Sujets et corrigés des DS de mathématiques et d'informatique

BCPST1A lycée Hoche 2017-2018

Sébastien Godillon

Table des matières

Sujet du DS n° 1 (mathématiques, 3h) **3**

Corrigé du DS n° 1 **5**
Exercice 1 (étude de fonctions, ensembles, équations) . . . 5
Problème 1 (logique, quantificateurs, suites) . . . 6
Exercice 2 (nombres réels, inéquations) . . . 9
Problème 2 (nombre réels, ensembles, logique) . . . 9
Exercice 3 (logique, équations) . . . 12

Sujet du DS n° 2 (mathématiques, 3h) **15**

Corrigé du DS n° 2 **17**
Exercice 1 (équations, inéquations, trigonométrie) . . . 17
Problème 1 (produit, logique) . . . 19
Exercice 2 (suites, équations) . . . 23
Problème 2 (suites, ensembles, nombres réels, logique) . . . 25
Exercice 3 (sommes, produits) . . . 32

Sujet du DS n° 3 (mathématiques et informatique, 4h) **35**

Corrigé du DS n° 3 **39**
Problème 1 (informatique, dénombrement, suites) . . . 39
Exercice 1 (informatique, suites) . . . 41
Problème 2 (dénombrement, suites, sommes) . . . 43
Exercice 2 (applications, systèmes linéaires) . . . 47
Exercice 3 (dénombrement, logique) . . . 50
Exercice 4 (étude de fonctions, trigonométrie, applications, ensembles) . . . 52

Sujet du DS n° 4 (mathématiques, 2h) **55**

Corrigé du DS n° 4 **57**
Exercice 1 (dérivées, équations différentielles) . . . 57
Exercice 2 (intégrales, primitives) . . . 60
Problème (suites, matrices, limites) . . . 61

Sujet du DS n° 5 (mathématiques et informatique, 3h) **68**

Corrigé du DS n° 5 **71**
Problème 1 (suites, limites, informatique, sommes, intégrales) . . . 71
Questions de cours (statistiques) . . . 74
Problème 2 (géométrie, matrices) . . . 75
Exercice (équivalents) . . . 80

Sujet du DS n° 6 (mathématiques et informatique, 3h) **84**

Corrigé du DS n° 6 **86**
Exercice 1 (équivalents) . . . 86
Problème 1 (polynômes, étude de fonctions, limites, équivalents, applications) . . . 88
Exercice 2 (informatique, polynômes) . . . 92
Problème 2 (polynômes, logique, sommes) . . . 93

Sujet du DS n° 7 (mathématiques et informatique, 3h) **99**

Corrigé du DS n° 7 **102**
Problème 1 (études de fonctions, polynômes, informatique, suites) . . . 102
Exercice (sous-espaces vectoriels, familles de vecteurs) . . . 106
Problème 2 (probabilités, matrices, limites) . . . 112

Sujet du DS n° 8 (mathématiques et informatique, 3h) **119**

Corrigé du DS n° 8 **121**
Exercice 1 (informatique, variables aléatoires) . . . 121
Exercice 2 (applications linéaires, informatique, sous-espaces vectoriels, familles de vecteurs) . . . 123
Exercice 3 (variables aléatoires, sommes) . . . 128
Exercice 4 (intégration, informatique, étude de fonctions, développements limités) . . . 130

DS n° 1 de mathématiques

durée : 3 heures

Exercice 1

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2+3}{1-x}$. Déterminer les ensembles suivants :

$$\mathscr{A} = \{f(x) \mid x \in [2,5]\} \quad \text{et} \quad \mathscr{B} = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in [3,4]\}.$$

Problème 1

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels est croissante lorsque l'assertion suivante est vérifiée :

$$\mathscr{C}_1 : \text{«}\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ p \leqslant q \Longrightarrow u_p \leqslant u_q\text{»}.$$

1. Justifier que la suite $(v_n = 42^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante selon la définition précédente.
2. (a) Écrire la négation de l'assertion $\mathscr{C}_1$.
   (b) En déduire que la suite $(w_n = 29 - 13(-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas croissante.
3. Pour les questions suivantes, on fixe une suite quelconque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels.
   (a) Montrer qu'il suffit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit croissante pour que l'assertion suivante soit vérifiée :
   $$\mathscr{C}_2 : \text{«}\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant u_{n+1}\text{»}.$$
   (b) On suppose dans cette question que l'assertion $\mathscr{C}_2$ est vérifiée et on fixe $p \in \mathbb{N}$. Prouver par récurrence que $u_p \leqslant u_q$ pour tout entier $q \geqslant p$.
   (c) Que peut-on déduire des deux questions précédentes ?
4. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante lorsque la suite $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   (a) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante si et seulement si l'assertion suivante est vérifiée :
   $$\mathscr{D}_1 : \text{«}\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ p \leqslant q \Longrightarrow u_p \geqslant u_q\text{»}.$$
   (b) À l'aide de la question 3, déterminer une assertion $\mathscr{D}_2$ équivalente à $\mathscr{D}_1$.
5. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante lorsque l'assertion suivante est vérifiée :
   $$\mathscr{K}_1 : \text{«}\exists K \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = K\text{»}.$$
   (a) Montrer qu'il est nécessaire que l'assertion suivante soit vérifiée pour que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit constante :
   $$\mathscr{K}_2 : \text{«}\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0\text{»}.$$
   (b) Montrer qu'il est nécessaire que $\mathscr{K}_2$ soit fausse pour que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne soit pas constante.
   (c) Que peut-on déduire des deux questions précédentes ?
6. (a) Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et décroissante.
   (b) On suppose dans cette question que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et décroissante. Prouver que $u_n = u_0$ pour tout entier $n \geqslant 0$.
   (c) Que peut-on déduire des questions précédentes ?

Exercice 2

Résoudre l'inéquation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ suivante en fonction des valeurs du paramètre $m \in \mathbb{R}$:

$$6x + 5m + 4 \geqslant |3x + 2m + 1|.$$

Problème 2

Pour tout couple (α, β) de réels tels que $0 < \alpha < \beta$, on définit l'ensemble suivant :

$$\mathscr{E}(\alpha, \beta) = \,]\alpha, \beta[\, \cup \,]2\alpha, 2\beta[\, \cup \,]3\alpha, 3\beta[\, \cup \,]4\alpha, 4\beta[\, \cup \,\cdots = \bigcup_{k \geqslant 1} \,]k\alpha, k\beta[.$$

Par exemple, pour le couple $(\alpha, \beta) = (3, 4)$ on obtient

$$\mathscr{E}(3,4) =]3,4[\cup]6,8[\cup]9,12[\cup]12,16[\cup]15,20[\cup]18,24[\cup \cdots =]3,4[\cup]6,8[\cup]9,12[\cup]12,+\infty[$$

et on remarque que $[\gamma, +\infty[\subset \mathscr{E}(3,4)$ pour tout $\gamma > 12$. Les buts de ce problème sont :

— de démontrer que $\mathscr{E}(\alpha, \beta)$ contient au moins un intervalle de la forme $[\gamma, +\infty[$ où $\gamma > 0$;

— et de déterminer, si possible, la plus petite valeur de γ qui vérifie cette propriété.

1. Dans cette question, on considère l'exemple $(\alpha, \beta) = (14, 19)$.
   (a) Écrire sans justifier l'ensemble $\mathscr{E}(14, 19)$ sous la forme d'une union d'un nombre fini d'intervalles et trouver un réel $\gamma > 0$ tel que $[\gamma, +\infty[\subset \mathscr{E}(14, 19)$.
   (b) Déterminer sans justifier l'ensemble des réels $\gamma > 0$ tels que l'intervalle $[\gamma, +\infty[$ soit inclus dans $\mathscr{E}(14, 19)$. Cet ensemble admet-il un plus petit élément ? une borne inférieure ?

Pour la suite du problème, on fixe un couple quelconque (α, β) de réels tels que $0 < \alpha < \beta$.

2. Pour cette question, on pose $\gamma = \dfrac{\alpha\beta}{\beta - \alpha} + 1$.
   (a) Soit $x \geqslant \gamma$. Montrer que la longueur de l'intervalle $]\frac{x}{\beta}, \frac{x}{\alpha}[$ est strictement plus grande que 1.
   On peut en déduire que l'intervalle $]\frac{x}{\beta}, \frac{x}{\alpha}[$ contient au moins un entier qu'on notera $n(x) \in \mathbb{Z}$.
   (b) Pour tout $x \geqslant \gamma$, justifier que $n(x) \geqslant 1$ et $x \in]n(x)\alpha, n(x)\beta[$.
   (c) En déduire que $[\gamma, +\infty[\subset \mathscr{E}(\alpha, \beta)$.
3. On pose $\Gamma(\alpha, \beta) = \{\gamma > 0 \mid [\gamma, +\infty[\subset \mathscr{E}(\alpha, \beta)\}$.
   (a) À l'aide du résultat de la question 2, justifier que $\Gamma(\alpha, \beta)$ admet une borne inférieure.
   (b) Pour cette question, on fixe un entier $k \geqslant 1$. Montrer que :
   $$\Big(]k\alpha, k\beta[\, \cap \,](k+1)\alpha, (k+1)\beta[\Big) = \emptyset \iff k \leqslant \frac{\alpha}{\beta - \alpha}.$$
   (c) On pose $N = \left\lfloor \dfrac{\alpha}{\beta - \alpha} \right\rfloor + 1$ où $\lfloor \cdot \rfloor$ désigne la partie entière.
      i. Montrer que N est un entier supérieur ou égal à 1.
      ii. Montrer que pour tout entier $k \geqslant N$, les intervalles $]k\alpha, k\beta[$ et $](k+1)\alpha, (k+1)\beta[$ ne sont pas disjoints. En déduire sans justifier l'ensemble $\bigcup_{k \geqslant N}]k\alpha, k\beta[$.
      iii. Montrer que les intervalles $](N-1)\alpha, (N-1)\beta[$ et $]N\alpha, +\infty[$ sont disjoints.

      On a donc prouvé que $\mathscr{E}(\alpha, \beta)$ peut s'écrire sous la forme :
      $$\mathscr{E}(\alpha, \beta) = \,]\alpha, \beta[\, \cup \,]2\alpha, 2\beta[\, \cup \,\cdots \cup \,](N-1)\alpha, (N-1)\beta[\, \cup \,]N\alpha, +\infty[.$$
   (d) Déterminer sans justifier l'ensemble $\Gamma(\alpha, \beta)$. Cet ensemble admet-il un plus petit élément ?
   (e) Déterminer la borne inférieure de $\Gamma(\alpha, \beta)$.

Exercice 3

On considère la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ définie par

$$u_0 = -1, \quad u_1 = 4 \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 0,\ u_{n+2} = 4(u_{n+1} - u_n).$$

Montrer qu'il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_n = (an + b)c^n$.

Corrigé du DS n° 1 de mathématiques

Exercice 1

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2+3}{1-x}$. Déterminer les ensembles suivants :

$$\mathscr{A} = \{f(x) \mid x \in [2,5]\} \quad \text{et} \quad \mathscr{B} = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in [3,4]\}.$$

► La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ comme quotient de fonctions polynomiales dont le dénominateur ne s'annule pas. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad f'(x) = \frac{2x(1-x) - (x^2+3)(-1)}{(1-x)^2} = \frac{-x^2+2x+3}{(1-x)^2}.$$

On reconnaît au numérateur une fonction polynomiale de degré 2 de discriminant $\Delta = 2^2 - 4(-1)3 = 16 > 0$. Donc le numérateur s'annule en $(-2+\sqrt{16})/(-2) = -1$ et en $(-2-\sqrt{16})/(-2) = 3$. De plus, il est strictement positif sur $]-1,3[$ et strictement négatif sur $]-\infty,-1[\cup]3,+\infty[$. Puisque $(1-x)^2 > 0$ pour tout $x \neq 1$, on en déduit le tableau des variations de f.

x	$-\infty$	$-2-\sqrt{5}$	-3	-1	0	$-2+\sqrt{5}$	1	2	3	5	$+\infty$
$f'(x)$		$-$		0	$+$		‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$ ↘	4 ↘	3 ↘	2 ↗	3 ↗	4 ↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$ ↗	-7 ↗	-6 ↘	-7 ↘	$-\infty$

car :

$$\begin{array}{l|c|l}
\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x+\frac{3}{x}}{\frac{1}{x}-1} = +\infty & \displaystyle f(-1) = \frac{(-1)^2+3}{1-(-1)} = 2 & \displaystyle\lim_{x\to-1^-} f(x) = \lim_{x\to-1^-} \frac{x^2+3}{1-x} = +\infty \\
\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x+\frac{3}{x}}{\frac{1}{x}-1} = -\infty & \displaystyle f(3) = \frac{3^2+3}{1-3} = -6 & \displaystyle\lim_{x\to-1^+} f(x) = \lim_{x\to-1^+} \frac{x^2+3}{1-x} = -\infty
\end{array}$$

On a $f(2) = \frac{2^2+3}{1-2} = -7$ et $f(5) = \frac{5^2+3}{5-1} = -7$. On déduit donc du tableau des variations de f que :

$$\mathscr{A} = \{f(x) \mid x \in [2,5]\} = \boxed{[-7,-6]}.$$

Pour déterminer $\mathscr{B}$, on résout les deux équations suivantes :

- $f(x) = 3 \iff \dfrac{x^2+3}{1-x} = 3 \iff x^2+3 = 3(1-x) \iff x^2+3x = 0 \iff x(x+3) = 0$
  On obtient donc comme solutions $x = 0$ ou $x = -3$.
- $f(x) = 4 \iff \dfrac{x^2+3}{1-x} = 4 \iff x^2+3 = 4(1-x) \iff x^2+4x-1 = 0$
  On obtient une équation du second degré de discriminant $\Delta = 4^2 - 4(-1) = 20 > 0$ qui admet pour solutions $x = (-4+\sqrt{20})/2 = -2+\sqrt{5}$ ou $x = -2-\sqrt{5}$.

On déduit donc du tableau des variations de f que :

$$\mathscr{B} = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in [3,4]\} = \boxed{\left[-2-\sqrt{5}, -3\right] \cup \left[0, -2+\sqrt{5}\right]}.$$

Problème 1

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels est croissante lorsque l'assertion suivante est vérifiée :

$$\mathscr{C}_1 : «\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ p \leqslant q \Longrightarrow u_p \leqslant u_q».$$

1. *Justifier que la suite $(v_n = 42^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante selon la définition précédente.*

   ▶ Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^2$. On suppose que $p \leqslant q$. Alors $v_q = 42^q = 42^{q-p} \times 42^p = 42^{q-p} \times v_p$ par associativité du produit. Or :

   $$42^{q-p} = \underbrace{42 \times 42 \times \cdots \times 42}_{q-p \text{ fois}} \geqslant 1 \quad (\text{car } q-p \geqslant 0) \quad \text{et} \quad v_p = 42^p = \underbrace{42 \times 42 \times \cdots \times 42}_{p \text{ fois}} \geqslant 0$$

   donc $v_q = 42^{q-p} \times v_p \geqslant 1 \times v_p = v_p$. Par conséquent, si $p \leqslant q$ alors $v_p \leqslant v_q$ et cette implication est vraie pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$. On en déduit que l'assertion $\mathscr{C}_1$ est vraie et donc que $\boxed{(v_n = 42^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante}}$.

   > *Les difficultés de ce problème sont de bien comprendre les questions et de bien rédiger les réponses. Pour cette question, on doit démontrer une proposition commençant par $\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2$, donc on commence par poser $(p,q) \in \mathbb{N}^2$. Puis on veut montrer une implication, donc on suppose la cause et on démontre la conséquence.*

2. (a) *Écrire la négation de l'assertion $\mathscr{C}_1$.*

   ▶ On a :

   $$\boxed{\text{non}(\mathscr{C}_1) : «\exists (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ p \leqslant q \text{ et } u_p > u_q»}.$$

   (b) *En déduire que la suite $(w_n = 29 - 13(-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas croissante.*

   ▶ On raisonne par analyse-synthèse pour déterminer $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ tel que $p \leqslant q$ et $u_p > u_q$.
   Analyse. On a :

   $$\begin{aligned} w_0 &= 29 - 13(-1)^0 = 29 - 13 = 16 \\ w_1 &= 29 - 13(-1)^1 = 29 + 13 = 42 \\ w_2 &= 29 - 13(-1)^2 = 29 - 13 = 16 \\ w_3 &= 29 - 13(-1)^3 = 29 + 13 = 42 \\ w_4 &= 29 - 13(-1)^4 = 29 - 13 = 16 \\ &\cdots \end{aligned}$$

   Synthèse. On pose $\boxed{p = 1 \text{ et } q = 2}$. Alors $p \leqslant q$ et $w_p = 42 > 16 = w_q$. On en déduit que l'assertion non$(\mathscr{C}_1)$ est vraie d'après le résultat de la question précédente, donc que l'assertion $\mathscr{C}_1$ est fausse et donc que $\boxed{(w_n = 29 - 13(-1)^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ n'est pas croissante}}$.

3. *Pour les questions suivantes, on fixe une suite quelconque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels.*

   (a) *Montrer qu'il suffit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit croissante pour que l'assertion suivante soit vérifiée :*

   $$\mathscr{C}_2 : «\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant u_{n+1}».$$

   ▶ On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, donc que l'assertion $\mathscr{C}_1$ est vraie. Montrons que l'assertion $\mathscr{C}_2$ est vraie. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $(p,q) = (n, n+1) \in \mathbb{N}^2$. Alors $p = n \leqslant n+1 = q$. Puisque $\mathscr{C}_1$ est vraie, on en déduit que $u_p \leqslant u_q$, donc que $u_n \leqslant u_{n+1}$ et ceci est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a donc démontré que l'implication «$\mathscr{C}_1 \Longrightarrow \mathscr{C}_2$» est vraie. Par conséquent, $\boxed{\text{il suffit que } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ soit croissante pour que l'assertion } \mathscr{C}_2 \text{ soit vraie}}$.

(b) *On suppose dans cette question que l'assertion $\mathscr{C}_2$ est vérifiée et on fixe $p \in \mathbb{N}$. Prouver par récurrence que $u_p \leqslant u_q$ pour tout entier $q \geqslant p$.*

▶ Initialisation. Si $q = p$ alors $u_q = u_p$ donc en particulier $u_q \geqslant u_p$ ce qui initialise la récurrence.
Hérédité. Soit un entier $q \geqslant p$ fixé. On suppose que $u_p \leqslant u_q$, alors :

$$\begin{aligned} u_{q+1} &\geqslant u_q \quad \text{d'après la relation de récurrence de l'assertion } \mathscr{C}_2 \text{ supposée vraie (en posant } n = q) \\ &\geqslant u_p \quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence.} \end{aligned}$$

Par conséquent, si $u_p \leqslant u_q$ alors $u_p \leqslant u_{q+1}$ et cette implication est vraie pour tout entier $q \geqslant p$.
Conclusion. D'après le principe de récurrence, on en déduit que

$$\boxed{\forall q \geqslant p,\ u_p \leqslant u_q}.$$

(c) *Que peut-on déduire des deux questions précédentes ?*

▶ À la question 3(a), on a démontré que l'implication «$\mathscr{C}_1 \Longrightarrow \mathscr{C}_2$» est vraie. À la question 3(b), on a démontré que si l'assertion $\mathscr{C}_2$ est vraie alors l'assertion «$\forall q \geqslant p,\ u_p \leqslant u_q$» est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}$, donc l'assertion $\mathscr{C}_1$ est vraie. Par conséquent, on a démontré à la question 3(b) que l'implication «$\mathscr{C}_2 \Longrightarrow \mathscr{C}_1$» est vraie. On en déduit que $\boxed{\text{les assertions } \mathscr{C}_1 \text{ et } \mathscr{C}_2 \text{ sont équivalentes}}$ et donc que $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante si et seulement si } u_n \leqslant u_{n+1} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}}$.

4. *On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante lorsque la suite $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.*

(a) *Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante si et seulement si l'assertion suivante est vérifiée :*

$$\mathscr{D}_1 : «\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ p \leqslant q \Longrightarrow u_p \geqslant u_q».$$

▶ On raisonne par double implication.
1re implication. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Montrons que l'assertion $\mathscr{D}_1$ est vraie. Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^2$. On suppose que $p \leqslant q$. Puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, donc $-u_p \leqslant -u_q$ d'après la conséquence de l'assertion $\mathscr{C}_1$. On en déduit que $u_p \geqslant u_q$. Par conséquent, si $p \leqslant u_q$ alors $u_p \geqslant u_q$ et cette implication est vraie pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$. Ainsi, on a démontré que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante alors l'assertion $\mathscr{D}_1$ est vraie.
2e implication. On suppose que l'assertion $\mathscr{D}_1$ est vraie. Montrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Il suffit donc de démontrer que $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^2$. On suppose que $p \leqslant q$. Puisque l'assertion $\mathscr{D}_1$ est vraie, on a $u_p \geqslant u_q$ donc $-u_p \leqslant -u_q$. On en déduit que l'assertion «$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ p \leqslant q \Longrightarrow -u_p \leqslant -u_q$» est vraie, donc que $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Par conséquent, on a démontré que si l'assertion $\mathscr{D}_1$ est vraie alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
Conclusion. Par double implication, on a prouvé que $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante si et seulement si l'assertion } \mathscr{D}_1 \text{ est vraie}}$.

(b) *À l'aide de la question 3, déterminer une assertion $\mathscr{D}_2$ équivalente à $\mathscr{D}_1$.*

▶ Montrons que l'assertion $\mathscr{D}_1$ est équivalente à l'assertion suivante :

$$\boxed{\mathscr{D}_2 : «\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant u_{n+1}»}.$$

On a :

$$\begin{aligned} \mathscr{D}_1 &\Longleftrightarrow «(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante»} \quad \text{(d'après le résultat de la question précédente)} \\ &\Longleftrightarrow «(-u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante»} \quad \text{(par définition d'une suite décroissante)} \\ &\Longleftrightarrow «\forall n \in \mathbb{N},\ -u_n \leqslant -u_{n+1}» \quad \text{(en raisonnant comme à la question 3)} \\ &\Longleftrightarrow «\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant u_{n+1}» \quad \text{(en multipliant l'inégalité par } -1) \\ &\Longleftrightarrow \mathscr{D}_2. \end{aligned}$$

Finalement, on a bien prouvé que $\boxed{\text{les assertions } \mathscr{D}_1 \text{ et } \mathscr{D}_2 \text{ sont équivalentes}}$.

5. *On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante lorsque l'assertion suivante est vérifiée :*

$$\mathscr{K}_1 : \text{«}\exists K \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = K\text{».}$$

(a) *Montrer qu'il est nécessaire que l'assertion suivante soit vérifiée pour que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit constante :*

$$\mathscr{K}_2 : \text{«}\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0\text{».}$$

► On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante, donc que l'assertion $\mathscr{K}_1$ est vraie. Montrons que l'assertion $\mathscr{K}_2$ est vraie. Puisque $\mathscr{K}_1$ est vraie, on a $u_0 = K$ (en posant $n = 0$). Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $\mathscr{K}_1$ est vraie, on a $u_n = K$. On en déduit que $u_n = u_0$ et ceci est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On peut également prouver ce résultat par récurrence.

On a donc démontré que l'implication «$\mathscr{K}_1 \Longrightarrow \mathscr{K}_2$» est vraie. Par conséquent, $\boxed{\text{il est nécessaire que l'assertion } \mathscr{K}_2 \text{ soit vraie pour que } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ soit constante}}$.

(b) *Montrer qu'il est nécessaire que $\mathscr{K}_2$ soit fausse pour que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne soit pas constante.*

► On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas constante, donc que l'assertion $\mathscr{K}_1$ est fausse. Ainsi, l'assertion suivante est vraie :

$$\text{non}(\mathscr{K}_1) : \text{«}\forall K \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N},\ u_n \neq K\text{».}$$

Montrons que l'assertion $\mathscr{K}_2$ est fausse, donc que l'assertion non$(\mathscr{K}_2)$ est vraie. On a :

$$\text{non}(\mathscr{K}_2) : \text{«}\exists n \in \mathbb{N},\ u_n \neq u_0\text{».}$$

On pose $K = u_0$ dans l'assertion non$(\mathscr{K}_1)$ supposée vraie. Alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \neq K$, donc tel que $u_n \neq u_0$.

On ne peut pas trouver de valeur précise pour n, donc on ne peut pas utiliser une méthode constructive (par analyse-synthèse) pour prouver ce résultat.

On a donc démontré que l'implication «non$(\mathscr{K}_1) \Longrightarrow$ non$(\mathscr{K}_2)$» est vraie. Par conséquent, $\boxed{\text{il est nécessaire que l'assertion } \mathscr{K}_2 \text{ soit fausse pour que } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ne soit pas constante}}$.

(c) *Que peut-on déduire des deux questions précédentes ?*

► À la question 5(a), on a démontré que l'implication «$\mathscr{K}_1 \Longrightarrow \mathscr{K}_2$» est vraie. À la question 5(b), on a démontré que l'implication «non$(\mathscr{K}_1) \Longrightarrow$ non$(\mathscr{K}_2)$» est vraie, donc que l'implication «$\mathscr{K}_2 \Longrightarrow \mathscr{K}_1$» est vraie par contraposée. On en déduit que $\boxed{\text{les assertions } \mathscr{K}_1 \text{ et } \mathscr{K}_2 \text{ sont équivalentes}}$.

6. (a) *Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et décroissante.*

► On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante, donc que l'assertion $\mathscr{K}_1$ est vraie. Montrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, donc que l'assertion $\mathscr{C}_1$ est vraie. Soit $(p, q) \in \mathbb{N}^2$. On suppose que $p \leqslant q$. Puisque $\mathscr{K}_1$ est vraie, on a $u_p = K$ (en posant $n = p$) et $u_q = K$ (en posant $n = q$). Ainsi $u_p = K = u_q$ donc en particulier $u_p \leqslant u_q$. Par conséquent, si $p \leqslant q$ alors $u_p \leqslant u_q$ et cette implication est vraie pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$. On en déduit que l'assertion $\mathscr{C}_1$ est vraie et donc que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. En raisonnant de même, on montre que l'assertion $\mathscr{D}_1$ est vraie et donc que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Finalement, on a bien démontré que $\boxed{\text{si } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est constante alors } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante et décroissante}}$.

(b) *On suppose dans cette question que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et décroissante. Prouver que $u_n = u_0$ pour tout entier $n \geqslant 0$.*

► Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $(p, q) = (0, n)$. Alors $p = 0 \leqslant n = q$. Puisque $\mathscr{C}_1$ est vraie (car $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est supposée croissante), on en déduit que $u_p \leqslant u_q$, donc que $u_0 \leqslant u_n$. De même, puisque $\mathscr{D}_1$ est vraie (car $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est supposée décroissante), on en déduit que $u_0 \geqslant u_n$. Par conséquent, on a $u_n = u_0$ et ceci est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a donc démontré que :

$$\boxed{\forall n \geqslant 0,\ u_n = u_0}.$$

$\boxed{\textit{On peut également prouver ce résultat par récurrence.}}$

(c) *Que peut-on déduire des questions précédentes ?*

▶ À la question 6(a), on a démontré que l'implication «$\mathscr{K}_1 \implies (\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{D}_1)$» est vraie. À la question 6(b), on a démontré que l'implication «$(\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{D}_1) \implies \mathscr{K}_2$» est vraie. Or on a démontré à la question 5 que l'équivalence «$\mathscr{K}_1 \iff \mathscr{K}_2$» est vraie. On en déduit que $\boxed{\text{les assertions } \mathscr{K}_1 \text{ et } (\mathscr{C}_1 \text{ et } \mathscr{D}_1) \text{ sont équivalentes}}$ et donc que $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est constante si et seulement si } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante et décroissante}}$.

Exercice 2

Résoudre l'inéquation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ suivante en fonction des valeurs du paramètre $m \in \mathbb{R}$:

$$6x + 5m + 4 \geqslant |3x + 2m + 1|.$$

▶ On raisonne par disjonction de cas.

- <u>1er cas</u> : $3x + 2m + 1 \geqslant 0 \iff x \geqslant -\frac{(2m+1)}{3}$. Alors $|3x + 2m + 1| = 3x + 2m + 1$ et donc :

$$\begin{aligned} 6x + 5m + 4 \geqslant |3x + 2m + 1| &\iff 6x + 5m + 4 \geqslant 3x + 2m + 1 \\ &\iff 3x + 3m + 3 \geqslant 0 \\ &\iff x \geqslant -(m + 1) \end{aligned}$$

  Ainsi, on obtient $x \in [-\frac{(2m+1)}{3}, +\infty[\cap[-(m + 1), +\infty[$. Pour simplifier cet ensemble, on résout l'inéquation suivante :

$$-\frac{(2m+1)}{3} \leqslant -(m+1) \iff 2m + 1 \geqslant 3(m + 1) \iff 0 \geqslant m + 2 \iff -2 \geqslant m$$

  Par conséquent, on obtient comme ensemble solutions dans le 1er cas : $x \in [-(m+1), +\infty[$ si $m \leqslant -2$ et $x \in [-\frac{(2m+1)}{3}, +\infty[$ si $m > -2$.

- <u>2e cas</u> : $3x + 2m + 1 < 0 \iff x < -\frac{(2m+1)}{3}$. Alors $|3x + 2m + 1| = -(3x + 2m + 1)$ et donc :

$$\begin{aligned} 6x + 5m + 4 \geqslant |3x + 2m + 1| &\iff 6x + 5m + 4 \geqslant -(3x + 2m + 1) \\ &\iff 9x + 7m + 5 \geqslant 0 \\ &\iff x \geqslant -\frac{(7m+5)}{9} \end{aligned}$$

  Ainsi, on obtient $x \in]-\infty, -\frac{(2m+1)}{3}[\cap[-\frac{(7m+5)}{9}, +\infty[$. Pour simplifier cet ensemble, on résout l'inéquation suivante :

$$-\frac{(2m+1)}{3} \leqslant -\frac{(7m+5)}{9} \iff 9(2m+1) \geqslant 3(7m+5) \iff 0 \geqslant 3m + 6 \iff -2 \geqslant m$$

  Par conséquent, on obtient comme solutions dans le 2e cas : $x \in \emptyset$ (pas de solutions) si $m \leqslant -2$ et $x \in [-\frac{(7m+5)}{9}, -\frac{(2m+1)}{3}[$ si $m > -2$.

- <u>Conclusion</u> : l'ensemble des solutions de l'inéquation est donc égale à :

$$\boxed{\begin{cases} [-(m+1), +\infty[& \text{si} \quad m \leqslant -2 \\ [-\frac{(2m+1)}{3}, +\infty[\cup[-\frac{(7m+5)}{9}, -\frac{(2m+1)}{3}[= [-\frac{(7m+5)}{9}, +\infty[& \text{si} \quad m > -2 \end{cases}}.$$

Problème 2

Pour tout couple (α,β) de réels tels que $0<\alpha<\beta$, on définit l'ensemble suivant :

$$\mathscr{E}(\alpha,\beta) = \left]\alpha,\beta\right[\cup \left]2\alpha,2\beta\right[\cup \left]3\alpha,3\beta\right[\cup \left]4\alpha,4\beta\right[\cup \cdots = \bigcup_{k\geqslant 1} \left]k\alpha,k\beta\right[.$$

Par exemple, pour le couple $(\alpha,\beta)=(3,4)$ on obtient

$$\mathscr{E}(3,4) =]3,4[\cup]6,8[\cup]9,12[\cup]12,16[\cup]15,20[\cup]18,24[\cup\cdots =]3,4[\cup]6,8[\cup]9,12[\cup]12,+\infty[$$

et on remarque que $[\gamma,+\infty[\subset \mathscr{E}(3,4)$ pour tout $\gamma>12$. Les buts de ce problème sont :

- *de démontrer que $\mathscr{E}(\alpha,\beta)$ contient au moins un intervalle de la forme $[\gamma,+\infty[$ où $\gamma>0$;*
- *et de déterminer, si possible, la plus petite valeur de γ qui vérifie cette propriété.*

1. *Dans cette question, on considère l'exemple $(\alpha,\beta)=(14,19)$.*

   (a) *Écrire sans justifier l'ensemble $\mathscr{E}(14,19)$ sous la forme d'une union d'un nombre fini d'intervalles et trouver un réel $\gamma>0$ tel que $[\gamma,+\infty[\subset \mathscr{E}(14,19)$.*

   ▶ On a :

   $$\mathscr{E}(14,19) =]14,19[\cup]28,38[\cup]42,57[\cup]56,76[\cup]70,95[\cup\cdots = \boxed{]14,19[\cup]28,38[\cup]42,+\infty[}.$$

   Par exemple, pour $\boxed{\gamma=43>0}$ on a $[\gamma,+\infty[=[43,+\infty[\subset \mathscr{E}(14,19)$.

   (b) *Déterminer sans justifier l'ensemble des réels $\gamma>0$ tels que l'intervalle $[\gamma,+\infty[$ soit inclus dans $\mathscr{E}(14,19)$. Cet ensemble admet-il un plus petit élément ? une borne inférieure ?*

   ▶ L'ensemble des réels $\gamma>0$ tels que $[\gamma,+\infty[\subset \mathscr{E}(14,19)$ est $\boxed{]42,+\infty[}$. L'ensemble de ses minorants est $]-\infty,42]$ donc cet ensemble $\boxed{\text{n'a pas de plus petit élément}}$ mais $\boxed{\text{sa borne inférieure est } 42}$.

Pour la suite du problème, on fixe un couple quelconque (α,β) de réels tels que $0<\alpha<\beta$.

2. *Pour cette question, on pose $\gamma = \dfrac{\alpha\beta}{\beta-\alpha}+1$.*

   (a) *Soit $x\geqslant\gamma$. Montrer que la longueur de l'intervalle $]\frac{x}{\beta},\frac{x}{\alpha}[$ est strictement plus grande que 1.*

   ▶ On a :

   $$\frac{x}{\alpha}-\frac{x}{\beta} = \frac{\beta x-\alpha x}{\alpha\beta} = \frac{\beta-\alpha}{\alpha\beta}x \geqslant \frac{\beta-\alpha}{\alpha\beta}\gamma \quad \text{car } 0<\alpha<\beta \text{ donc } \frac{\beta-\alpha}{\alpha\beta}>0.$$

   Par conséquent :

   $$\frac{x}{\alpha}-\frac{x}{\beta} \geqslant \frac{\beta-\alpha}{\alpha\beta}\left(\frac{\alpha\beta}{\beta-\alpha}+1\right) = 1+\frac{\beta-\alpha}{\alpha\beta} > 1 \quad \text{car } \frac{\beta-\alpha}{\alpha\beta}>0.$$

   Ainsi, $\boxed{\text{la longueur de l'intervalle }]\frac{x}{\beta},\frac{x}{\alpha}[\text{ est strictement plus grande que } 1}$.

   On peut en déduire que l'intervalle $]\frac{x}{\beta},\frac{x}{\alpha}[$ contient au moins un entier qu'on notera $n(x)\in\mathbb{Z}$.

   (b) *Pour tout $x\geqslant\gamma$, justifier que $n(x)\geqslant 1$ et $x\in]n(x)\alpha,n(x)\beta[$.*

   ▶ Soit $x\geqslant\gamma$. Puisque $n(x)\in]\frac{x}{\beta},\frac{x}{\alpha}[$, on a en particulier :

   $$n(x) > \frac{x}{\beta} \geqslant \frac{\gamma}{\beta} = \frac{\frac{\alpha\beta}{\beta-\alpha}+1}{\beta} > 0 \quad \text{car } 0<\alpha<\beta.$$

   On en déduit que $n(x)$ est un entier strictement positif donc $\boxed{n(x)\geqslant 1}$. De plus :

   $$\begin{aligned} \frac{x}{\beta} &< n(x) \quad \text{donc } x<n(x)\beta \quad (\text{car } \beta>0) \\ \text{et de même} \quad n(x) &< \frac{x}{\alpha} \quad \text{donc } n(x)\alpha<x \quad (\text{car } \alpha>0). \end{aligned}$$

   Par conséquent, $\boxed{x\in]n(x)\alpha,n(x)\beta[}$.

(c) *En déduire que $[\gamma, +\infty[\subset \mathscr{E}(\alpha,\beta)$.*

▶ Soit $x \in [\gamma, +\infty[$. Donc $x \geqslant \gamma$. D'après le résultat de la question précédente, il existe un entier $k \geqslant 1$ tel que $x \in]k\alpha, k\beta[$ (on a trouvé $k = n(x)$). Par conséquent, $x \in \bigcup_{k\geqslant 1}]k\alpha, k\beta[= \mathscr{E}(\alpha,\beta)$. Puisque ceci est vrai pour tout $x \in [\gamma, +\infty[$, on en déduit que $\boxed{[\gamma, +\infty[\subset \mathscr{E}(\alpha,\beta)}$.

3. *On pose $\Gamma(\alpha,\beta) = \{\gamma > 0 \mid [\gamma, +\infty[\subset \mathscr{E}(\alpha,\beta)\}$.*

(a) *À l'aide du résultat de la question 2, justifier que $\Gamma(\alpha,\beta)$ admet une borne inférieure.*

▶ Il suffit de montrer que $\Gamma(\alpha,\beta)$ est non vide et minorée. D'après le résultat de la question 2, $(\frac{\alpha\beta}{\beta-\alpha}+1) \in \Gamma(\alpha,\beta)$ donc $\Gamma(\alpha,\beta)$ est non vide. De plus, $\Gamma(\alpha,\beta)$ est minorée par 0 par définition de $\Gamma(\alpha,\beta)$. On en déduit que $\boxed{\Gamma(\alpha,\beta) \text{ admet une borne inférieure}}$.

(b) *Pour cette question, on fixe un entier $k \geqslant 1$. Montrer que :*

$$\Big(]k\alpha, k\beta[\, \cap \,](k+1)\alpha, (k+1)\beta[\Big) = \emptyset \iff k \leqslant \frac{\alpha}{\beta-\alpha}.$$

▶ On raisonne par double implication.

1re implication. On suppose que $]k\alpha, k\beta[\, \cap \,](k+1)\alpha, (k+1)\beta[= \emptyset$. On en déduit que :

$$k\alpha \leqslant k\beta \leqslant (k+1)\alpha \leqslant (k+1)\beta.$$

En particulier, la deuxième inégalité donne :

$$k(\beta-\alpha) = k\beta - k\alpha \leqslant \alpha \quad \text{donc} \quad \boxed{k \leqslant \frac{\alpha}{\beta-\alpha}} \quad (\text{car } \alpha < \beta \text{ donc } \beta - \alpha > 0).$$

2e implication. On suppose que $k \leqslant \alpha/(\beta-\alpha)$. On en déduit que :

$$k\beta - k\alpha = k(\beta-\alpha) \leqslant \alpha \quad (\text{car } \beta - \alpha > 0) \quad \text{donc} \quad k\beta \leqslant (k+1)\alpha.$$

De plus, on a $k\alpha < k\beta$ (car $\alpha < \beta$ et $k \geqslant 1 > 0$) et de même $(k+1)\alpha < (k+1)\beta$. Ainsi :

$$k\alpha < k\beta \leqslant (k+1)\alpha < (k+1)\beta$$

et par conséquent $\boxed{]k\alpha, k\beta[\, \cap \,](k+1)\alpha, (k+1)\beta[= \emptyset}$.

Conclusion. Par double implication, on a bien démontré que :

$$\boxed{\Big(]k\alpha, k\beta[\, \cap \,](k+1)\alpha, (k+1)\beta[\Big) = \emptyset \iff k \leqslant \frac{\alpha}{\beta-\alpha}}.$$

On peut également raisonner directement par équivalences ici.

(c) *On pose $N = \left\lfloor \frac{\alpha}{\beta-\alpha} \right\rfloor + 1$ où $\lfloor \cdot \rfloor$ désigne la partie entière.*

i. *Montrer que N est un entier supérieur ou égal à 1.*

▶ Par définition de la partie entière, on a :

$$\left\lfloor \frac{\alpha}{\beta-\alpha} \right\rfloor \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad \left\lfloor \frac{\alpha}{\beta-\alpha} \right\rfloor \leqslant \frac{\alpha}{\beta-\alpha} < \underbrace{\left\lfloor \frac{\alpha}{\beta-\alpha} \right\rfloor + 1}_{=N}.$$

Or $\alpha/(\beta-\alpha) > 0$ car $0 < \alpha < \beta$ donc N est un entier strictement positif. On en déduit que $\boxed{N \text{ est un entier supérieur ou égal à } 1}$.

ii. Montrer que pour tout entier $k \geqslant N$, les intervalles $]k\alpha, k\beta[$ et $](k+1)\alpha, (k+1)\beta[$ ne sont pas disjoints. En déduire sans justifier l'ensemble $\bigcup_{k\geqslant N}]k\alpha, k\beta[$.

▶ On fixe un entier $k \geqslant N$. Donc :

$$k \geqslant N = \left\lfloor \frac{\alpha}{\beta-\alpha} \right\rfloor + 1 > \frac{\alpha}{\beta-\alpha} \quad \text{(par définition de la partie entière).}$$

Puisque $k > \alpha/(\beta-\alpha)$, on en déduit que l'assertion «$k \leqslant \alpha/(\beta-\alpha)$» est fausse. Donc, d'après le résultat de la question 3(b), l'assertion «$]k\alpha, k\beta[\cap](k+1)\alpha, (k+1)\beta[= \emptyset$» est fausse. D'où $]k\alpha, k\beta[\cap](k+1)\alpha, (k+1)\beta[\neq \emptyset$, autrement dit $\boxed{]k\alpha, k\beta[\text{ et }](k+1)\alpha, (k+1)\beta[\text{ ne sont disjoints}}$. Puisque ceci est vrai pour tout entier $k \geqslant N$, on en déduit que :

$$\boxed{\bigcup_{k\geqslant N}]k\alpha, k\beta[=]N\alpha, +\infty[}.$$

iii. Montrer que les intervalles $](N-1)\alpha, (N-1)\beta[$ et $]N\alpha, +\infty[$ sont disjoints.

▶ On a :

$$N - 1 = \left\lfloor \frac{\alpha}{\beta-\alpha} \right\rfloor \leqslant \frac{\alpha}{\beta-\alpha} \quad \text{(par définition de la partie entière).}$$

D'après le résultat de la question 3(b) en posant $k = N-1$, on a :

$$](N-1)\alpha, (N-1)\beta[\cap]((N-1)+1)\alpha, ((N-1)+1)\beta[= \emptyset$$

donc les intervalles $](N-1)\alpha, (N-1)\beta[$ et $]N\alpha, N\beta[$ sont disjoints. Par conséquent, les intervalles $\boxed{](N-1)\alpha, (N-1)\beta[\text{ et }]N\alpha, +\infty[\text{ sont disjoints}}$.

On a donc prouvé que $\mathscr{E}(\alpha, \beta)$ peut s'écrire sous la forme :

$$\mathscr{E}(\alpha, \beta) =]\alpha, \beta[\cup]2\alpha, 2\beta[\cup \cdots \cup](N-1)\alpha, (N-1)\beta[\cup]N\alpha, +\infty[.$$

(d) Déterminer sans justifier l'ensemble $\Gamma(\alpha, \beta)$. Cet ensemble admet-il un plus petit élément ?

▶ D'après les résultats précédents, on a :

$$\boxed{\Gamma(\alpha, \beta) =]N\alpha, +\infty[}.$$

L'ensemble des minorants de $\Gamma(\alpha, \beta)$ est donc $]-\infty, N\alpha]$. Par conséquent, $\boxed{\Gamma(\alpha, \beta) \text{ n'a pas de plus petit élément}}$.

(e) Déterminer la borne inférieure de $\Gamma(\alpha, \beta)$.

▶ D'après le résultat de la question précédente, $\boxed{\sup \Gamma(\alpha, \beta) = N\alpha}$.

Exercice 3

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par

$$u_0 = -1, \quad u_1 = 4 \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 0,\ u_{n+2} = 4(u_{n+1} - u_n).$$

Montrer qu'il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_n = (an+b)c^n$.

▶ On raisonne par analyse-synthèse pour déterminer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

- <u>Analyse</u>. Si $u_n = (an+b)c^n$ pour tout entier $n \geqslant 0$, alors on a en particulier pour $n=0$:
$$-1 = u_0 = (a\times 0 + b)c^0 = b \quad \text{donc} \quad b=-1.$$
De même, on a pour $n=1$:
$$4 = u_1 = (a\times 1+b)c^1 = (a-1)c \quad \text{donc} \quad c = \frac{4}{a-1} \quad \left(\begin{array}{l}\text{car si } a-1=0 \text{ alors } 4=(a-1)c=0\\ \text{ce qui et absurde, donc } a-1\neq 0\end{array}\right).$$
De plus, on a pour $n=2$:
$$u_2 = 4(u_1-u_0) = 4(4-(-1)) = 20 \quad \text{et} \quad u_2 = (a\times 2+b)c^2 = (2a-1)c^2$$
$$\text{donc} \quad c^2 = \frac{20}{2a-1} \quad \left(\begin{array}{l}\text{car si } 2a-1=0 \text{ alors } 20=u_2=(2a-1)c^2=0\\ \text{ce qui et absurde, donc } 2a-1\neq 0\end{array}\right).$$
On en déduit que a doit vérifier l'équation suivante :
$$\begin{aligned}\frac{20}{2a-1} = c^2 = \left(\frac{4}{a-1}\right)^2 = \frac{16}{a^2-2a+1} &\iff 20(a^2-2a+1) = 16(2a-1)\\ &\iff 20a^2-72a+36=0\\ &\iff 5a^2-18a+9=0\end{aligned}$$

On peut également obtenir une équation (plus simple) vérifiée par c en remarquant que $4=(a-1)c$ entraîne $ac = 4+c$ puis $20=(2a-1)c^2 = 2(4+c)c-c^2$. On obtient alors $c^2+8c-20=0$ qui admet pour solutions $c=2$ ou $c=-10$.

On obtient une équation du second degré de discriminant $\Delta = (-18)^2 - 4\times 5\times 9 = 324-180 = 144 > 0$ qui admet pour solutions $a = (18+\sqrt{144})/(2\times 5) = (18+12)/10 = 3$ ou $a = 6/10 = 3/5$. On en déduit que $c = 4/(3-1) = 2$ ou $c = 4/(\frac{3}{5}-1) = -10$. Par conséquent $(a,b,c) = (3,-1,2)$ ou $(a,b,c) = (\frac{3}{5},-1,-10)$. Or :
$$u_3 = 4(u_2-u_1) = 4(20-4) = 64 \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{r}(3\times 3-1)2^3 = 64\\ (\frac{3}{5}\times 3-1)(-10)^3 = -800\end{array}\right..$$
On en déduit qu'il est nécessaire que (a,b,c) soit égal à $(3,-1,2)$ pour que $u_n = (an+b)c^n$ pour tout entier $n\geqslant 0$.
- <u>Synthèse</u>. On pose $\boxed{a=3,\ b=-1 \text{ et } c=2}$. Montrons par récurrence double que pour tout entier $n\geqslant 0$ on a $u_n = (an+b)c^n = (3n-1)2^n$.

  — *Initialisation*. On a :
$$(3\times 0-1)2^0 = -1 = u_0 \quad \text{et} \quad (3\times 1-1)2^1 = 4 = u_1$$
  donc la récurrence double est initialisée.

  — *Hérédité*. Soit un entier $n\geqslant 0$ fixé. On suppose que $u_n = (3n-1)2^n$ et $u_{n+1} = (3(n+1)-1)2^{n+1}$. Alors :
$$\begin{aligned}u_{n+2} &= 4(u_{n+1}-u_n) \quad \text{d'après la relation de récurrence de l'énoncé}\\ &= 4\Big((3(n+1)-1)2^{n+1} - (3n-1)2^n\Big) \quad \text{d'après les hypothèses de récurrence}\\ &= 4\Big((3n+2)2-(3n-1)\Big)\times 2^n\\ &= \Big(3n+5\Big)2^{n+2}\\ &= (3(n+2)-1)2^{n+2}.\end{aligned}$$
  Par conséquent, si $u_n = (3n-1)2^n$ et $u_{n+1} = (3(n+1)-1)2^{n+1}$ alors $u_{n+2} = (3(n+2)-1)2^{n+2}$ et cette implication est vraie pour tout entier $n\geqslant 0$.

— *Conclusion*. D'après le principe de récurrence double, on en déduit que

$$\boxed{\forall n \geqslant 0,\ u_n = (3n-1)2^n}.$$

Finalement, on a bien trouvé $\boxed{(a,b,c) = (3,-1,2)}$ tel que $u_n = (an+b)c^n$ pour tout entier $n \geqslant 0$.

DS n$^{\text{o}}$ 2 de mathématiques

durée : 3 heures

Exercice 1

Déterminer l'ensemble des solutions des deux inéquations et de l'équation suivantes d'inconnue $\theta \in \mathbb{R}$.

1. $6\cos(\theta) \geqslant 7 + 8\sin(\theta)$.
2. $\cos(\theta + \frac{\pi}{3}) \leqslant \sin(\theta + \frac{\pi}{7})$.
3. $\sin(2\theta) + \sin(4\theta) + \sin(6\theta) + \sin(8\theta) + \sin(10\theta) + \cdots + \sin(100\theta) = 0$.

Problème 1

Dans ce problème, on pose pour tout $z \in \mathbb{C}$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(z)_n = \underbrace{z \times (z-1) \times (z-2) \times \cdots \times (z-n+1)}_{n \text{ facteurs}} = \prod_{\ell=0}^{n-1} (z - \ell) \quad \text{(en particulier } (z)_0 = 1\text{).}$$

1. Soient $p \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$. Écrire $(p)_n$ à l'aide d'une disjonction de cas et de factorielles.
2. Pour les questions suivantes, on fixe $z \in \mathbb{C}$.
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer $(n-1-z)_n$ en fonction de $(z)_n$.
   (b) Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $m \leqslant n$. Écrire $(z)_n/(z)_m$ sous la forme $(w)_{n-m}$ où $w \in \mathbb{C}$.
   (c) Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^2$. Écrire $(z)_{m+n}$ sous la forme $(w)_m(w')_n$ où $(w, w') \in \mathbb{C}^2$.
   (d) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(2z)_{2n} = 2^{2n}(z)_n(z - \frac{1}{2})_n$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose l'assertion suivante :

$$\mathcal{P}(n) : «\forall (a,b) \in \mathbb{C}^2,\ (a+b)_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (a)_k (b)_{n-k}».$$

   (a) Vérifier que $\mathcal{P}(0)$, $\mathcal{P}(1)$ et $\mathcal{P}(2)$ sont vraies.
   (b) Vérifier que $\mathcal{P}(3)$ est vraie.
   (c) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall (a,b) \in \mathbb{C}^2, \quad (a+b)_{n+1} = a((a-1)+b)_n + b(a+(b-1))_n.$$

   (d) Pour cette question, on fixe $n \in \mathbb{N}$ et on suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. À l'aide du résultat précédent, montrer que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie (indication : on pourra poser $a' = a-1$ et $b' = b-1$).
   (e) Conclure. À quoi ressemble cette conclusion ?

Exercice 2

Dans chaque cas, exprimer le terme u_n en fonction de l'entier $n \geqslant 0$.

1. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite arithmético-géométrique telle que $u_0 = 0$, $u_1 = 24$ et $u_2 = 42$.
2. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite récurrente linéaire d'ordre deux telle que $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_2 = 1$ et $u_3 = -1$.

Problème 2

Ce problème propose d'étudier la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par la relation de récurrence :

$$\forall n \geqslant 0, \quad u_{n+1} = \arccos(u_n)$$

en fonction de la valeur de son premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note $\mathscr{D}_n$ l'ensemble des valeurs de u_0 telles que le terme u_n soit bien défini. Ainsi $\mathscr{D}_\infty = \bigcap_{n\geqslant 1} \mathscr{D}_n$ est l'ensemble des valeurs de u_0 telles que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ soit bien définie.

