$.

(c) *Trouver un antécédent* $\overrightarrow{v_3} \in \mathrm{Im}(f)$ *de* $\overrightarrow{v_2}$ *par* f.

▶ On cherche $\overrightarrow{v_3} = (x_3, y_3, z_3, t_3) \in \mathrm{Im}(f)$ tel que $f(\overrightarrow{v_3}) = \overrightarrow{v_2}$. On sait que l'image de f est engendrée pas les images des vecteurs de la base canonique par f. Or :

$$f(1, 0, 0, 0) = (3, -1, 2, 1), \qquad f(0, 1, 0, 0) = (1, 0, 1, 0),$$
$$f(0, 0, 1, 0) = (-2, 0, -2, 0), \qquad f(0, 0, 0, 1) = (-2, 1, -1, -1).$$

On en déduit que $\overrightarrow{v_3} \in \mathrm{Im}(f)$ s'écrit comme une combinaison linéaire de ces quatre vecteurs, c'est-à-dire qu'il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$ tel que :

$$\begin{cases} x_3 = 3\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3 - 2\lambda_4 \\ y_3 = -\lambda_1 + \lambda_4 \\ z_3 = 2\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3 \\ t_3 = \lambda_1 - \lambda_4 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \\ t_3 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix}.$$

Cela revient à utiliser une représentation paramétrique de $\mathrm{Im}(f)$.

On a donc :

$$f\left(\overrightarrow{v_3}\right)=\overrightarrow{v_2} \iff \begin{cases} 3x_3+y_3-2z_3-2t_3=1 \\ -x_3+t_3=-1 \\ 2x_3+y_3-2z_3-t_3=0 \\ x_3-t_3=1 \end{cases} \iff M\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \\ t_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\iff M^2\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2+L_1 \\ \\ L_4 \leftarrow L_4-L_1 \end{matrix}$$

On obtient un système linéaire de 4 équations à 4 inconnues de rang 1 avec 3 équations auxiliaires compatibles et 3 inconnues auxiliaires. On en déduit la représentation paramétrique suivante de l'ensemble des solutions :

$$\begin{cases} \lambda_1=\frac{1}{2}(1-\lambda_2+2\lambda_3+\lambda_4) \\ \lambda_2=\lambda_2 \\ \lambda_3=\lambda_3 \\ \lambda_4=\lambda_4 \end{cases}, (\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)\in\mathbb{R}^3.$$

Par exemple, en choisissant $(\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)=(0,0,0)$, on obtient :

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \\ t_3 \end{pmatrix}=M\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3/2 \\ -1/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

Finalement, il suffit de poser $\boxed{\overrightarrow{v_3}=(\frac{3}{2},-\frac{1}{2},1,\frac{1}{2})}$. Alors on a bien que $\overrightarrow{v_3}\in\mathrm{Im}(f)$ et que $f(\overrightarrow{v_3})=\overrightarrow{v_2}$.

Question difficile qui demande une bonne organisation. Il ne faut pas s'emmêler entre ce qu'on sait (hypothèses) et ce qu'on cherche (inconnues). Soyez méthodique et utilisez soigneusement les notions du cours pour ne pas vous perdre dans les calculs !

(d) *Trouver un antécédent $\overrightarrow{v_4}\in\mathbb{R}^4$ de $\overrightarrow{v_3}$ par f.*

► On cherche $\overrightarrow{v_4}=(x_4,y_4,z_4,t_4)\in\mathbb{R}^4$ tel que $f(\overrightarrow{v_4})=\overrightarrow{v_3}$. En raisonnant comme à la question précédente, on a :

$$f\left(\overrightarrow{v_4}\right)=\overrightarrow{v_3} \iff M\begin{pmatrix} x_4 \\ y_4 \\ z_4 \\ t_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3/2 \\ -1/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3/2 \\ -1/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$f(\overrightarrow{v_4}) = \overrightarrow{v_3} \iff \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_4 \\ y_4 \\ z_4 \\ t_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 3/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftrightarrow L_2 \\ L_2 \leftrightarrow L_1 \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_4 \\ y_4 \\ z_4 \\ t_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_1 \end{matrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_4 \\ y_4 \\ z_4 \\ t_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ \\ \end{matrix}$$