1. (a) Rappeler la définition de la fonction arccosinus et en déduire $\mathscr{D}_1$.
   (b) Montrer que $\mathscr{D}_2 = [\cos(1), 1]$.
   (c) Déterminer $\mathscr{D}_3$.
2. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $f^n = \underbrace{\arccos \circ \arccos \circ \cdots \circ \arccos}_{n \text{ fois}}$.
   (a) Prouver que $u_n = f^n(u_0)$ pour tout entier $n \geqslant 1$.
   Pour tout entier $n \geqslant 1$, $\mathscr{D}_n$ est donc l'ensemble des valeurs de u_0 telles que $f^{n-1}(u_0) \in [-1, 1]$.
   (b) En déduire la relation de récurrence suivante :
   $$\forall n \geqslant 1, \quad \mathscr{D}_{n+1} = \cos(\mathscr{D}_n) \quad \text{où} \quad \cos(\mathscr{D}_n) = \{\cos(x) \mid x \in \mathscr{D}_n\}.$$
   (c) Déterminer $\mathscr{D}_4$ et $\mathscr{D}_5$.
3. Pour la suite du problème, on définit la suite $(c_n)_{n\geqslant 0}$ par :
   $$c_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 0,\ c_{n+1} = \cos(c_n).$$
   (a) Prouver que $0 \leqslant c_{2k+1} \leqslant c_{2k+3} \leqslant c_{2k+2} \leqslant c_{2k} \leqslant 1$ pour tout entier $k \geqslant 0$.
   (b) Déduire des résultats précédents que
   $$\forall n \geqslant 2, \quad \mathscr{D}_n = \begin{cases} [c_{n-1}, c_{n-2}] & \text{si } n \text{ est pair} \\ [c_{n-2}, c_{n-1}] & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$
4. On considère les ensembles $\mathscr{A} = \{c_{2k} \mid k \geqslant 0\}$ et $\mathscr{B} = \{c_{2k+1} \mid k \geqslant 0\}$.
   (a) Justifier que $\mathscr{A}$ admet une borne inférieure et que $\mathscr{B}$ admet une borne supérieure.
   Pour la suite du problème, on note $a = \inf \mathscr{A}$ et $b = \sup \mathscr{B}$.
   (b) En considérant les ensembles $\cos(\mathscr{A})$ et $\cos(\mathscr{B})$, montrer que $b = \cos(a)$ et $a = \cos(b)$.
   (c) En déduire que $a - b = 2\sin(\frac{a-b}{2})\sin(\frac{a+b}{2})$.
   (d) Justifier que $0 \leqslant \sin(\frac{a+b}{2}) \leqslant \sin(1) < 1$.
   On rappelle que $|\sin(x)| \leqslant |x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   (e) En utilisant les résultats des deux questions précédentes, démontrer que $a = b$.
5. (a) Déterminer sans justifier l'ensemble $\mathscr{D}_\infty = \bigcap_{n\geqslant 1} \mathscr{D}_n$ à l'aide des résultats précédents.
   (b) Conclure que si la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est bien définie alors elle est constante égale à a.

Exercice 3

Simplifier les expressions suivantes en fonction de $n \in \mathbb{N}^\star$.

1. $\displaystyle\prod_{k=1}^{2n} \left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor$ en séparant les indices pairs et impairs.
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$ en inversant l'ordre de sommation.
3. $\displaystyle\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}} (j-i)$ et $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} (j-i)$.

Corrigé du DS n° 2 de mathématiques

Exercice 1

Déterminer l'ensemble des solutions des deux inéquations et de l'équation suivantes d'inconnue $\theta \in \mathbb{R}$.

1. $6\cos(\theta) \geqslant 7 + 8\sin(\theta)$.

▶ On a :

$$6\cos(\theta) \geqslant 7 + 8\sin(\theta) \iff 6\cos(\theta) - 8\sin(\theta) \geqslant 7.$$

On cherche le module et un argument du complexe $z = 6 - 8i$. On a :

$$|z| = \sqrt{6^2 + (-8)^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$$

$$\text{donc} \quad z = 10\left(\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i\right) = |z|\Big(\cos(\arg(z)) + i\sin(\arg(z))\Big).$$

Puisque $\sin(\arg(z)) = -\frac{4}{5} < 0$, on en déduit que $\varphi = -\arccos(\frac{3}{5})$ est un argument de z.

Aidez vous d'un schéma du cercle trigonométrique. L'équation $\cos(\arg(z)) = \frac{3}{5}$ admet pour solutions $\arg(z) \equiv \arccos(\frac{3}{5})[2\pi]$ ou $\arg(z) \equiv -\arccos(\frac{3}{5})[2\pi]$. Le signe de $\sin(\arg(z))$ permet d'éliminer les premières solutions.

Ainsi $6 - 8i = z = 10(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$ donc $6 = 10\cos(\varphi)$ et $-8 = 10\sin(\varphi)$. En reportant dans l'inéquation, on obtient :

$$\begin{aligned}
& 6\cos(\theta) \geqslant 7 + 8\sin(\theta) \\
\iff & 6\cos(\theta) - 8\sin(\theta) \geqslant 7 \\
\iff & 10\cos(\varphi)\cos(\theta) + 10\sin(\varphi)\sin(\theta) \geqslant 7 \\
\iff & \cos(\theta - \varphi) \geqslant \frac{7}{10} \\
\iff & \exists k \in \mathbb{Z},\ -\arccos\left(\frac{7}{10}\right) + 2k\pi \leqslant \theta - \varphi \leqslant \arccos\left(\frac{7}{10}\right) + 2k\pi \\
\iff & \exists k \in \mathbb{Z},\ \varphi - \arccos\left(\frac{7}{10}\right) + 2k\pi \leqslant \theta \leqslant \varphi + \arccos\left(\frac{7}{10}\right) + 2k\pi.
\end{aligned}$$

Aidez vous d'un schéma du cercle trigonométrique pour résoudre l'inéquation $\cos(\theta - \varphi) \geqslant \frac{7}{10}$. N'oubliez pas les congruences modulo 2π.

Finalement, l'ensemble des solutions est :

$$\boxed{\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[-\arccos\left(\frac{3}{5}\right) - \arccos\left(\frac{7}{10}\right) + 2k\pi, -\arccos\left(\frac{3}{5}\right) + \arccos\left(\frac{7}{10}\right) + 2k\pi\right]}.$$

2. $\cos(\theta + \frac{\pi}{3}) \leqslant \sin(\theta + \frac{\pi}{7})$.

▶ On a :

$$\begin{aligned}
& \cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) \leqslant \sin\left(\theta + \frac{\pi}{7}\right) \\
\iff & \sin\left(\theta + \frac{\pi}{7}\right) - \cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) \geqslant 0 \\
\iff & \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta - \frac{\pi}{7}\right) - \cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) \geqslant 0 \quad \text{car } \forall x \in \mathbb{R},\ \sin(x) = \cos(\tfrac{\pi}{2} - x) \\
\iff & \mathrm{Re}\left(e^{i(\frac{5\pi}{14} - \theta)} - e^{i(\theta + \frac{\pi}{3})}\right) \geqslant 0 \\
\iff & \mathrm{Re}\left(2i\sin\left(\frac{\frac{5\pi}{14} - \theta - \theta - \frac{\pi}{3}}{2}\right) e^{i(\frac{5\pi}{14} - \theta + \theta + \frac{\pi}{3})/2}\right) \geqslant 0 \quad \text{par factorisation par l'angle moitié}
\end{aligned}$$

$$\iff \mathrm{Re}\left(2i\sin\left(\frac{\pi}{84}-\theta\right)e^{i\frac{29\pi}{84}}\right)\geqslant 0$$
$$\iff \ -2\sin\left(\frac{\pi}{84}-\theta\right)\sin\left(\frac{29\pi}{84}\right)\geqslant 0$$
$$\iff \sin\left(\frac{\pi}{84}-\theta\right)\leqslant 0 \quad \text{car } -2\sin(\tfrac{29\pi}{84})<0 \text{ puisque } \tfrac{29\pi}{84}\in]0,\pi[$$
$$\iff \exists k\in\mathbb{Z},\ -\pi+2k\pi\leqslant \frac{\pi}{84}-\theta\leqslant 0+2k\pi$$
$$\iff \exists k\in\mathbb{Z},\ -\frac{85\pi}{84}+2k\pi\leqslant -\theta\leqslant -\frac{\pi}{84}+2k\pi$$
$$\iff \exists k\in\mathbb{Z},\ \frac{\pi}{84}-2k\pi\leqslant \theta\leqslant \frac{85\pi}{84}+2k\pi.$$

Aidez vous d'un schéma du cercle trigonométrique pour déterminer le signe de $\sin(\frac{29\pi}{84})$ et pour résoudre l'inéquation $\sin(\frac{\pi}{84}-\theta)\leqslant 0$. N'hésitez pas à poser et à détailler vos calculs de fractions pour gagner du temps (le calcul mental est chronophage !) et éviter les erreurs.

Finalement, l'ensemble des solutions est :

$$\boxed{\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left[\frac{\pi}{84}-2k\pi,\frac{85\pi}{84}+2k\pi\right]}.$$

3. $\sin(2\theta)+\sin(4\theta)+\sin(6\theta)+\sin(8\theta)+\sin(10\theta)+\cdots+\sin(100\theta)=0.$

▶ On a pour tout $\theta\in\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}&\sin(2\theta)+\sin(4\theta)+\sin(6\theta)+\cdots+\sin(100\theta)\\ =&\sum_{\substack{k=2\\k \text{ pair}}}^{100}\sin(k\theta)=\sum_{\ell=1}^{50}\sin(2\ell\theta)\quad \text{en posant } k=2\ell\\ =&\sum_{\ell=1}^{50}\mathrm{Im}\left(e^{i(2\ell\theta)}\right)=\mathrm{Im}\left(\sum_{\ell=1}^{50}\left(e^{i2\theta}\right)^{\ell}\right).\end{aligned}$$

On reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique de raison $e^{i2\theta}$.

<u>1^{er} cas</u> : $e^{i2\theta}=1 \iff 2\theta\equiv 0[2\pi] \iff \theta\equiv 0[\pi]$. Dans ce cas :

$$\sin(2\theta)+\sin(4\theta)+\sin(6\theta)+\cdots+\sin(100\theta)=\mathrm{Im}\left(\sum_{\ell=1}^{50}(1)^{\ell}\right)=\mathrm{Im}(50)=0.$$

Donc toutes les valeurs de θ congrues à 0 modulo π sont solutions de l'équation.

<u>2^e cas</u> : $e^{2i\theta}\neq 1 \iff \theta\not\equiv 0[\pi]$. Dans ce cas :

$$\begin{aligned}&\sin(2\theta)+\sin(4\theta)+\sin(6\theta)+\cdots+\sin(100\theta)\\ =&\mathrm{Im}\left(\sum_{\ell=1}^{50}\left(e^{i2\theta}\right)^{\ell}\right)=\mathrm{Im}\left(\left(e^{i2\theta}\right)^{1}\frac{1-\left(e^{i2\theta}\right)^{50}}{1-e^{i2\theta}}\right)=\mathrm{Im}\left(e^{i2\theta}\frac{e^{i0}-e^{i100\theta}}{e^{i0}-e^{i2\theta}}\right)\\ =&\mathrm{Im}\left(e^{i2\theta}\frac{2i\sin(-50\theta)e^{i50\theta}}{2i\sin(-\theta)e^{i\theta}}\right)\quad \text{par factorisations par l'angle moitié}\\ =&\mathrm{Im}\left(\frac{\sin(50\theta)}{\sin(\theta)}e^{i51\theta}\right)=\frac{\sin(50\theta)}{\sin(\theta)}\sin(51\theta).\end{aligned}$$

Attention à la formule de la somme des termes d'une suite géométrique lorsque le premier terme n'est pas égal à 1 !

On en déduit que dans ce cas :

$$\begin{aligned}
& \sin(2\theta)+\sin(4\theta)+\sin(6\theta)+\cdots+\sin(100\theta)=0 \\
\Longleftrightarrow\ & \frac{\sin(50\theta)}{\sin(\theta)}\sin(51\theta)=0 \\
\Longleftrightarrow\ & \sin(50\theta)=0 \quad \text{ou} \quad \sin(51\theta)=0 \\
\Longleftrightarrow\ & 50\theta\equiv 0[\pi] \quad \text{ou} \quad 51\theta\equiv 0[\pi] \\
\Longleftrightarrow\ & \theta\equiv 0\left[\frac{\pi}{50}\right] \quad \text{ou} \quad \theta\equiv 0\left[\frac{\pi}{51}\right].
\end{aligned}$$

<u>Conclusion</u> : l'ensemble des solutions est :

$$\boxed{\{0+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}\cup\left\{0+k\frac{\pi}{50} \mid k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{0+k\frac{\pi}{51} \mid k\in\mathbb{Z}\right\}}.$$

Problème 1

Dans ce problème, on pose pour tout $z\in\mathbb{C}$ et tout $n\in\mathbb{N}$:

$$(z)_n=\underbrace{z\times(z-1)\times(z-2)\times\cdots\times(z-n+1)}_{n\text{ facteurs}}=\prod_{\ell=0}^{n-1}(z-\ell) \quad \textit{(en particulier } (z)_0=1\textit{).}$$

1. *Soient $p\in\mathbb{N}$ et $n\in\mathbb{N}$. Écrire $(p)_n$ à l'aide d'une disjonction de cas et de factorielles.*

▶ <u>1^er^ cas</u> : $p\leqslant n-1$. Alors :

$$(p)_n=\prod_{\ell=0}^{n-1}(p-\ell)=\prod_{\ell=0}^{p-1}(p-\ell)\times\underbrace{(p-p)}_{=0}\times\prod_{\ell=p+1}^{n-1}(p-\ell)=0 \quad \text{par associativité.}$$

<u>2^e^ cas</u> : $p\geqslant n$. Alors :

$$\begin{aligned}
(p)_n=\prod_{\ell=0}^{n-1}(p-\ell) &= \prod_{k=p-n+1}^{p}k \quad \text{en inversant l'ordre du produit avec } k=p-\ell \\
&= \prod_{k=p-n+1}^{p}k\times\frac{\prod_{k=1}^{p-n}k}{\prod_{k=1}^{p-n}k}=\frac{\prod_{k=1}^{p}k}{\prod_{k=1}^{p-n}k} \quad \text{par associativité} \\
&= \frac{p!}{(p-n)!}.
\end{aligned}$$

N'hésitez pas à développer ces produits sans le symbole $\prod$ pour les comprendre.

Par conséquent :

$$\boxed{(p)_n=\begin{cases}0 & \text{si } p\leqslant n-1\\ \frac{p!}{(p-n)!} & \text{si } p\geqslant n\end{cases}}.$$

2. *Pour les questions suivantes, on fixe $z\in\mathbb{C}$.*

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer $(n-1-z)_n$ en fonction de $(z)_n$.

▶ On a :

$$\begin{aligned}(n-1-z)_n &= \prod_{\ell=0}^{n-1}(n-1-z-\ell) = \prod_{\ell=0}^{n-1}((n-1-\ell)-z)\\ &= \prod_{k=0}^{n-1}(k-z) \quad \text{en inversant l'ordre du produit avec } k=n-1-\ell\\ &= \prod_{k=0}^{n-1}\Big((-1)\times(z-k)\Big) = \prod_{k=0}^{n-1}(-1)\times\prod_{k=0}^{n-1}(z-k) \quad \text{par multiplicativité}\\ &= \boxed{(-1)^n(z)_n}.\end{aligned}$$

(b) Soit $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $m \leqslant n$. Écrire $(z)_n/(z)_m$ sous la forme $(w)_{n-m}$ où $w \in \mathbb{C}$.

▶ On a :

$$\begin{aligned}\frac{(z)_n}{(z)_m} &= \frac{\prod_{\ell=0}^{n-1}(z-\ell)}{\prod_{\ell=0}^{m-1}(z-\ell)} = \frac{\prod_{\ell=0}^{m-1}(z-\ell)\times\prod_{\ell=m}^{n-1}(z-\ell)}{\prod_{\ell=0}^{m-1}(z-\ell)} \quad \text{par associativité}\\ &= \prod_{\ell=m}^{n-1}(z-\ell) = \prod_{k=0}^{n-1-m}(z-(k+m)) \quad \text{en posant } k=\ell-m \iff \ell=k+m\\ &= \prod_{k=0}^{(n-m)-1}((z-m)-k) = \boxed{(z-m)_{n-m}}.\end{aligned}$$

(c) Soit $(m,n) \in \mathbb{N}^2$. Écrire $(z)_{m+n}$ sous la forme $(w)_m(w')_n$ où $(w,w') \in \mathbb{C}^2$.

▶ On a :

$$\begin{aligned}(z)_{m+n} &= \frac{(z)_m}{(z)_m}\times(z)_{m+n} = (z)_m\times\frac{(z)_{m+n}}{(z)_m}\\ &= (z)_m\times(z-m)_{(m+n)-m} \quad \text{d'après le résultat de la question précédente (car } m\leqslant m+n)\\ &= \boxed{(z)_m(z-m)_n}.\end{aligned}$$

Avec la même méthode, on obtient que $(z)_{m+n} = (z)_n(z-n)_m = (z-n)_m(z)_n$ ce qui est aussi une réponse possible. On peut également retrouver ces résultats à l'aide de l'associativité et d'un décalage d'indice comme à la question précédente mais cette méthode est plus longue.

(d) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(2z)_{2n} = 2^{2n}(z)_n(z-\frac{1}{2})_n$.

▶ On a :

$$\begin{aligned}(2z)_{2n} &= \prod_{\ell=0}^{2n-1}(2z-\ell) = \prod_{\substack{\ell=0\\ \ell \text{ pair}}}^{2n-1}(2z-\ell)\times\prod_{\substack{\ell=0\\ \ell \text{ impair}}}^{2n-1}(2z-\ell)\\ &= \underbrace{\prod_{k=0}^{n-1}(2z-2k)}_{\text{en posant } \ell=2k}\times\underbrace{\prod_{k=0}^{n-1}(2z-2k-1)}_{\text{en posant } \ell=2k+1} = \prod_{k=0}^{n-1}\Big(2\times(z-k)\Big)\times\prod_{k=0}^{n-1}\Big(2\times(z-k-\tfrac{1}{2})\Big)\\ &= \prod_{k=0}^{n-1}2\times\prod_{k=0}^{n-1}(z-k)\times\prod_{k=0}^{n-1}2\times\prod_{k=0}^{n-1}((z-\tfrac{1}{2})-k) \quad \text{par multiplicativité}\\ &= 2^n\times(z)_n\times 2^n\times(z-\tfrac{1}{2})_n = \boxed{2^{2n}(z)_n(z-\frac{1}{2})_n}.\end{aligned}$$

On peut également exploiter le résultat de la question précédente au début du calcul car : $(2z)_{2n} = (2z)_{n+n} = (2z)_n(2z-n)_n$ puis on utilise deux séparations des indices pairs et impairs mais cette méthode est plus longue.

3. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose l'assertion suivante :*

$$\mathcal{P}(n) : \text{«}\forall (a,b) \in \mathbb{C}^2,\ (a+b)_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (a)_k (b)_{n-k}\text{»}.$$

(a) *Vérifier que $\mathcal{P}(0)$, $\mathcal{P}(1)$ et $\mathcal{P}(2)$ sont vraies.*
▶ Soit $(a,b) \in \mathbb{C}^2$. On a :

$$(a+b)_0 = 1 \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} (a)_k (b)_{0-k} = \binom{0}{0} (a)_0 (b)_0 = 1 = (a+b)_0,$$

$$(a+b)_1 = a+b \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} (a)_k (b)_{1-k} = \binom{1}{0} (a)_0 (b)_1 + \binom{1}{1} (a)_1 (b)_0 = b+a = (a+b)_1,$$

$$(a+b)_2 = (a+b)(a+b-1) = a^2 + ab - a + ba + b^2 - b = a^2 + 2ab - a + b^2 - b$$

$$\begin{aligned} \text{et} \quad \sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k} (a)_k (b)_{2-k} &= \binom{2}{0} (a)_0 (b)_2 + \binom{2}{1} (a)_1 (b)_1 + \binom{2}{2} (a)_2 (b)_0 \\ &= b(b-1) + 2ab + a(a-1) = b^2 - b + 2ab + a^2 - a = (a+b)_2. \end{aligned}$$

Puisque ces égalités sont vraies pour tout $(a,b) \in \mathbb{C}^2$, on en déduit $\boxed{\mathcal{P}(0), \mathcal{P}(1) \text{ et } \mathcal{P}(2)}$.

(b) *Vérifier que $\mathcal{P}(3)$ est vraie.*
▶ Soit $(a,b) \in \mathbb{C}^2$. On a :

$$\begin{aligned} (a+b)_3 &= \underbrace{(a+b)(a+b-1)}_{=(a+b)_2}(a+b-2) \\ &= (a^2 + 2ab - a + b^2 - b)(a+b-2) \quad \text{en reprenant le calcul de la question précédente} \\ &= a^3 + a^2b - 2a^2 + 2a^2b + 2ab^2 - 4ab - a^2 - ab + 2a + b^2a + b^3 - 2b^2 - ba - b^2 + 2b \\ &= a^3 + 3a^2b - 3a^2 + 3ab^2 - 6ab + 2a + b^3 - 3b^2 + 2b \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} (a)_k (b)_{3-k} &= \binom{3}{0} (a)_0 (b)_3 + \binom{3}{1} (a)_1 (b)_2 + \binom{3}{2} (a)_2 (b)_1 + \binom{3}{3} (a)_3 (b)_0 \\ &= b(b-1)(b-2) + 3ab(b-1) + 3a(a-1)b + a(a-1)(a-2) \\ &= b^3 - 3b^2 + 2b + 3ab^2 - 3ab + 3a^2b - 3ab + a^3 - 3a^2 + 2a \\ &= (a+b)_3. \end{aligned}$$

Ne perdez pas de temps à développer $b(b-1)(b-2)$ et $a(a-1)(a-2)$: il suffit d'exploiter le résultat du développement de $(a+b)_3$ pour $a = 0$ ou $b = 0$.

Puisque cette égalité est vraie pour tout $(a,b) \in \mathbb{C}^2$, on en déduit $\boxed{\mathcal{P}(3)}$.

(c) *Montrer que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall (a,b) \in \mathbb{C}^2, \quad (a+b)_{n+1} = a((a-1)+b)_n + b(a+(b-1))_n.$$

▶ Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(a,b) \in \mathbb{C}^2$. On a :

$$\begin{aligned}
(a+b)_{n+1} &= \prod_{\ell=0}^{n+1-1}(a+b-\ell) = \prod_{\ell=1}^{n}(a+b-\ell) \times (a+b) \quad \text{par associativité} \\
&= \prod_{k=0}^{n-1}(a+b-(k+1)) \times (a+b) \quad \text{en posant } k=\ell-1 \iff \ell=k+1 \\
&= \prod_{k=0}^{n-1}(a+b-1-k) \times (a+b) = (a+b-1)_n(a+b) \\
&= a(a+b-1)_n + b(a+b-1)_n \quad \text{par distributivité} \\
&= \boxed{a((a-1)+b)_n + b(a+(b-1))_n}.
\end{aligned}$$

(d) Pour cette question, on fixe $n \in \mathbb{N}$ et on suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. À l'aide du résultat précédent, montrer que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie (indication : on pourra poser $a' = a-1$ et $b' = b-1$).

▶ Soit $(a,b) \in \mathbb{C}^2$. On a d'après le résultat de la question précédente :

$$(a+b)_{n+1} = a(a'+b)_n + b(a+b')_n \quad \text{en posant } a' = a-1 \text{ et } b' = b-1.$$

Puisque $\mathcal{P}(n)$ est vraie, on en déduit que :

$$\begin{aligned}
(a+b)_{n+1} &= a\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(a')_k(b)_{n-k} + b\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(a)_k(b')_{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a(a-1)_k(b)_{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(a)_k b(b-1)_{n-k}.
\end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned}
a(a-1)_k &= a\prod_{\ell=0}^{k-1}(a-1-\ell) = (a-(1+(-1)))\prod_{\ell=0}^{k-1}(a-(1+\ell)) = \prod_{\ell=-1}^{k-1}(a-(1+\ell)) \\
&= \prod_{\ell'=0}^{k}(a-\ell') \quad \text{en posant } \ell' = \ell+1 \\
&= \prod_{\ell'=0}^{k+1-1}(a-\ell') = (a)_{k+1}
\end{aligned}$$

et en utilisant le même calcul :

$$b(b-1)_{n-k} = (b)_{n-k+1}.$$

Ne perdez pas du temps en calculs inutiles. Exploitez tous vos calculs précédents pour ne pas refaire les mêmes calculs plusieurs fois.

En reportant ces résultats dans les sommes précédentes, on obtient :

$$\begin{aligned}
(a+b)_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(a)_{k+1}(b)_{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(a)_k(b)_{n-k+1} \\
&= \underbrace{\sum_{k'=1}^{n+1}\binom{n}{k'-1}(a)_{k'}(b)_{n-(k'-1)}}_{\text{en posant } k'=k+1 \iff k=k'-1} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(a)_k(b)_{n-k+1}
\end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k-1} (a)_k (b)_{n-k+1} - \underbrace{\binom{n}{-1}}_{=0} (a)_0 (b)_{n+1}$$

$$+ \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} (a)_k (b)_{n-k+1} - \underbrace{\binom{n}{n+1}}_{=0} (a)_{n+1} (b)_0$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \underbrace{\left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right)}_{\substack{=\binom{n+1}{k} \\ \text{d'après la formule de Pascal}}} (a)_k (b)_{n-k+1} \quad \text{par linéarité}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (a)_k (b)_{n-k}.$$

Puisque cette égalité est vraie pour tout $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, on en déduit $\boxed{\mathcal{P}(n+1)}$.

(e) Conclure. À quoi ressemble cette conclusion ?

▶ On a montré $\mathcal{P}(0)$ à la question 3(a) et «$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n) \Longrightarrow \mathcal{P}(n+1)$» à la question précédente. D'après le principe de récurrence, on en déduit que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall (a, b) \in \mathbb{C}^2, \quad (a + b)_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (a)_k (b)_{n-k}}.$$

Cette conclusion ressemble à la formule du binôme de Newton :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall (a, b) \in \mathbb{C}^2, \quad (a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}}.$$

Exercice 2

Dans chaque cas, exprimer le terme u_n en fonction de l'entier $n \geqslant 0$.

1. *Soit $(u_n)_{n \geqslant 0}$ la suite arithmético-géométrique telle que $u_0 = 0$, $u_1 = 24$ et $u_2 = 42$.*

▶ La suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ vérifie une relation de récurrence du type :

$$\forall n \geqslant 0, \quad u_{n+1} = q u_n + r$$

où $(q, r) \in \mathbb{R}^2$. D'après les données de l'énoncé, on a pour $n = 0$ et $n = 1$:

$$24 = u_1 = q u_0 + r = r \quad \text{donc} \quad \boxed{r = 24}$$

$$\text{et} \quad 42 = u_2 = q u_1 + r = q 24 + 24 \quad \text{donc} \quad \boxed{q = \frac{42 - 24}{24} = \frac{3}{4}}.$$

Donc $(u_n)_{n \geqslant 0}$ vérifie la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \geqslant 0, \quad \boxed{u_{n+1} = \frac{3}{4} u_n + 24}.$$

On cherche $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\alpha = \frac{3}{4}\alpha + 24 \iff \alpha - \frac{3}{4}\alpha = 24 \iff \frac{1}{4}\alpha = 24 \iff \boxed{\alpha = 96}.$$

Alors on remarque que la suite $(u_n - \alpha)_{n\geqslant 0}$ est géométrique de raison $\frac{3}{4}$ car :

$$\forall n \geqslant 0, \quad u_{n+1} - \alpha = \left(\frac{3}{4}u_n + 24\right) - \left(\frac{3}{4}\alpha + 24\right) = \frac{3}{4}\left(u_n - \alpha\right).$$

On en déduit que :

$$\forall n \geqslant 0, \quad u_n - \alpha = \left(\frac{3}{4}\right)^n \left(u_0 - \alpha\right).$$

En reportant les valeurs de $u_0 = 0$ et $\alpha = 96$, on obtient :

$$\forall n \geqslant 0, \quad \boxed{u_n = 96\left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right)}.$$

2. *Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite récurrente linéaire d'ordre deux telle que $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_2 = 1$ et $u_3 = -1$.*

▶ La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie une relation de récurrence du type :

$$\forall n \geqslant 0, \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. D'après les données de l'énoncé, on a pour $n = 0$ et $n = 1$:

$$\begin{aligned} 1 = u_2 = au_1 + bu_0 = a \quad &\text{donc} \quad \boxed{a = 1} \\ \text{et} \quad -1 = u_3 = au_2 + bu_1 = 1 + b \quad &\text{donc} \quad \boxed{b = -2}. \end{aligned}$$

Donc $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \geqslant 0, \quad \boxed{u_{n+2} = u_{n+1} - 2u_n}.$$

On résout l'équation caractéristique suivante d'inconnue $q \in \mathbb{C}$:

$$q^2 = q - 2 \iff q^2 - q + 2 = 0.$$

On reconnaît une équation du second degré de discriminant $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 2 = -7 < 0$ donc elle admet deux solutions complexes conjuguées : $q_1 = \frac{1+i\sqrt{7}}{2}$ et $q_2 = \frac{1-i\sqrt{7}}{2}$. On cherche à écrire ces deux solutions sous la forme exponentielle $q_1 = \rho e^{i\theta}$ et $q_2 = \rho e^{-i\theta}$ où $\rho = |q_1|$ et $\theta \equiv \arg(q_1)[2\pi]$. On a :

$$\boxed{\rho = |q_1| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2} = \sqrt{2}}$$

$$\text{donc} \quad q_1 = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{14}}{4}\right) = \rho\Big(\cos(\arg(q_1)) + i\sin(\arg(q_1))\Big).$$

Puisque $\sin(\arg(q_1)) = \frac{\sqrt{14}}{4} > 0$, on en déduit que $\boxed{\theta = \arccos(\frac{\sqrt{2}}{4})}$ est un argument de q_1.

N'oubliez pas de préciser que $\sin(\arg(q_1)) > 0$ pour justifier que $-\arccos(\frac{\sqrt{2}}{4})$ n'est pas un argument de q_1 au contraire de $\arccos(\frac{\sqrt{2}}{4})$.

On sait qu'il existe deux constantes $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ telles que :

$$\forall n \geqslant 0, \quad u_n = \Big(A\cos(n\theta) + B\sin(n\theta)\Big)\rho^n.$$

D'après les données de l'énoncé, on a pour $n = 0$ et $n = 1$:

$$0 = u_0 = \Big(A\cos(0) + B\sin(0)\Big)\rho^0 = A \quad \text{donc} \quad \boxed{A = 0}$$
$$\text{et} \quad 1 = u_1 = \Big(A\cos(\theta) + B\sin(\theta)\Big)\rho^1 = B\rho\sin(\theta) \quad \text{donc} \quad \boxed{B = \frac{1}{\rho\sin(\theta)}}.$$

Or $\rho\sin(\theta) = \mathrm{Im}(\rho e^{i\theta}) = \mathrm{Im}(q_1) = \frac{\sqrt{7}}{2}$ donc $\boxed{B = \frac{2}{\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{7}}{7}}$. Finalement, on obtient :

$$\forall n \geqslant 0, \quad \boxed{u_n = \frac{2\sqrt{7}}{7}\sin\left(n\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\right)\left(\sqrt{2}\right)^n}.$$

Problème 2

Ce problème propose d'étudier la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par la relation de récurrence :

$$\forall n \geqslant 0, \quad u_{n+1} = \arccos(u_n)$$

en fonction de la valeur de son premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note $\mathscr{D}_n$ l'ensemble des valeurs de u_0 telles que le terme u_n soit bien défini. Ainsi $\mathscr{D}_\infty = \bigcap_{n\geqslant 1}\mathscr{D}_n$ est l'ensemble des valeurs de u_0 telles que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ soit bien définie.

1. (a) *Rappeler la définition de la fonction arccosinus et en déduire $\mathscr{D}_1$.*

   ▶ $\boxed{\text{Pour tout } x \in [-1,1], \arccos(x) \text{ est l'unique angle } \theta \in [0,\pi] \text{ tel que } \cos(\theta) = x}$. En particulier, $u_1 = \arccos(u_0)$ est bien défini si et seulement si $u_0 \in [-1,1]$. On en déduit que :

   $$\boxed{\mathscr{D}_1 = [-1,1]}.$$

   (b) *Montrer que $\mathscr{D}_2 = [\cos(1), 1]$.*

   ▶ $u_2 = \arccos(u_1)$ et bien défini si seulement si $u_1 \in [-1,1]$. Or $u_1 = \arccos(u_0)$ et on a d'après la définition de la fonction arccosinus :

   $$\arccos(u_0) \in [-1,1] \iff \arccos(u_0) \in [0,1] \iff u_0 \in [\cos(1), 1].$$

   Aidez vous d'un schéma du cercle trigonométrique pour comprendre et résoudre ces inéquations.

   On en déduit que :

   $$\boxed{\mathscr{D}_2 = [\cos(1), 1]}.$$

   (c) *Déterminer $\mathscr{D}_3$.*

   ▶ $u_3 = \arccos(u_2)$ est bien défini si et seulement si $u_2 \in [-1,1]$. Or $u_2 = \arccos(u_1)$ donc u_3 est bien défini si et seulement si $u_1 \in [\cos(1), 1]$ (en utilisant le même raisonnement que celui de la question précédente). De plus $u_1 = \arccos(0)$ et on a d'après la définition de la fonction arccosinus :

   $$\arccos(u_0) \in [\cos(1), 1] \iff u_0 \in [\cos(1), \cos(\cos(1))].$$

   On en déduit que :

   $$\boxed{\mathscr{D}_3 = [\cos(1), \cos(\cos(1))]}.$$

2. *Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $f^n = \underbrace{\arccos \circ \arccos \circ \cdots \circ \arccos}_{n \text{ fois}}$.*

(a) *Prouver que $u_n = f^n(u_0)$ pour tout entier $n \geqslant 1$.*

▶ On raisonne par récurrence.

Initialisation. On a $u_1 = \arccos(u_0)$ par définition de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et

$$f^1(u_0) = \Big(\underbrace{\arccos}_{1\text{ fois}}\Big)(u_0) = \arccos(u_0) = u_1.$$

Donc l'égalité est vraie pour $n = 1$.

Hérédité. On fixe un entier $n \geqslant 1$ et on suppose que $u_n = f^n(u_0)$. Alors on a :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= \arccos(u_n) \quad \text{d'après la relation de récurrence de la suite } (u_n)_{n\geqslant 0} \\
&= \arccos\big(f^n(u_0)\big) \quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\
&= \arccos\Big(\underbrace{(\arccos\circ\arccos\circ\cdots\circ\arccos)}_{n\text{ fois}}(u_0)\Big) \quad \text{par définition de } f^n \\
&= \arccos\Big(\underbrace{\arccos(\arccos(\dots(\arccos}_{n\text{ fois}}(u_0))\dots))\Big) \quad \text{par définition de la composition} \\
&= \underbrace{\arccos(\arccos(\arccos(\dots(\arccos}_{n+1\text{ fois}}(u_0))\dots))) \\
&= \underbrace{(\arccos\circ\arccos\circ\arccos\circ\cdots\circ\arccos)}_{n+1\text{ fois}}(u_0) \quad \text{par définition de la composition} \\
&= f^{n+1}(u_0) \quad \text{par définition de } f^{n+1}.
\end{aligned}$$

Donc si $u_n = f^n(u_0)$ alors $u_{n+1} = f^{n+1}(u_0)$ et cette implication est vraie pour tout entier $n \geqslant 1$.

Conclusion. D'après le principe de récurrence, on en déduit que :

$$\forall n \geqslant 1, \quad \boxed{u_n = f^n(u_0)}.$$

Pour tout entier $n \geqslant 1$, $\mathscr{D}_n$ est donc l'ensemble des valeurs de u_0 telles que $f^{n-1}(u_0) \in [-1,1]$.

(b) *En déduire la relation de récurrence suivante :*

$$\forall n \geqslant 1, \quad \mathscr{D}_{n+1} = \cos(\mathscr{D}_n) \quad \text{où} \quad \cos(\mathscr{D}_n) = \{\cos(x) \mid x \in \mathscr{D}_n\}.$$

▶ Soit $n \geqslant 1$. On raisonne par double inclusion.

1re inclusion. Montrons que $\mathscr{D}_{n+1} \subset \cos(\mathscr{D}_n)$. Soit $u_0 \in \mathscr{D}_{n+1}$. Montrons que $u_0 \in \cos(\mathscr{D}_n)$. On cherche donc $x \in \mathscr{D}_n$ tel que $u_0 = \cos(x)$.

Analyse. On a :

$$u_0 = \cos(x) \iff \Big(x \equiv \arccos(u_0)[2\pi] \quad \text{ou} \quad x \equiv -\arccos(u_0)[2\pi]\Big).$$

Synthèse. On pose $x = \arccos(u_0)$. Donc $\cos(x) = u_0$ par définition de la fonction arccosinus. Il reste à montrer que $x \in \mathscr{D}_n$, c'est-à-dire que $f^{n-1}(x) \in [-1,1]$ d'après le résultat de la question précédente. Or on sait que $u_0 \in \mathscr{D}_{n+1}$, donc que $f^{n+1-1}(u_0) = f^n(u_0) \in [-1,1]$. Par conséquent :

$$\begin{aligned}
f^{n-1}(x) &= f^{n-1}(\arccos(u_0)) \\
&= \underbrace{(\arccos \circ \cdots \circ \arccos)}_{n-1 \text{ fois}} \Big(\arccos(u_0)\Big) \quad \text{par définition de } f^{n-1} \\
&= \underbrace{\arccos(\ldots(\arccos}_{n-1 \text{ fois}} \Big(\arccos(u_0)\Big))\ldots) \quad \text{par définition de la composition} \\
&= \underbrace{\arccos(\ldots(\arccos(\arccos}_{n \text{ fois}}(u_0)))\ldots) \\
&= \underbrace{(\arccos \circ \cdots \circ \arccos \circ \arccos)}_{n \text{ fois}}(u_0) \quad \text{par définition de la composition} \\
&= f^n(u_0) \in [-1,1] \quad \text{par définition de } f^n \text{ et car } u_0 \in \mathscr{D}_{n+1}.
\end{aligned}$$

Ainsi, on a bien trouvé $x \in \mathscr{D}_n$ tel que $u_0 = \cos(x)$. Donc $u_0 \in \cos(\mathscr{D}_n)$ et ceci est vrai pour tout $u_0 \in \mathscr{D}_{n+1}$. On en déduit que $\mathscr{D}_{n+1} \subset \cos(\mathscr{D}_n)$.
<u>2e inclusion</u>. Montrons que $\cos(\mathscr{D}_n) \subset \mathscr{D}_{n+1}$. Soit $u_0 \in \cos(\mathscr{D}_n)$ donc il existe $x \in \mathscr{D}_n$ tel que $u_0 = \cos(x)$. Montrons que $u_0 \in \mathscr{D}_{n+1}$, c'est-à-dire que $f^n(u_0) \in [-1,1]$ d'après le résultat de la question précédente. On a :

$$\begin{aligned}
f^n(u_0) &= f^n(\cos(x)) \\
&= \underbrace{(\arccos \circ \cdots \circ \arccos \circ \arccos)}_{n \text{ fois}} \Big(\cos(x)\Big) \quad \text{par définition de } f^n \\
&= \underbrace{\arccos(\ldots(\arccos(\arccos}_{n \text{ fois}} \Big(\cos(x)\Big)))\ldots) \quad \text{par définition de la composition} \\
&= \underbrace{\arccos(\ldots(\arccos}_{n-1 \text{ fois}} \Big(\arccos(\cos(x))\Big))\ldots) \\
&= \underbrace{\arccos(\ldots(\arccos}_{n-1 \text{ fois}} \Big(x\Big))\ldots) \quad \text{par définition de la fonction arccosinus} \\
&= \underbrace{(\arccos \circ \cdots \circ \arccos)}_{n-1 \text{ fois}}(x) \quad \text{par définition de la composition} \\
&= f^{n-1}(x) \in [-1,1] \quad \text{par définition de } f^{n-1} \text{ et car } x \in \mathscr{D}_n.
\end{aligned}$$

Donc $u_0 \in \mathscr{D}_{n+1}$ et ceci est vrai pour tout $u_0 \in \cos(\mathscr{D}_n)$. On en déduit que $\cos(\mathscr{D}_n) \subset \mathscr{D}_{n+1}$.
<u>Conclusion</u>. Par double inclusion, on a bien montré que :

$$\forall n \geqslant 1, \quad \boxed{\mathscr{D}_{n+1} = \cos(\mathscr{D}_n)}.$$

La rédaction est longue et laborieuse mais la question n'est pas si difficile si on se laisse guider par les méthodes de démonstration (démontrer une égalité d'ensembles, démontrer une inclusion, démontrer une proposition commençant par ∀, démontrer une implication, démontrer une proposition commençant par ∃, etc.).

(c) *Déterminer $\mathscr{D}_4$ et $\mathscr{D}_5$.*

► D'après les résultats précédents, on a $\mathscr{D}_4 = \cos(\mathscr{D}_3) = \cos([\cos(1), \cos(\cos(1))])$. Or la fonction cosinus est décroissante sur $[\cos(1), \cos(\cos(1))] \subset [0,1] \subset [0,\pi]$ donc :

$$\boxed{\mathscr{D}_4 = \Big[\cos(\cos(\cos(1))), \cos(\cos(1))\Big]}.$$

Aidez vous d'un schéma de la courbe représentative de cosinus.

De même, on obtient :

$$\boxed{\mathscr{D}_5 = \cos(\mathscr{D}_4) = \Big[\cos(\cos(\cos(1))), \cos(\cos(\cos(\cos(1))))\Big]}.$$

3. Pour la suite du problème, on définit la suite $(c_n)_{n \geqslant 0}$ par :

$$c_0 = 1 \quad \textit{et} \quad \forall n \geqslant 0,\ c_{n+1} = \cos(c_n).$$

(a) Prouver que $0 \leqslant c_{2k+1} \leqslant c_{2k+3} \leqslant c_{2k+2} \leqslant c_{2k} \leqslant 1$ pour tout entier $k \geqslant 0$.

▶ On raisonne par récurrence.

Initialisation. On a $0 \leqslant \cos(1) \leqslant 1$ car $1 \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Donc $0 \leqslant c_1 \leqslant c_0$. Puisque la fonction cosinus est décroissante sur $[0, 1] \subset [0, \pi]$, on en déduit que :

$$\cos(0) \geqslant \cos(c_1) \geqslant \cos(c_0) \quad \text{donc} \quad c_0 \geqslant c_2 \geqslant c_1.$$

De même, on a :

$$\cos(c_0) \leqslant \cos(c_2) \leqslant \cos(c_1) \quad \text{donc} \quad c_1 \leqslant c_3 \leqslant c_2.$$

Finalement, on a $0 \leqslant c_1 \leqslant c_3 \leqslant c_2 \leqslant c_0 = 1$ donc les inégalités sont vraies pour $k = 0$.

Hérédité. On suppose que $0 \leqslant c_{2k+1} \leqslant c_{2k+3} \leqslant c_{2k+2} \leqslant c_{2k} \leqslant 1$ pour un entier $k \geqslant 0$ fixé. Puisque la fonction cosinus est décroissante sur $[0, 1] \subset [0, \pi]$, on a :

$$\cos(0) \geqslant \cos(c_{2k+1}) \geqslant \cos(c_{2k+3}) \geqslant \cos(c_{2k+2}) \geqslant \cos(c_{2k}) \geqslant \cos(1)$$

$$\text{donc} \quad 1 \geqslant c_{2k+2} \geqslant c_{2k+4} \geqslant c_{2k+3} \geqslant c_{2k+1} \geqslant \cos(1) \geqslant 0.$$

De même, on a :

$$\cos(1) \leqslant \cos(c_{2k+2}) \leqslant \cos(c_{2k+4}) \leqslant \cos(c_{2k+3}) \leqslant \cos(c_{2k+1}) \leqslant \cos(\cos(1)) \leqslant \cos(0)$$

$$\text{donc} \quad 0 \leqslant \cos(1) \leqslant c_{2k+3} \leqslant c_{2k+5} \leqslant c_{2k+4} \leqslant c_{2k+2} \leqslant \cos(\cos(1)) \leqslant 1.$$

Par conséquent, on a montré que :

$$\Big(0 \leqslant c_{2k+1} \leqslant c_{2k+3} \leqslant c_{2k+2} \leqslant c_{2k} \leqslant 1\Big) \Longrightarrow \Big(0 \leqslant c_{2(k+1)+1} \leqslant c_{2(k+1)+3} \leqslant c_{2(k+1)+2} \leqslant c_{2(k+1)} \leqslant 1\Big)$$

et cette implication est vraie pour tout entier $k \geqslant 0$.

Conclusion. D'après le principe de récurrence, on en déduit que :

$$\forall k \geqslant 0, \quad \boxed{0 \leqslant c_{2k+1} \leqslant c_{2k+3} \leqslant c_{2k+2} \leqslant c_{2k} \leqslant 1}.$$

(b) Déduire des résultats précédents que

$$\forall n \geqslant 2, \quad \mathscr{D}_n = \begin{cases} [c_{n-1}, c_{n-2}] & \textit{si } n \textit{ est pair} \\ [c_{n-2}, c_{n-1}] & \textit{si } n \textit{ est impair.} \end{cases}$$

▶ On raisonne par récurrence.

Initialisation. D'après le résultat de la question 1(b), on a $\mathscr{D}_2 = [\cos(1), 1] = [c_1, c_0]$ donc le résultat est vrai pour $n = 2$ car 2 est pair.

Hérédité. On suppose que le résultat est vrai pour un entier $n \geqslant 2$ fixé. Montrons que le résultat est vrai pour $n + 1$. On raisonne par disjonction de cas.

1er cas : $n+1$ est pair. Alors il existe un entier $\ell \geqslant 2$ tel que $n+1=2\ell$. Donc $n=2\ell-1$ est impair. D'après l'hypothèse de récurrence, on en déduit que :

$$\mathscr{D}_n=[c_{n-2},c_{n-1}]=[c_{2\ell-3},c_{2\ell-2}]=[c_{2(\ell-2)+1},c_{2(\ell-2)+2}]=[c_{2k+1},c_{2k+2}] \quad \text{en posant } k=\ell-2\geqslant 0.$$

Or $0\leqslant c_{2k+1}\leqslant c_{2k+2}\leqslant 1$ d'après le résultat de la question précédente et la fonction cosinus est décroissante sur $[c_{2k+1},c_{2k+2}]\subset[0,1]\subset[0,\pi]$. On en déduit d'après le résultat de la question 2(b) que :

$$\begin{aligned}\mathscr{D}_{n+1}&=\cos(\mathscr{D}_n)=\cos([c_{2k+1},c_{2k+2}])=[\cos(c_{2k+2}),\cos(c_{2k+1})]=[c_{2k+3},c_{2k+2}]\\&=[c_{2(\ell-2)+3},c_{2(\ell-2)+2}]=[c_{2\ell-1},c_{2\ell-2}]=[c_n,c_{n-1}]=[c_{(n+1)-1},c_{(n+1)-2}].\end{aligned}$$

2e cas : $n+1$ est impair. Alors il existe un entier $\ell\geqslant 1$ tel que $n+1=2\ell+1$. Donc $n=2\ell$ est pair. D'après l'hypothèse de récurrence, on en déduit que :

$$\mathscr{D}_n=[c_{n-1},c_{n-2}]=[c_{2\ell-1},c_{2\ell-2}]=[c_{2(\ell-1)+1},c_{2(\ell-1)}]=[c_{2k+1},c_{2k}] \quad \text{en posant } k=\ell-1\geqslant 0.$$

Or $0\leqslant c_{2k+1}\leqslant c_{2k}\leqslant 1$ d'après le résultat de la question précédente et la fonction cosinus est décroissante sur $[c_{2k+1},c_{2k}]\subset[0,1]\subset[0,\pi]$. On en déduit d'après le résultat de la question 2(b) que :

$$\begin{aligned}\mathscr{D}_{n+1}&=\cos(\mathscr{D}_n)=\cos([c_{2k+1},c_{2k}])=[\cos(c_{2k}),\cos(c_{2k+1})]=[c_{2k+1},c_{2k+2}]\\&=[c_{2(\ell-1)+1},c_{2(\ell-1)+2}]=[c_{2\ell-1},c_{2\ell}]=[c_{n-1},c_n]=[c_{(n+1)-2},c_{(n+1)-1}].\end{aligned}$$

Conclusion de la disjonction de cas. Par conséquent, on a montré que :

$$\left(\mathscr{D}_n=\begin{cases}[c_{n-1},c_{n-2}] \text{ si } n \text{ est pair}\\ [c_{n-2},c_{n-1}] \text{ si } n \text{ est impair}\end{cases}\right)\Longrightarrow\left(\mathscr{D}_{n+1}=\begin{cases}[c_{(n+1)-1},c_{(n+1)-2}] \text{ si } n+1 \text{ est pair}\\ [c_{(n+1)-2},c_{(n+1)-1}] \text{ si } n+1 \text{ est impair}\end{cases}\right)$$

et cette implication est vraie pour tout entier $n\geqslant 2$.
Conclusion de la récurrence. D'après le principe de récurrence, on en déduit que le résultat est vrai pour tout entier $n\geqslant 2$, c'est-à-dire :

$$\forall n\geqslant 2,\quad \boxed{\mathscr{D}_n=\begin{cases}[c_{n-1},c_{n-2}] \text{ si } n \text{ est pair}\\ [c_{n-2},c_{n-1}] \text{ si } n \text{ est impair}\end{cases}}.$$

4. *On considère les ensembles $\mathscr{A}=\{c_{2k}\mid k\geqslant 0\}$ et $\mathscr{B}=\{c_{2k+1}\mid k\geqslant 0\}$.*

(a) *Justifier que $\mathscr{A}$ admet une borne inférieure et que $\mathscr{B}$ admet une borne supérieure.*

► L'ensemble $\mathscr{A}$ est une partie de $\mathbb{R}$ qui est :

— non vide (par exemple $1=c_0\in\mathscr{A}$)

— et minorée (par 0 car $c_{2k}\geqslant 0$ pour tout $k\geqslant 0$ d'après le résultat de la question 3(a)).

On en déduit que $\boxed{\mathscr{A} \text{ admet une borne inférieure}}$.
De même, l'ensemble $\mathscr{B}$ est une partie de $\mathbb{R}$ qui est :

— non vide (par exemple $\cos(1)=c_1\in\mathscr{B}$)

— et majorée (par 1 car $c_{2k+1}\leqslant 1$ pour tout $k\geqslant 0$ d'après le résultat de la question 3(a)).

On en déduit que $\boxed{\mathscr{B} \text{ admet une borne supérieure}}$.

Pour la suite du problème, on note $a=\inf\mathscr{A}$ et $b=\sup\mathscr{B}$.

(b) *En considérant les ensembles $\cos(\mathscr{A})$ et $\cos(\mathscr{B})$, montrer que $b=\cos(a)$ et $a=\cos(b)$.*

► On a :

$$\cos(\mathscr{A})=\{\cos(x)\mid x\in\mathscr{A}\}=\{\cos(c_{2k})\mid k\geqslant 0\}=\{c_{2k+1}\mid k\geqslant 0\}=\mathscr{B}.$$

Par définition de la borne inférieure, a est le plus grand des minorants de $\mathscr{A}$. Or $\mathscr{A} \subset [0,1]$ (d'après le résultat de la question 3(a)) et la fonction cosinus est décroissante sur $[0,1] \subset [0,\pi]$. Donc $\cos(a)$ est le plus petit des majorants de $\cos(\mathscr{A})$. Par définition de la borne supérieure, on en déduit que :

$$\boxed{\cos(a) = \sup\left(\cos(\mathscr{A})\right) = \sup\left(\mathscr{B}\right) = b}.$$

De même, on a :

$$\cos(\mathscr{B}) = \{\cos(x) \mid x \in \mathscr{B}\} = \{\cos(c_{2k+1}) \mid k \geqslant 0\} = \{c_{2k+2} \mid k \geqslant 0\} = \mathscr{A} \setminus \{c_0\}.$$

N'allez pas trop vite dans vos raisonnements : parfois tout ne se passe pas aussi bien que prévu. Il faut faire attention aux détails.