On obtient un système linéaire de 4 équations à 4 inconnues de rang 2 avec 2 équations auxiliaires compatibles et 2 inconnues auxiliaires. On en déduit la représentation paramétrique suivante de l'ensemble des solutions :

$$\begin{cases} x_4 = \frac{1}{2} + t_4 \\ y_4 = 2z_4 - t_4 \\ z_4 = z_4 \\ t_4 = t_4 \end{cases}, (z_4, t_4) \in \mathbb{R}^2.$$

Par exemple, en choisissant $(z_4, t_4) = (0, 0)$, on obtient $\boxed{\overrightarrow{v_4} = (\frac{1}{2}, 0, 0, 0)}$.

(e) *Justifier que la famille $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_4})$ forme une base de $\mathbb{R}^4$.*

▶ On a dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$:

$$\operatorname{rang}\left(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_4}\right) = \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3/2 & 1/2 \\ 2 & -1 & -1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftrightarrow L_3 \\ \\ L_3 \leftrightarrow L_1 \\ \\ \end{matrix}$$

$$= \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -5/2 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ \\ \\ \end{matrix} = \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -5/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_2 \end{matrix}$$

$$= \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -5/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_3 \end{matrix} = 4.$$

Ainsi $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_4})$ est une famille libre maximale de $\mathbb{R}^4$, donc une $\boxed{\text{base de } \mathbb{R}^4}$.

(f) *Déterminer la matrice de f dans la base $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_4})$.*

▶ On a par définition des vecteurs $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_4})$:

$$\begin{aligned} f(\overrightarrow{v_1}) = f(\overrightarrow{v_2}) = \overrightarrow{0} &= 0\overrightarrow{v_1} + 0\overrightarrow{v_2} + 0\overrightarrow{v_3} + 0\overrightarrow{v_4} && \text{(car } \overrightarrow{v_1} \text{ et } \overrightarrow{v_2} \text{ sont des vecteurs de Ker}(f)) \\ f(\overrightarrow{v_3}) = \overrightarrow{v_2} &= 0\overrightarrow{v_1} + 1\overrightarrow{v_2} + 0\overrightarrow{v_3} + 0\overrightarrow{v_4} && \text{(car } \overrightarrow{v_3} \text{ est un antécédent de } \overrightarrow{v_2} \text{ par } f) \\ f(\overrightarrow{v_4}) = \overrightarrow{v_3} &= 0\overrightarrow{v_1} + 0\overrightarrow{v_2} + 1\overrightarrow{v_3} + 0\overrightarrow{v_4} && \text{(car } \overrightarrow{v_4} \text{ est un antécédent de } \overrightarrow{v_3} \text{ par } f). \end{aligned}$$

On en déduit que la matrice de f dans la base $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_4})$ est égale à :

$$\boxed{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}.$$

On peut aussi retrouver cette matrice à l'aide des composantes de chaque vecteur $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$, $\overrightarrow{v_3}$ et $\overrightarrow{v_4}$, c'est-à-dire de leurs coordonnées dans la base canonique, mais les calculs sont beaucoup plus longs. Remarquez que la matrice obtenue est identique quels que soient les choix faits aux questions précédentes.

(g) *En déduire une base de* $\mathrm{Im}(f)$.

▶ Puisque $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_4})$ est une base de $\mathbb{R}^4$, on a :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\Big(f(\overrightarrow{v_1}), f(\overrightarrow{v_2}), f(\overrightarrow{v_3}), f(\overrightarrow{v_4})\Big) = \mathrm{Vect}\Big(\overrightarrow{0}, \overrightarrow{0}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\Big) = \mathrm{Vect}\Big(\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\Big).$$

De plus, $\overrightarrow{v_2} = (1, -1, 0, 1)$ et $\overrightarrow{v_3} = (\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2})$ forment une famille libre puisqu'ils ne sont pas colinéaires. On en déduit que $\boxed{(\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}) \text{ forme une base de } \mathrm{Im}(f)}$.