Par définition de la borne supérieure, b est le plus petit des majorants de $\mathscr{B}$. Or $\mathscr{B} \subset [0,1]$ (d'après le résultat de la question 3(a)) et la fonction cosinus est décroissante sur $[0,1] \subset [0,\pi]$. Donc $\cos(b)$ est le plus grand des minorants de $\cos(\mathscr{B})$. Par définition de la borne inférieure, on en déduit que :

$$\cos(b) = \inf\left(\cos(\mathscr{B})\right) = \inf\left(\mathscr{A} \setminus \{c_0\}\right).$$

Or $c_0 = 1$ n'est pas le plus petit élément de $\mathscr{A}$ car par exemple $c_2 = \cos(\cos(1)) < 1 = c_0$ et $c_2 \in \mathscr{A}$. On en déduit que l'ensemble des minorants de $\mathscr{A} \setminus \{c_0\}$ est égal à l'ensemble des minorants de $\mathscr{A}$. En particulier si on considère le plus grand minorant, on obtient que :

$$\boxed{\cos(b) = \inf\left(\mathscr{A} \setminus \{c_0\}\right) = \inf\left(\mathscr{A}\right) = a}.$$

(c) *En déduire que* $a - b = 2\sin(\frac{a-b}{2})\sin(\frac{a+b}{2})$.

▶ On a :

$$\begin{aligned}
a - b &= \cos(b) - \cos(a) \quad \text{d'après le résultat de la question précédente}\\
&= \mathrm{Re}\Big(e^{ib} - e^{ia}\Big)\\
&= \mathrm{Re}\left(2i\sin\left(\frac{b-a}{2}\right)e^{i(b+a)/2}\right) \quad \text{par factorisation par l'angle moitié}\\
&= -2\sin\left(\frac{b-a}{2}\right)\sin\left(\frac{b+a}{2}\right)\\
&= \boxed{2\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)} \quad \text{car } \forall x \in \mathbb{R},\ -\sin(x) = \sin(-x).
\end{aligned}$$

(d) *Justifier que* $0 \leqslant \sin(\frac{a+b}{2}) \leqslant \sin(1) < 1$.

▶ D'après le résultat de la question 3(a), on a $\mathscr{A} \subset [0,1]$. Donc $0 \leqslant a \leqslant 1$ car $a = \inf \mathscr{A}$ est le plus grand des minorants de $\mathscr{A}$. De même, $0 \leqslant b \leqslant 1$ car $b = \sup \mathscr{B}$ est le plus petit des majorants de $\mathscr{B} \subset [0,1]$ d'après le résultat de la question 3(a). On en déduit que :

$$0 = \frac{0+0}{2} \leqslant \frac{a+b}{2} \leqslant \frac{1+1}{2} = 1 < \frac{\pi}{2}.$$

Or la fonction sinus est strictement croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, donc :

$$\boxed{0 = \sin(0) \leqslant \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \sin(1) < \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1}.$$

On rappelle que $|\sin(x)| \leqslant |x|$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$.

(e) *En utilisant les résultats des deux questions précédentes, démontrer que $a = b$.*

▶ D'après le résultat de la question 4(c), on a :

$$\begin{aligned}
|a-b| &= \left|2\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| = 2\left|\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\right|\left|\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \\
&\leqslant 2\left|\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\right|\sin(1) \quad \text{car } 2|\sin(\tfrac{a-b}{2})| \geqslant 0 \text{ et } |\sin(\tfrac{a+b}{2})| \leqslant \sin(1) \text{ d'après le résultat de la question précédente} \\
&\leqslant \underbrace{2\left|\frac{a-b}{2}\right|}_{=|a-b|}\sin(1) \quad \text{car } 2\sin(1) \geqslant 0 \text{ et } \forall x \in \mathbb{R},\ |\sin(x)| \leqslant |x|.
\end{aligned}$$

Attention à bien justifier toutes vos inégalités : il faut vérifier que tous les facteurs sont positifs ou nuls avant d'en majorer ou d'en minorer un.

Ainsi, on obtient que $|a-b| \leqslant |a-b|\sin(1)$.

Attention : on ne peut pas passer aux inégalités strictes en utilisant que $\sin(1) < 1$ car on a seulement $|a-b| \geqslant 0$ et non $|a-b| > 0$.

Par l'absurde, on suppose que $a \neq b$. Donc $|a-b| > 0$. En simplifiant l'inégalité précédente, on en déduit que $1 \leqslant \sin(1)$ ce qui est absurde puisque $\sin(1) < 1$ d'après le résultat de la question précédente. On en déduit que $\boxed{a = b}$.

On peut aussi remarquer que $(1-\sin(1))|a-b| \leqslant 0$ ce qui donne $|a-b| \leqslant 0$ en simplifiant par $1-\sin(1) > 0$. On en déduit que $|a-b| = 0$ donc $a = b$.

5. (a) *Déterminer sans justifier l'ensemble $\mathscr{D}_\infty = \bigcap_{n\geqslant 1}\mathscr{D}_n$ à l'aide des résultats précédents.*

▶ D'après les résultats précédents, on observe que :

$$-1 \leqslant 0 \leqslant c_1 \leqslant c_3 \leqslant c_5 \leqslant \underbrace{c_7 \leqslant \cdots \leqslant b = a \leqslant \ldots c_6}_{\mathscr{D}_8=[c_7,c_6]} \leqslant c_4 \leqslant c_2 \leqslant c_0 = 1.$$

$$\mathscr{D}_7=[c_5,c_6]$$

$$\mathscr{D}_6=[c_5,c_4]$$

$$\mathscr{D}_5=[c_3,c_4]$$

$$\mathscr{D}_4=[c_3,c_2]$$

$$\mathscr{D}_3=[c_1,c_2]$$

$$\mathscr{D}_2=[c_1,c_0]$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
\mathscr{D}_\infty &= \bigcap_{n\geqslant 1}\mathscr{D}_n = \mathscr{D}_1 \cap \mathscr{D}_2 \cap \mathscr{D}_3 \cap \mathscr{D}_4 \cap \mathscr{D}_5 \cap \mathscr{D}_6 \cap \mathscr{D}_7 \cap \mathscr{D}_8 \cap \ldots \\
&= [-1,1] \cap [c_1,c_0] \cap [c_1,c_2] \cap [c_3,c_2] \cap [c_3,c_4] \cap [c_5,c_4] \cap [c_5,c_6] \cap [c_7,c_8] \cap \ldots \\
&= \boxed{\{a\}}.
\end{aligned}$$

On observe que la suite $(a_k = c_{2k})_{k\geqslant 0}$ est décroissante et converge vers a alors que la suite $(b_k = c_{2k+1})_{k\geqslant 0}$ est croissante et converge vers $b = a$. Lorsque nous étudierons la convergence des suites réelles (voir le chapitre éponyme), nous appellerons ce phénomène «des suites adjactentes».

(b) *Conclure que si la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est bien définie alors elle est constante égale à a.*

▶ On suppose que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est bien définie. Montrons par récurrence que $u_n = a$ pour tout entier $n \geqslant 0$.

Initialisation. Puisque la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est bien définie, on a $u_0 \in \mathscr{D}_\infty$ par définition de $\mathscr{D}_\infty$. Or $\mathscr{D}_\infty = \{a\}$ d'après le résultat de la question précédente, donc $u_0 = a$.
Hérédité. On suppose que $u_n = a$ pour un entier $n \geqslant 0$ fixé. Alors on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \arccos(u_n) \quad \text{d'après la relation de récurrence de la suite } (u_n)_{n\geqslant 0} \\ &= \arccos(a) \quad \text{par hypothèse de récurrence.} \end{aligned}$$

Or $a = b = \cos(a)$ d'après les résultats des questions 4(e) et 4(b). Par conséquent

$$u_{n+1} = \arccos(a) = \arccos(\cos(a)) = a \quad \text{par définition de la fonction arccosinus.}$$

Ainsi, si $u_n = a$ alors $u_{n+1} = a$ et ceci est vrai pour tout entier $n \geqslant 0$.
Conclusion. D'après le principe de récurrence, on en déduit que $u_n = a$ pour tout entier $n \geqslant 0$.
Donc $\boxed{\text{si } (u_n)_{n\geqslant 0} \text{ est bien définie alors elle est constante égale à } a}$.

Exercice 3

Simplifier les expressions suivantes en fonction de $n \in \mathbb{N}^\star$.

1. $\displaystyle\prod_{k=1}^{2n} \left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor$ *en séparant les indices pairs et impairs.*

► On a :

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{2n} \left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor &= \prod_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{2n} \left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor \times \prod_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{2n} \left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor \\ &= \underbrace{\prod_{\ell=1}^{n} \left\lfloor \frac{2\ell+1}{2} \right\rfloor}_{\text{en posant } k=2\ell} \times \underbrace{\prod_{\ell=0}^{n-1} \left\lfloor \frac{2\ell+1+1}{2} \right\rfloor}_{\text{en posant } k=2\ell+1} \\ &= \prod_{\ell=1}^{n} \left\lfloor \ell + \frac{1}{2} \right\rfloor \times \prod_{\ell=0}^{n-1} \left\lfloor \ell+1 \right\rfloor \\ &= \prod_{\ell=1}^{n} \ell \times \prod_{\ell=0}^{n-1} (\ell+1) \quad \text{car } \ell \leqslant \ell + \tfrac{1}{2} < \ell+1 \text{ et } \ell \in \mathbb{Z} \text{ (donc } \ell+1 \in \mathbb{Z}) \\ &= n! \times \prod_{k=1}^{n} k \quad \text{en posant } k = \ell+1 \\ &= n! \times n! = \boxed{(n!)^2}. \end{aligned}$$

2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$ *en inversant l'ordre de sommation.*

▶ On a :

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{k=1}^{n} \cos^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right) \\
&= \sum_{\ell=0}^{n-1} \cos^2\left(\frac{(n-\ell)\pi}{2n}\right) \quad \text{en posant } k = n-\ell \iff \ell = n-k \\
&= \sum_{\ell=0}^{n-1} \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\ell\pi}{2n}\right) \\
&= \sum_{\ell=0}^{n-1} \sin^2\left(\frac{\ell\pi}{2n}\right) \quad \text{car } \forall x \in \mathbb{R},\ \cos(\tfrac{\pi}{2} - x) = \sin(x) \\
&= \sum_{\ell=0}^{n-1} \left(1 - \cos^2\left(\frac{\ell\pi}{2n}\right)\right) \quad \text{car } \forall x \in \mathbb{R},\ \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \\
&= \sum_{\ell=0}^{n-1} 1 - \sum_{\ell=0}^{n-1} \cos^2\left(\frac{\ell\pi}{2n}\right) \quad \text{par linéarité} \\
&= n - \left(\sum_{\ell=1}^{n} \cos^2\left(\frac{\ell\pi}{2n}\right) + \underbrace{\cos^2\left(\frac{0\pi}{2n}\right)}_{=\cos^2(0)=1} - \underbrace{\cos^2\left(\frac{n\pi}{2n}\right)}_{=\cos^2(\frac{\pi}{2})=0}\right) = n - (S+1).
\end{aligned}$$

Ainsi S est solution de l'équation :

$$S = n - (S+1) \iff 2S = n-1 \iff S = \frac{n-1}{2}.$$

Finalement, on obtient :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \cos^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \frac{n-1}{2}}.$$

3. $\displaystyle\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}} (j-i)$ *et* $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} (j-i)$.

▶ On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}} (j-i) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (j-i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} j - i\sum_{j=1}^{n} 1\right) \quad \text{par linéarité} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{n(n+1)}{2} - in\right) \\
&= \frac{n(n+1)}{2}\sum_{i=1}^{n} 1 - n\sum_{i=1}^{n} i \quad \text{par linéarité} \\
&= \frac{n(n+1)2}{n} - n\frac{n(n+1)}{2} = \boxed{0}
\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}(j-i) &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}(j-i)\\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(j\sum_{i=1}^{j}1-\sum_{i=1}^{j}i\right) \quad \text{par linéarité}\\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(j^2-\frac{j(j+1)}{2}\right)=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{2j^2-j^2-j}{2}\right)=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{j^2-j}{2}\right)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}j^2-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}j \quad \text{par linéarité}\\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{12}-\frac{n(n+1)}{4}=\frac{n(n+1)}{12}\Big((2n+1)-3\Big)=\frac{n(n+1)}{12}(2n-2)\\
&= \boxed{\frac{n(n+1)(n-1)}{6}}.
\end{aligned}$$

DS n^{o} 3 de mathématiques et d'informatique

durée : 4 heures

Problème 1

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on rappelle qu'une permutation de taille k est une $k-$liste sans répétition des éléments de l'ensemble $\{0, 1, 2, \cdots, k-1\}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathfrak{S}_{2n}$ l'ensemble des permutations de taille $2n$.

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\sigma = (\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{2n-1}) \in \mathfrak{S}_{2n}$. On dit que σ est une involution sans point fixe si :

— $\forall i \in \{0, 1, \cdots, 2n-1\}, \sigma_i \neq i$;

— $\forall (i,j) \in \{0, 1, \cdots, 2n-1\}^2, \sigma_i = j \Leftrightarrow \sigma_j = i$.

Par exemple, $\sigma = (3, 2, 1, 0)$ est une involution sans point fixe. En effet, on a :

$$\sigma_0 = 3 \neq 0,\ \sigma_3 = 0 \neq 3 \quad \text{et} \quad \sigma_1 = 2 \neq 1,\ \sigma_2 = 1 \neq 2.$$

Il est commode de représenter les involutions sans point fixe par des ensembles de parties à deux éléments. Pour l'exemple précédent, cela donne $\{\{0,3\},\{1,2\}\}$. Alors que $\{\{0,2\},\{1,5\},\{3,4\}\}$ représente l'exemple $\sigma = (2, 5, 0, 4, 3, 1)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathfrak{I}_n$ l'ensemble des involutions sans point fixe de $\mathfrak{S}_{2n}$ et I_n son cardinal. Par convention, $I_0 = 1$.

Les parties INFO et MATH sont indépendantes.

INFO

En Python, il est possible de représenter une permutation par une liste d'entiers. Par exemple, la permutation σ donnée par $(2, 5, 0, 4, 3, 1)$ est représentée par la liste $[2, 5, 0, 4, 3, 1]$.

On considère le code suivant :

```
def nombreOccurrence(L) :
    M=[0 for i in range(len(L))]
    for i in range(len(L)) :
        M[L[i]]=M[L[i]]+1
    return M
```

1. (a) Quelle est la valeur de `nombreOccurrence([0,0,2,1,3,4,2,3,2])` ?

   (b) Quelle est la valeur de `nombreOccurrence(L)` où L est une liste sans répétition de $\{0, \cdots, n-1\}$ à n éléments ?

   (c) En déduire une fonction `est_permutation(L)` qui retourne `True` si la liste `L` est une permutation et `False` sinon. On supposera que L est une liste d'éléments de $\{0, \cdots, l-1\}$ où l est la longueur de L.

2. On considère le code suivant :

```
def est_involution_sans_pt_fixe(L) :
     l=len(L)
     if l % 2 == 0 and est_permutation(L) :
          for i in range(l) :
               if L[i]==i :
                    return False
          for i in range(l) :
               for j in range(i+1,l) :
                    if L[i]!=j or L[j]!=i :
                         return False
                    else :
                         return True
     return False
```

(a) Montrer qu'il existe une l-liste L sans répétition de $\{0, \cdots, l-1\}$ qui n'est pas une involution sans point fixe mais où la valeur de retour de `est_involution_sans_pt_fixe(L)` est `True`.

(b) Modifier la fonction précédente pour qu'elle renvoie `True` si la liste L est une involution sans point fixe et `False` sinon.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$I_0 = 1, \forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} = (2n+1)I_n.$$

Écrire une fonction `I(n)` qui retourne la valeur de I_n.

MATH

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Rappeler le nombre d'éléments de $\mathfrak{S}_{2n}$.
2. Déterminer toutes les involutions sans points fixe de $\mathfrak{S}_2, \mathfrak{S}_4, \mathfrak{S}_6$.
3. Soit $n \geq 0$. Pour tout $i \in \{0, 1, \cdots, 2n\}$, on pose $A_i = \{\sigma = (\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{2n+1}) \in \mathfrak{I}_{n+1} \,|\, \sigma_{2n+1} = i\}$.

   (a) Soient i et j deux éléments différents de $\{0, 1, \cdots, 2n\}$. Montrer que $A_i \cap A_j = \emptyset$.

   (b) Montrer que $\cup_{i=0}^{2n} A_i = \mathfrak{I}_{n+1}$.

   (c) Soit $i \in \{0, 1, \cdots, 2n\}$. Montrer que $\mathrm{card}(A_i) = I_n$.

   (d) En déduire que $I_{n+1} = (2n+1)I_n$.
4. En déduire une expression de I_n en fonction de n. On écrira le résultat comme un quotient faisant intervenir des factorielles et une suite géométrique.

Exercice 1

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par

$$\begin{cases} a_0 = 1, \quad a_1 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \, a_{n+2} = e^2 a_{n+1}^2 a_n^3 \end{cases}$$

Les parties MATH et INFO sont indépendantes.

INFO

1. Écrire une fonction `a(n)` qui retourne la valeur de a_n. On supposera que la variable `e` est définie et contient la valeur e.
2. Écrire une fonction `premier_rang(M)` qui retourne le premier entier n tel que $a_n > M$. On pourra utiliser la fonction de la question 1.

MATH

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n > 0$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $b_n = \ln(a_n)$. Montrer que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et déterminer une relation entre b_{n+2}, b_{n+1}, b_n.
3. Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que
$$\alpha = 5\alpha + 2.$$
4. Montrer que la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par
$$\forall n \in \mathbb{N}, c_n = b_n - \alpha$$
est une suite vérifiant
$$\forall n \in \mathbb{N}, c_{n+2} = 2c_{n+1} + 3c_n.$$
5. En déduire une expression de c_n, b_n, a_n en fonction de n.

Problème 2

Pour faire patienter des étudiants de BCPST jusqu'~~au prochain DS~~ aux vacances, on souhaite réaliser un calendrier de l'Avent. Pour cela, on dispose d'une boîte cartonnée dans laquelle sont prédécoupées des fenêtres numérotées (qui seront ouvertes progressivement, une par jour). Derrière chaque fenêtre, on cache une des surprises suivantes : un bonbon au chocolat (noté B), une truffe au chocolat (notée T), une pâte de fruit (notée P), une figurine en plastique (notée F), ou ~~un exo de maths~~ un message d'encouragement (noté M). On dispose d'autant de surprises de chaque type que l'on veut et on peut remplir le calendrier de toutes les façons possibles, sauf placer deux chocolats deux jours de suite afin d'éviter les indigestions.

Ce problème propose de dénombrer tous les calendriers possibles. Pour chaque entier $n \geqslant 1$, on note u_n le nombre total de calendriers de n cases, c_n le nombre d'entre eux dont la n-ième case cache un bonbon ou une truffe au chocolat (donc B ou T) et d_n le nombre d'entre eux dont la n-ième case ne cache ni un bonbon ni une truffe au chocolat (donc P ou F ou M).

1. (a) Déterminer u_1, c_1 et d_1.
   (b) Déterminer u_2, c_2 et d_2.
   (c) Justifier que $u_3 = 93$, $c_3 = 30$ et $d_3 = 63$.
2. Pour cette question, on fixe un entier $n \geqslant 1$.
   (a) Exprimer u_n en fonction de c_n et d_n.
   (b) Justifier que $u_{n+1} = 3c_n + 5d_n$.
   (c) Exprimer c_{n+1} et d_{n+1} en fonction de c_n et d_n.
3. À l'aide des résultats précédents, déterminer deux constantes $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ telles que
$$\forall n \geqslant 1, \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$
4. Exprimer u_n en fonction de l'entier $n \geqslant 1$. Puis écrire cette expression sous la forme :
$$\forall n \geqslant 1, \quad u_n = \frac{x + y\sqrt{33}}{2}\left(\frac{x' + y'\sqrt{33}}{2}\right)^n + \frac{x - y\sqrt{33}}{2}\left(\frac{x' - y'\sqrt{33}}{2}\right)^n$$
où $(x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4$ sont des constantes à déterminer.
5. À l'aide de la formule du binôme de Newton, en déduire que :
$$\forall n \geqslant 1, \quad u_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n \times \left(\sum_{\ell=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2\ell}\left(\frac{11}{3}\right)^\ell + \frac{7}{3} \times \sum_{\ell=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \binom{n}{2\ell+1}\left(\frac{11}{3}\right)^\ell\right).$$

Exercice 2

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit l'application :

$$\varphi_\lambda : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x,y) \mapsto (\lambda x + y, \lambda y + x).$$

On fixe $(\lambda, \lambda') \in \mathbb{R}^2$ dans tout l'exercice.

1. (a) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Résoudre le système suivant d'inconnues $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} \lambda x + y = a \\ x + \lambda y = b \end{cases}.$$

   On distinguera plusieurs cas selon les valeurs de λ puis, si besoin, les sous-cas $a = b$ ou $a = -b$.

   (b) Justifier que si $|\lambda| \neq 1$ alors $\varphi_\lambda : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est bijective et déterminer sa bijection réciproque.

   (c) Étudier l'injectivité et la surjectivité de φ_λ dans les cas $\lambda = -1$ et $\lambda = 1$. Dans le cas de réponses négatives, on les justifiera par des contre-exemples.

2. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Calculer $\varphi_{\lambda'}(\varphi_\lambda(x,y))$.

On rappelle que pour tout $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, on définit : $c \times (a,b) = (ca, cb)$.

3. On suppose que $\lambda + \lambda' \neq 0$ dans cette question.

   (a) Montrer que :

$$\varphi_{\lambda'} \circ \varphi_\lambda = c \times \varphi_\mu$$

   où $(c, \mu) \in \mathbb{R}^2$ sont deux constantes à exprimer en fonction de λ et λ'.

   (b) Que peut-on en déduire pour $\varphi_\lambda \circ \varphi_{\lambda'}$? Pourquoi ce résultat est-il surprenant ?

4. On suppose que $\lambda + \lambda' = 0$ dans cette question.

   (a) Montrer que :

$$\varphi_{\lambda'} \circ \varphi_\lambda = d \times \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$$

   où $d \in \mathbb{R}$ est une constante à exprimer en fonction de λ.

   (b) On suppose que $d \neq 0$. Calculer $\varphi_\lambda \circ \left(\frac{1}{d} \times \varphi_{\lambda'}\right)$. Que peut-on en déduire ?

Exercice 3

On considère des grilles rectangulaires de mots croisés ayant 6 lignes, 7 colonnes et 10 cases noires (toutes les autres cases sont vides). On pourra répondre aux questions suivantes sans simplifier les résultats.

1. Combien peut-on former de telles grilles différentes ?
2. Parmi ces grilles, combien d'entre-elles ont :
   (a) aucune case noire dans un coin ?
   (b) au plus deux cases noires dans des coins ?
   (c) au moins une case noire dans la première ligne ?
   (d) une seule case noire dans la dernière ligne et une seule case noire dans la première colonne ?
3. Combien y a-t-il de façons différentes de remplir une telle grille (avec l'alphabet latin) ?

Exercice 4

On considère la fonction réelle $f : \theta \mapsto 2\sin(\theta/2) + 3\sin(\theta/3)$.

1. Justifier qu'il suffit d'étudier f sur l'intervalle $[0, 6\pi]$ pour en déduire son étude sur $\mathbb{R}$.
2. Dresser le tableau des variations de f sur $[0, 6\pi]$ sans calculer la valeur de chaque extremum.
3. En déduire l'étude de l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
4. (a) Montrer que le maximum de f sur $[0, 6\pi]$ vaut $5\sin(2\pi/5)$.
   (b) Exprimer le minimum de f sur $[0, 6\pi]$ en fonction de $\sin(\pi/5)$.
   (c) Que valent les extrema de f sur $\mathbb{R}$?
5. Déterminer l'image directe par f de chaque ensemble suivant :

$$I_1 =]0, 3\pi[, \quad I_2 =]2\pi, 4\pi[, \quad I_3 = [-\pi, \pi] \quad \text{et} \quad I_4 = [100\pi, 200\pi].$$

6. Justifier que la restriction de f à $[2\pi, 3\pi]$ réalise une bijection vers un ensemble à déterminer.

Corrigé du DS n$^{\text{o}}$ 3 de mathématiques et d'informatique

Problème 1
Énoncé et corrigé de V. Vong

1. (a) La valeur de retour est $\boxed{[2,1,3,2,1,0,0,0,0]}$.

   (b) Pour une telle liste, on obtient $\boxed{[1,1\cdots,1]}$.

   (c) Par exemple :

```
def est_permutation(L) :
     n=len(L)
     M=[0 for i in range(n)]
     for i in range(n) :
         M[L[i]]=M[L[i]]+1
     T=[1 for i in range(n)]
     if T==M :
         return True
     else :
         return False
```

2. (a) En prenant $L=[1,0,3,4,5,2]$, . Donc dans le passage de la boucle indexée par j, la fonction passe par le return True. Donc la valeur de retour est `True`. Mais ce n'est pas une involution. En effet, $L[2]=3$ mais $L[3]=4$, ce qui est différents de 2.

   On remarque que l'on peut trouver des involutions sans point fixe pour laquelle la valeur de retour est `False`. Par exemple, si on prend $L=[3,2,1,0]$ on aura comme valeur de retour `False`. En effet, $L[0]=3$ et est donc différent de 1 qui est le premier j considéré.

   (b) Par exemple :

```
def est_involution_sans_pt_fixe(L) :
     n=len(L)
     if n % 2 == 0 and est_permutation(L) :
         for i in range(n) :
             if L[i]==i :
                 return False
         for i in range(n) :
             for j in range(i+1,n) :
                 if L[i]==j and L[j]!=i :
                     return False
         return True
     return False
```

3. Par exemple :

```
def I(n) :
     u=1
     for i in range(n) :
         u=(2*i+1)*u
     return u
```

MATH

1. Le nombre de permutations de taille $2n$ est égal à $\boxed{2n!}$.
2. — Pour $n = 2$, on a $\{\{0, 1\}\}$.
   — Pour $n = 4$, on a $\{\{0, 1\}, \{2, 3\}\}, \{\{0, 2\}, \{1, 3\}\}, \{\{0, 3\}, \{1, 2\}\}$.
   — Pour $n = 6$, on a

$$\begin{array}{l}\{\{0,1\},\{2,3\},\{4,5\}\},\ \{\{0,1\},\{2,4\},\{3,5\}\},\ \{\{0,1\},\{2,5\},\{3,4\}\},\\ \{\{0,2\},\{1,3\},\{4,5\}\},\ \{\{0,2\},\{1,4\},\{3,5\}\},\ \{\{0,2\},\{1,5\},\{3,4\}\},\\ \{\{0,3\},\{1,2\},\{4,5\}\},\ \{\{0,3\},\{1,4\},\{2,5\}\},\ \{\{0,3\},\{1,5\},\{2,4\}\},\\ \{\{0,4\},\{1,2\},\{3,5\}\},\ \{\{0,4\},\{1,3\},\{2,5\}\},\ \{\{0,4\},\{1,5\},\{2,3\}\},\\ \{\{0,5\},\{1,2\},\{3,4\}\},\ \{\{0,5\},\{1,3\},\{2,4\}\},\ \{\{0,5\},\{1,4\},\{2,3\}\}.\end{array}$$

3. Soit $n \geq 0$. Pour tout $i \in \{0, 1, \cdots, 2n\}$, on pose $A_i = \{\sigma = (\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{2n+1}) \in \mathfrak{I}_{n+1} \,|\, \sigma_{2n+1} = i\}$.
   (a) Soient i et j deux éléments différents de $\{0, 1, \cdots, 2n\}$. Montrer que $A_i \cap A_j = \emptyset$. Soit i et j deux éléments de $\{0, 1, \cdots, 2n\}$. On suppose que $A_i \cap A_j \neq \emptyset$. Il existe donc $\sigma \in A_i \cap A_j$. Par définition de A_i et A_j, on en déduit que $\sigma_{2n+1} = i$ et $\sigma_{2n+1} = j$. Donc $i = j$.
   Par la contraposée, on en déduit que si $i \neq j$, alors $A_i \cap A_j = \emptyset$.
   (b) Pour tout $i \in \{0, 1, \cdots, 2n\}, A_i \subset \mathfrak{I}_{n+1}$. Donc $\cup_{i=0}^{2n} A_i \subset \mathfrak{I}_{n+1}$.
   Soit $\sigma \in \mathfrak{I}_{n+1}$. Posons $j = \sigma_{2n+1}$. σ étant une involution sans point fixe, $j \in \{0, 1, \cdots, 2n\}$ et $\sigma \in \mathfrak{I}_{n+1}$ donc $\sigma \in A_j$. Par conséquent, $\sigma \in \cup_{i=0}^{2n} A_i$ et donc $\mathfrak{I}_{n+1} \subset \cup_{i=0}^{2n} A_i$.
   D'après le principe de double inclusion, $\boxed{\mathfrak{I}_{n+1} = \cup_{i=0}^{2n} A_i}$.
   (c) Soit $i \in \{0, \cdots, 2n\}$. Construisons une bijection ϕ de $\mathfrak{I}_n$ vers A_i. Soit $\sigma \in \mathfrak{I}_n$. $\phi(\sigma)$ se construit de cette manière. En utilisant la notation sous forme d'ensemble, on a $\sigma = \{\{a_0, a_1\}, \cdots, \{a_{2n-2}, a_{2n-1}\}\}$. Pour tout $j \in \{0, \cdots, 2n-2\}$ tel que $a_j \geq i$, on rajoute 1. Puis on rajoute à σ l'ensemble $\{i, 2n + 1\}$. On obtient alors un élément de A_i. Réciproquement, notons ψ la réciproque de ϕ. Étant donné un élément τ de A_i, pour construire $\psi(\tau)$, on procède de la manière suivante.
      i. on enlève à τ le sous-ensemble contenant $2n + 1$.
      ii. on enlève 1 à toutes les valeurs strictement plus grande que i.

   Par exemple, $\psi(\{\{0, 4\}, \{1, 2\}, \{3, 5\}\}) = \{\{0, 3\}, \{1, 2\}\}$
   A_i et $\mathfrak{I}_n$ étant en bijection, on en déduit qu'ils sont de même cardinal.
   Autre rédaction :
   Soit $i \in \{0, \cdots, 2n\}$. Les éléments de A_i sont exactement ceux où on a regroupé i et $2n + 1$ ensembles. Il reste donc à regrouper par deux les $2n$ éléments de $E = \{0, 1, \cdots, i-1, i+1, \cdots, 2n\}$. Or le nombre de façons de regrouper deux à deux les $2n$ éléments de $F = \{0, 1, \cdots, 2n - 1\}$ est le nombre d'involutions sans point fixe de F. En remplaçant respectivement $i, i + 1, \cdots, 2n - 1$ par $i + 1, i + 2, \cdots 2n$ dans les involutions sans point fixe de F, on construit une bijection entre les involutions sans point fixe de F et les façons de regrouper les éléments de E deux par deux. Ces deux ensembles ont donc le même cardinal. Donc $\mathrm{card}(A_i) = I_n$.
   (d) Les A_i formant une partition de $\mathfrak{I}_{n+1}$, on en déduit que

$$\sum_{k=0}^{2n} \mathrm{card}(A_k) = I_{n+1}.$$

   Or, pour tout $k \in \{0, \cdots, 2n\}, \mathrm{card}(A_k) = I_n$. Donc

$$\boxed{I_{n+1} = (2n + 1)I_n.}$$

4. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, I_n = (2n - 1)(2n - 3) \cdots 1 = \prod_{k=1}^{n}(2k - 1)$.
   — Pour $n = 0$, $I_0 = 1$ donc la propriété est vraie.

— Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $I_n = \prod_{k=1}^{n}(2k-1)$. Montrons que $I_{n+1} = \prod_{k=1}^{n+1}(2k-1)$. On a $I_{n+1} = (2n+1)I_n$. En appliquant l'hypothèse de récurrence, on obtient alors

$$I_{n+1} = (2n+1)\prod_{k=1}^{n}(2k-1) = \prod_{k=1}^{n+1}(2k-1).$$

Donc la propriété est héréditaire.

— Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}, I_n = \prod_{k=1}^{n}(2k-1)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a donc :

$$I_n = \frac{(2n-1)!}{(2n-2)(2n-4)\cdots 2}.$$

D'où

$$\boxed{I_n = \frac{(2n-1)!}{2^{n-1}(n-1)!} = \frac{(2n)!}{2^n n!}}$$

Exercice 1
Énoncé et corrigé de V. Vong

1. Par exemple :

```
def a(n) :
    a0=1
    a1=2
    for i in range(n) :
        a2=(e**2)*(a1**2)*(a0**3)
        a0=a1
        a1=a2
    return a0
```

2. Par exemple :

```
def premier_rang(M) :
    n=0
    while (a(n)<=M) :
        n=n+1
        return n
```

MATH

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n) : a_n > 0, a_{n+1} > 0$. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

— Initialisation : $a_0 = 1 > 0, a_1 = 2 > 0$. Donc $P(0)$ est vraie.

— Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $P(n)$ est vraie. Montrons que $P(n+1)$ est vraie. D'après $P(n)$, $a_{n+1} > 0$. On a $a_{n+2} = e^2 a_{n+1}^2 a_n^3$. Comme $a_{n+1} > 0$ et $a_n > 0$, on en déduit que $a_{n+2} > 0$. Donc $P(n+1)$ est vraie.

— Conclusion : d'après le principe de récurrence, on en déduit que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, a_n > 0.}$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n > 0$. Donc $\ln(a_n)$ est bien définie. De plus,

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} = e^2 a_{n+1}^2 a_n^3$$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ln(a_{n+2}) = 2 + 2\ln(a_{n+1}) + 3\ln(a_n).$$

Autrement dit,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, b_{n+2} = 2 + 2b_{n+1} + 3b_n.}$$

3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha = 2 + 5\alpha$. On a alors

$$\boxed{\alpha = \frac{-1}{2}.}$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$c_{n+2} = b_{n+2} - \alpha.$$

donc d'après les questions 2 et 3, on a

$$c_{n+2} = 2 + 2b_{n+1} + 3b_n - (2 + 5\alpha).$$

D'où

$$c_{n+2} = 2(b_{n+1} - \alpha) + 3(b_n - \alpha).$$

Autrement dit,

$$\boxed{c_{n+2} = 2c_{n+1} + 3c_n.}$$

5. La suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie donc une récurrence linéaire d'ordre 2. Elle a pour équation caractéristique $X^2 - 2X - 3 = 0$. Une solution évidente est donnée par -1. Donc l'autre solution est 3. On en déduit qu'il existe A et B réels tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, c_n = A(-1)^n + B3^n.$$

Exprimons A et B en fonction de c_0 et de c_1.
On a

$$\begin{aligned} A + B &= c_0 \\ -A + 3B &= c_1 \end{aligned}$$

ce qui est équivalent à

$$\begin{aligned} A + B &= c_0 \\ 4B &= c_0 + c_1 \end{aligned}$$

On obtient alors comme solution

$$\boxed{B = \frac{c_0 + c_1}{4}, A = \frac{3c_0 - c_1}{4}.}$$

Or $b_0 = 0, b_1 = \ln(2), c_0 = \frac{1}{2}, c_1 = \frac{2\ln(2)+1}{2}$. Donc $A = \frac{2-2\ln(2)}{8} = \frac{1-\ln(2)}{4}$, $B = \frac{1+\ln(2)}{4}$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, c_n = (\frac{1-\ln(2)}{4})(-1)^n + (\frac{1+\ln(2)}{4})(3)^n.}$$

D'où

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, b_n = (\frac{1-\ln(2)}{4})(-1)^n + (\frac{1+\ln(2)}{4})(3)^n - \frac{1}{2}.}$$

D'où

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \exp\left((\frac{1-\ln(2)}{4})(-1)^n + (\frac{1+\ln(2)}{4})(3)^n - \frac{1}{2}\right).}$$

Problème 2

Pour faire patienter des étudiants de BCPST jusqu'~~au prochain DS~~ aux vacances, on souhaite réaliser un calendrier de l'Avent. Pour cela, on dispose d'une boîte cartonnée dans laquelle sont prédécoupées des fenêtres numérotées (qui seront ouvertes progressivement, une par jour). Derrière chaque fenêtre, on cache une des surprises suivantes : un bonbon au chocolat (noté B), une truffe au chocolat (notée T), une pâte de fruit (notée P), une figurine en plastique (notée F), ou ~~un exo de maths~~ un message d'encouragement (noté M). On dispose d'autant de surprises de chaque type que l'on veut et on peut remplir le calendrier de toutes les façons possibles, sauf placer deux chocolats deux jours de suite afin d'éviter les indigestions.

Ce problème propose de dénombrer tous les calendriers possibles. Pour chaque entier $n \geqslant 1$, on note u_n le nombre total de calendriers de n cases, c_n le nombre d'entre eux dont la n-ième case cache un bonbon ou une truffe au chocolat (donc B ou T) et d_n le nombre d'entre eux dont la n-ième case ne cache ni un bonbon ni une truffe au chocolat (donc P ou F ou M).

1. (a) *Déterminer u_1, c_1 et d_1.*

   ▶ Puisqu'il y a cinq surprises différentes, on a $\boxed{u_1 = 5}$. Puisque deux d'entre elles sont au chocolat (B ou T), on a $\boxed{c_1 = 2}$. Et puisque trois d'entre elles ne sont pas pas au chocolat (P ou F ou M), on a $\boxed{d_1 = 3}$.

   (b) *Déterminer u_2, c_2 et d_2.*

   ▶ Puisqu'on ne peut pas placer deux chocolats deux jours de suites, on a :

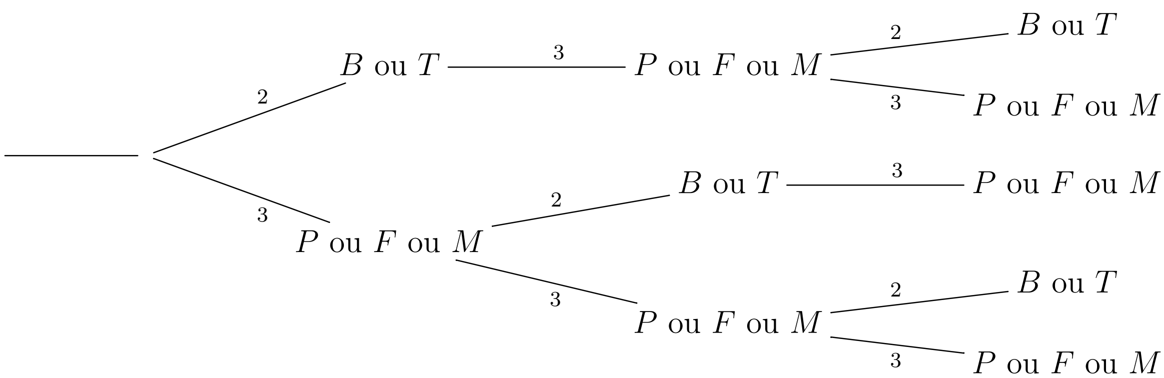
$$u_2 = \underbrace{2}_{\substack{\text{choix de } B \text{ ou } T\\ \text{pour la } 1^{\text{re}} \text{ case}}} \overbrace{\times}^{\text{puis}} \underbrace{3}_{\substack{\text{choix de } P \text{ ou } F \text{ ou } M\\ \text{pour la } 2^{\text{e}} \text{ case}}} \overbrace{+}^{\text{ou bien}} \underbrace{3}_{\substack{\text{choix de } P \text{ ou } F \text{ ou } M\\ \text{pour la } 1^{\text{re}} \text{ case}}} \overbrace{\times}^{\text{puis}} \underbrace{5}_{\substack{\text{n'importe quel choix}\\ \text{pour la } 2^{\text{e}} \text{ case}}} = \boxed{21},$$

$$c_2 = \underbrace{3}_{\substack{\text{choix de } P \text{ ou } F \text{ ou } M\\ \text{pour la } 1^{\text{re}} \text{ case}}} \overbrace{\times}^{\text{puis}} \underbrace{2}_{\substack{\text{choix de } B \text{ ou } T\\ \text{pour la } 2^{\text{e}} \text{ case}}} = \boxed{6},$$

$$d_2 = \underbrace{5}_{\substack{\text{n'importe quel choix}\\ \text{pour la } 1^{\text{re}} \text{ case}}} \overbrace{\times}^{\text{puis}} \underbrace{3}_{\substack{\text{choix de } P \text{ ou } F \text{ ou } M\\ \text{pour la } 2^{\text{e}} \text{ case}}} = \boxed{15}.$$

   (c) *Justifier que $u_3 = 93$, $c_3 = 30$ et $d_3 = 63$.*

   ▶ On utilise l'arbre de dénombrement suivant :



   On obtient donc :

$$u_3 = 2\times3\times2 + 2\times3\times3 + 3\times2\times3 + 3\times3\times2 + 3\times3\times3 = 12+18+18+18+27 = \boxed{93},$$
$$c_3 = 2\times3\times2 + 3\times3\times2 = 12+18 = \boxed{30},$$
$$d_3 = 2\times3\times3 + 3\times2\times3 + 3\times3\times3 = 18+18+27 = \boxed{63}.$$

2. *Pour cette question, on fixe un entier $n \geqslant 1$.*

(a) *Exprimer u_n en fonction de c_n et d_n.*

▶ On note :

— U_n l'ensemble des calendriers de n cases,

— C_n le sous-ensemble de ceux dont la n-ième case cache un chocolat

— et D_n le sous-ensemble de ceux dont la n-ième case ne cache pas un chocolat.

Alors $U_n = C_n \cup D_n$ et $C_n \cap D_n = \emptyset$. On en déduit que C_n et D_n forment une partition de U_n donc :

$$u_n = \text{card}(U_n) = \text{card}(C_n \cup D_n) = \text{card}(C_n) + \text{card}(D_n) = \boxed{c_n + d_n}.$$

Le mot clef ici est «partition». On peut également raisonner avec le mot clef «complémentaire» (D_n est le complémentaire de C_n dans U_n). Au moins l'un de ces deux mots clefs doit apparaître clairement dans votre justification.

(b) *Justifier que $u_{n+1} = 3c_n + 5d_n$.*

▶ Pour réaliser un calendrier de $n+1$ cases, il suffit de rajouter une $(n+1)$-ième case à un calendrier de n cases déjà réalisé. Mais on ne peut pas rajouter une $(n+1)$-ième case qui cache un chocolat si la n-ième case du calendrier de n-cases cache un chocolat, sinon on obtiendrait deux chocolats de suite les deux derniers jours. On a donc :

$$u_{n+1} = \underbrace{c_n}_{\substack{\text{choix d'un calendrier de} \\ n \text{ cases dont la } n\text{-ième} \\ \text{cache un chocolat}}} \overbrace{\times}^{\text{puis}} \underbrace{3}_{\substack{\text{choix de } P \text{ ou } F \text{ ou } M \\ \text{pour la } (n+1)\text{-ième case}}} \overbrace{+}^{\text{ou bien}} \underbrace{d_n}_{\substack{\text{choix d'un calendrier de} \\ n \text{ cases dont la } n\text{-ième} \\ \text{ne cache pas un chocolat}}} \overbrace{\times}^{\text{puis}} \underbrace{5}_{\substack{\text{n'importe quel choix} \\ \text{pour la } (n+1)\text{-ième case}}}$$

$$= \boxed{3c_n + 5d_n}.$$

(c) *Exprimer c_{n+1} et d_{n+1} en fonction de c_n et d_n.*

▶ En raisonnant comme à la question précédente, on obtient :

$$c_{n+1} = \underbrace{d_n}_{\substack{\text{choix d'un calendrier de} \\ n \text{ cases dont la } n\text{-ième} \\ \text{ne cache pas un chocolat}}} \overbrace{\times}^{\text{puis}} \underbrace{2}_{\substack{\text{choix de } B \text{ ou } T \\ \text{pour la } (n+1)\text{-ième case}}} = \boxed{2d_n}$$

et

$$d_{n+1} = \underbrace{c_n}_{\substack{\text{choix d'un calendrier de} \\ n \text{ cases dont la } n\text{-ième} \\ \text{cache un chocolat}}} \overbrace{\times}^{\text{puis}} \underbrace{3}_{\substack{\text{choix de } P \text{ ou } F \text{ ou } M \\ \text{pour la } (n+1)\text{-ième case}}} \overbrace{+}^{\text{ou bien}} \underbrace{d_n}_{\substack{\text{choix d'un calendrier de} \\ n \text{ cases dont la } n\text{-ième} \\ \text{ne cache pas un chocolat}}} \overbrace{\times}^{\text{puis}} \underbrace{3}_{\substack{\text{choix de } P \text{ ou } F \text{ ou } M \\ \text{pour la } (n+1)\text{-ième case}}}$$

$$= \boxed{3c_n + 3d_n}.$$

On peut aussi utiliser les questions précédentes pour obtenir l'expression de l'une à partir de celle de l'autre. Par exemple :

$$d_{n+1} = u_{n+1} - c_{n+1} = (3c_n + d_n) - 2d_n = 3c_n + 3d_n.$$

3. *À l'aide des résultats précédents, déterminer deux constantes $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ telles que*

$$\forall n \geqslant 1, \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

▶ Analyse. On cherche deux constantes $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ telles que

$$\forall n \geqslant 1, \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

Soit $n \geqslant 1$. On a d'après les résultats des questions précédentes :

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 3c_{n+1} + 5d_{n+1} \\ &= 3(2d_n) + 5(3c_n + 3d_n) \\ &= 15c_n + 21d_n \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} au_{n+1} + bu_n &= a(3c_n + 5d_n) + b(c_n + d_n) \\ &= (3a+b)c_n + (5a+b)d_n. \end{aligned}$$

Pour que «$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$» soit vraie, il suffit donc que (a,b) soit solution du système linéaire suivant :

$$\begin{cases} 3a + b = 15 & (L_1) \\ 5a + b = 21 & (L_2) \end{cases} \iff \begin{cases} 3a + b = 15 & \\ \quad 2a = 6 & (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \end{cases} \iff \begin{cases} b = 15 - 3a = 6 \\ a = 3 \end{cases}.$$

<u>Synthèse</u>. On pose $\boxed{a = 3}$ et $\boxed{b = 6}$. En reprenant les mêmes calculs que dans l'analyse, on obtient :

$$\forall n \geqslant 1, \quad au_{n+1} + bu_n = (3a+b)c_n + (5a+b)d_n = 15c_n + 21d_n = u_{n+2}.$$

Aidez-vous des premières questions pour vérifier vos résultats. Ainsi :

$$3u_2 + 6u_1 = 3 \times 21 + 6 \times 5 = 63 + 30 = 93 = u_3.$$

4. Exprimer u_n en fonction de l'entier $n \geqslant 1$. Puis écrire cette expression sous la forme :

$$\forall n \geqslant 1, \quad u_n = \frac{x + y\sqrt{33}}{2}\left(\frac{x' + y'\sqrt{33}}{2}\right)^n + \frac{x - y\sqrt{33}}{2}\left(\frac{x' - y'\sqrt{33}}{2}\right)^n$$

où $(x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4$ sont des constantes à déterminer.

▶ D'après le résultat de la question précédente, $(u_n)_{n \geqslant 1}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2. Son équation caractéristique est :

$$q^2 = 3q + 6 \iff q^2 - 3q - 6 = 0.$$

Son discriminant vaut $\Delta = (-3)^2 + 4 \times 6 = 33 > 0$. L'équation caractéristique admet donc deux solutions réelles distinctes :

$$q_1 = \frac{3 + \sqrt{33}}{2} \quad \text{et} \quad q_2 = \frac{3 - \sqrt{33}}{2}.$$

Il existe donc deux constantes $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ telles que :

$$\forall n \geqslant 1, \quad u_n = \lambda_1 q_1^{n-1} + \lambda_2 q_2^{n-1}.$$

Attention à l'ordre des quantificateurs : «$\exists(\lambda_1, \lambda_2), \forall n$»$\neq$«$\forall n, \exists(\lambda_1, \lambda_2)$» ! !

Pour $n = 1$ et $n = 2$, on obtient d'après les résultats de la question 1 :

$$\begin{aligned} \begin{cases} u_1 = \lambda_1 + \lambda_2 \\ u_2 = \lambda_1 q_1 + \lambda_2 q_2 \end{cases} &\iff \begin{cases} \boxed{1}\lambda_1 + \quad \lambda_2 = 5 & (L_1) \\ q_1\lambda_1 + q_2\lambda_2 = 21 & (L_2) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \boxed{1}\lambda_1 + \qquad\qquad \lambda_2 = 5 & \\ \qquad \boxed{(q_2 - q_1)}\lambda_2 = 21 - 5q_1 & (L_2 \leftarrow L_2 - q_1 L_1) \end{cases} \end{aligned}$$

le système est de rang maximal car $q_1 \neq q_2$ (car $\Delta > 0$)

donc il admet une unique solution

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 = 5 - \lambda_2 = \frac{330 - 165 + 27\sqrt{33}}{66} = \frac{165 + 27\sqrt{33}}{66} \\ \lambda_2 = \frac{21 - 5q_1}{q_2 - q_1} = \dfrac{\frac{42 - 15 - 5\sqrt{33}}{2}}{\frac{-2\sqrt{33}}{2}} = \frac{27 - 5\sqrt{33}}{-2\sqrt{33}} = \frac{165 - 27\sqrt{33}}{66} \end{cases}$$

Par conséquent, on a :

$$\forall n \geqslant 1, \quad u_n = \boxed{\left(\frac{165+27\sqrt{33}}{66}\right)\left(\frac{3+\sqrt{33}}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{165-27\sqrt{33}}{66}\right)\left(\frac{3-\sqrt{33}}{2}\right)^{n-1}}$$

$$= \left(\frac{\frac{165+27\sqrt{33}}{66}}{\frac{3+\sqrt{33}}{2}}\right)\left(\frac{3+\sqrt{33}}{2}\right)^{n} + \left(\frac{\frac{165-27\sqrt{33}}{66}}{\frac{3-\sqrt{33}}{2}}\right)\left(\frac{3-\sqrt{33}}{2}\right)^{n}$$

$$= \left(\frac{(165+27\sqrt{33})(3-\sqrt{33})}{33(3+\sqrt{33})(3-\sqrt{33})}\right)\left(\frac{3+\sqrt{33}}{2}\right)^{n} + \left(\frac{(165-27\sqrt{33})(3+\sqrt{33})}{33(3-\sqrt{33})(3+\sqrt{33})}\right)\left(\frac{3-\sqrt{33}}{2}\right)^{n}$$

$$= \left(\frac{495+81\sqrt{33}-165\sqrt{33}-891}{33(9-33)}\right)\left(\frac{3+\sqrt{33}}{2}\right)^{n} + \left(\frac{495-81\sqrt{33}+165\sqrt{33}-891}{33(9-33)}\right)\left(\frac{3-\sqrt{33}}{2}\right)^{n}$$

$$= \left(\frac{396-84\sqrt{33}}{-33\times 24}\right)\left(\frac{3+\sqrt{33}}{2}\right)^{n} + \left(\frac{-396+84\sqrt{33}}{-33\times 24}\right)\left(\frac{3-\sqrt{33}}{2}\right)^{n}$$

$$= \left(\frac{12+\frac{28}{11}\sqrt{33}}{24}\right)\left(\frac{3+\sqrt{33}}{2}\right)^{n} + \left(\frac{12-\frac{28}{11}\sqrt{33}}{24}\right)\left(\frac{3-\sqrt{33}}{2}\right)^{n}$$

$$= \boxed{\left(\frac{1+\frac{7}{33}\sqrt{33}}{2}\right)\left(\frac{3+\sqrt{33}}{2}\right)^{n} + \left(\frac{1-\frac{7}{33}\sqrt{33}}{2}\right)\left(\frac{3-\sqrt{33}}{2}\right)^{n}}.$$

D'où le résultat demandé en posant :

$$\boxed{x=1}, \quad \boxed{y=\tfrac{7}{33}}, \quad \boxed{x'=3} \quad \text{et} \quad \boxed{y'=1}.$$

N'hésitez pas à poser vos opérations au brouillon pour ne pas perdre du temps : le calcul mental est toujours très chronophage !!