B) *Cette partie propose de démontrer quelques propriétés générales des endomorphismes nilpotents. On fixe donc f un endomorphisme nilpotent de $\mathbb{R}^p$ quelconque et on note n son indice de nilpotence.*

1. *Prouver que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $f^k \neq 0_p$ si $k < n$ et $f^k = 0_p$ si $k \geqslant n$.*

▶ Soit $k \in \mathbb{N}$. Si $f^k = 0_p$ alors $k \geqslant n$ par définition de l'indice de nilpotence. Par contraposée, on en déduit que $\boxed{\text{si } k < n \text{ alors } f^k \neq 0_p}$. D'autre part, si $k \geqslant n$ alors $f^k = f^{k-n+n} = f^{k-n} \circ f^n$ car $k - n \geqslant 0$. Or $f^n = 0_p$ par définition de l'indice de nilpotence et $f^{k-n} \circ 0_p = 0_p$. Donc $\boxed{\text{si } k \geqslant n \text{ alors } f^k = 0_p}$.

2. (a) *Montrer que* $\mathrm{Im}(f^{n-1}) \subset \mathrm{Ker}(f)$.

▶ Soit $\overrightarrow{u} \in \mathrm{Im}(f^{n-1})$. Par définition de $\mathrm{Im}(f^{n-1})$, il existe un vecteur $\overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^p$ tel que $\overrightarrow{u} = f^{n-1}(\overrightarrow{w})$. Donc $f(\overrightarrow{u}) = f(f^{n-1}(\overrightarrow{w})) = (f \circ f^{n-1})(\overrightarrow{w}) = f^n(\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{0}$ car $f^n = 0_p$. Par définition de $\mathrm{Ker}(f)$, on obtient que $\overrightarrow{u} \in \mathrm{Ker}(f)$ et ceci est vrai pour tout $\overrightarrow{u} \in \mathrm{Im}(f^{n-1})$. Par conséquent :

$$\boxed{\mathrm{Im}(f^{n-1}) \subset \mathrm{Ker}(f)}.$$

Question facile qui consiste à écrire les définitions de $\mathrm{Im}(f^{n-1})$ et $\mathrm{Ker}(f)$.

(b) *En déduire que f n'est pas injectif. f est-il surjectif ?*

▶ On a $f^{n-1} \neq 0_p$ d'après le résultat de la question 1 car $n - 1 < n$. En particulier, il existe un vecteur $\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^p$ tel que $f^{n-1}(\overrightarrow{u}) \neq \overrightarrow{0}$. Or $f^{n-1}(\overrightarrow{u}) \in \mathrm{Im}(f^{n-1})$ par définition de $\mathrm{Im}(f^{n-1})$ et $\mathrm{Im}(f^{n-1}) \subset \mathrm{Ker}(f)$ d'après le résultat de la question précédente. On en déduit que $f^{n-1}(\overrightarrow{u}) \in \mathrm{Ker}(f)$ avec $f^{n-1}(\overrightarrow{u}) \neq \overrightarrow{0}$. Ainsi $\mathrm{Ker}(f)$ contient au moins un vecteur vecteur non nul, donc $\mathrm{Ker}(f) \neq \{\overrightarrow{0}\}$. On en déduit que $\boxed{f \text{ n'est pas injectif}}$. En particulier $\dim(\mathrm{Ker}(f)) \geqslant 1$ et d'après le théorème du rang :

$$\dim(\mathrm{Im}(f)) = \mathrm{rang}(f) = \dim(\mathbb{R}^p) - \dim(\mathrm{Ker}(f)) \leqslant p - 1.$$

En particulier $\dim(\mathrm{Im}(f)) \neq p$ et donc $\boxed{f \text{ n'est pas surjectif}}$.

3. *Le but de cette question est de démontrer que $n \leqslant p$.*

(a) *Justifier que l'ensemble $\mathbb{R}^p \setminus \mathrm{Ker}(f^{n-1})$ est non vide.*

▶ On suppose que $\mathbb{R}^p \setminus \mathrm{Ker}(f^{n-1}) = \emptyset$ donc $\mathrm{Ker}(f^{n-1}) = \mathbb{R}^p$. Par définition de $\mathrm{Ker}(f^{n-1})$, on en déduit que $f^{n-1}(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}$ pour tout $\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^p$. Par conséquent $f^{n-1} = 0_p$ ce qui contredit le résultat de la question 1 puisque $n - 1 < n$. Par l'absurde, on en déduit que $\boxed{\mathbb{R}^p \setminus \mathrm{Ker}(f^{n-1}) \neq \emptyset}$.

On fixe $\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^p \setminus \mathrm{Ker}(f^{n-1})$ et on suppose qu'il existe des réels $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$ non tous nuls vérifiant

$$\lambda_0 \overrightarrow{u} + \lambda_1 f(\overrightarrow{u}) + \lambda_2 f^2(\overrightarrow{u}) + \cdots + \lambda_{n-1} f^{n-1}(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}.$$

On note m le plus petit des entiers $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ tels que $\lambda_k \neq 0$.

(b) *En considérant le vecteur $f^{n-1-m}(\sum_{k=0}^{n-1}\lambda_k f^k(\overrightarrow{u}))$, montrer que $\lambda_m = 0$.*

▶ On a par hypothèse de l'énoncé :

$$\sum_{k=0}^{n-1}\lambda_k f^k\left(\overrightarrow{u}\right) = \lambda_0\overrightarrow{u} + \lambda_1 f(\overrightarrow{u}) + \lambda_2 f^2(\overrightarrow{u}) + \cdots + \lambda_{n-1}f^{n-1}(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}$$

donc :

$$f^{n-1-m}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\lambda_k f^k\left(\overrightarrow{u}\right)\right) = f^{n-1-m}\left(\overrightarrow{0}\right) = \overrightarrow{0} \quad \text{car } f^{n-1-m} \text{ est linéaire.}$$

D'autre part, on a par linéarité de f^{n-1-m} :

$$\begin{aligned}
f^{n-1-m}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\lambda_k f^k\left(\overrightarrow{u}\right)\right) &= \sum_{k=0}^{n-1}\lambda_k f^{n-1-m}\left(f^k\left(\overrightarrow{u}\right)\right) = \sum_{k=0}^{n-1}\lambda_k\left(f^{n-1-m}\circ f^k\right)\left(\overrightarrow{u}\right)\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\lambda_k f^{n-1-m+k}\left(\overrightarrow{u}\right)\\
&= \lambda_0 f^{n-1-m}\left(\overrightarrow{u}\right) + \lambda_1 f^{n-m}\left(\overrightarrow{u}\right) + \cdots + \lambda_{m-1}f^{n-2}\left(\overrightarrow{u}\right)\\
&\quad + \lambda_m f^{n-1}\left(\overrightarrow{u}\right)\\
&\quad + \lambda_{m+1}f^n\left(\overrightarrow{u}\right) + \lambda_{m+2}f^{n+1}\left(\overrightarrow{u}\right) + \cdots + \lambda_{n-1}f^{2n-2-m}\left(\overrightarrow{u}\right).
\end{aligned}$$

Or $\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_{m-1} = 0$ par définition de m et $f^n = f^{n+1} = \cdots = f^{2n-2-m} = 0_p$ d'après le résultat de la question 1. On en déduit que :

$$\overrightarrow{0} = f^{n-1-m}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\lambda_k f^k\left(\overrightarrow{u}\right)\right) = \overrightarrow{0} + \lambda_m f^{n-1}\left(\overrightarrow{u}\right) + \overrightarrow{0}$$

donc $\lambda_m = 0$ ou $f^{n-1}(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}$. Or $\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^p \setminus \mathrm{Ker}(f^{n-1})$ donc $f^{n-1}(\overrightarrow{u}) \neq \overrightarrow{0}$ par définition de $\mathrm{Ker}(f^{n-1})$. Finalement, on a montré que $\boxed{\lambda_m = 0}$.

(c) *Que peut-on en déduire pour la famille $(\overrightarrow{u}, f(\overrightarrow{u}), f^2(\overrightarrow{u}), \ldots, f^{n-1}(\overrightarrow{u}))$?*

▶ On a $\lambda_m \neq 0$ par définition de m et $\lambda_m = 0$ d'après le résultat de la question précédente. Ceci est absurde. On en déduit que l'hypothèse de l'énoncé est fausse : il n'existe pas de réels $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ non tous nuls tels que $\lambda_0\overrightarrow{u} + \lambda_1 f(\overrightarrow{u}) + \cdots + \lambda_{n-1}f^{n-1}(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}$. Par conséquent, $\boxed{\text{la famille } (\overrightarrow{u}, f(\overrightarrow{u}), f^2(\overrightarrow{u}), \ldots, f^{n-1}(\overrightarrow{u})) \text{ est libre.}}$

(d) *Conclure.*

▶ D'après le résultat de la question précédente, on a trouvé une famille libre de n vecteurs de $\mathbb{R}^p$. Puisque $\dim(\mathbb{R}^p) = p$, on en déduit que $\boxed{n \leqslant p}$.