5. *À l'aide de la formule du binôme de Newton, en déduire que :*

$$\forall n \geqslant 1, \quad u_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n \times \left(\sum_{\ell=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2\ell}\left(\frac{11}{3}\right)^{\ell} + \frac{7}{3}\times\sum_{\ell=0}^{\lfloor (n-1)/2\rfloor}\binom{n}{2\ell+1}\left(\frac{11}{3}\right)^{\ell}\right).$$

► Soit $n \geqslant 1$. On a d'après le résultat précédent :

$$u_n = \frac{1+\frac{7}{33}\sqrt{33}}{2\times 2^n}\left(3+\sqrt{33}\right)^n + \frac{1-\frac{7}{33}\sqrt{33}}{2\times 2^n}\left(3-\sqrt{33}\right)^n.$$

Or on a :

$$\left(3+\sqrt{33}\right)^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}3^{n-k}\left(\sqrt{33}\right)^k \quad \text{d'après la formule du binôme de Newton}$$

$$= \underbrace{\sum_{\substack{k=0\\ k \text{ pair}}}^{n}\binom{n}{k}3^{n-k}\left(\sqrt{33}\right)^k}_{=S_1} + \underbrace{\sum_{\substack{k=0\\ k \text{ impair}}}^{n}\binom{n}{k}3^{n-k}\left(\sqrt{33}\right)^k}_{=S_2} \quad \text{en séparant les indices pairs et impairs}$$

et de même :

$$\left(3-\sqrt{33}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}3^{n-k}\left(-\sqrt{33}\right)^k = \underbrace{\sum_{\substack{k=0\\ k \text{ pair}}}^{n}\binom{n}{k}3^{n-k}\left(\sqrt{33}\right)^k}_{=S_1} - \underbrace{\sum_{\substack{k=0\\ k \text{ impair}}}^{n}\binom{n}{k}3^{n-k}\left(\sqrt{33}\right)^k}_{=S_2}$$

car $(-\sqrt{33})^k = (\sqrt{33})^k$ si k est pair et $(-\sqrt{33})^k = -(\sqrt{33})^k$ si k est impair. Par conséquent :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{2\times 2^n}\left[\left(1+\tfrac{7}{33}\sqrt{33}\right)(S_1+S_2)+\left(1-\tfrac{7}{33}\sqrt{33}\right)(S_1-S_2)\right] \\ &= \frac{1}{2\times 2^n}\left[2S_1+\left(\tfrac{14}{33}\sqrt{33}\right)S_2\right] = \frac{1}{2^n}\left[S_1+(\tfrac{7}{33}\sqrt{33})S_2\right]. \end{aligned}$$

De plus :

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{\substack{k=0\\ k \text{ pair}}}^{n}\binom{n}{k}3^{n-k}\left(\sqrt{33}\right)^k = \sum_{0\leqslant 2\ell\leqslant n}\binom{n}{2\ell}3^{n-2\ell}\left(\sqrt{33}\right)^{2\ell} \quad \text{en posant } k=2\ell \\ &= \sum_{0\leqslant \ell\leqslant n/2}\binom{n}{2\ell}3^n\left(\left(\frac{\sqrt{33}}{3}\right)^2\right)^\ell = 3^n\sum_{\ell=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2\ell}\left(\frac{33}{9}\right)^\ell = 3^n\sum_{\ell=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2\ell}\left(\frac{11}{3}\right)^\ell \end{aligned}$$

et de même :

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{\substack{k=0\\ k \text{ impair}}}^{n}\binom{n}{k}3^{n-k}\left(\sqrt{33}\right)^k = \sum_{0\leqslant 2\ell+1\leqslant n}\binom{n}{2\ell+1}3^{n-(2\ell+1)}\left(\sqrt{33}\right)^{2\ell+1} \quad \text{en posant } k=2\ell+1 \\ &= \sum_{-1/2\leqslant \ell\leqslant (n-1)/2}\binom{n}{2\ell+1}3^n\left(\left(\frac{\sqrt{33}}{3}\right)^2\right)^\ell\left(\frac{\sqrt{33}}{3}\right) = 3^n\left(\frac{\sqrt{33}}{3}\right)\sum_{\ell=0}^{\lfloor (n-1)/2\rfloor}\binom{n}{2\ell+1}\left(\frac{11}{3}\right)^\ell. \end{aligned}$$

Finalement, on obtient :

$$\begin{aligned} \forall n\geqslant 1,\quad u_n &= \frac{1}{2^n}\left[3^n\sum_{\ell=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2\ell}\left(\frac{11}{3}\right)^\ell+\left(\tfrac{7}{33}\sqrt{33}\right)3^n\left(\frac{\sqrt{33}}{3}\right)\sum_{\ell=0}^{\lfloor (n-1)/2\rfloor}\binom{n}{2\ell+1}\left(\frac{11}{3}\right)^\ell\right] \\ &= \frac{3^n}{2^n}\left[\sum_{\ell=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2\ell}\left(\frac{11}{3}\right)^\ell+\left(\frac{7\times 33}{3\times 33}\right)\sum_{\ell=0}^{\lfloor (n-1)/2\rfloor}\binom{n}{2\ell+1}\left(\frac{11}{3}\right)^\ell\right] \\ &= \boxed{\left(\frac{3}{2}\right)^n\times\left(\sum_{\ell=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2\ell}\left(\frac{11}{3}\right)^\ell+\frac{7}{3}\times\sum_{\ell=0}^{\lfloor (n-1)/2\rfloor}\binom{n}{2\ell+1}\left(\frac{11}{3}\right)^\ell\right)}. \end{aligned}$$

Exercice 2

Pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$, on définit l'application :

$$\varphi_\lambda:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,(x,y)\mapsto(\lambda x+y,\lambda y+x).$$

On fixe $(\lambda,\lambda')\in\mathbb{R}^2$ dans tout l'exercice.

1. (a) *Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. Résoudre le système suivant d'inconnues $(x,y)\in\mathbb{R}^2$:*

$$\begin{cases}\lambda x+y=a\\ x+\lambda y=b\end{cases}.$$

On distinguera plusieurs cas selon les valeurs de λ puis, si besoin, les sous-cas $a=b$ ou $a=-b$.

▶ On a d'après la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{cases}\lambda x+y=a & (L_1)\\ x+\lambda y=b & (L_2)\end{cases} \iff \begin{cases}\boxed{1}x+\lambda y=b & (L_1\leftrightarrow L_2)\\ \lambda x+y=a & (L_2\leftrightarrow L_1)\end{cases}$$
$$\iff \begin{cases}\boxed{1}x+\lambda y=b \\ \boxed{(1-\lambda^2)}y=a-\lambda b & (L_2\leftarrow L_2-\lambda L_1)\end{cases}$$

1er cas : $1-\lambda^2 \neq 0 \iff (\lambda \neq 1 \text{ et } \lambda \neq -1)$. Alors le système est de rang maximal donc il admet une unique solution :

$$\begin{cases} x = b - \lambda y = \dfrac{b(1-\lambda^2) - \lambda(a - \lambda b)}{1-\lambda^2} = \dfrac{b - \lambda a}{1-\lambda^2} \\ y = \dfrac{a - \lambda b}{1 - \lambda^2} \end{cases}.$$

2e cas : $\lambda = 1$. Alors le système est équivalent à :

$$\begin{cases} \boxed{1}x + y = b \\ 0 = a - b \end{cases}.$$

Le système est de rang 1, il admet une équation auxiliaire et une équation auxiliaire.
1er sous-cas : $a = b$. Alors l'équation auxiliaire est compatible donc le système admet une infinité de solutions de la forme :

$$(x, y) = (b - y, y).$$

2e sous-cas : $a \neq b$. Alors l'équation auxiliaire n'est pas compatible donc le système n'a pas de solutions.
3e cas : $\lambda = -1$. Alors le système est équivalent à :

$$\begin{cases} \boxed{1}x - y = b \\ 0 = a + b \end{cases}.$$

Le système est de rang 1, il admet une équation auxiliaire et une équation auxiliaire.
1er sous-cas : $a = -b$. Alors l'équation auxiliaire est compatible donc le système admet une infinité de solutions de la forme :

$$(x, y) = (b + y, y).$$

2e sous-cas : $a \neq -b$. Alors l'équation auxiliaire n'est pas compatible donc le système n'a pas de solutions.
Conclusion. Finalement l'ensemble des solutions du système est :

$$\boxed{\begin{cases} \left\{\left(\frac{b-\lambda a}{1-\lambda^2}, \frac{a-\lambda b}{1-\lambda^2}\right)\right\} & \text{si } \lambda \neq 1 \text{ et } \lambda \neq -1 \\ \{(b-y, y) \mid y \in \mathbb{R}\} & \text{si } \lambda = 1 \text{ et } a = b \\ \emptyset & \text{si } \lambda = 1 \text{ et } a \neq b \\ \{(b+y, y) \mid y \in \mathbb{R}\} & \text{si } \lambda = -1 \text{ et } a = -b \\ \emptyset & \text{si } \lambda = 1 \text{ et } a \neq -b \end{cases}}.$$

(b) *Justifier que si $|\lambda| \neq 1$ alors $\varphi_\lambda : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est bijective et déterminer sa bijection réciproque.*

▶ On suppose que $|\lambda| \neq 1$ donc que $\lambda \neq 1$ et $\lambda \neq -1$. D'après le résultat de la question précédente, l'équation $\varphi_\lambda(x, y) = (a, b)$ d'inconnues $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ admet une unique solution pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On en déduit que $\boxed{\varphi_\lambda : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \text{ est bijective}}$. De plus, sa bijection réciproque est par définition :

$$\boxed{\varphi_\lambda^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (a, b) \mapsto \left(\frac{b - \lambda a}{1 - \lambda^2}, \frac{a - \lambda b}{1 - \lambda^2}\right)}.$$

(c) *Étudier l'injectivité et la surjectivité de φ_λ dans les cas $\lambda = -1$ et $\lambda = 1$. Dans le cas de réponses négatives, on les justifiera par des contre-exemples.*

▶ 1er cas : $\lambda = -1$. D'après le résultat de la question 1(a), le couple $(a, b) = (0, 0)$ admet au moins deux antécédents car $a = -b$ (par exemple $(0, 0)$ pour $y = 0$ et $(1, 1)$ pour $y = 1$) donc $\boxed{\varphi_{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \text{ n'est pas injective}}$. De plus, le couple $(a, b) = (0, 1)$ n'admet pas d'antécédents car $a \neq -b$ donc $\boxed{\varphi_{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \text{ n'est pas surjective}}$.
2e cas : $\lambda = 1$. D'après le résultat de la question 1(a), le couple $(a, b) = (0, 0)$ admet au moins

deux antécédents car $a = b$ (par exemple $(0,0)$ pour $y=0$ et $(-1,1)$ pour $y=1$) donc $\boxed{\varphi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \text{ n'est pas injective}}$. De plus, le couple $(a,b)=(0,1)$ n'admet pas d'antécédents car $a \neq b$ donc $\boxed{\varphi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \text{ n'est pas surjective}}$.

2. *Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Calculer $\varphi_{\lambda'}(\varphi_\lambda(x,y))$.*

▶ On a :

$$\begin{aligned}\varphi_{\lambda'}\left(\varphi_\lambda(x,y)\right) &= \varphi_{\lambda'}\left(\lambda x + y, \lambda y + x\right)\\ &= \Big(\lambda'(\lambda x + y) + (\lambda y + x), \lambda'(\lambda y + x) + (\lambda x + y)\Big)\\ &= \boxed{\Big((\lambda'\lambda+1)x + (\lambda'+\lambda)y, (\lambda'\lambda+1)y + (\lambda'+\lambda)x\Big)}.\end{aligned}$$

On rappelle que pour tout $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, on définit : $c \times (a,b) = (ca, cb)$.

3. *On suppose que $\lambda + \lambda' \neq 0$ dans cette question.*

(a) *Montrer que :*

$$\varphi_{\lambda'} \circ \varphi_\lambda = c \times \varphi_\mu$$

où $(c,\mu) \in \mathbb{R}^2$ sont deux constantes à exprimer en fonction de λ et λ'.

▶ On a d'après le résultat de la question précédente :

$$\begin{aligned}\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \Big(\varphi_{\lambda'} \circ \varphi_\lambda\Big)(x,y) &= \varphi_{\lambda'}\left(\varphi_\lambda(x,y)\right) \quad \text{par définition de la composition}\\ &= \Big((\lambda'\lambda+1)x + (\lambda'+\lambda)y, (\lambda'\lambda+1)y + (\lambda'+\lambda)x\Big)\\ &= (\lambda'+\lambda) \times \left(\frac{\lambda'\lambda+1}{\lambda'+\lambda}x + y, \frac{\lambda'\lambda+1}{\lambda'+\lambda}y + x\right) \quad \text{car } \lambda+\lambda' \neq 0\\ &= (\lambda'+\lambda) \times \varphi_{(\lambda'\lambda+1)/(\lambda'+\lambda)}(x,y).\end{aligned}$$

On en déduit que $\varphi_{\lambda'} \circ \varphi_\lambda = c \times \varphi_\mu$ en posant $\boxed{c = \lambda' + \lambda}$ et $\boxed{\mu = \frac{\lambda'\lambda+1}{\lambda'+\lambda}}$.

(b) *Que peut-on en déduire pour $\varphi_\lambda \circ \varphi_{\lambda'}$? Pourquoi ce résultat est-il surprenant ?*

▶ En raisonnant comme à la question précédente (en intervertissant les constantes λ et λ'), on obtient que $\varphi_\lambda \circ \varphi_{\lambda'} = c' \times \varphi_{\mu'}$ en posant $c' = \lambda + \lambda' = \lambda' + \lambda = c$ et $\mu' = \frac{\lambda\lambda'+1}{\lambda+\lambda'} = \frac{\lambda'\lambda+1}{\lambda'+\lambda} = \mu$. Par conséquent :

$$\varphi_\lambda \circ \varphi_{\lambda'} = c' \times \varphi_{\mu'} = c \times \varphi_\mu = \boxed{\varphi_{\lambda'} \circ \varphi_\lambda}.$$

Ce résultat est surprenant car $\boxed{\text{la composition des applications n'est pas commutative}}$.

4. *On suppose que $\lambda + \lambda' = 0$ dans cette question.*

(a) *Montrer que :*

$$\varphi_{\lambda'} \circ \varphi_\lambda = d \times \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$$

où $d \in \mathbb{R}$ est une constante à exprimer en fonction de λ.

▶ On a d'après le résultat de la question 2 :

$$\begin{aligned}\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \Big(\varphi_{\lambda'} \circ \varphi_\lambda\Big)(x,y) &= \varphi_{\lambda'}\left(\varphi_\lambda(x,y)\right) \quad \text{par définition de la composition}\\ &= \Big((\lambda'\lambda+1)x + 0, (\lambda'\lambda+1)y + 0\Big) \quad \text{car } \lambda+\lambda' = 0\\ &= (\lambda'\lambda+1) \times (x,y)\\ &= (\lambda'\lambda+1) \times \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}(x,y).\end{aligned}$$

On en déduit que $\varphi_{\lambda'} \circ \varphi_\lambda = d \times \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$ en posant $\boxed{d = \lambda'\lambda + 1}$.

(b) *On suppose que $d \neq 0$. Calculer $\varphi_\lambda \circ \left(\frac{1}{d} \times \varphi_{\lambda'}\right)$. Que peut-on en déduire ?*

▶ On a :

$$\begin{aligned}
\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \Big(\varphi_\lambda \circ \left(\tfrac{1}{d} \times \varphi_{\lambda'}\right)\Big)(x,y) &= \varphi_\lambda\left(\tfrac{1}{d} \times \varphi_{\lambda'}(x,y)\right) \quad \text{par définition de la composition} \\
&= \varphi_\lambda\left(\tfrac{1}{d} \times (\lambda' x + y, \lambda' y + x)\right) \\
&= \varphi_\lambda\left(\tfrac{\lambda' x + y}{d}, \tfrac{\lambda' y + x}{d}\right) \\
&= \left(\lambda \tfrac{\lambda' x + y}{d} + \tfrac{\lambda' y + x}{d}, \lambda \tfrac{\lambda' y + x}{d} + \tfrac{\lambda' x + y}{d}\right) \\
&= \tfrac{1}{d} \times \Big((\lambda\lambda' + 1)x + (\lambda + \lambda')y, (\lambda\lambda' + 1)y + (\lambda + \lambda')x\Big) \\
&= \tfrac{\lambda\lambda' + 1}{d} \times (x + 0, y + 0) \quad \text{car } \lambda + \lambda' = 0 \\
&= \boxed{(x,y)} \quad \text{car } d = \lambda\lambda' + 1.
\end{aligned}$$

Ainsi $\varphi_\lambda \circ \left(\frac{1}{d} \times \varphi_{\lambda'}\right) = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$. Or on a montré à la question précédente que $\left(\frac{1}{d} \times \varphi_{\lambda'}\right) \circ \varphi_\lambda$ (en divisant le résultat par d car $d \neq 0$). On en déduit que $\boxed{\varphi_\lambda : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \text{ est une application inversible}}$ et que son application inverse est $\boxed{\varphi_\lambda^{-1} = \frac{1}{d} \times \varphi_{\lambda'}}$.

On retrouve le résultat de la question 1(b) car $\lambda + \lambda' = 0 \iff \lambda' = -\lambda$ donc :

$$d = -\lambda^2 + 1 \neq 0 \iff |\lambda| \neq 1$$

$$\text{et} \quad \tfrac{1}{d} \times \varphi_{\lambda'} : (a,b) \mapsto \tfrac{1}{-\lambda^2+1} \times (-\lambda a + b, -\lambda b + a) = \left(\frac{b - \lambda a}{1 - \lambda^2}, \frac{a - \lambda b}{1 - \lambda^2}\right).$$

Exercice 3

On considère des grilles rectangulaires de mots croisés ayant 6 lignes, 7 colonnes et 10 cases noires (toutes les autres cases sont vides). On pourra répondre aux questions suivantes sans simplifier les résultats.

1. *Combien peut-on former de telles grilles différentes ?*

   ▶ Chaque grille contient $6 \times 7 = 42$ cases. Dénombrer les grilles différentes revient à dénombrer les façons de placer les 10 cases noires parmi les 42 cases. Le nombre de grilles différentes est donc égal au nombre de 10-combinaisons d'un ensemble à 42 éléments, c'est-à-dire :

$$\boxed{\binom{42}{10}}.$$

2. *Parmi ces grilles, combien d'entre-elles ont :*

   (a) *aucune case noire dans un coin ?*

   ▶ Chaque grille a 4 coins et donc $42 - 4 = 38$ cases qui ne sont pas des coins. En raisonnant comme à la question précédente, le nombre de grilles différentes ayant aucune case noire dans un coin est égal à :

$$\boxed{\binom{38}{10}}.$$

   (b) *au plus deux cases noires dans des coins ?*

   ▶ Avoir au plus deux cases noires dans des coins revient à avoir :

   — aucune case noire dans un coin,

   — ou bien une seule case noire dans un coin,

   — ou bien exactement deux cases noires dans deux coins.

On a partitionné l'ensemble des grilles différentes ayant au plus deux cases noires dans des coins en trois sous-ensembles (disjoints). Son cardinal est donc égal à :

$$\underbrace{\binom{38}{10}}_{\substack{\text{choix de 10 cases}\\ \text{pas dans des coins}}} \overbrace{+}^{\text{ou bien}} \underbrace{\binom{4}{1}}_{\substack{\text{choix de 1 case}\\ \text{dans 1 des 4 coins}}} \overbrace{\times}^{\text{puis}} \underbrace{\binom{38}{9}}_{\substack{\text{choix de 9 cases}\\ \text{pas dans des coins}}} \overbrace{+}^{\text{ou bien}} \underbrace{\binom{4}{2}}_{\substack{\text{choix de 2 cases}\\ \text{dans 2 des 4 coins}}} \overbrace{\times}^{\text{puis}} \underbrace{\binom{38}{8}}_{\substack{\text{choix de 8 cases}\\ \text{pas dans des coins}}}$$

$$= \boxed{\binom{38}{10} + 4\binom{38}{9} + \binom{4}{2}\binom{38}{8}}.$$

On peut également passer au complémentaire en dénombrant les grilles ayant au moins trois cases noires dans des coins, c'est-à-dire :

$$\binom{42}{10} - \binom{4}{3}\binom{38}{7} - \binom{38}{6}.$$

Les deux résultats sont bien égaux d'après la formule de Vandermonde :

$$\binom{42}{10} = \sum_{k=0}^{10} \binom{4}{k}\binom{38}{10-k}.$$

(c) *au moins une case noire dans la première ligne ?*

▶ Le complémentaire de l'ensemble des grilles ayant au moins une case noire dans la première ligne est l'ensemble des grilles n'ayant aucune case noire dans la première ligne. Puisqu'il y a $42 - 7 = 35$ cases qui ne sont pas dans la première ligne, le nombre de grilles différentes ayant au moins une case noire dans la première ligne est égal à :

$$\boxed{\binom{42}{10} - \binom{35}{10}}.$$

(d) *une seule case noire dans la dernière ligne et une seule case noire dans la première colonne ?*

▶ Avoir une seule case noire dans la dernière ligne et une seule case noire dans la première colonne revient à avoir :

— une case noire à l'intersection de la dernière ligne et de la première colonne puis les neuf autres cases noires dans le reste de la grille,

— ou bien une case noire dans la dernière ligne mais pas dans la première colonne puis une case noire dans la première colonne mais pas dans la première ligne puis les huit autres cases noires dans le reste de la grille.

On a partitionné l'ensemble des grilles différentes ayant une seule case noire dans la dernière ligne et une seule case noire dans la première colonne en deux-sous-ensembles (disjoints). Son cardinal est donc égal à :

$$\underbrace{\binom{42-7-6+1}{9}}_{\substack{\text{choix de 9 cases}\\ \text{dans le reste de la grille}}} \overbrace{+}^{\text{ou bien}} \underbrace{\binom{7-1}{1}}_{\substack{\text{choix de 1 case}\\ \text{dans la dernière ligne}}} \overbrace{\times}^{\text{puis}} \underbrace{\binom{6-1}{1}}_{\substack{\text{choix de 1 case}\\ \text{dans la première colonne}}} \overbrace{\times}^{\text{puis}} \underbrace{\binom{42-7-6+1}{8}}_{\substack{\text{choix de 8 cases}\\ \text{dans le reste de la grille}}}$$

$$= \boxed{\binom{30}{9} + 30\binom{30}{8}}.$$

3. *Combien y a-t-il de façons différentes de remplir une telle grille (avec l'alphabet latin) ?*

▶ Chaque grille contient $42-10=32$ cases à remplir (qui ne sont pas noires). Dénombrer les façons différentes de remplir une grille revient à dénombrer les façons de placer une des 26 lettres de l'alphabet dans chaque case. Le nombre de façons différentes de remplir une grille est donc égal au nombre de 32-listes avec répétition d'un ensemble à 26 éléments, c'est-à-dire :

$$\boxed{26^{32}}.$$

Exercice 4

On considère la fonction réelle $f:\theta\mapsto 2\sin(\theta/2)+3\sin(\theta/3)$.

1. *Justifier qu'il suffit d'étudier f sur l'intervalle $[0,6\pi]$ pour en déduire son étude sur $\mathbb{R}$.*

▶ La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ comme somme et composées de fonctions usuelles définies sur $\mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}\forall\theta\in\mathbb{R},\quad f(\theta+12\pi)&=2\sin\left(\frac{\theta+12\pi}{2}\right)+3\sin\left(\frac{\theta+12\pi}{3}\right)\\&=2\sin\left(\frac{\theta}{2}+6\pi\right)+3\sin\left(\frac{\theta}{3}+4\pi\right)\\&=2\sin\left(\frac{\theta}{2}+3\times2\pi\right)+3\sin\left(\frac{\theta}{3}+2\times2\pi\right)\\&=\underbrace{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)+3\sin\left(\frac{\theta}{3}\right)}_{\text{car sin est }2\pi\text{-périodique}}=f(\theta).\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est } 12\pi\text{-périodique}}$.

Attention : f n'est pas 6π-périodique ! Par exemple :

$$f(\pi)=2\sin(\pi/2)+3\sin(\pi/3)=2+3\tfrac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{et}\quad f(\pi+6\pi)=f(7\pi)=2\sin(7\pi/2)+3\sin(7\pi/3)=-2+3\tfrac{\sqrt{3}}{2}\neq f(\pi).$$

Il suffit donc d'étudier f sur un intervalle de longueur 12π, par exemple $]-6\pi,6\pi]$. Or on a de plus :

$$\begin{aligned}\forall\theta\in\mathbb{R},\quad f(-\theta)&=2\sin\left(\frac{-\theta}{2}\right)+3\sin\left(\frac{-\theta}{3}\right)\\&=\underbrace{-2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)-3\sin\left(\frac{\theta}{3}\right)}_{\text{car sin est impaire}}=-f(\theta).\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est impaire}}$. Il suffit donc de l'étudier sur $]-6\pi,6\pi]\cap[0,+\infty[=[0,6\pi]$. Finalement, il suffit d'étudier f sur $\boxed{[0,6\pi]}$ pour en déduire son étude sur $\mathbb{R}$ par imparité et périodicité.

2. *Dresser le tableau des variations de f sur $[0,6\pi]$ sans calculer la valeur de chaque extremum.*

▶ La fonction f est dérivable sur $[0,6\pi]$ comme somme et composées de fonction usuelles dérivables sur $\mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}\forall x\in[0,6\pi],\quad f'(\theta)&=\frac{2}{2}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)+\frac{3}{3}\cos\left(\frac{\theta}{3}\right)=\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)+\cos\left(\frac{\theta}{3}\right)=\mathrm{Re}\left(e^{i\theta/2}+e^{i\theta/3}\right)\\&=\mathrm{Re}\left(2\cos\left(\frac{\frac{\theta}{2}-\frac{\theta}{3}}{2}\right)e^{i(\theta/2+\theta/3)/2}\right)\qquad\text{par factorisation par l'angle moitié}\\&=\mathrm{Re}\left(2\cos\left(\frac{\theta}{12}\right)e^{i5\theta/12}\right)=2\cos\left(\frac{\theta}{12}\right)\cos\left(\frac{5\theta}{12}\right).\end{aligned}$$

Pensez à factoriser l'expression de vos dérivées (à l'aide d'une factorisation par l'angle moitié dans le cas de fonctions trigonométriques) pour pouvoir facilement étudier le signe.

Or on a d'après le cercle trigonométrique :

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\theta}{12}\right) \geqslant 0 &\iff \exists k \in \mathbb{Z},\ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leqslant \frac{\theta}{12} \leqslant \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z},\ -6\pi + 24k\pi \leqslant \theta \leqslant 6\pi + 24k\pi\end{aligned}$$

et de même :

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{5\theta}{12}\right) \geqslant 0 &\iff \exists k \in \mathbb{Z},\ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leqslant \frac{5\theta}{12} \leqslant \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z},\ -\frac{6\pi}{5} + \frac{24k\pi}{5} \leqslant \theta \leqslant \frac{6\pi}{5} + \frac{24k\pi}{5}.\end{aligned}$$

On en déduit le tableau des variations de f sur $[0, 6\pi]$:

θ	0		$\frac{6\pi}{5}$		$\frac{18\pi}{5}$		6π
$\cos(\frac{\theta}{12})$		$+$		$+$		$+$	0
$\cos(\frac{5\theta}{12})$		$+$	0	$-$	0	$+$	0
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0
$f(x)$	$f(0)$	$\nearrow$	$f(\frac{6\pi}{5})$	$\searrow$	$f(\frac{18\pi}{5})$	$\nearrow$	$f(6\pi)$

3. *En déduire l'étude de l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.*

   ▶ D'après le tableau des variations précédent, on remarque que certains réels ont on moins deux antécédents par f (par exemple les réels compris entre $\max\{f(0), f(18\pi/5)\}$ et $f(6\pi/5)$) donc $\boxed{\text{l'application } f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ n'est pas injective}}$. De plus, puisque la fonction f est impaire et 12π-périodique d'après le résultat de la question 1, on remarque que certains réels n'ont pas d'antécédents par f (par exemple les réels strictement supérieurs à $\max\{f(6\pi/5), -f(6\pi/5)\}$) donc $\boxed{\text{l'application } f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ n'est pa}}$
   Par conséquent $\boxed{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ n'est pas bijective}}$.

   Attention !! Le tableau des variations sur $[0, 6\pi]$ n'est pas suffisant pour étudier la surjectivité de f sur $\mathbb{R}$: un réel qui n'a pas d'antécédent dans $[0, 6\pi]$ pourrait en avoir un dans $\mathbb{R}$ (c'est d'ailleurs le cas de $f(-6\pi/5) < \min\{f(0), f(18\pi/5)\}$ comme on peut le vérifier avec une calculatrice). Il faut donc utiliser l'imparité et la périodicité pour étudier la surjectivité sur $\mathbb{R}$.

4. (a) *Montrer que le maximum de f sur $[0, 6\pi]$ vaut $5\sin(2\pi/5)$.*

   ▶ On a d'après le cercle trigonométrique :

$$f(6\pi) = 2\sin(3\pi) + 3\sin(2\pi) = 0$$

$$\text{et} \quad f\left(\frac{6\pi}{5}\right) = 2\sin\left(\frac{3\pi}{5}\right) + 3\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = 2\sin\left(\pi - \frac{3\pi}{5}\right) + 3\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = 5\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) > 0.$$

   D'après le tableau des variations de la question 2, on en déduit que le maximum de f sur $[0, 6\pi]$ vaut $\boxed{5\sin(2\pi/5)}$.

(b) *Exprimer le minimum de f sur $[0, 6\pi]$ en fonction de $\sin(\pi/5)$.*

▶ On a d'après le cercle trigonométrique :

$$f(0) = 2\sin(0) + 3\sin(0) = 0$$

$$\text{et} \quad f\left(\frac{18\pi}{5}\right) = 2\sin\left(\frac{9\pi}{5}\right) + 3\sin\left(\frac{6\pi}{5}\right) = 2\sin\left(2\pi - \frac{\pi}{5}\right) + 3\sin\left(\pi + \frac{\pi}{5}\right) = -5\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) < 0.$$

D'après le tableau des variations de la question 2, on en déduit que le maximum de f sur $[0, 6\pi]$ vaut $\boxed{-5\sin(\pi/5)}$.

(c) *Que valent les extrema de f sur $\mathbb{R}$?*

▶ D'après le cercle trigonométrique, on a $0 < \sin(\pi/5) < \sin(2\pi/5)$. Puisque la fonction f est impaire et 12π-périodique, on déduit des résultats précédents que le maximum de f sur $\mathbb{R}$ vaut $\boxed{5\sin(2\pi/5)}$ et que son minimum vaut $\boxed{-5\sin(2\pi/5)}$.

5. *Déterminer l'image directe par f de chaque ensemble suivant :*

$$I_1 =]0, 3\pi[, \quad I_2 =]2\pi, 4\pi[, \quad I_3 = [-\pi, \pi] \quad et \quad I_4 = [100\pi, 200\pi].$$

▶ On a le tableau des variations suivant :

θ	$\frac{-6\pi}{5}$	$-\pi$	0	π	$\frac{6\pi}{5}$	2π	3π	$\frac{18\pi}{5}$	4π	6π
$f(x)$	$-5\sin(\frac{2\pi}{5})$	$f(-\pi)$	0	$f(\pi)$	$5\sin(\frac{2\pi}{5})$	$f(2\pi)$	$f(3\pi)$	$-5\sin(\frac{\pi}{5})$	$f(4\pi)$	0

— On a $f(3\pi) = 2\sin(3\pi/2) + 3\sin(\pi) = -2 < 0$ donc $\boxed{f(I_1) =]-2, 5\sin(2\pi/5)]}$.

— On a $f(2\pi) = 2\sin(\pi) + 3\sin(2\pi/3) = 3\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $f(4\pi) = 2\sin(2\pi) + 3\sin(4\pi/3) = -3\frac{\sqrt{3}}{2} < f(2\pi)$ donc $\boxed{f(I_2) = [-5\sin(\pi/5), 3\sqrt{3}/2[}$.

— On a $f(\pi) = 2\sin(\pi/2) + 3\sin(\pi/3) = 2 + 3\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $f(-\pi) = -f(\pi) = -2 - 3\frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $\boxed{f(I_3) = [-2 - 3\frac{\sqrt{3}}{2}, 2 + 3\frac{\sqrt{3}}{2}]}$.

— L'intervalle I_4 est de longueur $200\pi - 100\pi = 100\pi > 12\pi$ or la fonction f est 12π-périodique, donc $\boxed{f(I_4) = [-5\sin(2\pi/5), 5\sin(2\pi/5)]}$ d'après le résultat de la question précédente.

Pensez à faire un tableau de variations pour ce type de questions, ça aide beaucoup. Faites attention aux bornes des intervalles (incluses ou excluses).

6. *Justifier que la restriction de f à $[2\pi, 3\pi]$ réalise une bijection vers un ensemble à déterminer.*

▶ D'après le tableau des variations précédent, la fonction f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[2\pi, 3\pi]$. D'après le théorème de la bijection, on en déduit que $\boxed{\text{la restriction de } f \text{ à } [2\pi, 3\pi] \text{ est bijective vers } [f(3\pi), f(2\pi)] = [-2, 3\sqrt{3}/2]}$.

DS n$^{\text{o}}$ 4 de mathématiques

durée : 2 heures

Exercice 1

Le but de cet exercice est de déterminer l'ensemble $\mathscr{S}$ des fonctions $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ telles que :

$$f \text{ est dérivable sur }]0,+\infty[\text{ et } \forall t > 0,\ f'(t) = f(1/t).$$

1. Dans cette question, on fixe $f \in \mathscr{S}$ et on définit la fonction $g : x \mapsto f(e^x)$.
   (a) Justifier que g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que g est solution de l'équation différentielle suivante :
   $$y'' - y' + y = 0. \tag{E}$$
   (c) Résoudre (E).
   (d) En déduire que f est de la forme $t \mapsto Af_1(t) + Bf_2(t)$ où (A, B) sont deux constantes réelles et (f_1, f_2) sont deux fonctions définies sur $]0,+\infty[$ à déterminer.
   (e) En considérant les cas $t = 1$ et $t = e^{\pi/\sqrt{3}}$, montrer que A et B sont solutions d'un système linéaire (S) de deux équations à déterminer.
   (f) Résoudre (S).
2. Conclure

Exercice 2

Calculer chacune des intégrales suivantes.

$$I_1 = \int_0^1 \exp\left(\sqrt[3]{t}\right) \mathrm{d}t \quad \text{en posant } t = x^3$$
$$I_2 = \int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + 2x + 4}$$
$$I_3 = \int_0^1 2^t \sin(\pi t)\mathrm{d}t$$
$$I_4 = \int_0^{\pi/4} \tan^3(\theta)\mathrm{d}\theta$$

Problème

Dans ce problème, on fixe un réel $\mu \geqslant 0$ et on étudie les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$, $(b_n)_{n\geqslant 0}$, $(c_n)_{n\geqslant 0}$ et $(d_n)_{n\geqslant 0}$ définies par la donnée de leur premier terme $(a_0, b_0, c_0, d_0) \in \mathbb{R}^4$ et les relations de récurrences suivantes :

$$\forall n \geqslant 0, \quad a_{n+1} = \frac{\mu a_n + b_n + c_n + d_n}{\mu + 3}, \qquad b_{n+1} = \frac{a_n + \mu b_n + c_n + d_n}{\mu + 3},$$
$$c_{n+1} = \frac{a_n + b_n + \mu c_n + d_n}{\mu + 3} \quad \text{et} \quad d_{n+1} = \frac{a_n + b_n + c_n + \mu d_n}{\mu + 3}.$$

Introduction

On pose, pour tout entier $n \geqslant 0$, la matrice colonne $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

1. Déterminer une matrice carrée $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telle que $X_{n+1} = MX_n$ pour tout entier $n \geqslant 0$.
2. Montrer que $X_n = M^n X_0$ pour tout entier $n \geqslant 0$.

On propose de calculer M^n en fonction de l'entier $n \geqslant 0$ à l'aide de deux méthodes différentes. Les deux parties suivantes sont donc indépendantes.

1$^{\text{re}}$ méthode

Dans cette partie, on considère pour tout entier $n \geqslant 0$ la proposition suivante :

$$\mathscr{P}(n) : \text{«il existe } (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } M^n = x_n M + y_n \mathrm{I}_4\text{»}$$

où I_4 désigne la matrice identité d'ordre 4.

3. Montrer que $\mathscr{P}(0)$ et $\mathscr{P}(1)$ sont vraies.
4. On pose la fonction polynomiale $P : x \mapsto (x-1)(x-\lambda)$ où $\lambda = (\mu - 1)/(\mu + 3)$.
   (a) Montrer que $P(M)$ est égale à la matrice carrée nulle d'ordre 4 notée 0_4.
   (b) En déduire que $\mathscr{P}(2)$ est vraie.
5. On fixe un entier $n \geqslant 0$ et on suppose que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. Montrer que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
6. Que peut-on déduire des résultats précédents ? Justifier que les suites $(x_n)_{n\geqslant 0}$ et $(y_n)_{n\geqslant 0}$ obtenues sont récurrentes linéaires d'ordre deux.
7. Exprimer, pour tout entier $n \geqslant 0$, x_n et y_n en fonction de n et λ.
8. En déduire, pour tout entier $n \geqslant 0$, une expression des coefficients M^n en fonction de n et λ.

2$^{\text{e}}$ méthode

Dans cette partie, on pose la matrice $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

9. Exprimer M en fonction de μ, de la matrice identité d'ordre 4 notée I_4 et de U.
10. Exprimer U^k en fonction de U pour tout entier $k \geqslant 1$.
11. Soit un entier $n \geqslant 0$. Simplifier l'expression de M^n en fonction de n, μ, I_4 et U.
12. Exprimer, pour tout entier $n \geqslant 0$, les coefficients M^n en fonction de n et $\lambda = (\mu - 1)/(\mu + 3)$.

Conclusion

13. À l'aide de résultats précédents, déterminer, pour tout entier $n \geqslant 0$, des expressions de a_n, b_n, c_n et d_n en fonction de n, λ, a_0, b_0, c_0 et d_0.
14. Quelle est la nature de $(a_n)_{n\geqslant 0}$, $(b_n)_{n\geqslant 0}$, $(c_n)_{n\geqslant 0}$ et $(d_n)_{n\geqslant 0}$? Déterminer leur limite si elles existent.
15. Discuter, sans justifier, la cohérence du résultat précédent dans chacun des cas suivants :
    (a) $a_0 = b_0 = c_0 = d_0$;
    (b) ou $\mu = 1$.

Corrigé du DS n° 4 de mathématiques

Exercice 1

Le but de cet exercice est de déterminer l'ensemble $\mathscr{S}$ des fonctions $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ telles que :

$$f \text{ est dérivable sur }]0,+\infty[\text{ et } \forall t > 0,\ f'(t) = f(1/t).$$

1. *Dans cette question, on fixe $f \in \mathscr{S}$ et on définit la fonction $g : x \mapsto f(e^x)$.*

   (a) *Justifier que g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.*

   ► On a $g = f \circ \exp$. Or exp est dérivable sur $\mathbb{R}$, $\exp(x) \in]0,+\infty[$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et f est dérivable sur $]0,+\infty[$. On en déduit que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables. De plus $g' = \exp' \times (f' \circ \exp)$ donc :

   $$g' : x \mapsto e^x f'(e^x) = e^x f(1/e^x) = e^x f(e^{-x}) \quad \text{car } f \in \mathscr{S}.$$

   On a $g' = \exp \times (f \circ h)$ où $h : x \mapsto e^{-x}$. Or exp est dérivable sur $\mathbb{R}$, h est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables, $h(x) \in]0,+\infty[$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et f est dérivable sur $]0,+\infty[$. On en déduit que g' est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit et composée de fonctions dérivables, et donc que $\boxed{g \text{ est deux fois dérivable sur } \mathbb{R}}$.

   (b) *Montrer que g est solution de l'équation différentielle suivante :*

   $$y'' - y' + y = 0. \tag{E}$$

   ► En reprenant les calculs de la question précédente, on obtient :

   $$g'' = \exp' \times (f \circ h) + \exp \times (f \circ h)' = \exp' \times (f \circ h) + \exp \times h' \times (f' \circ h)$$

   donc :

   $$g'' : x \mapsto e^x f(e^{-x}) + e^x(-e^{-x}) f'(e^{-x}) = g'(x) - f(1/e^{-x}) = g'(x) - f(e^x) = g'(x) - g(x).$$

   Ainsi $g'' = g' - g$ et par conséquent $\boxed{g \text{ est bien solution de (E)}}$.

   (c) *Résoudre (E).*

   ► On reconnaît une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants. Son équation caractéristique est :

   $$r^2 - r + 1 = 0.$$

   Le discriminant de cette équation de degré 2 vaut $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$ donc l'équation caractéristique admet deux solutions complexes conjuguées :

   $$r_1 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

   Chaque solution de (E) est donc de la forme :

   $$\boxed{g : x \mapsto e^{x/2}\left(A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)}$$

   où $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ sont deux constantes.

(d) *En déduire que f est de la forme $t \mapsto Af_1(t) + Bf_2(t)$ où (A, B) sont deux constantes réelles et (f_1, f_2) sont deux fonctions définies sur $]0, +\infty[$ à déterminer.*

▶ On a $f(e^x) = g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ par définition de g, donc $f(t) = g(\ln(t))$ pour tout $t > 0$ en posant $t = e^x \iff x = \ln(t)$. D'après le résultat de la question précédente, on obtient donc que :

$$\boxed{f : t \mapsto A \underbrace{e^{\ln(t)/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(t)\right)}_{=f_1(t)} + B \underbrace{e^{\ln(t)/2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(t)\right)}_{=f_2(t)} = Af_1(t) + Bf_2(t)}$$

où $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ sont deux constantes. Puisque $\ln(t)/2 = \ln(t^{1/2}) = \ln(\sqrt{t})$ pour tout $t > 0$, on obtient après simplifications :

$$\boxed{f_1 : t \mapsto \sqrt{t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(t)\right)} \quad \text{et} \quad \boxed{f_2 : t \mapsto \sqrt{t}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(t)\right)}.$$

(e) *En considérant les cas $t = 1$ et $t = e^{\pi/\sqrt{3}}$, montrer que A et B sont solutions d'un système linéaire (S) de deux équations à déterminer.*

▶

> *Avant de vous lancer dans des calculs inutiles, réfléchissez à ce que vous voulez obtenir. Remplacer t par 1 ou par $e^{\pi/\sqrt{3}}$ dans l'expression de $f(t)$ ne donnera rien puisqu'on ne connait pas les valeurs de $f(1)$ et $f(e^{\pi/\sqrt{3}})$. Par contre, pensez à exploiter l'hypothèse initiale que $f \in \mathscr{S}$, c'est-à-dire que $f'(t) = f(1/t)$ pour tout $t > 0$, qui permet d'obtenir des équations dont on peut calculer les deux membres.*

On sait que $f \in \mathscr{S}$ donc que $f'(t) = f(1/t)$ pour tout $t > 0$. Or on a d'après le résultat de la question précédente pour tout $t > 0$:

$$\begin{aligned}
f'(t) &= Af_1'(t) + Bf_2'(t) \\
&= A\left[\frac{1}{2\sqrt{t}} \times \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(t)\right) + \sqrt{t} \times \frac{\sqrt{3}}{2t}\left(-\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(t)\right)\right)\right] \\
&\qquad + B\left[\frac{1}{2\sqrt{t}} \times \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(t)\right) + \sqrt{t} \times \frac{\sqrt{3}}{2t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(t)\right)\right] \\
&= \left(\frac{A}{2\sqrt{t}} + \frac{B\sqrt{3}}{2\sqrt{t}}\right)\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(t)\right) + \left(-\frac{A\sqrt{3}}{2\sqrt{t}} + \frac{B}{2\sqrt{t}}\right)\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(t)\right)
\end{aligned}$$

On obtient donc pour $t = 1$:

$$\begin{aligned}
& f'(1) = f(1/1) = f(1) \\
\iff\ & \left(\frac{A + B\sqrt{3}}{2\sqrt{1}}\right)\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(1)\right) + \left(\frac{-A\sqrt{3} + B}{2\sqrt{1}}\right)\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(t)\right) \\
&\qquad = A\sqrt{1}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(1)\right) + B\sqrt{1}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(1)\right) \\
\iff\ & \left(\frac{A + B\sqrt{3}}{2}\right)\cos(0) + \left(\frac{-A\sqrt{3} + B}{2}\right)\sin(0) = A\cos(0) + B\sin(0) \\
\iff\ & \boxed{\frac{A + B\sqrt{3}}{2} = A}.
\end{aligned}$$

Et de même pour $t = e^{\pi/\sqrt{3}}$:

$$
\begin{aligned}
& f'(e^{\pi/\sqrt{3}}) = f(1/e^{\pi/\sqrt{3}}) = f(e^{-\pi/\sqrt{3}}) \\
\iff & \left(\frac{A+B\sqrt{3}}{2\sqrt{e^{\pi/\sqrt{3}}}}\right)\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(e^{\pi/\sqrt{3}})\right) + \left(\frac{-A\sqrt{3}+B}{2\sqrt{e^{\pi/\sqrt{3}}}}\right)\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(e^{\pi/\sqrt{3}})\right) \\
& \qquad = A\sqrt{e^{-\pi/\sqrt{3}}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(e^{-\pi/\sqrt{3}})\right) + B\sqrt{e^{-\pi/\sqrt{3}}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(e^{-\pi/\sqrt{3}})\right) \\
\iff & \left(\frac{A+B\sqrt{3}}{2e^{\pi/(2\sqrt{3})}}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \left(\frac{-A\sqrt{3}+B}{2e^{\pi/(2\sqrt{3})}}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{A}{e^{\pi/(2\sqrt{3})}}\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{B}{e^{\pi/(2\sqrt{3})}}\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \\
\iff & \boxed{\frac{-A\sqrt{3}+B}{2} = -B}.
\end{aligned}
$$

Par conséquent, A et B sont solutions du système linéaire suivant :

$$
\begin{cases} A + B\sqrt{3} = 2A \\ -A\sqrt{3} + B = -2B \end{cases} \iff \boxed{\begin{cases} A - B\sqrt{3} = 0 \\ A\sqrt{3} - 3B = 0 \end{cases}}. \tag{S}
$$

(f) Résoudre (S).

▶ On reconnaît un système linéaire homogène de deux équations à deux inconnues qui peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$
\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.
$$

Le déterminant de la matrice des coefficients vaut $-3 - \sqrt{3}(-\sqrt{3}) = 0$ donc cette matrice n'est pas inversible. On en déduit que (S) n'est pas de rang maximal et donc qu'il admet une infinité de solutions (car il est homogène). On obtient après l'opération $L_2 \leftarrow L_2 - \sqrt{3}L_1$:

$$
\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff A - B\sqrt{3} = 0 \iff A = B\sqrt{3}.
$$

Ainsi, $\boxed{\text{(S) admet une infinité de solutions qui sont de la forme } (B\sqrt{3}, B) \text{ où } B \in \mathbb{R}}$.

2. *Conclure*

▶ On déduit de la question 1 que si $f \in \mathscr{S}$ alors f est de la forme :

$$
f : t \mapsto B\sqrt{3}f_1(t) + Bf_2(t)
$$

où $B \in \mathbb{R}$ est une constante.

> *Attention : ceci n'est pas suffisant pour pouvoir conclure en déterminant l'ensemble $\mathscr{S}$. Pour l'instant, on a seulement prouvé l'inclusion :*
>
> $$\mathscr{S} \subset \{f : t \mapsto B\sqrt{3}f_1(t) + Bf_2(t) \mid B \in \mathbb{R}\}.$$
>
> *Il faut aussi prouvé l'inclusion réciproque pour pouvoir conclure.*

Maintenant, on fixe $B \in \mathbb{R}$ et on pose $f : t \mapsto B\sqrt{3}f_1(t) + Bf_2(t)$. Alors f est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme somme, produits et composées de fonctions dérivables.

> *Inutile de détailler cette justification : on a déjà montré à la question 1(a) qu'on est capable de le faire. Par contre, il faut donner tous les arguments nécessaires : somme, produit et composée ici.*

De plus on a en reprenant le calcul de la question 1(e) pour tout $t>0$ (en posant $A=B\sqrt{3}$) :

$$\begin{aligned} f'(t) &= \left(\frac{B\sqrt{3}+B\sqrt{3}}{2\sqrt{t}}\right)\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(t)\right)+\left(\frac{-B\sqrt{3}\sqrt{3}+B}{2\sqrt{t}}\right)\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(t)\right)\\ &= \frac{B\sqrt{3}}{\sqrt{t}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(t)\right)-\frac{B}{\sqrt{t}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(t)\right). \end{aligned}$$

Or on a pour tout $t>0$:

$$\begin{aligned} f(1/t) &= B\sqrt{3}f_1(1/t)+Bf_2(1/t)\\ &= B\sqrt{3}\sqrt{\frac{1}{t}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln\left(\frac{1}{t}\right)\right)+B\sqrt{\frac{1}{t}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln\left(\frac{1}{t}\right)\right)\\ &= \frac{B\sqrt{3}}{\sqrt{t}}\cos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(t)\right)+\frac{B}{\sqrt{t}}\sin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(t)\right)\\ &= \frac{B\sqrt{3}}{\sqrt{t}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(t)\right)-\frac{B}{\sqrt{t}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(t)\right)=f'(t). \end{aligned}$$

On en déduit que $f\in\mathscr{S}$. Finalement, on a démontré par double inclusion que :

$$\boxed{\mathscr{S}=\{f:t\mapsto B\sqrt{3}f_1(t)+Bf_2(t)\mid B\in\mathbb{R}\}}.$$

Exercice 2

Calculer chacune des intégrales suivantes.

$$I_1=\int_0^1\exp\left(\sqrt[3]{t}\right)\mathrm{d}t \quad \textit{en posant } t=x^3$$

$$I_2=\int_0^2\frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+4}$$

$$I_3=\int_0^1 2^t\sin(\pi t)\mathrm{d}t$$

$$I_4=\int_0^{\pi/4}\tan^3(\theta)\mathrm{d}\theta$$

▶ On pose $t=\varphi(x)$ où $\varphi:x\mapsto x^3$ dans I_1. On a :

(i) la fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\varphi':x\mapsto 3x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$,

(ii) $\varphi(0)=0$ et $\varphi(1)=1$.

N'oubliez pas de vérifier les hypothèses du théorème de changement de variable dans une intégrale !