4. *Soit $\lambda \in \mathbb{R}^\star$. On pose $g = \mathrm{I}_p + f + f^2 + \cdots + f^{n-1}$.*

(a) *Simplifier $(f - \mathrm{I}_p) \circ g$.*

▶ On a par linéarité :

$$\begin{aligned}
(f-\mathrm{I}_p)\circ g = (f-\mathrm{I}_p)\circ(\mathrm{I}_p + f + f^2 + \cdots + f^{n-1}) &= (f-\mathrm{I}_p)\circ\left(\sum_{k=0}^{n-1}f^k\right)\\
= f\circ\left(\sum_{k=0}^{n-1}f^k\right) - \mathrm{I}_p\left(\sum_{k=0}^{n-1}f^k\right) &= \sum_{k=0}^{n-1}\left(f\circ f^k\right) - \sum_{k=0}^{n-1}\left(\mathrm{I}_p\circ f^k\right)\\
= \sum_{k=0}^{n-1}f^{k+1} - \sum_{k=0}^{n-1}f^k = \sum_{k=1}^{n}f^k - \sum_{k=0}^{n-1}f^k &= f^n - \mathrm{I}_p
\end{aligned}$$

en reconnaissant une somme télescopique. Or $f^n = 0_p$ par définition de l'indice de nilpotence donc $\boxed{(f-\mathrm{I}_p)\circ g = -\mathrm{I}_p}$.

(b) *En déduire que $f-\mathrm{I}_p$ est bijectif et déterminer sa bijection réciproque en fonction de g.*

▶ D'après le résultat de la question précédente, on a par linéarité :

$$(f-\mathrm{I}_p)\circ(-g) = -\Big((f-\mathrm{I}_p)\circ g\Big) = -(-\mathrm{I}_p) = \mathrm{I}_p.$$

D'autre part, on a en raisonnant comme à la question précédente :

$$g\circ(f-\mathrm{I}_p) = (\mathrm{I}_p+f+f^2+\cdots+f^{n-1})\circ(f-\mathrm{I}_p) = \cdots = f^n-\mathrm{I}_p = -\mathrm{I}_p$$

donc par linéarité :

$$(-g)\circ(f-\mathrm{I}_p) = -\Big(g\circ(f-\mathrm{I}_p)\Big) = -(-\mathrm{I}_p) = \mathrm{I}_p.$$

Ainsi, on a trouvé un endomorphisme $-g$ tel que $(f-\mathrm{I}_p)\circ(-g)=\mathrm{I}_p$ et $(-g)\circ(f-\mathrm{I}_p)=-\mathrm{I}_p$. On en déduit que $\boxed{f-\mathrm{I}_p \text{ est bijectif}}$ et que sa bijection réciproque est $\boxed{(f-\mathrm{I}_p)^{-1}=-g}$.

N'oubliez pas de vérifier que $-g$ est l'inverse de $f-\mathrm{I}_p$ à gauche et à droite !

(c) *Justifier que $\frac{1}{\lambda}f$ est un endomorphisme nilpotent de $\mathbb{R}^p$ d'indice de nilpotence égal à n.*

▶ On a par linéarité :

$$\left(\tfrac{1}{\lambda}f\right)^n = \underbrace{\left(\tfrac{1}{\lambda}f\right)\circ\left(\tfrac{1}{\lambda}f\right)\circ\cdots\circ\left(\tfrac{1}{\lambda}f\right)}_{n \text{ fois}} = \left(\tfrac{1}{\lambda}\right)^n\left(\underbrace{f\circ f\circ\cdots\circ f}_{n\text{ fois}}\right) = \left(\tfrac{1}{\lambda}\right)^n f^n.$$

Or $f^n=0_p$ par définition de l'indice de nilpotence donc $\left(\frac{1}{\lambda}f\right)^n=0_p$. On en déduit que $\boxed{\frac{1}{\lambda}f \text{ est un endomorphisme nilpotent}}$. De plus, pour tout entier $k\in\mathbb{N}$ tel que $k<n$ on a en raisonnant de même que $\left(\frac{1}{\lambda}f\right)^k=\left(\frac{1}{\lambda}\right)^k f^k\neq 0_p$ d'après le résultat de la question 1. Donc n est le plus petit entier tel que $\left(\frac{1}{\lambda}f\right)^n=0_p$. Autrement dit, $\boxed{n \text{ est l'indice de nilpotence de } \frac{1}{\lambda}f}$.

(d) *En déduire que $f-\lambda\mathrm{I}_p$ est bijectif et déterminer sa bijection réciproque en fonction de λ, f et n.*

▶ On a : $f-\lambda\mathrm{I}_p=\lambda\left(\frac{1}{\lambda}f-\mathrm{I}_p\right)$. D'après le résultat de la question 4(b) appliqué à l'endomorphisme $\frac{1}{\lambda}f$ (on peut bien l'appliquer car $\frac{1}{\lambda}f$ est un endomorphisme nilpotent comme f de même indice de nilpotence), on obtient que $\frac{1}{\lambda}f-\mathrm{I}_p$ est bijectif de bijection réciproque :

$$\begin{aligned}\left(\tfrac{1}{\lambda}f-\mathrm{I}_p\right)^{-1} &= -\left(\mathrm{I}_p+\tfrac{1}{\lambda}f+\left(\tfrac{1}{\lambda}f\right)^2+\cdots+\left(\tfrac{1}{\lambda}f\right)^{n-1}\right)\\ &= -\left(\mathrm{I}_p+\tfrac{1}{\lambda}f+\left(\tfrac{1}{\lambda}\right)^2f^2+\cdots+\left(\tfrac{1}{\lambda}\right)^{n-1}f^{n-1}\right).\end{aligned}$$

De plus, on a par linéarité :

$$\begin{aligned}(f-\lambda\mathrm{I}_p)\circ\left(\tfrac{1}{\lambda}\left(\tfrac{1}{\lambda}f-\mathrm{I}_p\right)^{-1}\right) &= \left(\lambda\left(\tfrac{1}{\lambda}f-\mathrm{I}_p\right)\right)\circ\left(\tfrac{1}{\lambda}\left(\tfrac{1}{\lambda}f-\mathrm{I}_p\right)^{-1}\right)\\ &= \left(\lambda\times\tfrac{1}{\lambda}\right)\left(\left(\tfrac{1}{\lambda}f-\mathrm{I}_p\right)\circ\left(\tfrac{1}{\lambda}f-\mathrm{I}_p\right)^{-1}\right)=\mathrm{I}_p\\ \text{et}\quad \left(\tfrac{1}{\lambda}\left(\tfrac{1}{\lambda}f-\mathrm{I}_p\right)^{-1}\right)\circ(f-\lambda\mathrm{I}_p) &= \left(\tfrac{1}{\lambda}\left(\tfrac{1}{\lambda}f-\mathrm{I}_p\right)^{-1}\right)\circ\left(\lambda\left(\tfrac{1}{\lambda}f-\mathrm{I}_p\right)\right)\\ &= \left(\tfrac{1}{\lambda}\times\lambda\right)\left(\left(\tfrac{1}{\lambda}f-\mathrm{I}_p\right)^{-1}\circ\left(\tfrac{1}{\lambda}f-\mathrm{I}_p\right)\right)=\mathrm{I}_p.\end{aligned}$$

On en déduit que $\boxed{f-\lambda\mathrm{I}_p}$ est bijectif et que sa bijection réciproque est :

$$(f-\lambda\mathrm{I}_p)^{-1}=\tfrac{1}{\lambda}\left(\tfrac{1}{\lambda}f-\mathrm{I}_p\right)^{-1}=\boxed{-\tfrac{1}{\lambda}\left(\mathrm{I}_p+\tfrac{1}{\lambda}f+\left(\tfrac{1}{\lambda}\right)^2f^2+\cdots+\left(\tfrac{1}{\lambda}\right)^{n-1}f^{n-1}\right)}.$$