Par conséquent :

$$I_1=\int_0^1\exp\left(\sqrt[3]{x^3}\right)3x^2\mathrm{d}x=3\int_0^1 e^x x^2\mathrm{d}x.$$

On pose $u'(x)=e^x$ et $v(x)=x^2$ pour tout $x\in[0,1]$, donc $u(x)=e^x$ et $v'(x)=2x$. On obtient alors à l'aide d'une intégration par parties :

$$I_1=3\left(\left[e^x x^2\right]_0^1-\int_0^1 e^x 2x\mathrm{d}x\right)=3e-6\int_0^1 e^x x\mathrm{d}x.$$

De même, on obtient à l'aide d'une deuxième intégration par parties :

$$I_1 = 3e - 6\left([e^x x]_0^1 - \int_0^1 e^x \mathrm{d}x\right) = 3e - 6e + 6\,[e^x]_0^1 = -3e + 6e - 6 = \boxed{3e - 6}.$$

On a :

$$I_2 = \int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+4} = \int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2-1+4} = \int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2+3} = \frac{1}{3}\int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}.$$

On pose le changement de variable $t = \frac{x+1}{\sqrt{3}} \iff x = t\sqrt{3} - 1 = \psi(t)$. La fonction ψ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\psi' : t \mapsto \sqrt{3}$ est continue sur $\mathbb{R}$. De plus, $\psi(t) = 0 \iff t = \frac{0+1}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}/3$ et $\psi(t) = 2 \iff t = \frac{2+1}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$. Par conséquent :

$$I_2 = \frac{1}{3}\int_{\sqrt{3}/3}^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}\mathrm{d}t}{t^2+1} = \frac{\sqrt{3}}{3}\,[\arctan(t)]_{\sqrt{3}/3}^{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{18}}.$$

On pose $u(t) = 2^t$ et $v'(t) = \sin(\pi t)$ pour tout $t \in [0,1]$, donc $u'(t) = \ln(2)2^t$ et $v(t) = -\cos(\pi t)/\pi$. On obtient alors à l'aide d'une intégration par parties :

$$I_3 = \int_0^1 2^t \sin(\pi t)\mathrm{d}t = \left[2^t \frac{-\cos(\pi t)}{\pi}\right]_0^1 - \int_0^1 \ln(2)2^t \frac{-\cos(\pi t)}{\pi}\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi} + \frac{1}{\pi} + \frac{\ln(2)}{\pi}\int_0^1 2^t \cos(\pi t)\mathrm{d}t.$$

De même, on obtient à l'aide d'une deuxième intégration par parties :

$$I_3 = \frac{3}{\pi} + \frac{\ln(2)}{\pi}\left(\left[2^t \frac{\sin(\pi t)}{\pi}\right]_0^1 - \int_0^1 \ln(2)2^t \frac{\sin(\pi t)}{\pi}\mathrm{d}t\right) = \frac{3}{\pi} + \frac{\ln(2)}{\pi}\left(0 - \frac{\ln(2)}{\pi} I_3\right) = \frac{3}{\pi} - \frac{\ln(2)^2}{\pi^2} I_3.$$

On en déduit que :

$$\left(\pi^2 + \ln(2)^2\right) I_3 = 3\pi \quad \text{et donc} \quad \boxed{I_3 = \frac{3\pi}{\pi^2 + \ln(2)^2}}.$$

On a :

$$\begin{aligned}
I_4 &= \int_0^{\pi/4} \tan^3(\theta)\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{\pi/4} \tan^2(\theta)\tan(\theta)\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{\pi/4} \left(1 + \tan^2(\theta)\right)\tan(\theta)\mathrm{d}\theta - \int_0^{\pi/4} \tan(\theta)\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{\pi/4} \tan'(\theta)\tan(\theta)\mathrm{d}\theta - \Big[-\ln|\cos(\theta)|\Big]_0^{\pi/4} \\
&= \left[\frac{1}{2}\tan^2(\theta)\right]_0^{\pi/4} + \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln(2) - \ln(2) = \boxed{\frac{1 - \ln(2)}{2}}.
\end{aligned}$$

Problème

Dans ce problème, on fixe un réel $\mu \geqslant 0$ et on étudie les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$, $(b_n)_{n\geqslant 0}$, $(c_n)_{n\geqslant 0}$ et $(d_n)_{n\geqslant 0}$ définies par la donnée de leur premier terme $(a_0, b_0, c_0, d_0) \in \mathbb{R}^4$ et les relations de récurrences suivantes :

$$\forall n \geqslant 0, \quad a_{n+1} = \frac{\mu a_n + b_n + c_n + d_n}{\mu + 3}, \qquad b_{n+1} = \frac{a_n + \mu b_n + c_n + d_n}{\mu + 3},$$
$$c_{n+1} = \frac{a_n + b_n + \mu c_n + d_n}{\mu + 3} \quad \text{et} \quad d_{n+1} = \frac{a_n + b_n + c_n + \mu d_n}{\mu + 3}.$$

Introduction

On pose, pour tout entier $n \geqslant 0$, la matrice colonne $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

1. *Déterminer une matrice carrée $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telle que $X_{n+1} = MX_n$ pour tout entier $n \geqslant 0$.*

   ▶ Soit $n \geqslant 0$ un entier. On a :

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \\ d_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\mu a_n+b_n+c_n+d_n}{\mu+3} \\ \frac{a_n+\mu b_n+c_n+d_n}{\mu+3} \\ \frac{a_n+b_n+\mu c_n+d_n}{\mu+3} \\ \frac{a_n+b_n+c_n+\mu d_n}{\mu+3} \end{pmatrix} = \frac{1}{\mu+3} \begin{pmatrix} \mu a_n + b_n + c_n + d_n \\ a_n + \mu b_n + c_n + d_n \\ a_n + b_n + \mu c_n + d_n \\ a_n + b_n + c_n + \mu d_n \end{pmatrix}$$
$$= \underbrace{\frac{1}{\mu+3} \begin{pmatrix} \mu & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \mu & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \mu & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \mu \end{pmatrix}}_{=M} \underbrace{\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \end{pmatrix}}_{=X_n} = MX_n.$$

   D'où le résultat en posant :

$$\boxed{M = \frac{1}{\mu+3} \begin{pmatrix} \mu & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \mu & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \mu & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \mu \end{pmatrix}}.$$

2. *Montrer que $X_n = M^n X_0$ pour tout entier $n \geqslant 0$.*

   ▶ On raisonne par récurrence.
   Initialisation. On a pour $n = 0$:

$$M^0 X_0 = \mathrm{I}_4 X_0 = X_0 \quad (\text{où } \mathrm{I}_4 \text{ est la matrice identité d'ordre } 4).$$

   Hérédité. On suppose que $X_n = M^n X_0$ pour un entier $n \geqslant 0$ fixé. On a d'après le résultat de la question précédente :

$$\begin{aligned} X_{n+1} = MX_n &= M(M^n X_0) && \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= (MM^n)X_0 && \text{par associativité du produit matriciel} \\ &= M^{n+1}X_0. \end{aligned}$$

   Donc le résultat est vrai au rang $n+1$ dès qu'il est vrai au rang n, et cette implication est vraie pour tout entier $n \geqslant 0$.
   Conclusion. D'après le principe de récurrence, on en déduit que :

$$\boxed{\forall n \geqslant 0,\ X_n = M^n X_0}.$$

On propose de calculer M^n en fonction de l'entier $n \geqslant 0$ à l'aide de deux méthodes différentes. Les deux parties suivantes sont donc indépendantes.

1^{re} méthode

Dans cette partie, on considère pour tout entier $n \geqslant 0$ la proposition suivante :

$$\mathscr{P}(n) : \text{«}\textit{il existe } (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2 \textit{ tel que } M^n = x_n M + y_n \mathrm{I}_4\text{»}$$

où I_4 désigne la matrice identité d'ordre 4.

3. *Montrer que $\mathscr{P}(0)$ et $\mathscr{P}(1)$ sont vraies.*

▶ On a :

$$M^0 = \mathrm{I}_4 = 0M + 1\mathrm{I}_4 \quad \text{et} \quad M^1 = M = 1M + 0\mathrm{I}_4.$$

Donc $\boxed{\mathscr{P}(0) \text{ et } \mathscr{P}(1) \text{ sont vraies}}$ en posant $\boxed{(x_0, y_0) = (0, 1)}$ et $\boxed{(x_1, y_1) = (1, 0)}$.

4. *On pose la fonction polynomiale $P : x \mapsto (x-1)(x-\lambda)$ où $\lambda = (\mu-1)/(\mu+3)$.*

(a) *Montrer que $P(M)$ est égale à la matrice carrée nulle d'ordre 4 notée 0_4.*

▶ On a :

$$P(M) = (M - \mathrm{I}_4)(M - \lambda \mathrm{I}_4)$$

N'oubliez pas la matrice identité devant les coefficients constants !!

$$= \left(\frac{1}{\mu+3} \begin{pmatrix} \mu & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \mu & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \mu & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \mu \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \left(\frac{1}{\mu+3} \begin{pmatrix} \mu & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \mu & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \mu & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \mu \end{pmatrix} - \frac{\mu-1}{\mu+3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \frac{1}{(\mu+3)^2} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{(\mu+3)^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{0_4}.$$

(b) *En déduire que $\mathscr{P}(2)$ est vraie.*

▶ On a d'après le résultat de la question précédente :

$$0_4 = P(M) = (M - \mathrm{I}_4)(M - \lambda \mathrm{I}_4) = M^2 - (1+\lambda)M + \lambda \mathrm{I}_4$$

donc :

$$M^2 = (1+\lambda)M - \lambda \mathrm{I}_4.$$

Ainsi, $\boxed{\mathscr{P}(2) \text{ est vraie}}$ en posant $\boxed{(x_2, y_2) = (1+\lambda, -\lambda)}$.

5. *On fixe un entier $n \geqslant 0$ et on suppose que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. Montrer que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.*

▶ On a :

$$\begin{aligned} M^{n+1} = M^n M &= (x_n M + y_n \mathrm{I}_4) M \quad \text{d'après l'hypothèse de l'énoncé} \\ &= x_n M^2 + y_n M \\ &= x_n((1+\lambda)M - \lambda \mathrm{I}_4) + y_n M \quad \text{d'après le résultat de la question précédente} \\ &= ((1+\lambda)x_n + y_n)M - \lambda x_n \mathrm{I}_4. \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\mathscr{P}(n+1) \text{ est vraie}}$ en posant $\boxed{(x_{n+1}, y_{n+1}) = ((1+\lambda)x_n + y_n, -\lambda x_n)}$.

6. *Que peut-on déduire des résultats précédents ? Justifier que les suites $(x_n)_{n\geqslant 0}$ et $(y_n)_{n\geqslant 0}$ obtenues sont récurrentes linéaires d'ordre deux.*

▶ D'après les résultats précédents, on a démontré par récurrence que $\boxed{\mathscr{P}(n) \text{ est vraie pour tout entier } n \geqslant 0}$ (l'initialisation a été montré à la question 3, et l'hérédité à la question précédente). De plus, d'après le résultat de la question précédente, les suites $(x_n)_{n\geqslant 0}$ et $(y_n)_{n\geqslant 0}$ obtenues vérifient les relations de récurrence suivantes :

$$\forall n \geqslant 0, \quad \begin{cases} x_{n+1} = (1+\lambda)x_n + y_n \\ y_{n+1} = -\lambda x_n \end{cases}.$$

En particulier, on obtient pour tout $n \geqslant 0$:

$$\begin{cases} x_{n+2} = (1+\lambda)x_{n+1} + y_{n+1} = (1+\lambda)x_{n+1} - \lambda x_n \\ y_{n+2} = -\lambda x_{n+1} = -\lambda((1+\lambda)x_n + y_n) = (1+\lambda)(-\lambda x_n) - \lambda y_n = (1+\lambda)x_{n+1} - \lambda x_n \end{cases}.$$

Ainsi, $\boxed{\text{les suites } (x_n)_{n\geqslant 0} \text{ et } (y_n)_{n\geqslant 0} \text{ sont bien récurrentes linéaires d'ordre deux}}$.

7. *Exprimer, pour tout entier $n \geqslant 0$, x_n et y_n en fonction de n et λ.*

▶ D'après le résultat précédent, l'équation caractéristique associée à $(x_n)_{n\geqslant 0}$ et $(y_n)_{n\geqslant 0}$ est :

$$q^2 = (1+\lambda)q - \lambda \iff q^2 - (1+\lambda)q + \lambda = 0 \iff (q-1)(q-\lambda) = 0.$$

Pensez à chercher des solutions évidentes aux équations polynomiales pour les factoriser plus rapidement et donc trouver toutes les solutions.

Cette équation admet deux solutions réelles : $q_1 = 1$ et $q_2 = \lambda$. Or :

$$\lambda = 1 \iff \frac{\mu - 1}{\mu + 3} = 1 \iff \mu - 1 = \mu + 3 \iff -1 = 3 \quad \text{ce qui est absurde.}$$

Ainsi $\lambda \neq 1$ et donc les deux solutions réelles sont distinctes. On en déduit que le discriminant de l'équation caractéristique est strictement positif.

On peut retrouver ce résultat en calculant directement le discriminant, mais c'est plus long. Remarquer des solutions évidents, même pour un polynôme de degré 2, permet toujours de gagner du temps.

Par conséquent, il existe quatre constantes $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ et $(\lambda_1', \lambda_2') \in \mathbb{R}^2$ telles que :

$$\forall n \geqslant 0, \begin{cases} x_n = \lambda_1 + \lambda_2 \lambda^n \\ y_n = \lambda_1' + \lambda_2' \lambda^n \end{cases}$$

D'après le résultat de la question 3, on a :

$$\begin{cases} 0 = x_0 = \lambda_1 + \lambda_2 \\ 1 = x_1 = \lambda_1 + \lambda_2 \lambda \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Or $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda - 1 \neq 0$ car $\lambda \neq 1$. Donc la matrice est inversible et le système linéaire admet une unique solution :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda - 1} \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda - 1} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

De même, on a d'après le résultat de la question 3 :

$$\begin{aligned} \begin{cases} 1 = y_0 = \lambda_1' + \lambda_2' \\ 0 = y_1 = \lambda_1' + \lambda_2' \lambda \end{cases} &\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1' \\ \lambda_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} \lambda_1' \\ \lambda_2' \end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda - 1} \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda - 1} \begin{pmatrix} \lambda \\ -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Pensez à utiliser les matrices pour gagner du temps !!

Finalement, on obtient :

$$\forall n \geqslant 0, \boxed{\begin{cases} x_n = \dfrac{-1 + \lambda^n}{\lambda - 1} \\ y_n = \dfrac{\lambda - \lambda^n}{\lambda - 1} \end{cases}}.$$

8. *En déduire, pour tout entier $n \geqslant 0$, une expression des coefficients M^n en fonction de n et λ.*

▶ Soit $n \geqslant 0$ un entier. D'après les résultats précédents, on obtient :

$$M^n = x_n M + y_n \mathrm{I}_4 = \frac{-1 + \lambda^n}{\lambda - 1} M + \frac{\lambda - \lambda^n}{\lambda - 1} \mathrm{I}_4 = \frac{-1 + \lambda^n}{(\lambda - 1)(\mu + 3)} \begin{pmatrix} \mu & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \mu & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \mu & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \mu \end{pmatrix} + \frac{\lambda - \lambda^n}{\lambda - 1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Or :

$$\lambda = \frac{\mu - 1}{\mu + 3} \quad \text{donc} \quad \lambda\mu + 3\lambda - \mu + 1 = 0 \quad \text{donc} \quad \mu = \frac{-3\lambda - 1}{\lambda - 1}.$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} \frac{-1+\lambda^n}{(\lambda-1)(\mu+3)} &= \frac{-1+\lambda^n}{(\lambda-1)\left(\frac{-3\lambda-1}{\lambda-1}+3\right)} = \frac{1-\lambda^n}{4} \\ \text{et} \quad \frac{-1+\lambda^n}{(\lambda-1)(\mu+3)}\mu + \frac{\lambda-\lambda^n}{\lambda-1} &= \frac{1-\lambda^n}{4} \times \frac{-3\lambda-1}{\lambda-1} + \frac{\lambda-\lambda^n}{\lambda-1} \\ &= \frac{-3\lambda-1+3\lambda^{n+1}+\lambda^n+4\lambda-4\lambda^n}{4(\lambda-1)} \\ &= \frac{\lambda-1+3\lambda^n(\lambda-1)}{4(\lambda-1)} = \frac{1+3\lambda^n}{4}. \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\boxed{M^n = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1+3\lambda^n & 1-\lambda^n & 1-\lambda^n & 1-\lambda^n \\ 1-\lambda^n & 1+3\lambda^n & 1-\lambda^n & 1-\lambda^n \\ 1-\lambda^n & 1-\lambda^n & 1+3\lambda^n & 1-\lambda^n \\ 1-\lambda^n & 1-\lambda^n & 1-\lambda^n & 1+3\lambda^n \end{pmatrix}}.$$

2e méthode

Dans cette partie, on pose la matrice $U = \begin{pmatrix} 1&1&1&1 \\ 1&1&1&1 \\ 1&1&1&1 \\ 1&1&1&1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

9. *Exprimer M en fonction de μ, de la matrice identité d'ordre 4 notée I_4 et de U.*

▶ On a :

$$\begin{aligned} M = \frac{1}{\mu+3}\begin{pmatrix} \mu&1&1&1 \\ 1&\mu&1&1 \\ 1&1&\mu&1 \\ 1&1&1&\mu \end{pmatrix} &= \frac{1}{\mu+3}\left(\begin{pmatrix} 1&1&1&1 \\ 1&1&1&1 \\ 1&1&1&1 \\ 1&1&1&1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu-1&0&0&0 \\ 0&\mu-1&0&0 \\ 0&0&\mu-1&0 \\ 0&0&0&\mu-1 \end{pmatrix}\right) \\ &= \boxed{\frac{1}{\mu+3}(U+(\mu-1)\mathrm{I}_4)}. \end{aligned}$$

10. *Exprimer U^k en fonction de U pour tout entier $k \geqslant 1$.*

▶ Montrons par récurrence que $U^k = 4^{k-1}U$ pour tout entier $k \geqslant 1$.

Initialisation. On a pour $k = 1$:

$$U^1 = U = 4^0 U = 4^{1-1}U.$$

Hérédité. On suppose que $U^k = 4^{k-1}U$ pour un entier $k \geqslant 1$ fixé. On a alors :

$$U^{k+1} = U^k U = 4^{k-1}UU = 4^{k-1}\begin{pmatrix} 1&1&1&1 \\ 1&1&1&1 \\ 1&1&1&1 \\ 1&1&1&1 \end{pmatrix}^2 = 4^{k-1}\begin{pmatrix} 4&4&4&4 \\ 4&4&4&4 \\ 4&4&4&4 \\ 4&4&4&4 \end{pmatrix} = 4^{k-1}4U = 4^{(k+1)-1}U.$$

Donc $U^k = 4^{k-1}U \Rightarrow U^{k+1} = 4^{(k+1)-1}U$ et cette implication est vraie pour tout entier $k \geqslant 1$.

Conclusion. D'après le principe de récurrence, on en déduit que :

$$\boxed{\forall k \geqslant 1,\ U^k = 4^{k-1}U}.$$

11. *Soit un entier $n \geqslant 0$. Simplifier l'expression de M^n en fonction de n, μ, I_4 et U.*

▶ On a :

$$U \times (\mu-1)\mathrm{I}_4 = (\mu-1)U = (\mu-1)\mathrm{I}_4 \times U$$

donc les matrices U et $(\mu-1)\mathrm{I}_4$ commutent.

N'oubliez pas de vérifier que les matrices commutent avant d'utiliser la formule du binôme de Newton pour les matrices !!

On en déduit d'après la formule du binôme de Newton et les résultats précédents que :

$$\begin{aligned}
M^n &= \left(\frac{1}{\mu+3}(U+(\mu-1)\mathrm{I}_4)\right)^n = \frac{1}{(\mu+3)^n}(U+(\mu-1)U_4)^n \\
&= \frac{1}{(\mu+3)^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}U^k((\mu-1)\mathrm{I}_4)^{n-k} \\
&= \frac{1}{(\mu+3)^n}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}4^{k-1}U(\mu-1)^{n-k} + \frac{1}{(\mu+3)^n}\mathrm{I}_4(\mu-1)^n \\
&= \frac{U}{4(\mu+3)^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}4^k(\mu-1)^{n-k} - \frac{U}{4(\mu+3)^n}(\mu-1)^n + \left(\frac{\mu-1}{\mu+3}\right)^n\mathrm{I}_4 \\
&= \frac{U}{4(\mu+3)^n}(4+\mu-1)^n + \left(\frac{\mu-1}{\mu+3}\right)^n\left(\mathrm{I}_4 - \frac{1}{4}U\right) \\
&= \boxed{\frac{1}{4}U + \left(\frac{\mu-1}{\mu+3}\right)^n\left(\mathrm{I}_4 - \frac{1}{4}U\right)}.
\end{aligned}$$

12. *Exprimer, pour tout entier $n \geqslant 0$, les coefficients M^n en fonction de n et $\lambda = (\mu-1)/(\mu+3)$.*

▶ Soit un entier $n \geqslant 0$. On a d'après le résultat de la question précédente :

$$M^n = \frac{1}{4}U + \lambda^n\left(\mathrm{I}_4 - \frac{1}{4}U\right) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix} + \lambda^n\left(\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} - \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}\right)$$

$$= \boxed{\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1+3\lambda^n & 1-\lambda^n & 1-\lambda^n & 1-\lambda^n\\ 1-\lambda^n & 1+3\lambda^n & 1-\lambda^n & 1-\lambda^n\\ 1-\lambda^n & 1-\lambda^n & 1+3\lambda^n & 1-\lambda^n\\ 1-\lambda^n & 1-\lambda^n & 1-\lambda^n & 1+3\lambda^n\end{pmatrix}}.$$

Conclusion

13. *À l'aide de résultats précédents, déterminer, pour tout entier $n \geqslant 0$, des expressions de a_n, b_n, c_n et d_n en fonction de n, λ, a_0, b_0, c_0 et d_0.*

▶ Soit un entier $n \geqslant 0$. On a d'après les résultats précédents :

$$\begin{pmatrix}a_n\\b_n\\c_n\\d_n\end{pmatrix} = X_n = M^nX_0 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1+3\lambda^n & 1-\lambda^n & 1-\lambda^n & 1-\lambda^n\\ 1-\lambda^n & 1+3\lambda^n & 1-\lambda^n & 1-\lambda^n\\ 1-\lambda^n & 1-\lambda^n & 1+3\lambda^n & 1-\lambda^n\\ 1-\lambda^n & 1-\lambda^n & 1-\lambda^n & 1+3\lambda^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\b_0\\c_0\\d_0\end{pmatrix}$$

donc :

$$\boxed{\begin{aligned}
a_n &= \frac{(1+3\lambda^n)a_0 + (1-\lambda^n)(b_0+c_0+d_0)}{4}, & b_n &= \frac{(1+3\lambda^n)b_0 + (1-\lambda^n)(a_0+c_0+d_0)}{4}, \\
c_n &= \frac{(1+3\lambda^n)c_0 + (1-\lambda^n)(a_0+b_0+d_0)}{4} \quad \text{et} & d_n &= \frac{(1+3\lambda^n)d_0 + (1-\lambda^n)(a_0+b_0+c_0)}{4}.
\end{aligned}}$$

14. *Quelle est la nature de $(a_n)_{n\geqslant 0}$, $(b_n)_{n\geqslant 0}$, $(c_n)_{n\geqslant 0}$ et $(d_n)_{n\geqslant 0}$? Déterminer leur limite si elles existent.*

▶ Par définition, $\lambda = (\mu-1)/(\mu+3)$ et $\mu \geqslant 0$. On en déduit que :

$$\mu+3 > \mu-1 \geqslant -1 \quad \text{donc} \quad 1 > \lambda \geqslant \frac{-1}{\mu+3} \geqslant \frac{-1}{3} > -1.$$

Ainsi $\lambda \in]-1,1[$ et par conséquent $\lim_{n\to+\infty} \lambda^n = 0$. On en déduit d'après le résultat de la question précédente que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} c_n = \lim_{n\to+\infty} d_n = \frac{a_0+b_0+c_0+d_0}{4}}.$$

En particulier, $\boxed{\text{les suites } (a_n)_{n\geqslant 0}, (b_n)_{n\geqslant 0}, (c_n)_{n\geqslant 0} \text{ et } (d_n)_{n\geqslant 0} \text{ sont convergentes}}$.

15. *Discuter, sans justifier, la cohérence du résultat précédent dans chacun des cas suivants :*

(a) *$a_0 = b_0 = c_0 = d_0$;*

▶ Si $a_0 = b_0 = c_0 = d_0$ alors on a :

$$a_1 = \frac{\mu a_0 + b_0 + c_0 + d_0}{\mu+3} = \frac{(\mu+3)a_0}{\mu+3} = a_0$$

et de même pour b_1, c_1 et d_1. On peut donc démontrer par récurrence que $\boxed{\text{les suites } (a_n)_{n\geqslant 0}, (b_n)_{n\geqslant 0}, (c_n)_{n\geqslant 0} \text{ et } (d_n)_{n\geqslant 0} \text{ sont constantes égales à } a_0}$. En particulier, elles convergent vers $a_0 = (a_0+b_0+c_0+d_0)/4$ ce qui est cohérent avec le résultat précédent.

(b) *ou $\mu = 1$.*

▶ Si $\mu = 1$ alors on a :

$$a_1 = \frac{\mu a_0 + b_0 + c_0 + d_0}{\mu+3} = \frac{a_0+b_0+c_0+d_0}{4}$$

et de même pour b_1, c_1 et d_1. On peut donc démontrer par récurrence que $\boxed{\text{les suites } (a_n)_{n\geqslant 1}, (b_n)_{n\geqslant 1}, (c_n)_{n\geqslant 1} \text{ et } (d_n)_{n\geqslant 1} \text{ sont constantes égales à } (a_0+b_0+c_0+d_0)/4}$. En particulier, elles convergent vers $(a_0+b_0+c_0+d_0)/4$ ce qui est cohérent avec le résultat précédent.

> *Attention, les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$, $(b_n)_{n\geqslant 0}$, $(c_n)_{n\geqslant 0}$ et $(d_n)_{n\geqslant 0}$ ne sont pas forcément constantes car leur premier terme n'est pas forcément égal à $(a_0+b_0+c_0+d_0)/4$.*

DS n^{o} 5 de mathématiques et d'informatique

durée : 3 heures

Problème 1 (Analyse-Informatique)
Dans tout l'exercice, $\alpha \in]0,1]$. Pour tout entier naturel n, on pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(k+1)^\alpha}$$

1. (INFO) Écrire une fonction `SuiteS(n)` qui retourne la valeur de S_n. On suppose que α est contenu dans la variable a.
2. (a) Montrer que $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante.
   (b) Montrer que $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante.
   (c) Déterminer la limite de $(S_{2n} - S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.
   (d) Déduire des questions précédentes que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Dans la suite, on note ℓ_α la limite de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. (INFO) À partir des questions précédentes, on en déduit l'algorithme d'approximation numérique ci-dessous (voir l'encadré). Écrire une fonction `approx(epsilon)` qui exécute l'algorithme décrit.

```
 Pour epsilon>0 :
 S0=1
 S1=S0-(1/(2)**(a))
 k=2
 tant que (|S1-S0|>epsilon)
      S0=S1+(1/(k+1)**a)
      k=k+1
      S1=S0-(1/(k+1)**a)
      k=k+1
retourner [S1,S0]
```

4. Dans cette question, on fixe $\alpha = 1$ et on veut calculer ℓ_1.
   (a) Montrer que pour tout $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$, on a

   $$\frac{1}{1+x} - \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k x^k = \frac{x^{2n+2}}{1+x}$$

   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

   $$\ln(2) - S_{2n+1} = \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x} dx$$

   (c) On rappelle que si f est une fonction continue et positive sur $[0,1]$ alors $\int_0^1 f(t)dt \geqslant 0$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

   $$0 \leq \ln(2) - S_{2n+1} \leq \int_0^1 x^{2n+2} dx.$$

(d) Déduire des questions précédente la limite ℓ_1 de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(e) (INFO) À l'aide de résultats précédents, écrire une fonction `approxln2(epsilon)` qui retourne un encadrement du nombre $\ln(2)$ à ϵ près.

Questions de cours

On note $\{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$ et $\{y_1, y_2, \ldots, y_q\}$ les modalités de deux caractères quantitatifs x et y sur une population de taille n. Pour chaque couple d'indices (i, j), on note n_i^x l'effectif de la modalité x_i, n_j^y l'effectif de la modalité y_j et $n_{i,j}$ l'effectif de la modalité conjointe (x_i, y_j).

1. Exprimer n de trois façons différentes : en fonction des n_i^x, des n_j^y ou des $n_{i,j}$.
2. Rappeler la définition des moyennes $\overline{x}$ et $\overline{y}$ de x et y.
3. Rappeler la définition des écarts types s_x et s_y de x et y.
4. Rappeler la définition de la covariance $s_{x,y}$ de (x, y).
5. Rappeler les formules de Koenig-Huygens pour s_x^2 et $s_{x,y}$.
6. Rappeler la définition du coefficient de corrélation affine $r_{x,y}$ de (x, y).
7. Rappeler l'équation de la droite de régression affine de (x, y) par la méthode des moindres carrés.

Problème 2 (Algèbre-Géométrie)

Dans l'espace $\mathscr{E}$ muni d'un repère orthonormé, on considère la droite $\mathscr{D}$ de représentation paramétrique :

$$\mathscr{D} : \begin{cases} x = -3 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 2 - t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

Pour tout ce problème, on fixe un point $A(\alpha, \beta, \gamma)$ et on note $H(\lambda, \mu, \nu)$ son projeté orthogonal sur $\mathscr{D}$.

1. (a) Déterminer une représentation cartésienne du plan $\mathscr{P}_1$ contenant les points $B(-1, 0, 0)$, $C(2, 7, -3)$ et $D(-2, 4, 1)$.

   (b) Montrer que $\mathscr{P}_1$ contient $\mathscr{D}$.

   (c) Déterminer une représentation cartésienne du plan $\mathscr{P}_2$ contenant $\mathscr{D}$ et le point $E(-2, 3, -1)$.

   (d) Déterminer une représentation cartésienne du plan $\mathscr{P}_3$ perpendiculaire à $\mathscr{D}$ et passant par A.

2. En déduire que les coordonnées de H vérifient un système linéaire qu'on peut écrire sous la forme :

$$M_1 \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = M_2 \quad \text{où} \quad M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et } M_2 \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \text{ est une matrice colonne à déterminer.}$$

3. Montrer que M_1 est inversible et calculer son inverse.
4. En déduire que les coordonnées de H sont données par :

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = P_1 \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} + P_2 \quad \text{où} \quad P_1 = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

5. (a) Déterminer en fonction de α, β et γ la valeur du paramètre $t \in \mathbb{R}$ du point $M(x, y, z) \in \mathscr{D}$ telle que le vecteur $\overrightarrow{AM}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{u} = (1, 2, -1)$.

   (b) Retrouver le résultat de la question 4 à l'aide de la valeur du paramètre t obtenue à la question précédente.

6. (a) À l'aide du résultat de la question 4, montrer que :

$$P_1 \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} + P_2 = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix}.$$

(b) Quelle est l'interprétation géométrique du résultat précédent ?

7. (a) On note $\mathscr{S}$ l'ensemble des points $M(x, y, z) \in \mathscr{E}$ qui vérifient la propriété suivante :

$$P_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + P_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \tag{S}$$

Résoudre (S) et en déduire que $\mathscr{S} = \mathscr{D}$.

(b) Quelle est l'interprétation géométrique du résultat précédent ?

Exercice

Déterminer un équivalent simple de chacune des suites suivantes.

1. $\forall n \geqslant 1,\ a_n = \dfrac{\ln(n)^{100} + 99^n}{100^n + n^{101}}$.
2. $\forall n \geqslant 1,\ b_n = \left(\dfrac{1 + 2n^2}{2 + n^2}\right)\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$.
3. $\forall n \geqslant 1,\ c_n = \dfrac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{1 - \cos(1/\sqrt{n})}$.
4. $\forall n \geqslant 0,\ d_n = \left(\dfrac{n^2 + 3}{n^2 + 1}\right)^n - 1$.
5. $\forall n \geqslant 0,\ e_n = (1 + \sin(1/n))^5 - (1 + \tan(1/n))^{1/5}$.

Corrigé du DS n^o 5 de mathématiques et d'informatique

Problème 1 (Analyse-Informatique)
Énoncé et corrigé de V. Vong

1. Par exemple :

```
def suiteS(n) :
    S=0
    for i in range(n+1) :
        S=S+((-1)**i)/(i+1)**a
    return S
```

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned} S_{2n+2} - S_{2n} &= \sum_{k=0}^{2n+2} \frac{(-1)^k}{(k+1)^\alpha} - \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{(k+1)^\alpha} \\ &= S_{2n} + \frac{(-1)^{2n+1}}{(2n+2)^\alpha} + \frac{(-1)^{2n+2}}{(2n+3)^\alpha} - S_{2n} \\ &= \frac{(-1)^{2n+1}}{(2n+2)^\alpha} + \frac{(-1)^{2n+2}}{(2n+3)^\alpha} \\ &= \frac{-1}{(2n+2)^\alpha} + \frac{1}{(2n+3)^\alpha}. \end{aligned}$$

Or $\alpha > 0$. Donc $(2n+3)^\alpha \geq (2n+2)^\alpha > 0$. Par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}^{+\star}$, on en déduit que

$$\frac{1}{(2n+3)^\alpha} \leq \frac{1}{(2n+2)^\alpha}.$$

On a donc

$$\frac{1}{(2n+3)^\alpha} - \frac{1}{(2n+2)^\alpha} \leq 0.$$

Autrement dit, $S_{2n+2} - S_{2n} \leq 0$.
Conclusion : la suite $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} S_{2n+3} - S_{2n+1} &= \sum_{k=0}^{2n+3} \frac{(-1)^k}{(k+1)^\alpha} - \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{(k+1)^\alpha} \\ &= S_{2n+1} + \frac{(-1)^{2n+2}}{(2n+3)^\alpha} + \frac{(-1)^{2n+3}}{(2n+4)^\alpha} - S_{2n+1} \\ &= \frac{(-1)^{2n+2}}{(2n+3)^\alpha} + \frac{(-1)^{2n+3}}{(2n+4)^\alpha} \\ &= \frac{1}{(2n+3)^\alpha} - \frac{1}{(2n+4)^\alpha}. \end{aligned}$$

Or $\alpha > 0$. Donc par décroissance de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$, on en déduit que $\frac{1}{(2n+3)^\alpha} \geq \frac{1}{(2n+4)^\alpha}$. On a donc $\frac{1}{(2n+3)^\alpha} - \frac{1}{(2n+4)^\alpha} \geq 0$. Autrement dit, $S_{2n+3} - S_{2n+1} \geq 0$.
Conclusion : la suite $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned} S_{2n+1} - S_{2n} &= S_{2n} + \tfrac{(-1)^{2n+1}}{(2n+2)^\alpha} - S_{2n} \\ &= -\tfrac{1}{(2n+2)^\alpha} \end{aligned}$$

Or $\alpha > 0$, donc $\lim_{n\to+\infty} (2n+2)^\alpha = +\infty$. Donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{-1}{(2n+2)^\alpha} = 0$. Autrement dit, $\boxed{\lim_{n\to+\infty} (S_{2n+1} - S_{2n}) = 0}$.

(d) En résumé :

— la suite $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante (question 1.a) ;

— la suite $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (question 1.b) ;

— la suite $(S_{2n+1} - S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est de limite nulle ;

ces deux suites sont donc adjacentes. Il en résulte qu'elles convergent vers la même limite. Les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et (S_{2n+1}) ayant même limite, on en déduit que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

3. Par exemple :

```
def approx(epsilon) :
    S0=1
    S1=1-(1/(2**a))
    k=2
    while (abs(S1-S0)>epsilon) :
        S0=S1+(1/(k+1)**a)
        k=k+1
        S1=S0-(1/(k+1)**a)
        k=k+1
    return [S1,S0]
```

4. (a) Soit $x \in [0,1]$. On a

$$\sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k x^k = \sum_{k=0}^{2n+1} (-x)^k$$

On reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique de raison $-x \neq 1$ ($-x \in [-1,0]$) donc

$$\sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k x^k = \frac{1-(-x)^{2n+2}}{1-(-x)}$$

Autrement dit,

$$\sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k x^k = \frac{1-(x)^{2n+2}}{1+x)}$$

On a donc

$$\boxed{\frac{x^{2n+2}}{1+x} = \frac{1}{1+x} - \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k x^k.}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question 4.a, on sait que

$$\forall x \in [0,1], \frac{1}{1+x} - \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k x^k = \frac{x^{2n+2}}{1+x}.$$

Les fonctions $f : x \mapsto \frac{1}{1+x} - \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k x^k$ et $g : x \mapsto \frac{x^{2n+2}}{1+x}$ étant obtenues comme sommes et quotient de polynômes dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[0,1]$, on en déduit qu'elles sont continues sur $[0,1]$ et donc intégrables sur ce segment. En intégrant, on obtient alors :

$$\int_0^1 (\frac{1}{1+x} - \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k x^k) dx = \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x} dx.$$

Par linéarité de l'intégrale, on a

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x}dx - \sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k \int_0^1 x^k dx = \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x}dx.$$

En calculant les intégrales du membre droit, on obtient

$$[\ln(1+x)]_{x=0}^{x=1} - \sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k [\frac{x^{k+1}}{k+1}]_{x=0}^{x=1} = \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x}dx.$$

D'où

$$\ln(2) - \sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k \frac{1}{k+1} = \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x}dx.$$

Autrement dit,

$$\boxed{\ln(2) - S_{2n+1} = \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x}dx.}$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $f_n : x \mapsto \frac{x^{2n+2}}{1+x}$. Cette fonction étant un quotient de polynôme dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[0,1]$ elle y est continue. De plus, sur $[0,1]$ le numérateur et dénominateur sont positifs. On en déduit que

$$\int_0^1 f_n(x)dx \geq 0.$$

D'après la question 4.b, on en déduit que

$$\underline{\ln(2) - S_{2n+1} \geq 0.}$$

Posons $g : x \mapsto x^{2n+2}$. g est continue sur $[0,1]$ car polynomiale. De plus, pour tout $x \in [0,1]$, $g(x) - f_n(x) = x^{2n+2} - \frac{x^{2n+2}}{1+x} = \frac{x^{2n+3}}{1+x} \geq 0$.Par conséquent, $g - f_n$ est positive sur $[0,1]$ et y est continue comme différence de fonctions continues sur ce segment. Il en résulte que

$$\int_0^1 (g - f_n)(x)dx \geq 0.$$

D'où

$$\int_0^1 g(x)dx \geq \int_0^1 f_n(x)dx.$$

Autrement dit,

$$\underline{\int_0^1 x^{2n+2}dx \geq \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x}dx = \ln(2) - S_{2n+1}.}$$

On a bien

$$\boxed{0 \leq \ln(2) - S_{2n+1} \leq \int_0^1 x^{2n+2}dx.}$$

(d) D'après la question 4.c, on a

$$0 \leq \ln(2) - S_{2n+1} \leq \int_0^1 x^{2n+2}dx.$$

En calculant l'intégrale, on a alors :

$$0 \leq \ln(2) - S_{2n+1} \leq \frac{1}{2n+3}.$$

Or $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n+3} = 0$ et d'après le théorème des gendarmes, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty}(\ln(2) - S_{2n+1}) = 0$. Autrement dit, $\lim_{n\to+\infty} S_{2n+1} = \ln(2)$.
D'après la question 1.d, on sait que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Elle converge donc vers la même limite que $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$. Par conséquent,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = \ln(2)}.$$

(e) Par exemple :

```
def approxln2(epsilon) :
    S0=1
    S1=1-(1/2)
    k=2
    while (abs(S1-S0)>epsilon) :
        S0=S1+(1/(k+1))
        k=k+1
        S1=S0-(1/(k+1))
        k=k+1
    return [S1,S0]
```

Questions de cours

On note $\{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$ et $\{y_1, y_2, \ldots, y_q\}$ les modalités de deux caractères quantitatifs x et y sur une population de taille n. Pour chaque couple d'indices (i,j), on note n_i^x l'effectif de la modalité x_i, n_j^y l'effectif de la modalité y_j et $n_{i,j}$ l'effectif de la modalité conjointe (x_i, y_j).

1. *Exprimer n de trois façons différentes : en fonction des n_i^x, des n_j^y ou des $n_{i,j}$.*

▶
$$\boxed{n = \sum_{i=1}^{p} n_i^x}, \quad \boxed{n = \sum_{j=1}^{q} n_j^y} \quad \text{et} \quad \boxed{n = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} n_{i,j}}$$

2. *Rappeler la définition des moyennes $\overline{x}$ et $\overline{y}$ de x et y.*

▶
$$\boxed{\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_i^x x_i} \quad \text{et} \quad \boxed{\overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{q} n_j^y y_j}$$

3. *Rappeler la définition des écarts types s_x et s_y de x et y.*

▶
$$\boxed{s_x = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_i^x \left(x_i - \overline{x}\right)^2}} \quad \text{et} \quad \boxed{s_y = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{q} n_j^y \left(y_j - \overline{y}\right)^2}}$$

4. *Rappeler la définition de la covariance $s_{x,y}$ de (x,y)*

▶
$$\boxed{s_{x,y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} n_{i,j}\left(x_i - \overline{x}\right)\left(y_j - \overline{y}\right)}$$

5. *Rappeler les formules de Koenig-Huygens pour s_x^2 et $s_{x,y}$.*

▶
$$\boxed{s_x^2 = \overline{(x^2)} - (\overline{x})^2} \quad \text{et} \quad \boxed{s_{x,y} = \overline{(xy)} - (\overline{x})(\overline{y})}$$

6. *Rappeler la définition du coefficient de corrélation affine $r_{x,y}$ de (x, y).*

▶
$$\boxed{r_{x,y} = \frac{s_{x,y}}{s_x s_y}}$$

7. *Rappeler l'équation de la droite de régression affine de (x, y) par la méthode des moindres carrés.*

▶
$$\boxed{y = \frac{s_{x,y}}{s_x^2}(x - \overline{x}) + \overline{y}}$$

Problème 2 (Algèbre-Géométrie)

Dans l'espace $\mathscr{E}$ muni d'un repère orthonormé, on considère la droite $\mathscr{D}$ de représentation paramétrique :

$$\mathscr{D} : \begin{cases} x = -3 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 2 - t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Pour tout ce problème, on fixe un point $A(\alpha, \beta, \gamma)$ et on note $H(\lambda, \mu, \nu)$ son projeté orthogonal sur $\mathscr{D}$.

1. (a) *Déterminer une représentation cartésienne du plan $\mathscr{P}_1$ contenant les points $B(-1, 0, 0)$, $C(2, 7, -3)$ et $D(-2, 4, 1)$.*

▶ On cherche un vecteur $\overrightarrow{n_1} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\overrightarrow{0}\}$ normal au plan $\mathscr{P}_1$. Or les vecteurs $\overrightarrow{BC} = (3, 7, -3)$ et $\overrightarrow{BD} = (-1, 4, 1)$ ne sont pas colinéaires car :

$$\text{rang}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow 3L_2 - 7L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{matrix} = \text{rang}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 19 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

Ainsi $\overrightarrow{n_1} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\overrightarrow{0}\}$ est normal au plan $\mathscr{P}_1$ si et seulement si :

$$\begin{cases} \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{n_1} = 0 \\ \overrightarrow{BD}.\overrightarrow{n_1} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3a + 7b - 3c = 0 \\ -a + 4b + c = 0 \quad L_2 \leftarrow 3L_2 + L_1 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 3a + 7b - 3c = 0 \\ 19b = 0 \end{cases}.$$

On obtient un système de rang 2 avec une inconnue auxiliaire et aucune équation auxiliaire. Il y a donc une infinité de solutions de la forme :

$$\begin{cases} a = (3c - 7b)/3 = c \\ b = 0 \\ c = c \end{cases} \qquad \text{où } c \in \mathbb{R} \text{ est un paramètre.}$$

Pour $c = 1$, on obtient le vecteur normal $\overrightarrow{n_1} = (1, 0, 1)$. Ainsi le plan $\mathscr{P}_1$ admet une représentation cartésienne de la forme :

$$\mathscr{P}_1 : ax + by + cz + d = x + z + d = 0 \quad \text{où } d \in \mathbb{R} \text{ est une constante.}$$

Puisque $B(-1, 0, 0)$ appartient au plan $\mathscr{P}_1$, on en déduit que $-1 + 0 + d = 0$ donc que $d = 1$. Finalement, on obtient la représentation cartésienne :

$$\boxed{\mathscr{P}_1 : x + z + 1 = 0}.$$

On peut aussi écrire une représentation paramétrique du plan $\mathscr{P}_1$ (par exemple à l'aide des vecteurs directeurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$) puis raisonner par substitution pour supprimer les deux paramètres d'une des trois équations obtenues.

(b) Montrer que $\mathscr{P}_1$ contient $\mathscr{D}$.

▶ Soit $M(x,y,z) \in \mathscr{D}$. Il existe donc un paramètre $t \in \mathbb{R}$ tel que $(x,y,z) = (-3+t, 1+2t, 2-t)$. Par conséquent :

$$x + z + 1 = (-3+t) + (2-t) + 1 = 0.$$

On en déduit que $M(x,y,z) \in \mathscr{P}_1$. Puisque ceci est vrai pour tout $M(x,y,z) \in \mathscr{D}$, on a démontré que :

$$\boxed{\mathscr{D} \subset \mathscr{P}_1}.$$

(c) Déterminer une représentation cartésienne du plan $\mathscr{P}_2$ contenant $\mathscr{D}$ et le point $E(-2,3,-1)$.

▶ On cherche un vecteur $\overrightarrow{n_2} = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\overrightarrow{0}\}$ normal au plan $\mathscr{P}_2$. La droite $\mathscr{D}$ passe par le point $F(-3,1,2)$ et est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u} = (1,2,-1)$. Or les vecteurs $\overrightarrow{EF} = (-1,-2,3)$ et $\overrightarrow{u} = (1,2,-1)$ ne sont pas colinéaires car :

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1 \end{array} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_2 \leftrightarrow L_2 \\ L_3 \leftrightarrow L_2 \end{array} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

Ainsi $\overrightarrow{n_2} = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\overrightarrow{0}\}$ est normal au plan $\mathscr{P}_2$ si et seulement si :

$$\begin{cases} \overrightarrow{EF}.\overrightarrow{n_2} = 0 \\ \overrightarrow{u}.\overrightarrow{n_2} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -a - 2b + 3c = 0 \\ a + 2b - c = 0 \quad L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} -a - 2b + 3c = 0 \\ 2c = 0 \end{cases}.$$

On obtient un système de rang 2 avec une inconnue auxiliaire et aucune équation auxiliaire. Il y a donc une infinité de solutions de la forme :

$$\begin{cases} a = a = -2b + 3c = -2b \\ b = b \\ c = 0 \end{cases} \qquad \text{où } b \in \mathbb{R} \text{ est un paramètre.}$$

Pour $b = 1$, on obtient le vecteur normal $\overrightarrow{n_2} = (-2,1,0)$. Ainsi le plan $\mathscr{P}_2$ admet une représentation cartésienne de la forme :

$$\mathscr{P}_2 : ax + by + cz + d = -2x + y + d = 0 \quad \text{où } d \in \mathbb{R} \text{ est une constante.}$$

Puisque $E(-2,3,-1)$ appartient au plan $\mathscr{P}_2$, on en déduit que $(-2)(-2) + 3 + d = 0$ donc que $d = -7$. Finalement, on obtient la représentation cartésienne :

$$\boxed{\mathscr{P}_2 : -2x + y - 7 = 0}.$$

On peut aussi écrire une représentation paramétrique du plan $\mathscr{P}_2$ (par exemple à l'aide des vecteurs directeurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{u}$) puis raisonner par substitution pour supprimer les deux paramètres d'une des trois équations obtenues.

(d) Déterminer une représentation cartésienne du plan $\mathscr{P}_3$ perpendiculaire à $\mathscr{D}$ et passant par A.

▶ La droite $\mathscr{D}$ est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u} = (1,2,-1)$ et est perpendiculaire au plan $\mathscr{P}_3$. Par conséquent, le vecteur $\overrightarrow{u} = (1,2,-1)$ est normal au plan $\mathscr{P}_3$ qui admet une représentation cartésienne de la forme :

$$\mathscr{P}_3 : x + 2y - z + d = 0 \quad \text{où } d \in \mathbb{R} \text{ est une constante.}$$

Puisque $A(\alpha,\beta,\gamma)$ appartient au plan $\mathscr{P}_3$, on en déduit que $\alpha + 2\beta - \gamma + d = 0$ donc que $d = -\alpha - 2\beta + \gamma$. Finalement, on obtient la représentation cartésienne :

$$\boxed{\mathscr{P}_3 : x + 2y - z - \alpha - 2\beta + \gamma = 0}.$$

2. *En déduire que les coordonnées de H vérifient un système linéaire qu'on peut écrire sous la forme :*
$$M_1\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\\ \nu\end{pmatrix}=M_2 \text{ où } M_1=\begin{pmatrix}1&0&1\\-2&1&0\\1&2&-1\end{pmatrix} \text{ et } M_2\in\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \text{ est une matrice colonne à déterminer.}$$

► Puisque H est le projeté orthogonal de A sur $\mathscr{D}$, H appartient à la droite $\mathscr{D}$ et le vecteur $\overrightarrow{AH}$ est normal à la droite $\mathscr{D}$. On en déduit que :
- H appartient au plan $\mathscr{P}_1$ car $\mathscr{D}\subset\mathscr{P}_1$ d'après le résultat de la question 1(b) ;
- H appartient au plan $\mathscr{P}_2$ car $\mathscr{D}\subset\mathscr{P}_2$ par définition de $\mathscr{P}_2$;
- H appartient au plan $\mathscr{P}_3$ car $\overrightarrow{AH}$ est un vecteur directeur de $\mathscr{P}_3$ par définition de $\mathscr{P}_3$.

Par conséquent, les coordonnées de $H(\lambda,\mu,\nu)$ vérifient les équations cartésiennes de $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_3$, c'est-à-dire :
$$\begin{aligned}\begin{cases}\lambda+\nu-1=0\\-2\lambda+\mu-7=0\\\lambda+2\mu-\nu-\alpha-2\beta+\gamma=0\end{cases}&\iff\boxed{\begin{cases}\lambda\quad\quad +\nu=-1\\-2\lambda+\mu\quad\quad=7\\\lambda+2\mu-\nu=\alpha+2\beta-\gamma\end{cases}}\\
&\iff\begin{pmatrix}1&0&1\\-2&1&0\\1&2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\\ \nu\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\7\\\alpha+2\beta-\gamma\end{pmatrix}\\
&\iff M_1\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\\ \nu\end{pmatrix}=M_2\quad\text{où}\quad\boxed{M_2=\begin{pmatrix}-1\\7\\\alpha+2\beta-\gamma\end{pmatrix}}.\end{aligned}$$

3. *Montrer que M_1 est inversible et calculer son inverse.*

► On fixe $(y_1,y_2,y_3)\in\mathbb{R}^3$ et on cherche $(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$ tel que :
$$\begin{aligned}M_1\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}&\iff\begin{pmatrix}1&0&1\\-2&1&0\\1&2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}\quad\begin{matrix}L_2\leftarrow L_2+2L_1\\L_3\leftarrow L_3-L_1\end{matrix}\\
&\iff\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\0&2&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_1\\2y_1+y_2\\-y_1+y_3\end{pmatrix}\quad L_3\leftarrow L_3-2L_1\\
&\iff\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\0&0&-6\end{pmatrix}}_{\text{rang}=3}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_1\\2y_1+y_2\\-5y_1-2y_2+y_3\end{pmatrix}\quad\begin{matrix}L_1\leftarrow 6L_1+L_3\\L_2\leftarrow 3L_2+L_3\end{matrix}\end{aligned}$$

On obtient une matrice équivalente échelonnée de rang maximal donc $\boxed{M_1 \text{ est inversible}}$.
$$\begin{aligned}M_1\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}&\iff\begin{pmatrix}6&0&0\\0&3&0\\0&0&-6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_1-2y_2+y_3\\y_1+y_2+y_3\\-5y_1-2y_2+y_3\end{pmatrix}\quad\begin{matrix}L_1\leftarrow L_1/6\\L_2\leftarrow L_2/3\\L_3\leftarrow -L_3/6\end{matrix}\\
&\iff\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}_{=\mathrm{I}_3}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(y_1-2y_2+y_3)/6\\(y_1+y_2+y_3)/3\\-(-5y_1-2y_2+y_3)/6\end{pmatrix}\\
&\iff\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}y_1-2y_2+y_3\\2y_1+2y_2+2y_3\\5y_1+2y_2-y_3\end{pmatrix}=\underbrace{\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1&-2&1\\2&2&2\\5&2&-1\end{pmatrix}}_{=M_1^{-1}}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Finalement, l'inverse de la matrice M_1 est égal à :

$$\boxed{M_1^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix}}.$$

4. *En déduire que les coordonnées de H sont données par :*

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = P_1 \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} + P_2 \quad \text{où} \quad P_1 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

▶ D'après les résultats des questions précédentes, on a :

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} &= \mathrm{I}_3 \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = M_1^{-1}M_1 \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = M_1^{-1}M_2 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ \alpha+2\beta-\gamma \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -15+\alpha+2\beta-\gamma \\ 12+2\alpha+4\beta-2\gamma \\ 9-\alpha-2\beta+\gamma \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} \alpha+2\beta-\gamma \\ 2\alpha+4\beta-2\gamma \\ -\alpha-2\beta+\gamma \end{pmatrix} + \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -15 \\ 12 \\ 9 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \boxed{P_1 \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} + P_2}.
\end{aligned}$$

5. (a) *Déterminer en fonction de α, β et γ la valeur du paramètre $t \in \mathbb{R}$ du point $M(x, y, z) \in \mathscr{D}$ telle que le vecteur $\overrightarrow{AM}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{u} = (1, 2, -1)$.*

▶ Soit $t \in \mathbb{R}$ le paramètre du point $M(x, y, z) \in \mathscr{D}$, donc $(x, y, z) = (-3+t, 1+2t, 2-t)$. Le vecteur $\overrightarrow{AM}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{u} = (1, 2, -1)$ si et seulement si :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{u} = 0 &\iff \begin{pmatrix} -3+t-\alpha \\ 1+2t-\beta \\ 2-t-\gamma \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \\
&\iff (-3+t-\alpha) + 2(1+2t-\beta) - (2-t-\gamma) = 0 \\
&\iff -3+6t-\alpha-2\beta+\gamma = 0 \\
&\iff \boxed{t = \frac{1}{6}(\alpha+2\beta-\gamma+3)}.
\end{aligned}$$

(b) *Retrouver le résultat de la question 4 à l'aide de la valeur du paramètre t obtenue à la question précédente.*

▶ Le vecteur $\overrightarrow{u} = (1, 2, -1)$ est directeur de la droite $\mathscr{D}$. Par conséquent, si le vecteur $\overrightarrow{AM}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{u} = (1, 2, -1)$, alors le point $M(x, y, z) \in \mathscr{D}$ est le projeté orthogonal de A sur $\mathscr{D}$. On en déduit que les coordonnées de $H(\lambda, \mu, \nu)$ sont obtenues pour la valeur du paramètre $t \in \mathbb{R}$ calculée à la question précédente, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \lambda = -3+t = -3+\frac{1}{6}(\alpha+2\beta-\gamma+3) = \frac{1}{6}(\alpha+2\beta-\gamma) - \frac{5}{2} \\ \mu = 1+2t = 1+\frac{1}{3}(\alpha+2\beta-\gamma+3) = \frac{1}{6}(2\alpha+4\beta-2\gamma) + \frac{4}{2} \\ \nu = 2-t = 2-\frac{1}{6}(\alpha+2\beta-\gamma+3) = \frac{1}{6}(-\alpha-2\beta+\gamma) + \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\text{donc} \quad \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \boxed{P_1 \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} + P_2}.$$

6. (a) *À l'aide du résultat de la question 4, montrer que :*

$$P_1\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\\ \nu\end{pmatrix}+P_2=\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\\ \nu\end{pmatrix}.$$

► On a d'après le résultat de la question 4 :

$$P_1\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\\ \nu\end{pmatrix}+P_2=P_1\left(P_1\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}+P_2\right)+P_2=P_1^2\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}+P_1P_2+P_2.$$

Or :

$$P_1^2=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1&2&-1\\ 2&4&-2\\ -1&-2&1\end{pmatrix}\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1&2&-1\\ 2&4&-2\\ -1&-2&1\end{pmatrix}=\frac{1}{36}\begin{pmatrix}6&12&-6\\ 12&24&-12\\ -6&-12&6\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1&2&-1\\ 2&4&-2\\ -1&-2&1\end{pmatrix}=P_1$$

et :

$$P_1P_2=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1&2&-1\\ 2&4&-2\\ -1&-2&1\end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-5\\ 4\\ 3\end{pmatrix}=\frac{1}{12}\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}=0_{3,1}.$$

Par conséquent :

$$P_1\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\\ \nu\end{pmatrix}+P_2=P_1^2\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}+P_1P_2+P_2=P_1\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}+P_2=\boxed{\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\\ \nu\end{pmatrix}}$$

d'après le résultat de la question 4.

(b) *Quelle est l'interprétation géométrique du résultat précédent ?*

► On sait d'après le résultat de la question 4 que les coordonnées du projeté orthogonal $H(\lambda,\mu,\nu)$ de $A(\alpha,\beta,\gamma)$ sur $\mathscr{D}$ sont données par :

$$\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\\ \nu\end{pmatrix}=P_1\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}+P_2.$$

Ainsi, les coordonnées du projeté orthogonal de $H(\lambda,\mu,\nu)$ sur $\mathscr{D}$ sont égales à :

$$P_1\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\\ \nu\end{pmatrix}+P_2=\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\\ \nu\end{pmatrix}\quad\text{d'après le résultat de la question précédente.}$$

Le projeté orthogonal de H sur $\mathscr{D}$ est donc égal à H. Par conséquent, $\boxed{\text{le projeté orthogonal sur } \mathscr{D} \text{ du projeté orthogonal sur } \mathscr{D} \text{ de } A \text{ est égal au projeté orthogonal sur } \mathscr{D} \text{ de } A}$ ou autrement dit $\boxed{\text{projeter orthogonalement sur } \mathscr{D} \text{ deux fois de suite revient à ne le faire qu'une seule fois}}$.

7. (a) *On note $\mathscr{S}$ l'ensemble des points $M(x,y,z)\in\mathscr{E}$ qui vérifient la propriété suivante :*

$$P_1\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}+P_2=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}.\qquad\text{(S)}$$

Résoudre (S) et en déduire que $\mathscr{S}=\mathscr{D}$.

▶ On a :

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{S}) &\iff P_1\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}+P_2=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\\
&\iff \frac{1}{6}\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&4&-2\\-1&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}-\mathrm{I}_3\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-5\\4\\3\end{pmatrix}\\
&\iff \left(\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&4&-2\\-1&-2&1\end{pmatrix}-6\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=-3\begin{pmatrix}-5\\4\\3\end{pmatrix}\\
&\iff \begin{pmatrix}-5&2&-1\\2&-2&-2\\-1&-2&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15\\-12\\-9\end{pmatrix}\quad \begin{matrix}L_1\leftrightarrow L_3\\ \\ L_3\leftrightarrow L_1\end{matrix}\\
&\iff \begin{pmatrix}-1&-2&-5\\2&-2&-2\\-5&2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9\\-12\\15\end{pmatrix}\quad \begin{matrix}\\ L_2\leftarrow L_2+2L_1\\ L_3\leftarrow L_3-5L_1\end{matrix}\\
&\iff \begin{pmatrix}-1&-2&-5\\0&-6&-12\\0&12&24\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9\\-30\\60\end{pmatrix}\quad \begin{matrix}\\ \\ L_3\leftarrow L_3+2L_2\end{matrix}\\
&\iff \begin{pmatrix}-1&-2&-5\\0&-6&-12\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9\\-30\\0\end{pmatrix}\quad \begin{matrix}\\ \\ L_3\leftarrow L_3+2L_2\end{matrix}
\end{aligned}
$$

On obtient un système équivalent échelonné de rang 2 avec une inconnue auxiliaire et une équation auxiliaire compatible. Le système (S) a donc une infinité de solutions de la forme :

$$
\boxed{\begin{cases} x=9-2y-5z=9-2(5-2z)-5z=-1-z\\ y=-(-30+12z)/6=5-2z \qquad\qquad \text{où } z\in\mathbb{R} \text{ est un paramètre}\\ z=z\end{cases}}.
$$

On reconnaît la représentation paramétrique d'une droite de l'espace, donc l'ensemble $\mathscr{S}$ des points $M(x,y,z)\in\mathscr{E}$ qui vérifient la propriété de l'énoncé est la droite passant par le point $G(-1,5,0)$ et dirigée par le vecteur $\overrightarrow{v}=(-1,-2,1)$. On remarque que $\overrightarrow{v}$ est aussi un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}$ car $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{u}=(1,2,-1)=-\overrightarrow{v}$ sont colinéaires. De plus, en prenant le paramètre $t=2$, on obtient que le point $G(-3+2,1+2\times 2,2-2)$ appartient aussi à la droite $\mathscr{D}$. Finalement, on en déduit que les droites $\mathscr{S}$ et $\mathscr{D}$ sont confondues, c'est-à-dire $\boxed{\mathscr{S}=\mathscr{D}}$.

On peut aussi montrer que $\mathscr{S}=\mathscr{D}$ par double inclusion.

(b) Quelle est l'interprétation géométrique du résultat précédent ?

▶ On sait d'après le résultat de la question 4 que les coordonnées du projeté orthogonal $H(\lambda,\mu,\nu)$ de $A(\alpha,\beta,\gamma)$ sur $\mathscr{D}$ sont données par :

$$
\begin{pmatrix}\lambda\\\mu\\\nu\end{pmatrix}=P_1\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}+P_2.
$$

Ainsi, les coordonnées des points $M(x,y,z)\in\mathscr{E}$ égaux à leur projeté orthogonal sur $\mathscr{D}$ doivent vérifier le système (S). D'après le résultat de la question précédente, on en déduit que $\boxed{\text{la droite } \mathscr{D} \text{ est égal à l'ensemble des points qui sont égaux à leur projeté orthogonal sur } \mathscr{D}}$ ou autrement dit $\boxed{\text{projeter orthogonalement sur } \mathscr{D} \text{ les points de } \mathscr{D}\text{, et seulement ceux-là, n'a aucun effet}}$.

Exercice

Déterminer un équivalent simple de chacune des suites suivantes.

1. $\forall n \geqslant 1,\ a_n = \dfrac{\ln(n)^{100} + 99^n}{100^n + n^{101}}$.

▶ On a pour tout $n \geqslant 1$:

$$\frac{\ln(n)^{100} + 99^n}{99^n} = \frac{\ln(n)^{100}}{99^n} + 1 = \left(\frac{\ln(n)}{99^{n/100}}\right)^{100} + 1 = \left(\frac{\ln(n)}{(99^{1/100})^n}\right)^{100} + 1.$$

Or $99^{1/100} = \sqrt[100]{99} > 1$ donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{(99^{1/100})^n} = 0 \quad \text{d'après le théorème des croissances comparées}$$

et par conséquent :

$$\ln(n)^{100} + 99^n \underset{n\to+\infty}{\sim} 99^n.$$

De même, on a pour tout $n \geqslant 1$:

$$\frac{100^n + n^{101}}{100^n} = 1 + \frac{n^{101}}{100^n}.$$

Or $100 > 1$ donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{101}}{100^n} = 0 \quad \text{d'après le théorème des croissances comparées}$$

et par conséquent :

$$100^n + n^{101} \underset{n\to+\infty}{\sim} 100^n.$$

Finalement, on obtient :

$$a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{99^n}{100^n} = \boxed{\left(\frac{99}{100}\right)^n}.$$

2. $\forall n \geqslant 1,\ b_n = \left(\dfrac{1+2n^2}{2+n^2}\right)\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$.

▶ On a :

$$\frac{1+2n^2}{2+n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2n^2}{n^2} = 2.$$

De plus :

$$\forall n \geqslant 1,\ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right).$$

Or $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc :

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

On en déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty} n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$$

puis :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) = \exp(1) = e \quad \text{par composition de limites.}$$

Finalement, on obtient :

$$b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2 \times e = \boxed{2e}.$$

3. $\forall n \geqslant 1,\ c_n = \dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{1-\cos(1/\sqrt{n})}$.

▶ On a $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ donc :

$$\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2}{2} = \frac{-1}{2n}$$

et par conséquent :

$$1-\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = -\left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)-1\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{-1}{2n} = \frac{1}{2n}.$$

De plus, on a pour tout $n \geqslant 1$:

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)}.$$

Or $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{1+\frac{1}{n}}+1 = 2$ donc :

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

Finalement, on obtient :

$$c_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\frac{1}{2\sqrt{n}}}{\frac{1}{2n}} = \frac{n}{\sqrt{n}} = \boxed{\sqrt{n}}.$$

4. $\forall n \geqslant 0,\ d_n = \left(\dfrac{n^2+3}{n^2+1}\right)^n - 1$.

▶ On a pour tout $n \geqslant 0$:

$$\left(\frac{n^2+3}{n^2+1}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(\frac{n^2+3}{n^2+1}\right)\right) = \exp\left(n\ln\left(1+u_n\right)\right)$$

en posant :

$$u_n = \frac{n^2+3}{n^2+1} - 1 = \frac{2}{n^2+1}.$$

Or $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n^2+1} = 0$ donc :

$$n\ln\left(1+u_n\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} nu_n = \frac{2n}{n^2+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n}.$$

En particulier, on a $\lim_{n\to+\infty} n\ln(1+u_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n} = 0$ donc :

$$\exp\left(n\ln\left(1+u_n\right)\right) - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln\left(1+u_n\right).$$

Finalement, on obtient :

$$d_n = \exp\left(n\ln\left(1+u_n\right)\right) - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln\left(1+u_n\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \boxed{\frac{2}{n}}.$$

5. $\forall n \geqslant 0,\ e_n = (1+\sin(1/n))^5 - (1+\tan(1/n))^{1/5}$.

► On a $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} \sin(1/n) = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} \tan(1/n) = 0$ par composition de limites. On en déduit que :

$$\left(1+\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^5 - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} 5\sin\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{5}{n}$$

$$\text{et} \quad \left(1+\tan\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{1/5} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{5}\tan\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{5n}.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} ne_n &= \lim_{n\to+\infty} n\left(\left(1+\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^5 - 1 + 1 - \left(1+\tan\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{1/5}\right) \\
&= \lim_{n\to+\infty} n\Bigg(\underbrace{\left(1+\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^5 - 1}_{\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{5}{n}}\Bigg) - n\Bigg(\underbrace{\left(1+\tan\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{1/5} - 1}_{\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{5n}}\Bigg) \\
&= 5 - \frac{1}{5} = \frac{24}{5}.
\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$e_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \boxed{\frac{24}{5n}}.$$

Attention : on peut sommer des limites mais pas des équivalents !

DS n$^{\text{o}}$ 6 de mathématiques et d'informatique

durée : 3 heures

Exercice 1

Déterminer un équivalent simple de chacune des fonctions suivantes au voisinage des points indiqués.

1. $f_1 : x \mapsto \left(\dfrac{1+3x^3}{3+x^3}\right)\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^x$ quand $x \to +\infty$.
2. $f_2 : x \mapsto \dfrac{\ln(\sin(x))}{\cos(x)}$ quand $x \to \pi/2$.
3. $f_3 : x \mapsto \dfrac{x^2\ln(x)+x}{x^2+\exp(-1/x)}$ quand $x \to 0^+$.
4. $f_4 : x \mapsto \sqrt{\dfrac{7+x^2}{3-x}} - 2$ quand $x \to 1$.
5. $f_5 : x \mapsto \exp(\tan(x)) - \exp(\sin(x))$ quand $x \to 0$.

Problème 1

Ce problème propose d'étudier les racines du polynôme $P_t = X^7 + tX - 1$ en fonction du paramètre $t > 0$.

1. Pour cette question, on fixe $t > 0$.
   (a) Justifier que P_t admet une unique racine réelle et que cette racine appartient à $]0,1[$.
   (b) On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $P_t(\alpha) = P_t'(\alpha) = 0$. Montrer que $\alpha t = 7/6$ puis en déduire une absurdité. Que peut-on en déduire pour la multiplicité de la racine réelle de P_t ?
   (c) Déduire des résultats précédents le nombre de racines distinctes et non réelles de P_t.
2. Pour la suite du problème, on note $f(t)$ l'unique racine réelle de P_t pour tout $t > 0$.
   (a) Justifier que f est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$.
   (b) Montrer que f admet des limites finies en 0^+ et en $+\infty$.
   (c) i. Déterminer la limite de $f(t)$ quand t tend vers 0^+.
       ii. En déduire que $f(t) - 1$ est équivalent à $-t/7$ quand t tend vers 0^+.
   (d) i. Déterminer la limite de $f(t)$ quand t tend vers $+\infty$.
       ii. En déduire que $f(t)$ est équivalent à $1/t$ quand t tend vers $+\infty$.
3. On pose $g :]0,1[\to]0,+\infty[, x \mapsto (1-x^7)/x$.
   (a) Justifier que f est la bijection réciproque de g.
   (b) Justifier que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et exprimer $f'(t)$ en fonction de $f(t)$ pour tout $t > 0$.
   (c) À l'aide des résultats précédents, déterminer des équivalents simples de f' en 0^+ et en $+\infty$.

Exercice 2

Seul le langage Python est autorisé. Chaque polynôme sera représenté par la liste de ses coefficients.

1. Écrire la fonction `evalue` qui calcule l'évaluation d'un polynôme P en un nombre réel a. Par exemple si $P = X^2 + 2X + 3$ et $a = 2$, alors `evalue([3,2,1],2)` retourne $P(2) = 11$.
2. On considère la fonction `mystere` ci-contre.

```
def mystere(P):
    reponse = True
    for i in range(int(len(P)/2)):
        if P[i] != P[len(P)-i-1]:
            reponse = False
    return reponse
```

(a) Que retourne cette fonction pour les polynômes suivants :

$$P_1 = X^2+2X+1, \quad P_2 = X^2+2X+2, \quad P_3 = X^5+X^3+X+1 \quad \text{et} \quad P_4 = X^5+X^3+X^2+1.$$

(b) Expliquer à quoi sert cette fonction.

3. On rappelle l'algorithme de dérivation d'un polynôme :

```
def derive(P):
    D = []
    for i in range(1,len(P)):
        D += [P[i]*i]
    return D
```

En s'inspirant de cet algorithme, écrire la fonction `primitive` qui prend en argument un polynôme P et renvoie l'unique primitive de P qui s'annule en 0.

Problème 2

Ce problème propose d'étudier quelques propriétés des polynômes palindromiques, c'est-à-dire dont les coefficients peuvent être indifféremment lus dans l'ordre croissant ou décroissant des degrés. Par exemple, le polynôme $2X^6 - X^4 + 5X^3 - X^2 + 2$ est palindromique.

1. Cas du degré 2. Soit $P_2 = aX^2 + bX + a \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme palindromique de degré 2.
   (a) Justifier que 0 n'est pas racine de P_2.
   (b) Montrer que si P_2 n'admet pas de racine double alors le produit de ses racines (dans $\mathbb{C}$) vaut 1 et aucune de ses racines n'est égale à 1 ou -1.
   (c) Montrer que si P_2 admet une racine double alors cette racine vaut 1 ou -1.
2. Cas du degré 3. Soit $P_3 = aX^3 + bX^2 + bX + a \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme palindromique de degré 3.
   (a) Trouver une racine évidente de P_3.
   (b) Soit $Q_3 \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P_3 = (X+1)Q_3$. Montrer que Q_3 est palindromique de degré 2.
   (c) Que peut-on déduire des résultats précédents pour les racines de P_3 ?
3. Cas général. Soit $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme palindromique de degré $d \geqslant 0$. On remarque que les coefficients de P vérifient $a_{d-k} = a_k$ pour tout $k \in [\![0, d]\!]$.
   (a) Justifier que 0 n'est pas racine de P.
   (b) Montrer que si d est impair alors -1 est racine de P.
   (c) Montrer que si $\alpha \in \mathbb{C}$ est racine de P alors $1/\alpha$ aussi.
   (d) Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Montrer que si $P(\alpha) = P'(\alpha) = 0$ alors $P(1/\alpha) = P'(1/\alpha) = 0$. Que peut-on en déduire ?
   (e) Soit $Q = \sum_{k=0}^{d'} b_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme palindromique de degré $d' \geqslant 0$.
      i. Montrer que $\sum_{i=0}^{d+d'-k} a_i b_{d+d'-k-i} = \sum_{i=\max\{0,d-k\}}^{\min\{d,d+d'-k\}} a_{d-i} b_{-d+k+i}$ pour tout $k \in [\![0, d+d']\!]$.
      ii. En déduire que $\sum_{i=0}^{d+d'-k} a_i b_{d+d'-k-i} = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$ pour tout $k \in [\![0, d+d']\!]$.
      iii. Quelle conclusion peut-on tirer ?
4. Un exemple de degré 4. Soit $P_4 = X^4 - 5X^3 + 6X^2 - 5X + 1$.
   (a) Développer l'expression $(\alpha + 1/\alpha)^2$ pour tout $\alpha \in \mathbb{C}^\star$.
   (b) Montrer que $\alpha \in \mathbb{C}$ est racine de P_4 si et seulement si $\alpha + 1/\alpha$ est racine d'un polynôme réel de degré 2, qu'on notera Q_4, à déterminer.
   (c) En déduire la factorisation de P_4 dans $\mathbb{C}[X]$.

Corrigé du DS n^{o} 6 de mathématiques et d'informatique

Exercice 1

Déterminer un équivalent simple de chacune des fonctions suivantes au voisinage des points indiqués.

1. *$f_1 : x \mapsto \left(\dfrac{1+3x^3}{3+x^3}\right)\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^x$ quand $x \to +\infty$.*

▶ On a :

$$\frac{1+3x^3}{3+x^3} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{3x^3}{x^3} = 3 \quad \text{donc} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{1+3x^3}{3+x^3} = 3.$$

De plus :

$$\ln\left(1+\frac{3}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{3}{x} \quad \text{car} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{x} = 0$$

$$\text{donc} \quad x\ln\left(1+\frac{3}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} x\frac{3}{x} = 3.$$

On en déduit que :

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{3}{x}\right)^x = \lim_{x\to+\infty} \exp\left(x\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)\right) = \exp(3) = e^3 \quad \text{par composition de limites.}$$

Par conséquent :

$$\left(1+\frac{3}{x}\right)^x \underset{x\to+\infty}{\sim} e^3 \quad \text{car} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(1+\frac{3}{x}\right)^x}{e^3} = 1 \quad \text{par quotient de limites}$$

$$\text{donc} \quad f_1(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \boxed{3e^3} \quad \text{par produit d'équivalents.}$$

2. *$f_2 : x \mapsto \dfrac{\ln(\sin(x))}{\cos(x)}$ quand $x \to \pi/2$.*

▶ Pour tout x au voisinage de $\pi/2$, on pose $X = x - \pi/2 \iff x = X + \pi/2$. Alors :

$$\frac{\ln(\sin(x))}{\cos(x)} = \frac{\ln(\sin(X+\pi/2))}{\cos(X+\pi/2)} = \frac{\ln(\cos(X))}{-\sin(X)} = -\frac{\ln(1+(\cos(X)-1))}{\sin(X)}.$$

Or $\lim_{x\to\pi/2} X = \lim_{x\to\pi/2} x - \pi/2 = 0$. De plus :

$$\sin(X) \underset{X\to 0}{\sim} X$$

$$\begin{aligned} \text{et} \quad \ln(1+(\cos(X)-1)) &\underset{X\to 0}{\sim} (\cos(X)-1) \quad \text{car } \lim_{X\to 0}(\cos(X)-1) = 0 \\ &\underset{X\to 0}{\sim} -\frac{X^2}{2}. \end{aligned}$$

Donc :

$$f_2(x) \underset{x\to\pi/2}{\sim} -\frac{-X^2/2}{X} = \frac{X}{2} = \boxed{\frac{x-\pi/2}{2}}.$$

3. $f_3 : x \mapsto \dfrac{x^2\ln(x)+x}{x^2+\exp(-1/x)}$ *quand* $x \to 0^+$.

▶ On a pour tout x au voisinage de 0^+ :

$$\frac{x^2\ln(x)+x}{x^2+\exp(-1/x)} = \frac{x}{x^2} \times \frac{x\ln(x)+1}{1+\frac{\exp(-1/x)}{x^2}}.$$

Or on a en posant $X = 1/x \iff x = 1/X$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) &= \lim_{X\to+\infty} \frac{1}{X}\ln\left(\frac{1}{X}\right) \quad \text{car } \lim_{x\to 0^+} X = \lim_{x\to 0^+} 1/x = +\infty \\
&= \lim_{X\to+\infty} \frac{-\ln(X)}{X} = 0 \quad \text{d'après le théorème des croissances comparées} \\
\text{et} \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{\exp(-1/x)}{x^2} &= \lim_{X\to+\infty} \frac{\exp(-X)}{1/X^2} \quad \text{car } \lim_{x\to 0^+} X = +\infty \\
&= \lim_{X\to+\infty} \frac{X^2}{\exp(X)} = 0 \quad \text{d'après le théorème des croissances comparées.}
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x\ln(x)+1}{1+\frac{\exp(-1/x)}{x^2}} = \frac{0+1}{1+0} = 1 \quad \text{donc} \quad \frac{x\ln(x)+1}{1+\frac{\exp(-1/x)}{x^2}} \underset{x\to 0^+}{\sim} 1$$

d'où par produit d'équivalents :

$$f_3(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{x}{x^2} = \boxed{\frac{1}{x}}.$$

4. $f_4 : x \mapsto \sqrt{\dfrac{7+x^2}{3-x}} - 2$ *quand* $x \to 1$.

▶ On a pour tout x au voisinage de 1 :

$$\sqrt{\frac{7+x^2}{3-x}} - 2 = 2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7+x^2}{3-x}} - 1\right) = 2\left(\sqrt{\frac{7+x^2}{4(3-x)}} - 1\right) = 2\left(\sqrt{1 + \underbrace{\left[\frac{7+x^2}{4(3-x)} - 1\right]}_{=X}} - 1\right).$$

Or :

$$\lim_{x\to 1} X = \lim_{x\to 1}\left[\frac{7+x^2}{4(3-x)} - 1\right] = \frac{8}{4\times 2} - 1 = 0 \quad \text{et} \quad \sqrt{1+X} - 1 \underset{X\to 0}{\sim} \frac{X}{2}.$$

Donc :

$$f_4(x) \underset{x\to 1}{\sim} 2\frac{\left[\frac{7+x^2}{4(3-x)} - 1\right]}{2} = \left[\frac{7+x^2-4(3-x)}{4(3-x)}\right] = \frac{x^2+4x-5}{12-4x}.$$

Pour tout x au voisinage de 1, on pose $\varepsilon = x - 1 \iff x = \varepsilon + 1$. Alors :

$$\frac{x^2+4x-5}{12-4x} = \frac{(\varepsilon+1)^2+4(\varepsilon+1)-5}{12-4(\varepsilon+1)} = \frac{\varepsilon^2+6\varepsilon}{8-4\varepsilon} \underset{\varepsilon\to 0}{\sim} \frac{6\varepsilon}{8} = \frac{3}{4}\varepsilon = \frac{3}{4}(x-1).$$

Or $\lim_{x\to 1}\varepsilon = \lim_{x\to 1} x - 1 = 0$, donc :

$$f_4(x) \underset{x\to 1}{\sim} \boxed{\frac{3}{4}(x-1)}.$$

5. *$f_5 : x \mapsto \exp(\tan(x)) - \exp(\sin(x))$ quand $x \to 0$.*

▶ On a pour tout x au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned}\exp(\tan(x)) - \exp(\sin(x)) &= \exp(\sin(x))\left[\frac{\exp(\tan(x))}{\exp(\sin(x))} - 1\right]\\ &= \exp(\sin(x))\Big[\exp(\tan(x) - \sin(x)) - 1\Big].\end{aligned}$$

Or $\lim x \to 0 \exp(\sin(x)) = \exp(0) = 1$ donc $\exp(\sin(x)) \underset{x\to 0}{\sim} 1$. De plus, $\lim_{x\to 0}(\tan(x) - \sin(x)) = 0$ et $\exp(X) - 1 \underset{X\to 0}{\sim} X$, donc :

$$f_5(x) \underset{x\to 0}{\sim} 1\Big[\tan(x) - \sin(x)\Big] = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} - \sin(x) = \sin(x)\left(\frac{1}{\cos(x)} - 1\right) = -\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\Big(\cos(x) - 1\Big).$$

Or $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$, $\cos(x) \underset{x\to 0}{\sim} 1$ et $\cos(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} -x^2/2$. On en déduit par produit d'équivalents que :

$$f_5(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x}{1}\left(-\frac{x^2}{2}\right) = \boxed{\frac{x^3}{2}}.$$

Problème 1

Ce problème propose d'étudier les racines du polynôme $P_t = X^7 + tX - 1$ en fonction du paramètre $t > 0$.

1. *Pour cette question, on fixe $t > 0$.*

   (a) *Justifier que P_t admet une unique racine réelle et que cette racine appartient à $]0,1[$.*

   ▶ $P_t : x \mapsto P_t(x) = x^7 + tx - 1$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynomiale. De plus :

   $$\forall x \in \mathbb{R},\ P_t'(x) = 7x^6 + t > 0 \quad \text{car } x^6 \geqslant 0 \text{ et } t > 0.$$

   Donc P_t est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus, $\lim_{x\to+\infty} P_t(x) = \lim_{x\to+\infty} x^7 = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} P_t(x) = \lim_{x\to-\infty} x^7 = -\infty$ car $P_t(x) \underset{x\to\pm\infty}{\sim} x^7$, $P_t(0) = -1 < 0$ et $P_t(1) = t > 0$. Donc :

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
$P_t(x)$	$-\infty$	$-1 < 0$	0	$t > 0$	$+\infty$

   D'après le théorème de la bijection, on en déduit qu'il existe un unique $x \in \mathbb{R}$ tel que $P_t(x) = 0$, de plus $x \in]0,1[$. Ainsi $\boxed{P_t \text{ admet une unique racine réelle et cette racine appartient à }]0,1[}$.

   (b) *On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $P_t(\alpha) = P_t'(\alpha) = 0$. Montrer que $\alpha t = 7/6$ puis en déduire une absurdité. Que peut-on en déduire pour la multiplicité de la racine réelle de P_t ?*

   ▶ On a :

   $$0 = P_t'(\alpha) = 7\alpha^6 + t \quad \text{donc} \quad \alpha^6 = -\frac{t}{7}$$

   $$\text{et} \quad 0 = P_t(\alpha) = \alpha^7 + t\alpha - 1 = \alpha \times \alpha^6 + t\alpha - 1 = \alpha\left(-\frac{t}{7}\right) + t\alpha - 1 = \frac{6}{7}\alpha t - 1$$

   $$\text{donc} \quad \boxed{\alpha t = \frac{7}{6}}.$$

On en déduit que $\alpha = 7/(6t)$ car $t \neq 0$ et donc :

$$0 = P_t'(\alpha) = P_t'\left(-\frac{7}{6t}\right) = 7\left(-\frac{7}{6t}\right)^6 + t = \frac{7^7}{6^6 t^6} + t \quad \text{donc} \quad t = -\frac{7^7}{6^6 t^6}$$

$$\text{par conséquent :} \quad t^7 = -\frac{7^7}{6^6} \quad \text{donc} \quad t = \sqrt[7]{-\frac{7^7}{6^6}} = -\frac{7}{6^{6/7}} < 0$$

ce qui est $\boxed{\text{absurde}}$ car $t > 0$.

Attention, si on utilise $0 = P_t(\alpha) = \alpha^7 + t\alpha - 1 = \alpha^7 + \frac{7}{6} - 1 = \alpha^7 + \frac{1}{6}$, on obtient que $\alpha^7 = -1/6$ ce qui donne $\alpha = -1/6^{1/7} < 0$ si $\alpha \in \mathbb{R}$. Ceci est en contradiction avec le résultat de la question précédente ($\alpha \in]0,1[$ puisque α est une racine réelle) mais on ne peut pas conclure à une absurdité car $\alpha \in \mathbb{C}$ a priori. Il faut également remarquer que $\alpha = 7/(6t) \in \mathbb{R}$ car $t > 0$ ce qui permet de conclure le raisonnement.

On remarque $P_t(\alpha) = P_t'(\alpha) = 0$ si et seulement si α est une racine de P_t d'ordre de multiplicité supérieure ou égal à 2. Puisque c'est absurde, on en déduit qu'il n'existe pas de racine de P_t d'ordre de multiplicité supérieure ou égal à 2. Autrement dit, toutes les racines de P_t sont simples. En particulier, si α est l'unique racine réelle de P_t obtenue à la question précédente, on en déduit que cette racine est $\boxed{\text{d'ordre de multiplicité égal à 1}}$.

(c) *Déduire des résultats précédents le nombre de racines distinctes et non réelles de P_t.*

▶ D'après le théorème fondamental de l'algèbre, on sait que la somme des ordres de multiplicité des racines de P_t dans $\mathbb{C}$ est égale à $\deg(P_t) = 7$. Or on a vu à la question précédente que toutes les racines de P_t sont simples. Par conséquent, P_t admet exactement 7 racines distinctes dans $\mathbb{C}$ qui sont toutes d'ordre de multiplicité égal à 1. Puisque P_t admet une unique racine réelle d'après le résultat de la question 1(a), on en déduit que $\boxed{P_t \text{ admet exactement 6 racines non réelles distinctes}}$.

2. *Pour la suite du problème, on note $f(t)$ l'unique racine réelle de P_t pour tout $t > 0$.*

(a) *Justifier que f est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.*

▶ Soient $(t_1, t_2) \in]0, +\infty[^2$ tels que $t_1 < t_2$. Déterminons le signe de $P_{t_1}(f(t_2))$. On a :

$$P_{t_1}(f(t_2)) = (f(t_2))^7 + t_1 f(t_2) - 1.$$

Or on a par définition de $f(t_2)$:

$$0 = P_{t_2}(f(t_2)) = (f(t_2))^7 + t_2 f(t_2) - 1 \quad \text{donc} \quad (f(t_2))^7 = 1 - t_2 f(t_2).$$

Par conséquent :

$$P_{t_1}(f(t_2)) = 1 - t_2 f(t_2) + t_1 f(t_2) - 1 = (t_1 - t_2) f(t_2).$$

Or $t_1 - t_2 < 0$ et $f(t_2) \in]0, 1[$ d'après le résultat de la question 1(a). Donc $P_{t_1}(f(t_2)) < 0$.

x	$-\infty$	$f(t_2)$	$f(t_1)$	$+\infty$
$P_{t_1}(x)$	$-\infty$ ↗	$P_{t_1}(f(t_2)) < 0$ ↗	$P_{t_1}(f(t_1)) = 0$ ↗	$+\infty$

Or $P_{t_1}(f(t_1)) = 0$ par définition de $f(t_1)$ donc $P_{t_1}(f(t_2)) < P_{t_1}(f(t_1))$. De plus, on a vu à la question 1(a) que P_{t_1} est strictement croissante. Par conséquent $t_2 < t_1$. Ceci est vrai pour tout $(t_1, t_2) \in]0, +\infty[^2$ tels que $t_1 < t_2$. On en déduit que $\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur }]0, +\infty[}$.

(b) *Montrer que f admet des limites finies en 0^+ et en $+\infty$.*

▶ La fonction f est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$ d'après le résultat de la question précédente. De plus, pour tout $t > 0$, $f(t) \in]0, 1[$ d'après le résultat de la question 1(a) et par définition de $f(t)$. En particulier, f est majorée par 1 donc $\boxed{\lim_{t\to 0^+} f(t) \text{ existe et est finie}}$ d'après le théorème de la limite monotone. De même, f est minorée par 0 donc $\boxed{\lim_{t\to +\infty} f(t) \text{ existe et est finie}}$.

(c) i. *Déterminer la limite de $f(t)$ quand t tend vers 0^+.*

▶ On note $\ell = \lim_{t\to 0^+} f(t)$. Pour tout $t > 0$, on a par définition de $f(t)$:

$$0 = P_t(f(t)) = (f(t))^7 + tf(t) - 1$$

d'où en passant à la limite quand t tend vers 0^+ :

$$0 = \ell^7 + 0 \times \ell - 1 = \ell^7 - 1 \quad \text{donc} \quad \ell = \sqrt[7]{1} = 1.$$

Par conséquent, $\boxed{\lim_{t\to 0^+} f(t) = 1}$.

ii. *En déduire que $f(t) - 1$ est équivalent à $-t/7$ quand t tend vers 0^+.*

▶ Pour tout $t > 0$, on a par définition de $f(t)$:

$$0 = P_t(f(t)) = (f(t))^7 + tf(t) - 1 \quad \text{donc} \quad -tf(t) = (f(t))^7 - 1 = \Big(1 + \underbrace{(f(t) - 1)}_{=x}\Big)^7 - 1.$$

Or $\lim_{t\to 0^+} x = \lim_{t\to 0^+}(f(t) - 1) = 0$ d'après le résultat de la question précédente et

$$(1 + x)^7 - 1 \underset{x\to 0}{\sim} 7x.$$

Donc :

$$-tf(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} 7(f(t) - 1).$$

On en déduit que :

$$f(t) - 1 \underset{t\to 0^+}{\sim} \frac{-tf(t)}{7} \underset{t\to 0^+}{\sim} \boxed{\frac{-t}{7}}$$

par produit d'équivalents et car $\lim_{t\to 0^+} f(t) = 1$ d'après le résultat de la question précédente.

(d) i. *Déterminer la limite de $f(t)$ quand t tend vers $+\infty$.*

▶ On note $\ell = \lim_{t\to +\infty} f(t)$. Pour tout $t > 0$, on a par définition de $f(t)$:

$$0 = P_t(f(t)) = (f(t))^7 + tf(t) - 1.$$

Attention, $\lim_{t\to +\infty} tf(t)$ donne une forme indéterminée si $\ell = 0$. Il est donc nécessaire de distinguer plusieurs cas.

Or, pour tout $t > 0$, $f(t) \in]0, 1[$ d'après le résultat de la question 1(a) et par définition de $f(t)$. Donc $\ell \in [0, 1]$ en passant à la limite quand t tend vers $+\infty$.

N'oubliez pas de passer aux inégalités LARGES à la limite !!

<u>1er cas</u> : $\ell \in]0,1]$. Alors $\lim_{t\to+\infty} tf(t) = \ell \times +\infty = +\infty$ car $\ell > 0$. On obtient donc en passant à la limite quand t tend vers $+\infty$:

$$0 = \lim_{t\to+\infty} P_t(f(t)) = \lim_{t\to+\infty} (f(t))^7 + tf(t) - 1 = +\infty + \infty - 1 = +\infty$$

ce qui est absurde.

<u>Conclusion</u>. Puisque le cas $\ell \in]0,1]$ est absurde et que $\ell \in [0,1]$, on en déduit que $\ell = 0$. Par conséquent, $\boxed{\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0}$.

ii. En déduire que $f(t)$ est équivalent à $1/t$ quand t tend vers $+\infty$.

▶ Pour tout $t > 0$, on a par définition de $f(t)$:

$$0 = P_t(f(t)) = (f(t))^7 + tf(t) - 1 \quad \text{donc} \quad tf(t) = 1 - (f(t))^7.$$

Or $\lim_{t\to+\infty} 1-(f(t))^7 = 1$ d'après le résultat de la question précédente. Donc $tf(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} 1$ puis par produit d'équivalents :

$$f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \boxed{\frac{1}{t}}.$$

3. On pose $g :]0,1[\to]0,+\infty[, x \mapsto (1-x^7)/x$.

(a) Justifier que f est la bijection réciproque de g.

▶ D'après les résultats des questions précédentes, on sait que f est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$, $\lim_{t\to0^+} f(t) = 1$ et $\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$. Donc $\boxed{f :]0,+\infty[\to]0,1[}$ est bijective d'après le théorème de la bijection. Montrons que $f\circ g = \mathrm{Id}_{]0,1[}$ et $g \circ f = \mathrm{Id}_{]0,+\infty[}$.

<u>1re composition</u>. Soit $x \in]0,1[$. Par définition, $(f\circ g)(x) = f(g(x))$ est l'unique racine réelle de $P_{g(x)}$. Or :

$$P_{g(x)}(x) = x^7 + g(x)x - 1 = x^7 + \frac{1-x^7}{x}x - 1 = 0.$$

Donc $(f\circ g)(x) = f(g(x)) = x$ et ceci est vrai pour tout $x \in]0,1[$. On en déduit que $f\circ g = \mathrm{Id}_{]0,1[}$.

<u>2e composition</u>. Soit $t > 0$. Par définition de $f(t)$, on a :

$$0 = P_t(f(t)) = (f(t))^7 + tf(t) - 1 \quad \text{donc} \quad g(f(t)) = \frac{1-(f(t))^7}{f(t)} = t.$$

Ainsi, $(g\circ f)(t) = g(f(t)) = t$ pour tout $t > 0$. On en déduit que $g\circ f = \mathrm{Id}_{]0,+\infty[}$.

<u>Conclusion</u>. Finalement, on a bien montré que $\boxed{f \text{ est la bijection réciproque de } g}$.

(b) Justifier que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et exprimer $f'(t)$ en fonction de $f(t)$ pour tout $t > 0$.

▶ La fonction $g : x \mapsto \frac{1-x^7}{x}$ est dérivable sur $]0,1[$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur est non nul. De plus, on a :

$$\forall x \in]0,1[,\ g'(x) = \frac{-7x^6 \times x - (1-x^7)\times 1}{x^2} = \frac{-6x^7 - 1}{x^2} = -\frac{6x^7+1}{x^2} < 0 \quad \text{car } x > 0.$$

En particulier, $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in]0,1[$. On en déduit que la bijection réciproque de g est dérivable sur $]0,+\infty[$ d'après le théorème de la bijection dérivable, donc que $\boxed{f \text{ est dérivable sur }]0,+\infty[}$ d'après le résultat de la question précédente.

N'oubliez pas de vérifier que $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in]0,1[$ pour justifier que sa bijection réciproque est dérivable sur $]0,+\infty[$ (rappel : si $g'(x) = 0$ alors la bijection réciproque de g admet une tangente verticale en $g(x)$ et n'est donc pas dérivable en $g(x)$).

De plus, on a :

$$\forall t > 0,\ f'(t) = \frac{1}{g'(f(t))} = \frac{1}{-\frac{6(f(t))^7+1}{(f(t))^2}} = \boxed{\frac{-(f(t))^2}{6(f(t))^7+1}}.$$

(c) À l'aide des résultats précédents, déterminer des équivalents simples de f' en 0^+ et en $+\infty$.

▶ Puisque $\lim_{t\to 0^+} f(t) = 1$ d'après le résultat de la question 2(c)i, on en déduit que :

$$\lim_{t\to 0^+} f'(t) = \lim_{t\to 0^+} \frac{-(f(t))^2}{6(f(t))^7+1} = \frac{-1}{7} \quad \text{donc} \quad f'(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} \boxed{-\frac{1}{7}}.$$

De même, $\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$ d'après le résultat de la question 2(d)i, par conséquent :

$$\lim_{t\to+\infty} 6(f(t))^7 + 1 = 1 \quad \text{donc} \quad f'(t) = \frac{-(f(t))^2}{6(f(t))^7+1} \underset{t\to+\infty}{\sim} -(f(t))^2.$$

Or $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} 1/t$ d'après le résultat de la question 2(d)ii, d'où par produit d'équivalents :

$$f'(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \boxed{-\frac{1}{t^2}}.$$

Exercice 2

Seul le langage Python est autorisé. Chaque polynôme sera représenté par la liste de ses coefficients.

1. *Écrire la fonction* `evalue` *qui calcule l'évaluation d'un polynôme P en un nombre réel a. Par exemple si $P = X^2 + 2X + 3$ et $a = 2$, alors* `evalue([3,2,1],2)` *retourne $P(2) = 11$.*

▶ Par exemple :

```
def evalue(P,a):
    S = 0
    for i in range(len(P)):
        S += P[i]*(a**i)
    return S
```

On peut aussi utiliser la méthode de Horner :

```
def evalue(P,a):
 S = 0
 for i in range(len(P)-1,-1,-1):
 S += S*a+P[i]
 return S
```

2. *On considère la fonction* `mystere` *ci-contre.*

```
def mystere(P):
    reponse = True
    for i in range(int(len(P)/2)):
        if P[i] != P[len(P)-i-1]:
            reponse = False
    return reponse
```

(a) Que retourne cette fonction pour les polynômes suivants :

$$P_1 = X^2+2X+1, \quad P_2 = X^2+2X+2, \quad P_3 = X^5+X^3+X+1 \quad et \quad P_4 = X^5+X^3+X^2+1.$$

▶

— Pour P_1, on a `P = [1,2,1]` donc `len(P)` $= 3$ et `int(len(P)/2)` $= 1$. Ainsi la boucle `for` n'effectue qu'une seule itération pour `i` $= 0$. Or, `P[0]` $= 1$ et `P[len(P)-0-1]` $=$ `P[2]` $= 1$ donc la condition de la boucle `if` n'est pas vérifiée. Par conséquent, la variable `reponse` n'est pas modifiée et la fonction `mystere` retourne $\boxed{\texttt{True}}$.

— Pour P_2, on a `P = [2,2,1]` donc `len(P)` $= 3$. Ainsi, comme pour P_1, la boucle `for` n'effectue qu'une seule itération pour `i` $= 0$. De plus, `P[0]` $= 2$ et `P[len(P)-0-1]` $=$ `P[2]` $= 1$ donc la condition de la boucle `if` est vérifiée. Par conséquent, la variable `reponse` est modifiée et la fonction `mystere` retourne $\boxed{\texttt{False}}$.

— Pour P_3, on a `P = [1,1,0,1,0,1]` donc `len(P)` $= 6$ et `int(len(P)/2)` $= 3$. Ainsi la boucle `for` effectue trois itérations pour `i` $= 0$ puis `i` $= 1$ puis `i` $= 2$. Or, `P[0]` $= 1$ et `P[len(P)-0-1]` $=$ `P[5]` $= 1$ donc la condition de la boucle `if` n'est pas vérifiée pour `i` $= 0$. Puis, `P[1]` $= 1$ et `P[len(P)-1-1]` $=$ `P[4]` $= 0$ donc la condition de la boucle `if` est vérifiée pour `i` $= 1$. Par conséquent, la variable `reponse` est modifiée et la fonction `mystere` retourne $\boxed{\texttt{False}}$.

— Pour P_4, on a `P = [1,0,1,1,0,1]` donc `len(P)` $= 6$. Ainsi, comme pour P_3, la boucle `for` effectue trois itérations pour `i` $= 0$ puis `i` $= 1$ puis `i` $= 2$. Or, `P[0]` $= 1$ et `P[len(P)-0-1]` $=$ `P[5]` $= 1$ donc la condition de la boucle `if` n'est pas vérifiée pour `i` $= 0$. Puis, `P[1]` $= 0$ et `P[len(P)-1-1]` $=$ `P[4]` $= 0$ donc la condition de la boucle `if` n'est pas vérifiée pour `i` $= 1$. Puis, `P[2]` $= 1$ et `P[len(P)-2-1]` $=$ `P[3]` $= 1$ donc la condition de la boucle `if` n'est pas vérifiée pour `i` $= 2$. Par conséquent, la variable `reponse` n'est pas modifiée et la fonction `mystere` retourne $\boxed{\texttt{True}}$.

(b) *Expliquer à quoi sert cette fonction.*

▶ Cette fonction sert à $\boxed{\text{vérifier que les coefficients du polynôme pris en argument peuvent être indifféremment lus dans l'ordre croissant ou décroissant des degrés}}$. Si la lecture dans les deux sens est identique, la fonction `mystere` retourne `True`, sinon elle retourne `False`.

3. *On rappelle l'algorithme de dérivation d'un polynôme :*

```
def derive(P):
    D = []
    for i in range(1,len(P)):
        D += [P[i]*i]
    return D
```

En s'inspirant de cet algorithme, écrire la fonction `primitive` *qui prend en argument un polynôme P et renvoie l'unique primitive de P qui s'annule en 0.*

▶ Par exemple :

```
def primitive(P):
    L = [0]
    for i in range(len(P)):
        L += [P[i]/(i+1)]
    return L
```

Problème 2

Ce problème propose d'étudier quelques propriétés des polynômes palindromiques, c'est-à-dire dont les coefficients peuvent être indifféremment lus dans l'ordre croissant ou décroissant des degrés. Par exemple, le polynôme $2X^6 - X^4 + 5X^3 - X^2 + 2$ est palindromique.

1. *Cas du degré 2. Soit $P_2 = aX^2 + bX + a \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme palindromique de degré 2.*

   (a) *Justifier que 0 n'est pas racine de P_2.*

   ▶ Puisque P_2 est de degré 2, le coefficient de son terme de degré 2 est non nul, c'est-à-dire $a \neq 0$. On en déduit que $P_2(0) = a \neq 0$ donc que $\boxed{0 \text{ n'est pas racine de } P_2}$.

   (b) *Montrer que si P_2 n'admet pas de racine double alors le produit de ses racines (dans $\mathbb{C}$) vaut 1 et aucune de ses racines n'est égale à 1 ou -1.*

   ▶

Attention, on ne peut pas utiliser le discriminant ici car le polynôme P_2 n'est pas à coefficients réels (en général). L'étude du signe du discriminant d'un polynôme de degré 2 n'a du sens que si ses coefficients sont réels.

On suppose que P_2 n'admet pas de racine double. Puisque P_2 est de degré 2, on en déduit que P_2 admet exactement deux racines simples dans $\mathbb{C}$ d'après le théorème fondamental de l'algèbre. Notons α_1 et α_2 ces deux racines distinctes de P_2 d'ordre de multiplicité égal à 1. Alors on a d'après le théorème fondamental de l'algèbre :

$$aX^2 + bX + a = P_2 = a(X - \alpha_1)(X - \alpha_2) = aX^2 - a(\alpha_1 + \alpha_2)X + a\alpha_1\alpha_2.$$

En identifiant les coefficients des termes de degré 0, on obtient :

$$a = a\alpha_1\alpha_2 \quad \text{donc} \quad \boxed{\alpha_1\alpha_2 = 1} \quad \text{car } a \neq 0.$$

On a bien montré que $\boxed{\text{le produit des racines de } P \text{ vaut } 1}$. En particulier, on en déduit que si $\alpha_1 = 1$ alors $\alpha_2 = 1/\alpha_1 = 1 = \alpha_1$ ce qui est absurde puisque α_1 et α_2 sont deux racines distinctes de P_2. De même, si $\alpha_1 = -1$ alors $\alpha_2 = 1/\alpha_1 = -1 = \alpha_1$ ce qui est absurde. Ainsi, $\boxed{\text{aucune des racines de } P_2 \text{ n'est égale à } 1 \text{ ou } -1}$.

(c) *Montrer que si P_2 admet une racine double alors cette racine vaut 1 ou -1.*

► On suppose que P_2 admet une racine double. Puisque P_2 est de degré 2, on en déduit que P_2 admet exactement une racine double dans $\mathbb{C}$ d'après le théorème fondamental de l'algèbre. Notons α cette racine de P_2 d'ordre de multiplicité égal à 2. Alors on a d'après le théorème fondamental de l'algèbre :

$$aX^2 + bX + a = P_2 = a(X - \alpha)^2 = aX^2 - 2a\alpha X + a\alpha^2.$$

En identifiant les coefficients des termes de degré 0, on obtient :

$$a = a\alpha^2 \quad \text{donc} \quad \alpha^2 = 1 \quad \text{car } a \neq 0.$$

Or :

$$\alpha^2 = 1 \iff \alpha^2 - 1 = 0 \iff (\alpha - 1)(\alpha + 1) = 0 \iff \boxed{\alpha = 1 \text{ ou } \alpha = -1}.$$

On a bien montré que $\boxed{\text{la racine double de } P_2 \text{ vaut } 1 \text{ ou } -1}$.

2. *Cas du degré 3. Soit $P_3 = aX^3 + bX^2 + bX + a \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme palindromique de degré 3.*

(a) *Trouver une racine évidente de P_3.*

► On a :

$$P_3(-1) = a(-1)^3 + b(-1)^2 + b(-1) + a = -a + b - b + a = 0$$

donc $\boxed{-1 \text{ est une racine évidente de } P_3}$.

(b) *Soit $Q_3 \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P_3 = (X+1)Q_3$. Montrer que Q_3 est palindromique de degré 2.*

► Puisque -1 est une racine de P_3 d'après le résultat de la question précédente, le polynôme P_3 est factorisable par $X - (-1) = X + 1$. De plus, on a :

$$P_3 = aX^3 + bX^2 + bX + a = (X+1)\underbrace{\left(aX^2 + (b-a)X + a\right)}_{=Q_3}.$$

On remarque que $\boxed{Q_3 = aX^2 + (b-a)X + a \text{ est palindromique de degré au plus } 2}$. Or P_3 est de degré 3, donc le coefficient de son terme de degré 3 est non nul, c'est-à-dire $a \neq 0$. Or a est aussi le coefficient du terme de degré 2 de Q_3. Finalement, $\boxed{Q_3 \text{ est palindromique de degré } 2}$.

(c) *Que peut-on déduire des résultats précédents pour les racines de P_3 ?*

► Puisque Q_3 est palindromique de degré 2 d'après le résultat de la question précédente, on a d'après les résultats de la question 1 :

— Q_3 admet exactement deux racines simples distinctes qui sont différentes de 1 et -1 et dont le produit vaut 1 ;

— ou bien Q_3 admet une seule racine double égale à 1 ou -1.

Or $P_3 = (X+1)P_3$ donc les racines de P_3 sont -1 et les racines de Q_3. On en déduit que :

— P_3 admet exactement trois racines simples distinctes : -1 et deux racines simples distinctes qui sont différentes de 1 et -1 et dont le produit vaut 1 ;

— ou bien P_3 admet exactement deux racines distinces : -1 qui est simple et 1 qui est double ;

— ou bien P_3 admet une seule racine triple égale à -1.

3. *Cas général. Soit $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme palindromique de degré $d \geqslant 0$. On remarque que les coefficients de P vérifient $a_{d-k} = a_k$ pour tout $k \in [\![0, d]\!]$.*

(a) *Justifier que 0 n'est pas racine de P.*

▶ Puisque P est de degré d, le coefficient de son terme de degré d est non nul, c'est-à-dire $a_d \neq 0$. On en déduit que :

$$\begin{aligned} P(0) &= a_0 + a_1 0 + a_2 0^2 + \cdots + a_d 0^d = a_0 \quad \text{car } P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \\ &= a_0 = a_{d-0} \quad \text{car } P \text{ est palindromique} \\ &= a_d \neq 0. \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{0 \text{ n'est pas racine de } P}$.

(b) *Montrer que si d est impair alors -1 est racine de P.*

▶ On suppose que d est impair, donc on peut l'écrire sous la forme $d = 2n+1$ avec $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} P(-1) &= \sum_{k=0}^{d} a_k (-1)^k = \sum_{k=0}^{n} a_k (-1)^k + \sum_{k=n+1}^{2n+1} a_k (-1)^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k (-1)^k + \sum_{k=n+1}^{2n+1} a_{d-k} (-1)^k \quad \text{car } P \text{ est palindromique} \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k (-1)^k + \sum_{k=n+1}^{2n+1} a_{2n+1-k} (-1)^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k (-1)^k + \sum_{\ell=0}^{n} a_\ell (-1)^{2n+1-\ell} \quad \text{en posant } \ell = 2n+1-k \iff k = 2n+1-\ell \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{(inversion de l'ordre de sommation)} \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k (-1)^k + (-1)^{2n+1} \sum_{\ell=0}^{n} a_\ell \left(\frac{1}{-1}\right)^\ell \quad \text{par linéarité de la somme} \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k (-1)^k - \sum_{\ell=0}^{n} a_\ell (-1)^\ell \quad \text{car } 2n+1 \text{ est impair} \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k (-1)^k - \sum_{k=0}^{n} a_k (-1)^k = 0. \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{-1 \text{ est racine de } P}$.

(c) *Montrer que si $\alpha \in \mathbb{C}$ est racine de P alors $1/\alpha$ aussi.*

► On suppose que $\alpha \in \mathbb{C}$ est racine de P. Alors $\alpha \neq 0$ car 0 n'est pas racine de P d'après le résultat de la question 3(a). On a :

$$\begin{aligned}
P\left(\frac{1}{\alpha}\right) &= \sum_{k=0}^{d} a_k \left(\frac{1}{\alpha}\right)^k = \sum_{k=0}^{d} \frac{a_k}{\alpha^k} \\
&= \sum_{k=0}^{d} \frac{a_{d-k}}{\alpha^k} \quad \text{car } P \text{ est palindromique} \\
&= \sum_{\ell=0}^{d} \frac{a_\ell}{\alpha^{d-\ell}} \quad \begin{array}{l}\text{en posant } \ell = d-k \iff k = d-\ell \\ \text{(inversion de l'ordre de sommation)}\end{array} \\
&= \frac{1}{\alpha^d} \sum_{\ell=0}^{d} \frac{a_\ell}{\alpha^{-\ell}} = \frac{1}{\alpha^d} \sum_{\ell=0}^{d} a_\ell \alpha^\ell \quad \text{par linéarité de la somme} \\
&= \frac{1}{\alpha^d} \sum_{k=0}^{d} a_k \alpha^k = \frac{1}{\alpha^d} P(\alpha) = 0 \quad \text{car } \alpha \text{ est racine de } P.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{1/\alpha \text{ est aussi racine de } P}$.

(d) Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Montrer que si $P(\alpha) = P'(\alpha) = 0$ alors $P(1/\alpha) = P'(1/\alpha) = 0$. Que peut-on en déduire ?

► On suppose que $P(\alpha) = P'(\alpha) = 0$. Puisque α est racine de P, $1/\alpha$ est aussi racine de P d'après le résultat précédent, donc $\boxed{P(1/\alpha) = 0}$.

De plus, on a :

$$\begin{aligned}
P'\left(\frac{1}{\alpha}\right) &= \sum_{k=1}^{d} k a_k \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{k-1} = \sum_{k=1}^{d} \frac{k a_k}{\alpha^{k-1}} \\
&= \sum_{k=1}^{d} \frac{k a_{d-k}}{\alpha^{k-1}} \quad \text{car } P \text{ est palindromique} \\
&= \sum_{\ell=0}^{d-1} \frac{(d-\ell) a_\ell}{\alpha^{d-\ell-1}} \quad \begin{array}{l}\text{en posant } \ell = d-k \iff k = d-\ell \\ \text{(inversion de l'ordre de sommation)}\end{array} \\
&= \frac{1}{\alpha^d} \sum_{\ell=0}^{d-1} \frac{(d-\ell) a_\ell}{\alpha^{-(\ell+1)}} = \frac{1}{\alpha^d} \sum_{\ell=0}^{d-1} (d-\ell) a_\ell \alpha^{\ell+1} \quad \text{par linéarité de la somme} \\
&= \frac{d\alpha}{\alpha^d} \sum_{\ell=0}^{d-1} a_\ell \alpha^\ell - \frac{\alpha^2}{\alpha^d} \sum_{\ell=0}^{d-1} \ell a_\ell \alpha^{\ell-1} \quad \text{par linéarité de la somme} \\
&= \frac{d}{\alpha^{d-1}} \Big(P(\alpha) - a_d \alpha^d\Big) - \frac{1}{\alpha^{d-2}} \Big(P'(\alpha) + 0 - d a_d \alpha^{d-1}\Big) \quad \text{car } \begin{cases} P(\alpha) = \sum_{\ell=0}^{d} a_\ell \alpha^\ell \\ P'(\alpha) = \sum_{\ell=1}^{d} \ell a_\ell \alpha^{\ell-1} \end{cases} \\
&= -d a_d \alpha + d a_d \alpha \quad \text{car } P(\alpha) = P'(\alpha) = 0 \\
&= \boxed{0}.
\end{aligned}$$

On en déduit que $\boxed{\text{si } \alpha \text{ est une racine de } P \text{ d'ordre de multiplicité supérieure ou égal à 2, alors } 1/\alpha \text{ aussi}}$.

(e) Soit $Q = \sum_{k=0}^{d'} b_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme palindromique de degré $d' \geqslant 0$.

i. Montrer que $\sum_{i=0}^{d+d'-k} a_i b_{d+d'-k-i} = \sum_{i=\max\{0,d-k\}}^{\min\{d,d+d'-k\}} a_{d-i} b_{-d+k+i}$ pour tout $k \in [\![0, d+d']\!]$.

► Soit $k \in [\![0, d+d']\!]$. Puisque P est de degré d, on a $a_i = 0$ pour tout $i > d$. De même, puisque Q est de degré d', on a $b_{d+d'-k-i} = 0$ pour tout $d + d' - k - i > d' \iff i < d - k$.

On en déduit que :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{d+d'-k} a_i b_{d+d'-k-i} &= \sum_{i=\max\{0,d-k\}}^{\min\{d,d+d'-k\}} a_i b_{d+d'-k-i} \\
&= \sum_{i=\max\{0,d-k\}}^{\min\{d,d+d'-k\}} a_{d-i} b_{d+d'-k-i} \quad \text{car } P \text{ est palindromique} \\
&= \sum_{i=\max\{0,d-k\}}^{\min\{d,d+d'-k\}} a_{d-i} b_{d'-(d+d'-k-i)} \quad \text{car } Q \text{ est palindromique} \\
&= \boxed{\sum_{i=\max\{0,d-k\}}^{\min\{d,d+d'-k\}} a_{d-i} b_{-d+k+i}}.
\end{aligned}$$

ii. En déduire que $\sum_{i=0}^{d+d'-k} a_i b_{d+d'-k-i} = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$ pour tout $k \in [\![0, d+d']\!]$.

▶ On pose $j = d - i$ dans le résultat de la question précédente (inversion de l'ordre de sommation). On a :

$$d - \max\{0, d-k\} = d - \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \geqslant d-k \\ d-k & \text{si } d-k \geqslant 0 \end{cases} = \begin{cases} d & \text{si } k \geqslant d \\ k & \text{si } d \geqslant k \end{cases} = \min\{d, k\}$$

$$\begin{aligned}
\text{et} \quad d - \min\{d, d+d'-k\} &= d - \begin{cases} d & \text{si } d \leqslant d+d'-k \\ d+d'-k & \text{si } d+d'-k \leqslant d \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } k-d' \leqslant 0 \\ k-d' & \text{si } 0 \leqslant k-d' \end{cases} = \max\{0, k-d'\}.
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{d+d'-k} a_i b_{d+d'-k-i} &= \sum_{i=\max\{0,d-k\}}^{\min\{d,d+d'-k\}} a_{d-i} b_{-d+k+i} \quad \text{d'après le résultat de la question précédente} \\
&= \sum_{j=d-\min\{d,d+d'-k\}}^{d-\max\{0,d-k\}} a_j b_{-d+k+d-j} \quad \begin{array}{l} \text{en posant } j = d-i \iff i = d-j \\ \text{(inversion de l'ordre de sommation)} \end{array} \\
&= \sum_{j=\max\{0,k-d'\}}^{\min\{d,k\}} a_j b_{k-j}.
\end{aligned}$$

Or, puisque P est de degré d, on a $a_j = 0$ pour tout $j > d$. De même, puisque Q est de degré d', on a $b_{k-j} = 0$ pour tout $k - j > d' \iff j < k - d'$. On en déduit que :

$$\sum_{i=0}^{d+d'-k} a_i b_{d+d'-k-i} = \sum_{j=\max\{0,k-d'\}}^{\min\{d,k\}} a_j b_{k-j} = \boxed{\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}}.$$

iii. Quelle conclusion peut-on tirer ?

▶ Pour tout $k \in [\![0, d+d']\!]$, $c_k = \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}$ est le coefficient du terme de degré k du polynôme $P \times Q$. À la question précédente, on a montré que :

$$\forall k \in [\![0, d+d']\!], \; c_{d+d'-k} = c_k.$$

Puisque le polynôme $P \times Q$ est de degré $\deg(P) + \deg(Q) = d + d'$, on en déduit que $P \times Q$ est palindromique. Ainsi, on a démontré que $\boxed{\text{le produit de deux polynômes palindromiques est palindromique}}$.

4. Un exemple de degré 4. Soit $P_4 = X^4 - 5X^3 + 6X^2 - 5X + 1$.

(a) Développer l'expression $(\alpha + 1/\alpha)^2$ pour tout $\alpha \in \mathbb{C}^\star$.

▶ Soit $\alpha \in \mathbb{C}^\star$. On a :

$$\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\frac{1}{\alpha} + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 = \boxed{\alpha^2 + 2 + \frac{1}{\alpha^2}}.$$

(b) Montrer que $\alpha \in \mathbb{C}$ est racine de P_4 si et seulement si $\alpha + 1/\alpha$ est racine d'un polynôme réel de degré 2, qu'on notera Q_4, à déterminer.

▶ On remarque que 0 n'est pas racine de P_4 car $P_4(0) = 1 \neq 0$. Par conséquent, si α est racine de P_4 alors $\alpha \neq 0$. On a donc :

$$\begin{aligned}
P_4(\alpha) = 0 &\iff \alpha^4 - 5\alpha^3 + 6\alpha^2 - 5\alpha + 1 = 0 \\
&\iff \alpha^2 - 5\alpha + 6 - \frac{5}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} = \frac{0}{\alpha^2} = 0 \quad \text{car } \alpha \neq 0 \\
&\iff \left(\alpha^2 + 2 + \frac{1}{\alpha^2}\right) - 2 - 5\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) + 6 = 0 \\
&\iff \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^2 - 5\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) + 4 = 0 \\
&\iff Q_4\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) = 0 \quad \text{en posant } \boxed{Q_4 = X^2 - 5X + 4}.
\end{aligned}$$

(c) En déduire la factorisation de P_4 dans $\mathbb{C}[X]$.

▶ $Q_4 = X^2 - 5X + 4$ est un polynôme de degré 2 de discriminant $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 9 > 0$ donc il admet deux racines réelles distinctes : $x_1 = \frac{-(-5)+\sqrt{9}}{2\times 1} = 4$ et $x_2 = \frac{5-3}{2} = 1$. Par conséquent, on a d'après le résultat de la question précédente :

$$\begin{aligned}
P_4(\alpha) = 0 &\iff Q_4\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) = 0 \\
&\iff \alpha + \frac{1}{\alpha} = 4 \quad \text{ou} \quad \alpha + \frac{1}{\alpha} = 1 \\
&\iff \alpha^2 + 1 = 4\alpha \quad \text{ou} \quad \alpha^2 + 1 = \alpha \quad \text{car } \alpha \neq 0 \\
&\iff \underbrace{\alpha^2 - 4\alpha + 1 = 0}_{\Delta_1 = (-4)^2 - 4\times 1\times 1 = 12 > 0} \quad \text{ou} \quad \underbrace{\alpha^2 - \alpha + 1 = 0}_{\Delta_2 = (-1)^2 - 4\times 1\times 1 = -3 < 0} \\
&\iff \alpha = \frac{-(-4) + \sqrt{12}}{2 \times 1} = 2 + \sqrt{3} \quad \text{ou} \quad \alpha = 2 - \sqrt{3} \\
&\qquad \text{ou} \quad \alpha = \frac{-(-1) + i\sqrt{3}}{2 \times 1} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{ou} \quad \alpha = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.
\end{aligned}$$

On a obtenu quatre racines distinctes de P_4. Puisque P_4 est de degré 4, on en déduit que ces quatre racines dans $\mathbb{C}$ sont toutes d'ordre de multiplicité égal à 1. Alors on a d'après le théorème fondamental de l'algèbre :

$$\boxed{P_4 = \left(X - \left(2 + \sqrt{3}\right)\right)\left(X - \left(2 - \sqrt{3}\right)\right)\left(X - \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)\left(X - \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)}.$$

DS n° 7 de mathématiques et d'informatique

durée : 3 heures

Problème 1

On considère la fonction P définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = x^7 + 21x^2 + 21x + 1.$$

Propriétés de la fonction P

1) Justifier que P est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et calculer P' et P".
2) Déterminer les limites de P, P', P" aux infinis.
3) Montrer que P" s'annule en un unique réel r. On donnera une valeur explicite de r.
4) Montrer que P' admet comme minimum global -14.
5) En déduire que P' s'annule exactement 2 fois.
6) En déduire les variations de P.
7) Montrer que P a exactement trois racines réelles $\alpha < \gamma < \beta$ situées dans le segment $[-2, 0]$. On explicitera uniquement la valeur de γ.
8) Déterminer le nombre exact d'extrema locaux de P et montrer qu'ils sont tous atteints en des points de l'intervalle $[-2, 0]$.

Dans toute la suite, α désigne la plus petite racine réelle de P et β la plus grande racine réelle de P.

Approximation de réels : par dichotomie

On rappelle l'algorithme de dichotomie suivant : On considère le segment $[a, b]$ et on pose $a_0 = a, b_0 = b$. On suppose que $P(a) \leq 0, P(b) > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit

$$\begin{array}{lll} a_{n+1} = a_n & b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} & \text{si } P(a_n)P(\frac{a_n+b_n}{2}) \leq 0 \\ a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}, & b_{n+1} = b_n & \text{sinon} \end{array}$$

9) (INFO) Écrire une fonction Python `dicho(a,b,n)` qui retourne la liste $[a_n, b_n]$.
10) (INFO) Quelle est la valeur de a_n lorsque l'on exécute la commande `dicho(-1,0,10)` ?
11) (INFO) Écrire une fonction Python `dichoUn(a,b,e)` qui retourne la liste $[a_n, b_n]$ avec $|a_n - b_n| \leq e$.
12) (INFO) Écrire une fonction Python `dichoDeux(a,b,e)` qui retourne la liste $[a_n, b_n]$ avec $|a_n - b_n| \leq e$ dans le cas où $P(a) > 0, P(b) \leq 0$.
13) (INFO) Déterminer des valeurs a, b, e telles que `dichoUn(a,b,e)` ou `dichoDeux(a,b,e)` fournit un encadrement de α à 10^{-15} près. Déterminer de même des valeurs a, b, e pour obtenir un encadrement de β à 10^{-10} près. On veillera à choisir la bonne fonction parmi les deux. On pourra s'aider des valeurs suivantes :

$$P(-1.5) \approx -0.33 \quad P(-1.25) \approx 2.79 \quad P(-0.8) \approx -2.57 \quad P(-0.5) \approx -4.26 \quad P(0) = 1.$$

Approximation de réels : méthode de Newton

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$u_0 = 0, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - \frac{P(u_n)}{P'(u_n)}.$$

On veut montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et est convergente vers un réel à déterminer.

14) On cherche à prouver par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \in]\beta, 0]$.
    (a) Justifier que $u_0 \in]\beta, 0]$.
    (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $u_n \in]\beta, 0]$. Justifier que $P(u_n) \geq 0, P'(u_n) > 0$.
    (c) Montrer qu'il existe $c_n \in]\beta, u_n[$ tel que $P'(c_n)(u_n - \beta) = P(u_n)$.
    (d) En déduire que $u_{n+1} - \beta = (u_n - \beta)\left(1 - \frac{P'(c_n)}{P'(u_n)}\right)$.
    (e) À l'aide de la stricte croissance de P' sur $[\beta, 0]$, montrer que $u_{n+1} > \beta$.
    (f) Conclure.
15) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et en déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers un réel que l'on note l.
16) Montrer que la suite $(P'(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel strictement positif.
17) En déduire que $l = \beta$.
18) On considère une suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ construite comme à la question 14. Elle vérifie alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, c_n \in]\beta, u_n[, P'(c_n)(u_n - \beta) = P(u_n).$$

    Montrer qu'elle est convergente et déterminer sa limite.
19) En déduire que la suite $(u_{n+1} - \beta)_{n\in\mathbb{N}}$ est négligeable devant la suite $(u_n - \beta)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice

On note E l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{z} = (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5) \in \mathbb{C}^5$ dont les composantes vérifient :

$$z_1 + iz_2 - 2z_3 + iz_4 + z_5 = 0$$

et on pose :

$$F = \left\{(2i\sigma, -\sigma + i\rho, i\tau, -2\rho + 2i\sigma, 3\rho + i\sigma) \mid (\rho, \sigma, \tau) \in \mathbb{C}^3\right\}.$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^5$.
2. On pose $\overrightarrow{w_1} = (1, i, 1, 0, 2)$ et $\overrightarrow{w_2} = (i, 0, -1, 2i, -i)$.
    (a) Montrer que $(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2})$ est une famille libre.
    (b) Montrer que $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}) \subset E$.
    (c) $(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2})$ est-elle une famille génératrice de E ? Justifier.
3. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^5$.
4. (a) Déterminer trois vecteurs $\overrightarrow{w_3}$, $\overrightarrow{w_4}$ et $\overrightarrow{w_5}$ tels que $F = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{w_3}, \overrightarrow{w_4}, \overrightarrow{w_5})$.
    (b) $(\overrightarrow{w_3}, \overrightarrow{w_4}, \overrightarrow{w_5})$ est-elle une famille libre ? Justifier.
    (c) Que peut-on déduire des résultats des deux questions précédentes ?
5. Que peut-on dire de l'ensemble $E \cap F$?
6. Montrer que $(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2})$ est une base de $E \cap F$.

Problème 2

Ce problème propose d'étudier une mutation dynamique de l'information génétique au sein d'une lignée de cellules. Pour simplifier les notations, on désigne par A, B, C et D les quatre parties du génome touchées par la mutation. On observe les résultats suivants :

- la mutation ne touche qu'une seule partie du génome de chaque cellule à chaque génération ;
- si la mutation touche A alors elle touche équiprobablement A, B, C ou D à la génération suivante ;
- si la mutation touche B alors elle touche équiprobablement A ou D à la génération suivante ;
- si la mutation touche C alors elle touche équiprobablement B ou C à la génération suivante ;
- si la mutation touche D alors elle continue de toucher D à la génération suivante.

Pour tout entier $n \geqslant 1$ et toute lettre $X \in \{\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}\}$, on note X_n l'événement : «la mutation touche X à la n-ième génération» et x_n sa probabilité. Enfin, on suppose que la mutation touche A à la première génération, c'est-à-dire $a_1 = 1$ et $b_1 = c_1 = d_1 = 0$.

1. Déterminer a_2, b_2, c_2 et d_2.
2. Calculer la probabilité que la mutation touche A à la 2e génération sachant qu'elle touche D à la 3e.
3. Dans cette question, on fixe un entier $n \geqslant 1$.
   (a) Que peut-on dire de la somme $a_n + b_n + c_n + d_n$? Justifier.
   (b) Montrer que $a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2}b_n$. Obtenir des expressions similaires pour b_{n+1}, c_{n+1} et d_{n+1}.
   (c) En déduire que $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ où L est une matrice à exprimer en fonction de $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
4. Montrer que $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = L^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ pour tout entier $n \geqslant 1$.
5. (a) Montrer que la matrice $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer son inverse.
   (b) Montrer que $P^{-1}MP = D + N$ où D est une matrice diagonale et N est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \star \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   (c) Calculer DN, ND et N^2.
   (d) En déduire que $M^n = PD^nP^{-1}$ pour tout entier $n \geqslant 2$.
6. On fixe un entier $n \geqslant 3$ dans cette question. À l'aide des résultats précédents, montrer que

$$L^{n-1} = \frac{4}{27}\left(\frac{3}{4}\right)^n \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

   puis en déduire des expressions de a_n, b_n, c_n et d_n en fonction de l'entier $n \geqslant 3$.
7. En déduire la limite quand n tend vers $+\infty$ de la probabilité que la mutation touche A à la n-ième génération sachant qu'elle touche D à la $(n+1)$-ième génération.

Corrigé du DS n° 7 de mathématiques et d'informatique

Problème 1
Énoncé et corrigé de V. Vong

1) La fonction P étant polynomiale, elle est donc de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, P'(x) = 7x^6 + 42x + 21, P"(x) = 42x^5 + 42.}$$

2) Les fonctions $P, P', P"$ étant polynomiales, elles sont équivalentes aux infinis à leur terme de plus haut degré. Ainsi,

$$P(x) \sim_{x\to+\infty} x^7,\ P'(x) \sim_{x\to+\infty} 7x^6,\ P"(x) \sim_{x\to+\infty} 42x^5$$
$$P(x) \sim_{x\to-\infty} x^7,\ P'(x) \sim_{x\to-\infty} 7x^6,\ P"(x) \sim_{x\to-\infty} 42x^5.$$

Or

$$\lim_{x\to+\infty} x^7 = +\infty,\ \lim_{x\to+\infty} 7x^6 = +\infty,\ \lim_{x\to+\infty} 42x^5 = +\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} x^7 = -\infty,\ \lim_{x\to-\infty} 7x^6 = +\infty,\ \lim_{x\to-\infty} 42x^5 = -\infty.$$

Donc

$$\boxed{\begin{array}{l}\lim_{x\to+\infty} P(x) = +\infty,\ \lim_{x\to+\infty} P'(x) = +\infty,\ \lim_{x\to+\infty} P"(x) = +\infty\\ \lim_{x\to-\infty} P(x) = -\infty,\ \lim_{x\to-\infty} P'(x) = +\infty,\ \lim_{x\to-\infty} P"(x) = -\infty.\end{array}}$$

3) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $P"(x) = 42(x^5+1)$. Soient $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$\begin{aligned} x < y &\Rightarrow x^5 < y^5 && \text{(stricte croissance de la fonction } x \mapsto x^5 \text{ sur } \mathbb{R}\text{)}\\ &\Rightarrow x^5 + 1 < y^5 + 1\\ &\Rightarrow 42(x^5+1) < 42(y^5+1)\ (42 > 0)\\ &\Rightarrow P"(x) < P"(y)\end{aligned}$$

La fonction $P"$ est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, elle est injective. Il existe donc au plus un réel r tel que $P"(r) = 0$. Or $P"(-1) = 42((-1)+1) = 0$. $\underline{\text{Donc } -1 \text{ est l'unique réel racine de } P"}$.

4) D'après la question 3, on sait que $P"$ est strictement croissante et s'annule uniquement en -1. On en déduit que $P"$ est strictement négative sur $]-\infty, -1[$, strictement positive sur $]-1, +\infty[$ et nulle en -1. Ainsi, P' est strictement décroissante sur $]-\infty, -1]$ et strictement croissante sur $[-1, +\infty[$. Il en résulte que

$$\forall x \in \mathbb{R}, P'(x) \geq P'(-1).$$

Mais $P'(-1) = 7 - 42 + 21 = -14$. $\underline{-14 \text{ est bien le minimum global de } P'}$.

5) D'après les questions précédentes, on sait que :
   - P' est strictement décroissante sur $]-\infty, -1]$ et strictement croissante sur $[-1, +\infty[$;
   - P' est continue sur $\mathbb{R}$ et donc sur ces deux intervalles ;
   - $\lim_{-\infty} P' = +\infty$, $P'(-1) = -14 < 0, \lim_{+\infty} P' = +\infty$;

   donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit qu'il existe un unique $a \in]-\infty, -1[$ et un unique $b \in]-1, +\infty[$ tels que $P'(a) = 0, P'(b) = 0$.
   Ainsi, P' s'annule exactement deux fois sur $\mathbb{R}$: une fois en a et une fois en b.

6) D'après les questions précédentes, on sait que P' est strictement décroissante sur $]-\infty,-1]$, strictement croissante sur $[-1,+\infty[$. De plus, en gardant les notations précédentes, on sait que $P'(a) = 0, P'(b) = 0$, avec $a \in]-\infty,-1[$ et $b \in]-1,+\infty[$. On en déduit que : P' est positive sur $]-\infty,a]$, négative sur $[a,b]$ et positive sur $[b,+\infty[$. De plus, P' ne s'annule qu'en a et b. Il en résulte que :

- P est strictement croissante sur $]-\infty,a]$
- P est strictement décroissante sur $[a,b]$
- P est strictement croissante sur $[b,+\infty[$.

Dans la suite, on note a la racine comprise entre $]-1,+\infty[$ de P' et on note b la racine comprise entre $]-1,+\infty[$.

En raisonnant de la même manière que précédemment, et en constatant que $P(-2) = -7\cdot 64 - 42\times 2 + 21 < 0$ et que $P(0) = 1 > 0$, on en déduit $a \in]-2,-1[$ et $b \in]-1,0[$.

7) On sait que P est strictement décroissante sur $[a,b]$, et $-1 \in]a,b[$. Donc :

$$P(a) > P(-1) > P(b).$$

Mais $P(-1) = 0$. On en déduit que $P(a) > 0$ et $P(b) < 0$. De plus, on a trouvé une unique racine sur $[a,b]$. P étant continue et strictement croissante sur $]-\infty,a]$ et comme $\lim_{-\infty} P = -\infty$ et $P(a) > 0$, on en déduit qu'il existe un unique $\alpha \in]-\infty,a]$ tel que $P(\alpha) = 0$.

De même, P est strictement croissante et continue sur $[b,+\infty[$, $\lim_{+\infty} P = +\infty$, $P(b) < 0$. Donc il existe un unique $\beta \in [b,+\infty[$ tel que $P(\beta) = 0$.

Ainsi, P a exactement 3 racines, $\alpha < -1 < \beta$. Montrons que α et β sont dans l'intervalle $[-2,0]$. On a $P(-2) < 0$ et $P(0) > 0$. Par stricte croissance de P sur $]-\infty,a]$ et sur $[b,+\infty[$, et comme $-2 < a$ et $b < 0$ et que l'on a $P(-2) < 0, P(0) > 0$, il en résulte que $\alpha \in [-2,-1]$ et que $\beta \in [-1,0]$.

8) En résumé, on a le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	-2	α	a	-1	b	β	0	$+\infty$
$f'(x)$			$+$	0	$-$	0	$+$		
$f(x)$	$-\infty$	-85	0	$P(a)$	0	$P(b)$	0	1	$+\infty$

D'après les variations de P, on constate que P admet exactement deux extrema locaux atteints en a et b qui sont dans l'intervalle $[-2,0]$.

9) Par exemple :

```
def P(x) :
    return x**7+21*x**2+21*x+1
def dicho(a,b,n) :
    for i in range (n) :
        c=(a+b)/2
        if P(a)*P(c)<=0 :
            b=c
        else :
            a=c
    return [a,b]
```

10) On constate que la valeur de a n'est jamais modifié, donc $a = -1$.

11) Par exemple :

```
def dichoUn(a,b,e) :
    while abs(a-b)>e :
        c=(a+b)/2
        if P(a)*P(c)<=0 :
            b=c
        else :
            a=c
    return [a,b]
```

12) (INFO) Écrire une fonction Python `dichoDeux(a,b,e)` qui retourne la liste $[a_n, b_n]$ avec $|a_n - b_n| \leq e$ dans le cas où $P(a) > 0, P(b) \leq 0$.

```
def dichoDeux(a,b,e) :
    if P(a)>0 and P(b)<=0 :
        while abs(a-b)>e :
            c=(a+b)/2
            if P(c)>0 :
                a=c
            else :
                b=c
        return [a,b]
    else :
        print("pas les bonnes conditions")
        return
```

13) Pour α, on exécute la commande `dichoUn(-1.5,-1.25,10**(-10))` et pour β on exécute la commande `dichoUn(-1.5,-1.25,10**(-15))`

14) On cherche à prouver par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \in]\beta, 0]$.

(a) On sait que $\beta < 0$, d'après l'étude de la fonction P. Par définition de u_0, on a $u_0 = 0$. Donc $u_0 \in]\beta, 0]$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $u_n \in]\beta, 0]$. En reprenant les variations de P, on sait que P est strictement croissante sur $[\beta, +\infty[$ et P' est strictement positive sur cet intervalle. De plus, $P(\beta) = 0$. Il en résulte que $P(u_n) \geq 0$ et $P'(u_n) > 0$.

(c) P étant polynomiale, on sait que P est continue sur $[\beta, u_n]$ et dérivable sur $]\beta, u_n[$. Donc, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c_n \in]\beta, u_n[$ tel que :

$$\frac{P(u_n) - P(\beta)}{u_n - \beta} = P'(c_n).$$

Mais $P(\beta) = 0$. On a donc

$$\frac{P(u_n)}{u_n - \beta} = P'(c_n).$$

D'où :

$$\boxed{P(u_n) = P'(c_n)(u_n - \beta).}$$

(d) Par définition, on a

$$u_{n+1} = u_n - \frac{P(u_n)}{P'(u_n)}.$$

Donc

$$u_{n+1} - \beta = u_n - \beta - \frac{P(u_n)}{P'(u_n)}.$$

D'après la question 14.b, on a $P(u_n) = P'(c_n)(u_n - \beta)$. Donc

$$u_{n+1} - \beta = u_n - \beta - \frac{P'(c_n)(u_n - \beta)}{P'(u_n)}.$$

En factorisant, on obtient

$$u_{n+1} - \beta = (u_n - \beta)(1 - \frac{P'(c_n)}{P'(u_n)}).$$

(e) La fonction P' étant strictement croissante sur $[\beta, 0]$ et positive sur cet intervalle, et comme $c_n < u_n$, on en déduit que $\frac{P'(c_n)}{P'(u_n)} < 1$. Donc

$$(1 - \frac{P'(c_n)}{P'(u_n)}) > 0.$$

Or $(u_n - \beta) > 0$ d'après $P(n)$. Donc

$$(u_n - \beta)(1 - \frac{P'(c_n)}{P'(u_n)}) > 0.$$

Autrement dit,

$$u_{n+1} - \beta > 0.$$

(f) En résumé :

— on a prouvé dans a que $u_0 \in]\beta, 0]$,

— les question de b à e permettent de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $u_n \in]\beta, 0]$ alors $u_{n+1} \in]\beta, 0]$.

Donc, d'après le principe de récurrence, on en déduit que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in]\beta, 0].}$$

15) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$u_{n+1} - u_n = -\frac{P(u_n)}{P'(u_n)}.$$

Or $u_n \in]\beta, 0]$. Donc d'après les variations de P et de P', on a $P(u_n) > 0, P'(u_n) > 0$. Donc $u_{n+1} - u_n < 0$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc strictement décroissante. De plus, la suite est minorée par β. Donc la suite est convergente vers une certaine limite que l'on note l.

16) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \geq \beta$. En passant à la limite, on en déduit que $l \geq \beta$. La fonction P' étant polynomiale, on en déduit qu'elle est continue sur $\mathbb{R}$ et donc $\lim_{n\to+\infty} P'(u_n) = P'(l)$. Comme P' est strictement croissante sur $[\beta, +\infty[$, que $P'(\beta) > 0$, et que $l \geq \beta$ on en déduit que $P'(l) > 0$. On a bien

$$\lim_{n\to+\infty} P'(u_n) > 0.$$

17) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} = u_n - \frac{P(u_n)}{P'(u_n)}$. On a donc

$$u_{n+1}P'(u_n) = u_nP'(u_n) - P(u_n).$$

P et P' étant continues sur $\mathbb{R}$, en passant à la limite et par composition, on obtient :

$$lP'(l) = lP'(l) - P(l).$$

On en déduit que $P(l) = 0$. Donc l est une racine réelle de P. Or β est la plus grande racine de P. Donc $l \leq \beta$. Mais $l \geq \beta$. Par conséquent,

$$\boxed{l = \beta}.$$

18) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\beta < c_n < u_n$. Or $\lim_{n\to+\infty} u_n = \beta$. Donc d'après le théorème d'encadrement, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} c_n = \beta$.

19) On construit une suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la même façon que précédemment. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question 14, on a :

$$u_{n+1}-\beta = (u_n-\beta)(1-\frac{P'(c_n)}{P'(u_n)})$$

On sait que la suite $(u_n-\beta)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule jamais. On a donc

$$\frac{u_{n+1}-\beta}{u_n-\beta} = (1-\frac{P'(c_n)}{P'(u_n)})$$

On sait, d'après les questions précédentes, $\lim_{n\to+\infty} c_n = \beta$, $\lim_{n\to+\infty} u_n = \beta$, et P' continue sur $\mathbb{R}$. Donc par composition des limites, on en déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty} P'(c_n) = P'(\beta), \lim_{n\to+\infty} P'(u_n) = P'(\beta),$$

Or $P'(\beta) \neq 0$. Donc, par quotient, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{P'(c_n)}{P'(u_n)} = 1.$$

Il en résulte que

$$\lim_{n\to+\infty} 1-\frac{P'(c_n)}{P'(u_n)} = 0.$$

Autrement dit, le quotient $\frac{u_{n+1}-\beta}{u_n-\beta}$ a donc pour limite 0 lorsque $n \to +\infty$. Ce qui signigfie bien que la suite $(u_{n+1}-\beta)_{n\in\mathbb{N}}$ est négligeable devant la suite $(u_n-\beta)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice

On note E l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{z} = (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5) \in \mathbb{C}^5$ dont les composantes vérifient :

$$z_1 + iz_2 - 2z_3 + iz_4 + z_5 = 0$$

et on pose :

$$F = \Big\{(2i\sigma, -\sigma + i\rho, i\tau, -2\rho + 2i\sigma, 3\rho + i\sigma) \mid (\rho, \sigma, \tau) \in \mathbb{C}^3\Big\}.$$

1. *Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^5$.*

   ▶ D'une part, on a $\overrightarrow{0} = (0, 0, 0, 0, 0) \in E$ car $0 + i \times 0 - 2 \times 0 + i \times 0 + 0 = 0$.
   D'autre part, montrons que $\lambda\overrightarrow{z} + \overrightarrow{z}' \in E$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $\overrightarrow{z} \in E$ et $\overrightarrow{z}' \in E$. On fixe donc un scalaire $\lambda \in \mathbb{C}$ et deux vecteurs $\overrightarrow{z} = (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5) \in E$ et $\overrightarrow{z}' = (z_1', z_2', z_3', z_4', z_5') \in E$. On a :

$$\begin{aligned}\lambda\overrightarrow{z} + \overrightarrow{z}' &= \lambda(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5) + (z_1', z_2', z_3', z_4', z_5') \\ &= (\lambda z_1 + z_1', \lambda z_2 + z_2', \lambda z_3 + z_3', \lambda z_4 + z_4', \lambda z_5 + z_5').\end{aligned}$$

   Or :

$$\begin{aligned}&(\lambda z_1 + z_1') + i(\lambda z_2 + z_2') - 2(\lambda z_3 + z_3') + i(\lambda z_4 + z_4') + (\lambda z_5 + z_5') \\ =&\lambda\underbrace{(z_1 + iz_2 - 2z_3 + iz_4 + z_5)}_{=0 \quad \text{car } \overrightarrow{z} \in E} + \underbrace{(z_1' + iz_2' - 2z_3' + iz_4' + z_5')}_{=0 \quad \text{car } \overrightarrow{z}' \in E} \\ =&\lambda \times 0 + 0 = 0.\end{aligned}$$

   On en déduit que $\lambda\overrightarrow{z} + \overrightarrow{z}' \in E$ et ceci est vrai pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $\overrightarrow{z} \in E$ et $\overrightarrow{z}' \in E$.
   Finalement, on a bien montré que $\boxed{E \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{C}^5}$.

2. *On pose $\overrightarrow{w_1} = (1, i, 1, 0, 2)$ et $\overrightarrow{w_2} = (i, 0, -1, 2i, -i)$.*

(a) *Montrer que $(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2})$ est une famille libre.*

► On résout l'équation $\lambda_1\overrightarrow{w_1} + \lambda_2\overrightarrow{w_2} = \overrightarrow{0}$ d'inconnues $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$:

$$\begin{aligned}
\lambda_1\overrightarrow{w_1} + \lambda_2\overrightarrow{w_2} = \overrightarrow{0} &\iff \lambda_1(1, i, 1, 0, 2) + \lambda_2(i, 0, -1, 2i, -i) = (0, 0, 0, 0, 0) \\
&\iff (\lambda + i\lambda_2, i\lambda_1, \lambda_1 - \lambda_2, 2i\lambda_2, 2\lambda_1 - i\lambda_2) = (0, 0, 0, 0, 0) \\
&\iff \begin{pmatrix} \boxed{1} & i \\ i & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 2i \\ 2 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 - iL_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ \\ L_5 \leftarrow L_5 - 2L_1 \end{matrix} \\
&\iff \begin{pmatrix} \boxed{1} & i \\ 0 & \boxed{1} \\ 0 & -1 - i \\ 0 & 2i \\ 0 & -3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 + (1 + i)L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2iL_2 \\ L_5 \leftarrow L_5 + 3iL_2 \end{matrix} \\
&\iff \begin{pmatrix} \boxed{1} & i \\ 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

On obtient un système linéaire échelonné homogène de rang 2 avec trois équations auxiliaires compatibles et aucun inconnue auxiliaire. L'équation a donc une unique solution $(\lambda_1, \lambda_2) = (0, 0)$. Par conséquent, $\boxed{\text{la famille } (\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}) \text{ est libre}}$.

(b) *Montrer que* $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}) \subset E$.

► Soit $\overrightarrow{z} \in \mathrm{Vect}(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2})$. Par définition du sous-espace vectoriel engendré, $\overrightarrow{z}$ est égal à une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{w_1}$ et $\overrightarrow{w_2}$. Il existe donc $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$ tels que $\overrightarrow{z} = \lambda_1\overrightarrow{w_1} + \lambda_2\overrightarrow{w_2}$. Or $\overrightarrow{w_1} = (1, i, 1, 0, 2) \in E$ car $1 + i \times i - 2 \times 1 + i \times 0 + 2 = 0$ et $\overrightarrow{w_2} = (i, 0, -1, 2i, -i) \in E$ car $i + i \times 0 - 2 \times (-1) + i \times 2i + (-i) = 0$. De plus, E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^5$ d'après le résultat de la question 1. Par conséquent, $\overrightarrow{z} = \lambda_1\overrightarrow{w_1} + \lambda_2\overrightarrow{w_2} \in E$ car toute combinaison linéaire de vecteurs d'un sous-espace vectoriel appartient à ce sous-espace vectoriel. Ainsi $\overrightarrow{z} \in E$ et ceci est vrai pour tout $\overrightarrow{z} \in \mathrm{Vect}(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2})$. On en déduit que $\boxed{\mathrm{Vect}(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}) \subset E}$.

(c) *$(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2})$ est-elle une famille génératrice de E ? Justifier.*

► La famille $(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2})$ est génératrice de E si et seulement si $E = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2})$. On a déjà montré l'inclusion $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}) \subset E$ à la question précédente. Il reste donc à montrer l'inclusion $E \subset \mathrm{Vect}(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2})$.

Soit $\overrightarrow{z} = (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5) \in E$ donc $z_1 + iz_2 - 2z_3 + iz_4 + z_5 = 0$. On a $\overrightarrow{z} \in \mathrm{Vect}(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2})$ si et seulement s'il existe $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$ tels que $\overrightarrow{z} = \lambda_1\overrightarrow{w_1} + \lambda_2\overrightarrow{w_2}$. On cherche donc à résoudre cette équation d'inconnues $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$:

$$\begin{aligned}
&\lambda_1\overrightarrow{w_1} + \lambda_2\overrightarrow{w_2} = \overrightarrow{z} \\
\iff &\lambda_1(1, i, 1, 0, 2) + \lambda_2(i, 0, -1, 2i, -i) = (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5) \\
\iff &\begin{pmatrix} \boxed{1} & i \\ i & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 2i \\ 2 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 - iL_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ \\ L_5 \leftarrow L_5 - 2L_1 \end{matrix}
\end{aligned}$$

$$\iff \begin{pmatrix} \boxed{1} & i \\ 0 & \boxed{1} \\ 0 & -1-i \\ 0 & 2i \\ 0 & -3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 - iz_1 \\ z_3 - z_1 \\ z_4 \\ z_5 - 2z_1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 + (1+i)L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2iL_2 \\ L_5 \leftarrow L_5 + 3iL_2 \end{matrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} \boxed{1} & i \\ 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 - iz_1 \\ z_3 - z_1 + (1+i)(z_2 - iz_1) \\ z_4 - 2i(z_2 - iz_1) \\ z_5 - 2z_1 + 3i(z_2 - iz_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ -iz_1 + z_2 \\ -iz_1 + (1+i)z_2 + z_3 \\ -2z_1 - 2iz_2 + z_4 \\ z_1 + 3iz_2 + z_5 \end{pmatrix}.$$

On obtient un système linéaire échelonné de rang 2 avec trois équations auxiliaires et aucune inconnue auxiliaire. Si l'un de ces équations auxiliaires n'est pas compatible alors le système n'a pas de solutions. Par exemple, si on choisit $\overrightarrow{z} = (1,0,0,0,-1)$ alors on a bien $\overrightarrow{z} \in E$ car $1 + i \times 0 - 2 \times 0 + i \times 0 + (-1) = 0$ mais la troisième équation n'est pas compatible car $-i \times 1 + (1+i) \times 0 + 0 = -i \neq 0$. Donc $\overrightarrow{z} = (1,0,0,0,-1) \notin \text{Vect}(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2})$.

On en déduit que $E \not\subset \text{Vect}(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2})$ donc que $\boxed{(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}) \text{ n'est pas une famille génératrice de } E}$.

Attention à votre choix du vecteur $\overrightarrow{z}$ tel que l'une des trois équations auxiliaires ne soit pas compatible. Il faut aussi que $\overrightarrow{z} \in E$ pour que ce contre-exemple prouve bien que $E \not\subset \text{Vect}(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2})$.

3. *Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^5$.*

▶ D'une part, on a $(2i \times 0, -0, -0 + i \times 0, i \times 0, -2 \times 0 + 2i \times 0, 3 \times 0 + i \times 0) = (0,0,0,0,0) = \overrightarrow{0} \in F$ en choisissant $\rho = \sigma = \tau = 0$.

D'autre part, on fixe un scalaire $\lambda \in \mathbb{C}$ et deux vecteurs $\overrightarrow{z} = (2i\sigma, -\sigma + i\rho, i\tau, -2\rho + 2i\sigma, 3\rho + i\sigma) \in F$ et $\overrightarrow{z}' = (2i\sigma', -\sigma' + i\rho', i\tau', -2\rho' + 2i\sigma', 3\rho' + i\sigma') \in F$ où $(\rho, \sigma, \tau) \in \mathbb{C}^3$ et $(\rho', \sigma', \tau') \in \mathbb{C}^3$. Montrons que $\lambda\overrightarrow{z} + \overrightarrow{z}' \in F$. On cherche donc $(\rho'', \sigma'', \tau'') \in \mathbb{C}^3$ tels que

$$\lambda\overrightarrow{z} + \overrightarrow{z}' = \Big(2i\sigma'', -\sigma'' + i\rho'', i\tau'', -2\rho'' + 2i\sigma'', 3\rho'' + i\sigma''\Big).$$

<u>Analyse</u>. On a :

$$\begin{aligned} &\lambda\overrightarrow{z} + \overrightarrow{z}' \\ =&\lambda\Big(2i\sigma, -\sigma + i\rho, i\tau, -2\rho + 2i\sigma, 3\rho + i\sigma\Big) + \Big(2i\sigma', -\sigma' + i\rho', i\tau', -2\rho' + 2i\sigma', 3\rho' + i\sigma'\Big) \\ =&\Big(2i\lambda\sigma + 2i\sigma', -\lambda\sigma + i\lambda\rho - \sigma' + i\rho', i\lambda\tau + i\tau', -2\lambda\rho + 2i\lambda\sigma - 2\rho' + 2i\sigma', 3\lambda\rho + i\lambda\sigma + 3\rho' + i\sigma'\Big) \\ =&\Big(2i\underbrace{(\lambda\sigma + \sigma')}_{=\sigma''}, -\underbrace{(\lambda\sigma + \sigma')}_{=\sigma''} + i\underbrace{(\lambda\rho + \rho')}_{=\rho''}, i\underbrace{(\lambda\tau + \tau')}_{=\tau''}, \\ &\qquad -2\underbrace{(\lambda\rho + \rho')}_{=\rho''} + 2i\underbrace{(\lambda\sigma + \sigma')}_{=\sigma''}, 3\underbrace{(\lambda\rho + \rho')}_{=\rho''} + i\underbrace{(\lambda\sigma + \sigma')}_{=\sigma''}\Big). \end{aligned}$$

<u>Synthèse</u>. On pose $\boxed{\rho'' = \lambda\rho + \rho'}$, $\boxed{\sigma'' = \lambda\sigma + \sigma'}$ et $\boxed{\tau'' = \lambda\tau + \tau'}$. En reprenant les calculs de l'analyse, on a bien trouvé $(\rho'', \sigma'', \tau'') \in \mathbb{C}^3$ tels que :

$$\lambda\overrightarrow{z} + \overrightarrow{z}' = \Big(2i\sigma'', -\sigma'' + i\rho'', i\tau'', -2\rho'' + 2i\sigma'', 3\rho'' + i\sigma''\Big).$$

On en déduit que $\lambda\overrightarrow{z} + \overrightarrow{z}' \in F$ et ceci est vrai pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $\overrightarrow{z} \in F$ et $\overrightarrow{z}' \in F$.

Finalement, on a bien montré que $\boxed{F \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{C}^5}$.

4. (a) *Déterminer trois vecteurs $\overrightarrow{w_3}$, $\overrightarrow{w_4}$ et $\overrightarrow{w_5}$ tels que $F = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{w_3}, \overrightarrow{w_4}, \overrightarrow{w_5})$.*

▶ On a :

$$\begin{aligned} F &= \left\{(2i\sigma, -\sigma + i\rho, i\tau, -2\rho + 2i\sigma, 3\rho + i\sigma) \mid (\rho, \sigma, \tau) \in \mathbb{C}^3\right\} \\ &= \left\{\rho \underbrace{(0, i, 0, -2, 3)}_{=\overrightarrow{w_3}} + \sigma \underbrace{(2i, -1, 0, 2i, i)}_{=\overrightarrow{w_4}} + \tau \underbrace{(0, 0, i, 0, 0)}_{=\overrightarrow{w_5}} \mid (\rho, \sigma, \tau) \in \mathbb{C}^3\right\} \\ &= \left\{\rho\overrightarrow{w_3} + \sigma\overrightarrow{w_4} + \tau\overrightarrow{w_5} \mid (\rho, \sigma, \tau) \in \mathbb{C}^3\right\} \\ &= \mathrm{Vect}(\overrightarrow{w_3}, \overrightarrow{w_4}, \overrightarrow{w_5}) \quad \text{par définition du sous-espace vectoriel engendré.} \end{aligned}$$

D'où le résultat en posant $\boxed{\overrightarrow{w_3} = (0, i, 0, -2, 3)}$, $\boxed{\overrightarrow{w_4} = (2i, -1, 0, 2i, i)}$ et $\boxed{\overrightarrow{w_5} = (0, 0, i, 0, 0)}$.

Il est bien sûr possible de trouver d'autres vecteurs pour $\overrightarrow{w_3}$, $\overrightarrow{w_4}$ et $\overrightarrow{w_5}$. En fait, toute famille de trois vecteurs génératrice de F convient.

(b) *$(\overrightarrow{w_3}, \overrightarrow{w_4}, \overrightarrow{w_5})$ est-elle une famille libre ? Justifier.*

▶ On résout l'équation $\lambda_3\overrightarrow{w_3} + \lambda_4\overrightarrow{w_4} + \lambda_5\overrightarrow{w_5} = \overrightarrow{0}$ d'inconnues $(\lambda_3, \lambda_4, \lambda_5) \in \mathbb{C}^3$:

$$\begin{aligned} & \lambda_3\overrightarrow{w_3} + \lambda_4\overrightarrow{w_4} + \lambda_5\overrightarrow{w_5} = \overrightarrow{0} \\ \iff & \lambda_3(0, i, 0, -2, 3) + \lambda_4(2i, -1, 0, 2i, i) + \lambda_5(0, 0, i, 0, 0) = (0, 0, 0, 0, 0) \\ \iff & (2i\lambda_4, i\lambda_3 - \lambda_4, i\lambda_5, -2\lambda_3 + 2i\lambda_4, 3\lambda_3 + i\lambda_4) = (0, 0, 0, 0, 0) \\ \iff & \begin{pmatrix} 0 & 2i & 0 \\ i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ -2 & 2i & 0 \\ 3 & i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \leftrightarrow L_2 \text{ puis } L_1 \leftarrow -iL_1 \\ L_2 \leftrightarrow L_1 \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \iff & \begin{pmatrix} \boxed{1} & i & 0 \\ 0 & 2i & 0 \\ 0 & 0 & i \\ -2 & 2i & 0 \\ 3 & i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ L_4 \leftarrow L_4 + 2L_1 \\ L_5 \leftarrow L_5 - 3L_1 \end{array} \\ \iff & \begin{pmatrix} \boxed{1} & i & 0 \\ 0 & \boxed{2i} & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & 4i & 0 \\ 0 & -2i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2 \\ L_5 \leftarrow L_5 + L_2 \end{array} \\ \iff & \begin{pmatrix} \boxed{1} & i & 0 \\ 0 & \boxed{2i} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{i} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On obtient un système linéaire échelonné homogène de rang 3 avec deux équations auxiliaires compatibles et aucune inconnue auxiliaire. Il y a donc une unique solution $(\lambda_3, \lambda_4, \lambda_5) = (0, 0, 0)$. Par conséquent, $\boxed{\text{la famille } (\overrightarrow{w_3}, \overrightarrow{w_4}, \overrightarrow{w_5}) \text{ est libre}}$.

(c) *Que peut-on déduire des résultats des deux questions précédentes ?*

▶ D'après le résultat de la question 4(a), $F = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{w_3}, \overrightarrow{w_4}, \overrightarrow{w_5})$ donc la famille $(\overrightarrow{w_3}, \overrightarrow{w_4}, \overrightarrow{w_5})$ est génératrice de F. De plus, cette famille est libre d'après le résultat de la question précédente. Par conséquent, $\boxed{(\overrightarrow{w_3}, \overrightarrow{w_4}, \overrightarrow{w_5}) \text{ est une base de } F}$ et $\boxed{\text{le sous-espace vectoriel } F \text{ est de dimension } 3}$.

5. *Que peut-on dire de l'ensemble $E \cap F$?*

▶ E et F sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}^5$ d'après les résultats des questions 1 et 3 respectivement. Donc $\boxed{E \cap F \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{C}^5}$ comme intersection de sous-espaces vectoriels.

6. *Montrer que $(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2})$ est une base de $E \cap F$.*

▶ On a déjà montré que la famille $(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2})$ est libre à la question 2(a). Il reste donc à montrer que cette famille est génératrice de $E \cap F$, c'est-à-dire que $E \cap F = \text{Vect}(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2})$. On raisonne par double inclusion.

$\text{Vect}(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}) \subset E \cap F$. On a déjà montré que $\text{Vect}(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}) \subset E$ à la question 2(b). Il suffit donc de montrer que $\text{Vect}(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}) \subset F$. Commençons par montrer que $\overrightarrow{w_1} = (1, i, 1, 0, 2) \in F$ et $\overrightarrow{w_2} = (i, 0, -1, 2i, -i) \in F$. On cherche donc $(\rho_1, \sigma_1, \tau_1) \in \mathbb{C}^3$ et $(\rho_2, \sigma_2, \tau_2) \in \mathbb{C}^3$ tels que :

$$\begin{cases} \overrightarrow{w_1} = (2i\sigma_1, -\sigma_1 + i\rho_1, i\tau_1, -2\rho_1 + 2i\sigma_1, 3\rho_1 + i\sigma_1) \\ \overrightarrow{w_2} = (2i\sigma_2, -\sigma_2 + i\rho_2, i\tau_2, -2\rho_2 + 2i\sigma_2, 3\rho_2 + i\sigma_2) \end{cases}.$$

On a :

$$\begin{aligned}
& \overrightarrow{w_1} = (2i\sigma_1, -\sigma_1 + i\rho_1, i\tau_1, -2\rho_1 + 2i\sigma_1, 3\rho_1 + i\sigma_1) \\
\iff & \begin{pmatrix} 0 & 2i & 0 \\ i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ -2 & 2i & 0 \\ 3 & i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \sigma_1 \\ \tau_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_1 \leftrightarrow L_2 \text{ puis } L_1 \leftarrow -iL_1 \\ L_2 \leftrightarrow L_1 \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \\
\iff & \begin{pmatrix} \boxed{1} & i & 0 \\ 0 & 2i & 0 \\ 0 & 0 & i \\ -2 & 2i & 0 \\ 3 & i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \sigma_1 \\ \tau_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \\ \\ \\ L_4 \leftarrow L_4 + 2L_1 \\ L_5 \leftarrow L_5 - 3L_1 \end{matrix} \\
\iff & \begin{pmatrix} \boxed{1} & i & 0 \\ 0 & \boxed{2i} & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & 4i & 0 \\ 0 & -2i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \sigma_1 \\ \tau_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \\ \\ \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2 \\ L_5 \leftarrow L_5 + L_2 \end{matrix} \\
\iff & \begin{pmatrix} \boxed{1} & i & 0 \\ 0 & \boxed{2i} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{i} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \sigma_1 \\ \tau_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

On obtient un système linéaire échelonné de rang 3 avec deux équations auxiliaires compatibles et aucune inconnue auxiliaire. Il y a donc une unique solution $(\rho_1, \sigma_1, \tau_1) \in \mathbb{C}^3$. De même :

$$\begin{aligned}
& \overrightarrow{w_2} = (2i\sigma_2, -\sigma_2 + i\rho_2, i\tau_2, -2\rho_2 + 2i\sigma_2, 3\rho_2 + i\sigma_2) \\
\iff & \begin{pmatrix} 0 & 2i & 0 \\ i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ -2 & 2i & 0 \\ 3 & i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_2 \\ \sigma_2 \\ \tau_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ -1 \\ 2i \\ -i \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_2 \leftrightarrow L_2 \text{ puis } L_2 \leftarrow -iL_2 \\ L_2 \leftrightarrow L_2 \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \\
\iff & \begin{pmatrix} \boxed{1} & i & 0 \\ 0 & 2i & 0 \\ 0 & 0 & i \\ -2 & 2i & 0 \\ 3 & i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_2 \\ \sigma_2 \\ \tau_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ -1 \\ 2i \\ -i \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \\ \\ \\ L_4 \leftarrow L_4 + 2L_1 \\ L_5 \leftarrow L_5 - 3L_1 \end{matrix}
\end{aligned}$$

$$\iff \begin{pmatrix} \boxed{1} & i & 0 \\ 0 & \boxed{2i} & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & 4i & 0 \\ 0 & -2i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_2 \\ \sigma_2 \\ \tau_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ -1 \\ 2i \\ -i \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2 \\ L_5 \leftarrow L_5 + L_2 \end{matrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} \boxed{1} & i & 0 \\ 0 & \boxed{2i} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{i} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_2 \\ \sigma_2 \\ \tau_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On obtient un système linéaire échelonné de rang 3 avec deux équations auxiliaires compatibles et aucune inconnue auxiliaire. Il y a donc une unique solution $(\rho_2, \sigma_2, \tau_2) \in \mathbb{C}^3$.
Par conséquent, on a bien montré que $\overrightarrow{w_1} \in F$ et $\overrightarrow{w_2} \in F$. Or $\text{Vect}(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2})$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $\overrightarrow{w_1}$ et $\overrightarrow{w_2}$ (par définition du sous-espace vectoriel engendré) et toute combinaison linéaire de vecteurs de F appartient à F (car F est un sous-espace vectoriel). On en déduit que $\text{Vect}(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}) \subset F$.
Finalement, on a $\text{Vect}(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}) \subset E$ et $\text{Vect}(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}) \subset F$ donc $\text{Vect}(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}) \subset E \cap F$.
$\underline{E \cap F \subset \text{Vect}(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2})}$. Soit $\overrightarrow{z} = (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5) \in E \cap F$. Puisque $\overrightarrow{z} \in F$, il existe $(\rho, \sigma, \tau) \in \mathbb{C}^3$ tels que :

$$(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5) = \overrightarrow{z} = (2i\sigma, -\sigma + i\rho, i\tau, -2\rho + 2i\sigma, 3\rho + i\sigma).$$

De plus, puisque $\overrightarrow{z} \in E$, on a :

$$\begin{aligned} 0 &= z_1 + iz_2 - 2z_3 + iz_4 + z_5 \\ &= (2i\sigma) + i(-\sigma + i\rho) - 2(i\tau) + i(-2\rho + 2i\sigma) + (3\rho + i\sigma) \\ &= (2 - 2i)\rho + (-2 + 2i)\sigma - 2i\tau. \end{aligned}$$

Montrons que $\overrightarrow{z} \in \text{Vect}(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2})$. On cherche donc à résoudre l'équation $\overrightarrow{z} = \lambda_1\overrightarrow{w_1} + \lambda_2\overrightarrow{w_2}$ d'inconnues $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$:

$$\begin{aligned} & \lambda_1\overrightarrow{w_1} + \lambda_2\overrightarrow{w_2} = \overrightarrow{z} \\ \iff & \lambda_1(1, i, 1, 0, 2) + \lambda_2(i, 0, -1, 2i, -i) = (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5) = (2i\sigma, -\sigma + i\rho, i\tau, -2\rho + 2i\sigma, 3\rho + i\sigma) \\ \iff & \begin{pmatrix} \boxed{1} & i \\ i & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 2i \\ 2 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2i\sigma \\ -\sigma + i\rho \\ i\tau \\ -2\rho + 2i\sigma \\ 3\rho + i\sigma \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 - iL_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ \\ L_5 \leftarrow L_5 - 2L_1 \end{matrix} \\ \iff & \begin{pmatrix} \boxed{1} & i \\ 0 & \boxed{1} \\ 0 & -1 - i \\ 0 & 2i \\ 0 & -3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2i\sigma \\ \sigma + i\rho \\ i\tau - 2i\sigma \\ -2\rho + 2i\sigma \\ 3\rho - 3i\sigma \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 + (1 + i)L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2iL_2 \\ L_5 \leftarrow L_5 + 3iL_2 \end{matrix} \\ \iff & \begin{pmatrix} \boxed{1} & i \\ 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2i\sigma \\ \sigma + i\rho \\ i\tau - 2i\sigma + (1 + i)(\sigma + i\rho) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2i\sigma \\ \sigma + i\rho \\ (-1 + i)\rho + (1 - i\sigma) + i\tau \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On obtient un système linéaire échelonné de rang 2 avec trois équations auxiliaires et aucune inconnue auxiliaire. Les deux dernières équations auxiliaires sont compatibles. Pour l'équation auxiliaire L_3, on remarque que :

$$(-1+i)\rho + (1-i\sigma) + i\tau = \frac{1}{-2}\Big[\underbrace{(2-2i)\rho + (-2+2i)\sigma - 2i\tau}_{=0}\Big] = 0 \quad \text{car } \vec{z} \in E \cap F.$$

Par conséquent, toutes les équations auxiliaires sont compatibles et il y a une unique solution $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$. On en déduit que $\vec{z} \in \mathrm{Vect}(\vec{w_1}, \vec{w_2})$ et ceci est vrai pour tout $\vec{z} \in E \cap F$. Ainsi, on a bien montré que $E \cap F \subset \mathrm{Vect}(\vec{w_1}, \vec{w_2})$.

Conclusion. Par double implication, on en déduit que $E \cap F = \mathrm{Vect}(\vec{w_1}, \vec{w_2})$ donc que la famille $(\vec{w_1}, \vec{w_2})$ est génératrice de $E \cap F$. Puisque c'est aussi une famille libre, on a bien montré que $\boxed{(\vec{w_1}, \vec{w_2}) \text{ est une base de } E \cap F}$.

Problème 2

Ce problème propose d'étudier une mutation dynamique de l'information génétique au sein d'une lignée de cellules. Pour simplifier les notations, on désigne par A, B, C et D les quatre parties du génome touchées par la mutation. On observe les résultats suivants :

- *la mutation ne touche qu'une seule partie du génome de chaque cellule à chaque génération ;*
- *si la mutation touche A alors elle touche équiprobablement A, B, C ou D à la génération suivante ;*
- *si la mutation touche B alors elle touche équiprobablement A ou D à la génération suivante ;*
- *si la mutation touche C alors elle touche équiprobablement B ou C à la génération suivante ;*
- *si la mutation touche D alors elle continue de toucher D à la génération suivante.*

Pour tout entier $n \geqslant 1$ et toute lettre $X \in \{\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}\}$, on note X_n l'événement : «la mutation touche X à la n-ième génération» et x_n sa probabilité. Enfin, on suppose que la mutation touche A à la première génération, c'est-à-dire $a_1 = 1$ et $b_1 = c_1 = d_1 = 0$.

1. *Déterminer a_2, b_2, c_2 et d_2.*

   ▶ Puisque la mutation touche A à la première génération, elle touche équiprobablement A, B, C ou D à la deuxième génération. On en déduit que :

   $$a_2 = b_2 = c_2 = d_2.$$

   Or A_2, B_2, C_2 et D_2 forment un système complet d'événements car la mutation ne touche qu'une seule partie des quatre parties A, B, C et D à la deuxième génération. On en déduit que :

   $$a_2 + b_2 + c_2 + d_2 = 1.$$

   Par conséquent :

   $$\boxed{a_2 = b_2 = c_2 = d_2 = \frac{1}{4}}.$$

2. *Calculer la probabilité que la mutation touche A à la 2e génération sachant qu'elle touche D à la 3e.*

   ▶ On cherche la probabilité conditionnelle $\mathrm{P}_{D_3}(A_2)$. Puisque A_2, B_2, C_2 et D_2 forment un système complet d'événements, on a d'après la formule de Bayes :

   N'oubliez pas de préciser le système complet d'événements que vous utilisez pour appliquer la formule de Bayes.

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}_{D_3}(A_2) &= \frac{\mathrm{P}(A_2)\mathrm{P}_{A_2}(D_3)}{\mathrm{P}(A_2)\mathrm{P}_{A_2}(D_3) + \mathrm{P}(B_2)\mathrm{P}_{B_2}(D_3) + \mathrm{P}(C_2)\mathrm{P}_{C_2}(D_3) + \mathrm{P}(D_2)\mathrm{P}_{D_2}(D_3)} \\
&= \frac{a_2\mathrm{P}_{A_2}(D_3)}{a_2\mathrm{P}_{A_2}(D_3) + b_2\mathrm{P}_{B_2}(D_3) + c_2\mathrm{P}_{C_2}(D_3) + d_2\mathrm{P}_{D_2}(D_3)} \\
&= \frac{\frac{1}{4}\mathrm{P}_{A_2}(D_3)}{\frac{1}{4}\mathrm{P}_{A_2}(D_3) + \frac{1}{4}\mathrm{P}_{B_2}(D_3) + \frac{1}{4}\mathrm{P}_{C_2}(D_3) + \frac{1}{4}\mathrm{P}_{D_2}(D_3)} \quad \text{d'après les résultats de la question précédente} \\
&= \frac{\mathrm{P}_{A_2}(D_3)}{\mathrm{P}_{A_2}(D_3) + \mathrm{P}_{B_2}(D_3) + \mathrm{P}_{C_2}(D_3) + \mathrm{P}_{D_2}(D_3)}.
\end{aligned}$$

Or on a d'après l'énoncé :

$$\mathrm{P}_{A_2}(D_3) = \frac{1}{4}, \quad \mathrm{P}_{B_2}(D_3) = \frac{1}{2}, \quad \mathrm{P}_{C_2}(D_3) = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{P}_{D_2}(D_3) = 1.$$

D'où :

$$\mathrm{P}_{D_3}(A_2) = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 0 + 1} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{7}{4}} = \boxed{\frac{1}{7}}.$$

3. *Dans cette question, on fixe un entier $n \geqslant 1$.*

(a) *Que peut-on dire de la somme $a_n + b_n + c_n + d_n$? Justifier.*

▶ Puisque $\boxed{A_n,\ B_n,\ C_n \text{ et } D_n \text{ forment un système complet d'événements}}$ car la mutation ne touche qu'une seule partie des quatre parties A, B, C et D à la n-ième génération. On en déduit que :

$$\boxed{a_n + b_n + c_n + d_n = 1}.$$

(b) *Montrer que $a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2}b_n$. Obtenir des expressions similaires pour b_{n+1}, c_{n+1} et d_{n+1}.*

▶ Puisque A_n, B_n, C_n et D_n forment un système complet d'événements, on a d'après la formule des probabilités totales :

N'oubliez pas de préciser le système complet d'événements que vous utilisez pour appliquer la formule des probabilités totales.

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= \mathrm{P}(A_{n+1}) \\
&= \mathrm{P}(A_n)\mathrm{P}_{A_n}(A_{n+1}) + \mathrm{P}(B_n)\mathrm{P}_{B_n}(A_{n+1}) + \mathrm{P}(C_n)\mathrm{P}_{C_n}(A_{n+1}) + \mathrm{P}(D_n)\mathrm{P}_{D_n}(A_{n+1}) \\
&= a_n\mathrm{P}_{A_n}(A_{n+1}) + b_n\mathrm{P}_{B_n}(A_{n+1}) + c_n\mathrm{P}_{C_n}(A_{n+1}) + d_n\mathrm{P}_{D_n}(A_{n+1}).
\end{aligned}$$

Or on a d'après l'énoncé :

$$\mathrm{P}_{A_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{4}, \quad \mathrm{P}_{B_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{2}, \quad \mathrm{P}_{C_n}(A_{n+1}) = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{P}_{D_n}(A_{n+1}) = 0.$$

D'où :

$$a_{n+1} = a_n\frac{1}{4} + b_n\frac{1}{2} + c_n 0 + d_n 0 = \boxed{\frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2}b_n}.$$

En raisonnant de même, on obtient :

$$\begin{aligned}
b_{n+1} &= \mathrm{P}(B_{n+1}) \\
&= \mathrm{P}(A_n)\mathrm{P}_{A_n}(B_{n+1}) + \mathrm{P}(B_n)\mathrm{P}_{B_n}(B_{n+1}) + \mathrm{P}(C_n)\mathrm{P}_{C_n}(B_{n+1}) + \mathrm{P}(D_n)\mathrm{P}_{D_n}(B_{n+1}) \\
&= a_n\frac{1}{4} + b_n 0 + c_n\frac{1}{2} + d_n 0 \\
&= \boxed{\frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2}c_n}, \\
c_{n+1} &= \mathrm{P}(C_{n+1}) \\
&= \mathrm{P}(A_n)\mathrm{P}_{A_n}(C_{n+1}) + \mathrm{P}(B_n)\mathrm{P}_{B_n}(C_{n+1}) + \mathrm{P}(C_n)\mathrm{P}_{C_n}(C_{n+1}) + \mathrm{P}(D_n)\mathrm{P}_{D_n}(C_{n+1}) \\
&= a_n\frac{1}{4} + b_n 0 + c_n\frac{1}{2} + d_n 0 \\
&= \boxed{\frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2}c_n} \\
\text{et} \quad d_{n+1} &= \mathrm{P}(D_{n+1}) \\
&= \mathrm{P}(A_n)\mathrm{P}_{A_n}(D_{n+1}) + \mathrm{P}(B_n)\mathrm{P}_{B_n}(D_{n+1}) + \mathrm{P}(C_n)\mathrm{P}_{C_n}(D_{n+1}) + \mathrm{P}(D_n)\mathrm{P}_{D_n}(D_{n+1}) \\
&= a_n\frac{1}{4} + b_n\frac{1}{2} + c_n 0 + d_n 1 \\
&= \boxed{\frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2}b_n + d_n}.
\end{aligned}$$

(c) En déduire que $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ *où* L *est une matrice à exprimer en fonction de* $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

► D'après les résultats de la question précédente, on a :

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}a_n & +\frac{1}{2}b_n & \\ \frac{1}{4}a_n & & +\frac{1}{2}c_n \\ \frac{1}{4}a_n & & +\frac{1}{2}c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{=M} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}.$$

D'où le résultat en posant $\boxed{L = \frac{1}{4}M}$.

4. *Montrer que* $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = L^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *pour tout entier* $n \geqslant 1$.

► On raisonne par récurrence.

Initialisation. Si $n = 1$ alors :

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad L^{1-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \underbrace{L^0}_{=\mathrm{I}_3} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Donc le résultat est vrai pour $n = 1$.

Hérédité. On suppose que le résultat est vrai pour un entier $n \geqslant 1$ fixé. On a :

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} \quad \text{d'après le résultat de la question précédente}$$

$$\text{et} \quad \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = L^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{par hypothèse de récurrence.}$$

Par conséquent :

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = L \times L^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = L^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = L^{(n+1)-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, si le résultat est vrai au rang n alors il est vrai au rang $n + 1$ et cette implication est vraie pour tout entier $n \geqslant 1$.

Conclusion. D'après le principe de récurrence, on en déduit que :

$$\boxed{\forall n \geqslant 1, \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = L^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}.$$

5. *(a) Montrer que la matrice* $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ *est inversible et calculer son inverse.*

▶ Soit $Y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$. Résolvons le système $PX=Y$ d'inconnue $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
PX=Y &\iff \begin{pmatrix}2&1&0\\-1&1&2\\-1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix} \begin{matrix}L_1\leftrightarrow L_2\\ L_2\leftrightarrow L_1\\ \ \end{matrix}\\
&\iff \begin{pmatrix}-1&1&2\\2&1&0\\-1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_2\\y_1\\y_3\end{pmatrix} \begin{matrix}\ \\ L_2\leftarrow L_2+2L_1\\ L_3\leftarrow L_3-L_1\end{matrix}\\
&\iff \begin{pmatrix}-1&1&2\\0&3&4\\0&0&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_2\\y_1+2y_2\\y_3-y_2\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

On obtient une matrice équivalente échelonnée de rang maximal donc $\boxed{P \text{ est inversible}}$.

$$\begin{aligned}
PX=Y &\iff \begin{cases}-x_1+x_2+2x_3=y_2\\ 3x_2+4x_3=y_1+2y_2\\ -3x_3=y_3-y_2\end{cases}\\
&\iff \begin{cases}x_1=-(y_2-x_2-2x_3)=-y_2+x_2+2x_3\\ x_2=\frac{1}{3}(y_1+2y_2-4x_3)=\frac{1}{3}y_1+\frac{2}{3}y_2-\frac{4}{3}x_3\\ x_3=\frac{1}{-3}(y_3-y_2)=\frac{1}{3}y_2-\frac{1}{3}y_3\end{cases}\\
&\iff \begin{cases}x_1=-y_2+x_2+2(\frac{1}{3}y_2-\frac{1}{3}y_3)=-\frac{1}{3}y_2-\frac{2}{3}y_3+x_2\\ x_2=\frac{1}{3}y_1+\frac{2}{3}y_2-\frac{4}{3}(\frac{1}{3}y_2-\frac{1}{3}y_3)=\frac{1}{3}y_1+\frac{2}{9}y_2+\frac{4}{9}y_3\\ x_3=\frac{1}{3}y_2-\frac{1}{3}y_3\end{cases}\\
&\iff \begin{cases}x_1=-\frac{1}{3}y_2-\frac{2}{3}y_3+(\frac{1}{3}y_1+\frac{2}{9}y_2+\frac{4}{9}y_3)=\frac{1}{3}y_1-\frac{1}{9}y_2-\frac{2}{9}y_3\\ x_2=\frac{1}{3}y_1+\frac{2}{9}y_2+\frac{4}{9}y_3\\ x_3=\frac{1}{3}y_2-\frac{1}{3}y_3\end{cases}\\
&\iff \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&-\frac{1}{9}&-\frac{2}{9}\\ \frac{1}{3}&\frac{2}{9}&\frac{4}{9}\\ 0&\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

On en déduit que la matrice inverse de P est :

$$\boxed{P^{-1}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}3&-1&-2\\3&2&4\\0&3&-3\end{pmatrix}}.$$

(b) Montrer que $P^{-1}MP=D+N$ où D est une matrice diagonale et N est de la forme $\begin{pmatrix}0&0&\star\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

▶ On a :

$$\begin{aligned}
P^{-1}MP&=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}3&-1&-2\\3&2&4\\0&3&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&0\\1&0&2\\1&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&0\\-1&1&2\\-1&1&-1\end{pmatrix}\\
&=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}3&-1&-2\\3&2&4\\0&3&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&3&4\\0&3&-2\\0&3&-2\end{pmatrix}\\
&=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}0&0&18\\0&27&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&2\\0&3&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&3&0\\0&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

D'où le résultat en posant $\boxed{D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$ et $\boxed{N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$.

(c) *Calculer DN, ND et N^2.*

▶ On a d'après les résultats de la question précédente :

$$DN = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{0_3},$$

$$ND = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{0_3}$$

$$\text{et} \quad N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{0_3}.$$

(d) *En déduire que $M^n = PD^nP^{-1}$ pour tout entier $n \geqslant 2$.*

▶ On raisonne par récurrence.

Initialisation. Soit $n = 2$. On a d'après le résultat de la question 5(b) :

$$(P^{-1}MP)^2 = (D+N)^2.$$

Or :

$$(P^{-1}MP)^2 = P^{-1}M\underbrace{PP^{-1}}_{=\mathrm{I}_3}MP = P^{-1}M^2P$$

et :

$$\begin{aligned} (D+N)^2 &= (D+N)(D+N) \\ &= D^2 + \underbrace{DN}_{=0_3} + \underbrace{ND}_{=0_3} + \underbrace{N^2}_{=0_3} \\ &= D^2 \quad \text{d'après les résultats de la question précédente.} \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$M^2 = \underbrace{PP^{-1}}_{=\mathrm{I}_3}M^2\underbrace{P^{-1}P}_{=\mathrm{I}_3} = P(P^{-1}M^2P)P^{-1} = P(P^{-1}MP)^2P^{-1} = P(D+N)^2P^{-1} = PD^2P^{-1}.$$

Donc le résultat est vrai pour $n = 2$.

Hérédité. On suppose que le résultat est vrai pour un entier $n \geqslant 2$ fixé. On a :

$$\begin{aligned} M^{n+1} &= M^nM = (PD^nP^{-1})M \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= PD^nP^{-1}M\underbrace{PP^{-1}}_{=\mathrm{I}_3} = PD^n(P^{-1}MP)P^{-1} \\ &= PD^n(D+N)P^{-1} \quad \text{d'après le résultat de la question 5(b)} \\ &= P(D^{n+1} + D^nN)P^{-1} = P(D^{n+1} + D^{n-1}\underbrace{DN}_{=0_3})P^{-1} \quad \text{car } n-1 \geqslant 1 \\ &= PD^{n+1}P^{-1} \text{d'après les résultats de la question précédente.} \end{aligned}$$

La justification $n-1 \geqslant 1$ est nécessaire car D^{n-1} n'est pas définie si $n-1 < 0$.

Ainsi, si le résultat est vrai au rang n alors il est vrai au rang $n+1$ et cette implication est vraie pour tout entier $n \geqslant 2$.

Conclusion. D'après le principe de récurrence, on en déduit que :

$$\boxed{\forall n \geqslant 2 \; M^n = PD^nP^{-1}}.$$

On peut aussi utiliser la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned}
\forall n \geqslant 2,\ M^n &= P(D+N)^n P^{-1} \quad \textit{par récurrence} \\
&= P\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}N^k D^{n-k}\right)P^{-1} \quad \textit{car } ND = DN \\
&= P\left(D^n + nND^{n-1}\right)P^{-1} \quad \textit{car } \forall k \geqslant 2,\ N^k = 0_3 \\
&= P\left(D^n + n\underbrace{ND}_{=0_3}D^{n-2}\right)P^{-1} \quad \textit{car } n-2 \geqslant 0 \\
&= PD^nP^{-1}.
\end{aligned}$$

6. *On fixe un entier $n \geqslant 3$ dans cette question. À l'aide des résultats précédents, montrer que*

$$L^{n-1} = \frac{4}{27}\left(\frac{3}{4}\right)^n \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

puis en déduire des expressions de a_n, b_n, c_n et d_n en fonction de l'entier $n \geqslant 3$.

▶ On a :

$$\begin{aligned}
L^{n-1} &= \left(\frac{1}{4}M\right)^{n-1} \quad \text{d'après le résultat de la question 3(c)} \\
&= \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} M^{n-1} \\
&= \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} PD^{n-1}P^{-1} \quad \text{d'après le résultat de la question précédente car } n-1 \geqslant 2 \\
&= \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{n-1} \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{d'après les résultats précédents} \\
&= \frac{4}{9}\left(\frac{1}{4}\right)^{n} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \\
&= \frac{4}{9}\left(\frac{1}{4}\right)^{n} 3^{n-1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \\
&= \frac{4}{3\times 9}\left(\frac{3}{4}\right)^{n} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \boxed{\frac{4}{27}\left(\frac{3}{4}\right)^{n} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}}.
\end{aligned}$$

On en déduit d'après le résultat de la question 4 que :

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = L^{n-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{4}{27}\left(\frac{3}{4}\right)^n \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{4}{27}\left(\frac{3}{4}\right)^n \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{9}\left(\frac{3}{4}\right)^n \\ \frac{4}{9}\left(\frac{3}{4}\right)^n \\ \frac{4}{9}\left(\frac{3}{4}\right)^n \end{pmatrix}.$$

Par conséquent :

$$\boxed{a_n = b_n = c_n = \frac{4}{9}\left(\frac{3}{4}\right)^n}.$$

De plus, on a d'après le résultat de la question 3(a) :

$$d_n = 1 - a_n - b_n - c_n = \boxed{1 - \frac{4}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^n}$$

7. *En déduire la limite quand n tend vers $+\infty$ de la probabilité que la mutation touche A à la n-ième génération sachant qu'elle touche D à la $(n+1)$-ième génération.*

► On cherche la limite de $\mathrm{P}_{D_{n+1}}(A_n)$ quand n tend vers $+\infty$. Soit $n \geqslant 3$. Puisque A_n, B_n, C_n et D_n forment un système complet d'événements, on a d'après la formule de Bayes :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}_{D_{n+1}}(A_n) &= \frac{\mathrm{P}(A_n)\mathrm{P}_{A_n}(D_{n+1})}{\mathrm{P}(A_n)\mathrm{P}_{A_n}(D_{n+1}) + \mathrm{P}(B_n)\mathrm{P}_{B_n}(D_{n+1}) + \mathrm{P}(C_n)\mathrm{P}_{C_n}(D_{n+1}) + \mathrm{P}(D_n)\mathrm{P}_{D_n}(D_{n+1})} \\
&= \frac{a_n \frac{1}{4}}{a_n \frac{1}{4} + b_n \frac{1}{2} + c_n 0 + d_n 1} \quad \text{d'après l'énoncé} \\
&= \frac{a_n}{a_n + 2b_n + 4d_n} \\
&= \frac{\frac{4}{9}\left(\frac{3}{4}\right)^n}{\frac{4}{9}\left(\frac{3}{4}\right)^n + 2\frac{4}{9}\left(\frac{3}{4}\right)^n + 4\left(1 - \frac{4}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)} \quad \text{d'après les résultats de la question précédente} \\
&= \frac{\frac{4}{9}\left(\frac{3}{4}\right)^n}{\frac{4}{9}\left(\frac{3}{4}\right)^n \left(3 + 4\left(\frac{9}{4}\left(\frac{4}{3}\right)^n - 3\right)\right)} \\
&= \frac{1}{9\left(\frac{4}{3}\right)^n - 9}.
\end{aligned}$$

Or $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^n = +\infty$ car $\frac{4}{3} > 1$. D'où $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}_{D_{n+1}}(A_n) = 0}$.

DS n° 8 de mathématiques et d'informatique

durée : 3 heures

Exercice 1

Toutes les fonctions demandées sont à écrire en langage Python.

1. (a) Écrire une fonction `Bernoulli` qui prend en argument une probabilité p puis qui renvoie `0` avec la probabilité $1-p$ et `1` avec la probabilité p.

   (b) En déduire une fonction `binomiale` prenant en argument un entier n et une probabilité p et simulant une loi binomiale de paramètres (n,p).

2. On considère une urne contenant a jetons rouges et b jetons bleus. On donne la fonction `mystere` ci-dessous où n est un entier inférieur à $a+b$.

```
def mystere(a,b,n):
    res = 0
    for i in range(n):
        x = Bernoulli(a/(a+b))
        if x == 1:
           a -= 1
           res += 1
        else:
           b -= 1
    return res
```

   (a) Quelle valeur est retournée par `mystere(5,0,3)` ?

   (b) Quelle valeur est retournée par `mystere(0,5,3)` ?

   (c) Décrire l'expérience aléatoire modélisée par `mystere(3,4,2)` et déterminer les valeurs retournées possibles.

   (d) Quelle loi est simulée par la fonction `mystere` ? Exprimer les paramètres de cette loi en fonction de a, b et n.

   (e) À l'aide de la fonction `mystere` et en vous inspirant des fonctions `Bernoulli` et `binomiale`, écrire une fonction prenant en argument les paramètres de la loi de la question précédente et simulant cette loi.

3. (a) Écrire une fonction `simulePlusieursFois(a,b,n,m)` qui simule m fois l'expérience aléatoire de la fonction `mystere` puis qui renvoie la moyenne des résultats de ces m expériences.

   (b) Dans le cas où le nombre m de simulations est supposé très grand, conjecturer une valeur approchée en fonction de a, b et n de la valeur retournée par `simulePlusieursFois(a,b,n,m)`.

Exercice 2

On considère l'application $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x,y,z) \mapsto (x-3y+3z, 2y-z, 2y-z)$.

1. Justifier que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2. **[Informatique]** Écrire une fonction `phi(L)` qui prend en argument une liste `L=[`x`,`y`,`z`]` et retourne l'image de (x,y,z) par l'application φ sous forme d'une liste.
3. (a) Déterminer une représentation paramétrique de $\mathrm{Ker}(\varphi)$.

   (b) Déterminer la dimension de $\mathrm{Ker}(\varphi)$. Que peut-on en déduire pour l'application φ ?
4. Déterminer la dimension de $\mathrm{Im}(\varphi)$. Que peut-on en déduire pour l'application φ ?
5. On note Id l'application identité de $\mathbb{R}^3$.

   (a) Que vaut l'application $\varphi \circ \varphi$?

   (b) En déduire que $\varphi \circ (\varphi - \mathrm{Id})$ et $(\varphi - \mathrm{Id}) \circ \varphi$ sont égales à l'application constante au vecteur nul.

   (c) À l'aide des résultats précédents, montrer que $\mathrm{Im}(\varphi - \mathrm{Id}) \subset \mathrm{Ker}(\varphi)$ et $\mathrm{Im}(\varphi) \subset \mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{Id})$.

   (d) Que peut-on en déduire pour l'application $\varphi - \mathrm{Id}$?
6. Montrer que $\mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{Id}) = \mathrm{Im}(\varphi)$.
7. (a) Déterminer une base $(\overrightarrow{e_1})$ de $\mathrm{Ker}(\varphi)$ et une base $(\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ de $\mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{Id})$.

   (b) Montrer que $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3

Dans tout cet exercice, on fixe un entier $n \geqslant 2$ et on considère une variable aléatoire X à valeurs dans $X(\Omega) = \{0, 1, 2, \dots, n\}$ dont la loi de probabilité est de la forme :

$$\forall k \in \{0, 1, 2, \dots, n\},\ \mathrm{P}(X = k) = \mu \binom{n}{k} \quad \text{où } \mu \in \mathbb{R} \text{ est une constante.}$$

1. Déterminer la valeur de la constante μ.
2. Montrer que l'espérance de X est égale à $n/2$.
3. Calculer la variance de X.

Exercice 4

Le but de cet exercice est d'étudier la fonction suivante :

$$\Psi : x \mapsto \int_x^{2x} \frac{\arctan(t)}{t} \mathrm{d}t$$

1. (Approximation numérique)
   (a) On fixe un réel x dans cette question et on suppose que $\Psi(x)$ est bien défini. Écrire $\Psi(x)$ comme la limite quand n tend vers $+\infty$ de sommes de Riemann.
   (b) **[Informatique]** Écrire une fonction `approxPsi(x,n)` qui retourne la valeur de la n-ième somme de Riemann de la question précédente (on utilisera la fonction `arctan` de la bibliothèque `numpy`).
2. (Étude globale)
   (a) Justifier que Ψ est bien définie sur $\mathbb{R}^\star$ (on pourra introduire la fonction $f : t \mapsto \arctan(t)/t$).
   (b) À l'aide d'un changement de variable, montrer que Ψ est impaire.
   (c) Justifier que Ψ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^\star$.
   (d) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^\star$:

   $$\Psi'(x) = \frac{1}{x}\Big(\arctan(2x) - \arctan(x)\Big)$$

   puis en déduire les variations de Ψ sur $\mathbb{R}^\star$.
   (e) Montrer que pour tout $x > 0$:

   $$\ln(2)\arctan(x) \leqslant \Psi(x) \leqslant \ln(2)\arctan(2x).$$

3. (Étude au voisinage de 0)
   (a) Montrer que Ψ se prolonge par continuité en 0.
   (b) Avec la méthode de votre choix, calculez le développement limité à l'ordre trois de arctan en 0.
   (c) Déterminer un développement limité à l'ordre deux de Ψ' en 0.
   (d) En déduire un développement limité de Ψ en 0. Quel est l'ordre de ce développement limité ?
   (e) À l'aide des résultats précédents, discuter de la dérivabilité sur $\mathbb{R}$ du prolongement continu de Ψ, de la tangente en 0 à sa courbe représentative et de leur position relative au voisinage de 0.
4. (Étude au voisinage de $+\infty$)
   (a) Déterminer la limite de Ψ en $+\infty$ et en déduire le comportement asymptotique (asymptote ou branche parabolique) de la courbe représentative de Ψ au voisinage de $+\infty$.
   (b) À l'aide des résultats précédents, justifier que le prolongement continu de Ψ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers un ensemble à déterminer et décrire la courbe représentative de sa bijection réciproque.

Corrigé du DS n° 8 de mathématiques et d'informatique

Exercice 1

Toutes les fonctions demandées sont à écrire en langage Python.

1. (a) *Écrire une fonction* `Bernoulli` *qui prend en argument une probabilité p puis qui renvoie* `0` *avec la probabilité $1-p$ et* `1` *avec la probabilité p.*

   ▶ Par exemple :

```
import random as rd
def Bernoulli(p):
    x = rd.random()
    if x < p:
        return 1
    else:
        return 0
```

   (b) *En déduire une fonction* `binomiale` *prenant en argument un entier n et une probabilité p et simulant une loi binomiale de paramètres (n,p).*

   ▶ Par exemple :

```
def binomiale(n,p):
    S = 0
    for i in range(n):
        S += Bernoulli(p)
    return S
```

2. *On considère une urne contenant a jetons rouges et b jetons bleus. On donne la fonction* `mystere` *ci-dessous où n est un entier inférieur à $a+b$.*

```
def mystere(a,b,n) :      res = 0
    for i in range(n):
        x = Bernoulli(a/(a+b))
        if x == 1:
            a -= 1
            res += 1
        else:
            b -= 1
    return res
```

   (a) *Quelle valeur est retournée par* `mystere(5,0,3)` *?*

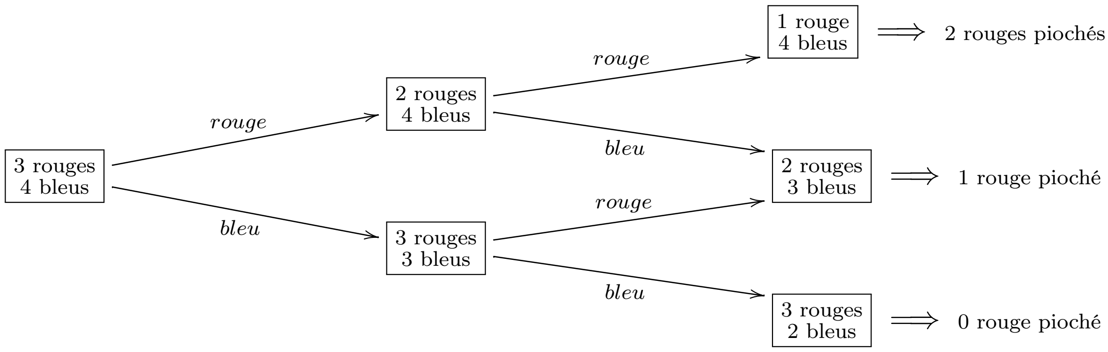
   ▶ Si $b=0$ alors $a/(a+b)=1$ et donc `Bernoulli(a/(a+b))` renvoie `1` (loi certaine). Ainsi, à chaque itération de la boucle `for`, la variable `x` est égale à 1, la variable `a` est diminuée de 1, la variable `res` est augmentée de 1 et la variable `b` n'est pas modifiée. Puisque la boucle `for` effectue n itérations, la variable `res` est égale à n à la sortie de la boucle `for`. On en déduit que `mystere(5,0,3)` retourne $\boxed{3}$.

   (b) *Quelle valeur est retournée par* `mystere(0,5,3)` *?*

   ▶ Si $a=0$ alors $a/(a+b)=0$ et donc `Bernoulli(a/(a+b))` renvoie `0` (loi certaine). Ainsi, à chaque itération de la boucle `for`, la variable `x` est égale à 0, la variable `b` est diminuée de 1 et les variables `a` et `res` ne sont pas modifiées. Ainsi la variable `res` est égale à 0 à la sortie de la boucle `for`. On en déduit que `mystere(5,0,3)` retourne $\boxed{0}$.

(c) *Décrire l'expérience aléatoire modélisée par* `mystere(3,4,2)` *et déterminer les valeurs retournées possibles.*

▶ Puisque $a/(a+b)$ est égale à la probabilité de piocher un jeton rouge dans l'urne, la variable `x` est égale à 1 si on pioche un jeton rouge et 0 si on pioche un jeton bleu. Si on pioche un jeton rouge (donc si la variable `x` est égale à 1), alors la variable `a` est diminuée de 1 ce qui correspond à ne pas remettre le jeton rouge dans l'urne. De même, si on pioche un jeton bleu (donc si la variable `x` est égale à 0), alors la variable `b` est diminuée de 1 ce qui correspond à ne pas remettre le jeton bleu dans l'urne. Ainsi, la fonction `mystere` modélise un $\boxed{\text{tirage sans remise de jetons dans l'urne}}$. Et puisque la variable `res` est augmentée de 1 seulement si on pioche un jeton rouge, cette variable compte le nombre de jetons rouges piochés dans l'urne. Après les n itérations de la boucle `for`, la fonction `mystere` retourne donc $\boxed{\text{le nombre de jetons rouges piochés dans l'urne}}$ $\boxed{\text{après un tirage de } n \text{ jetons sans remise}}$. En particulier, `mystere(3,4,2)` modélise deux tirages sans remise dans une urne contenant 3 jetons rouges et 4 jetons bleus. L'arbre des possibilités est :



Ainsi, les valeurs retournées possibles sont $\boxed{0, 1 \text{ ou } 2}$.

(d) *Quelle loi est simulée par la fonction* `mystere` *? Exprimer les paramètres de cette loi en fonction de a, b et n.*

▶ Puisque la fonction `mystere` modélise un tirage sans remise de jetons dans l'urne, on reconnaît une $\boxed{\text{loi hypergéométrique}}$. Les paramètres de cette loi sont :

— N = le nombre total de jetons dans l'urne au début de l'expérience $= a + b$,

— n = le nombre de tirages dans l'urne,

— p = la probabilité de piocher un jeton rouge au premier tirage $= \frac{a}{a+b}$.

Ainsi, la fonction `mystere` simule la loi $\boxed{\mathscr{H}(a+b, n, \frac{a}{a+b})}$.

(e) *À l'aide de la fonction* `mystere` *et en vous inspirant des fonctions* `Bernoulli` *et* `binomiale`*, écrire une fonction prenant en argument les paramètres de la loi de la question précédente et simulant cette loi.*

▶ Par exemple :

```
def hypergeometrique(N,n,p):
    return mystere(N*p,N-N*p,n)
```

On peut également écrire une fonction similaire à la fonction `mystere` *comme l'exemple ci-dessous.*

```
def hypergeometrique(N,n,p):
    a = N*p
    b = N-N*p
    res = 0
    for i in range(n):
        x = Bernoulli(a/(a+b))
        if x == 1:
            a -= 1
            res += 1
        else:
            b -= 1
    return res
```

3. (a) *Écrire une fonction* `simulePlusieursFois(a,b,n,m)` *qui simule m fois l'expérience aléatoire de la fonction* `mystere` *puis qui renvoie la moyenne des résultats de ces m expériences.*
   ▶ Par exemple :

```
def simulePlusieursFois(a,b,n,m):
    moy = 0
    for i in range(m):
        moy += mystere(a,b,n)
    return moy/m
```

   (b) *Dans le cas où le nombre m de simulations est supposé très grand, conjecturer une valeur approchée en fonction de a, b et n de la valeur retournée par* `simulePlusieursFois(a,b,n,m)`*.*
   ▶ Si le nombre de simulations est très grand, alors la moyenne des résultats devrait être proche de l'espérance.

   Cette conjecture est justifiée par la loi des grands nombres (au programme de BCPST2).

   Puisque la fonction `mystere` simule la loi $\mathscr{H}(N,,n,p)$ avec $N = a+b$ et $p = a/(a+b)$ (voir la question 2(d)), on en déduit que si m est très grand alors la valeur retournée par `simulePlusieursFois(a,b,n,m)` devrait être très proche de : $np = \boxed{na/(a+b)}$.

Exercice 2

On considère l'application $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x,y,z) \mapsto (x-3y+3z, 2y-z, 2y-z)$.

1. *Justifier que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.*
   ▶ Montrons que φ est une application linéaire. Soient $\overrightarrow{u_1} = (x_1,y_1,z_1) \in \mathbb{R}^3$, $\overrightarrow{u_2} = (x_2,y_2,z_2) \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
&\varphi\Big(\lambda\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2}\Big)\\
=&\varphi\Big(\lambda(x_1,y_1,z_1) + (x_2,y_2,z_2)\Big)\\
=&\varphi\Big((\lambda x_1 + x_2, \lambda y_1 + y_2, \lambda z_1 + z_2)\Big)\\
=&\Big((\lambda x_1 + x_2) - 3(\lambda y_1 + y_2) + 3(\lambda z_1 + z_2), 2(\lambda y_1 + y_2) - (\lambda z_1 + z_2), 2(\lambda y_1 + y_2) - (\lambda z_1 + z_2)\Big)\\
=&\Big(\lambda(x_1 - 3y_1 + 3z_1) + (x_2 - 3y_2 + z_2), \lambda(2y_1 - z_1) + (2y_2 - z_2), \lambda(2y_1 - z_1) + (2y_2 - z_2)\Big)\\
=&\lambda\Big(x_1 - 3y_1 + 3z_1, 2y_1 - z_1, 2y_1 - z_1\Big) + \Big(x_2 - 3y_2 + 3z_2, 2y_2 - z_2, 2y_2 - z_2\Big)\\
=&\lambda\varphi\Big((x_1,y_1,z_1)\Big) + \varphi\Big((x_2,y_2,z_2)\Big)\\
=&\lambda\varphi\Big(\overrightarrow{u_1}\Big) + \varphi\Big(\overrightarrow{u_2}\Big).
\end{aligned}$$

Puisque cette égalité est vraie pour tout $\overrightarrow{u_1} \in \mathbb{R}^3$, tout $\overrightarrow{u_2} \in \mathbb{R}^3$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on en déduit que φ est linéaire. De plus, l'application φ a même ensemble de départ et d'arrivée égal à $\mathbb{R}^3$. Par conséquent, $\boxed{\varphi \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}^3}$.

2. *[**Informatique**] Écrire une fonction* `phi(L)` *qui prend en argument une liste* `L=[x,y,z]` *et retourne l'image de (x, y, z) par l'application φ sous forme d'une liste.*

▶ Par exemple :

```
def phi(L):
    return [L[0]-3*L[1]+3*L[2],2*L[1]-L[2],2*L[1]-L[2]]
```

3. (a) *Déterminer une représentation paramétrique de* $\mathrm{Ker}(\varphi)$.

▶ Par définition du noyau, $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est l'ensemble des vecteur $\overrightarrow{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que :

$$\begin{aligned}
\varphi\left(\overrightarrow{u}\right) = \overrightarrow{0} &\iff \varphi\Big((x,y,z)\Big) = (0,0,0) \\
&\iff (x - 3y + 3z, 2y - z, 2y - z) = (0,0,0) \\
&\iff \begin{cases} x - 3y + 3z = 0 \\ \qquad 2y - z = 0 \\ \qquad 2y - z = 0 \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \boxed{1}x - 3y + 3z = 0 \\ \qquad \boxed{2}y - z = 0 \\ \qquad\qquad 0 = 0 \end{cases}.
\end{aligned}$$

On obtient un système linéaire homogène de rang 2 avec une équation auxiliaire compatible et une inconnue auxiliaire. Il y a donc une infinité de solutions qu'on peut exprimer en fonction d'un paramètre.

$$\varphi\left(\overrightarrow{u}\right) = \overrightarrow{0} \iff \boxed{\begin{cases} x = 3y - 3z = \frac{3}{2}t - 3t = -\frac{3}{2}t \\ y = \frac{1}{2}z = \frac{1}{2}t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}}.$$

(b) *Déterminer la dimension de* $\mathrm{Ker}(\varphi)$. *Que peut-on en déduire pour l'application φ ?*

▶ D'après le résultat de la question précédente, on obtient que :

$$\mathrm{Ker}(\varphi) = \left\{(x,y,z) = \left(-\tfrac{3}{2}t, \tfrac{1}{2}t, t\right) \mid t \in \mathbb{R}\right\} = \left\{t\left(-\tfrac{3}{2}, \tfrac{1}{2}, 1\right) \mid t \in \mathbb{R}\right\} = \mathrm{Vect}\Big(\left(-\tfrac{3}{2}, \tfrac{1}{2}, 1\right)\Big).$$

Ainsi $(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 1)$ est un vecteur générateur de $\mathrm{Ker}(\varphi)$. Puisque ce vecteur est non nul, il forme une famille libre. On en déduit que ce vecteur forme une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$ et donc $\boxed{\dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) = 1}$.

En particulier, on a $\mathrm{Ker}(\varphi) \neq \{\overrightarrow{0}\}$ (car $\dim(\{\overrightarrow{0}\}) = 0$) donc $\boxed{\text{l'application linéaire } \varphi \text{ n'est pas injective}}$.

4. *Déterminer la dimension de* $\mathrm{Im}(\varphi)$. *Que peut-on en déduire pour l'application φ ?*

▶ Par définition de l'image on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}(\varphi) &= \left\{\varphi\left(\overrightarrow{u}\right) \mid \overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^3\right\} = \left\{\varphi\Big((x,y,z)\Big) \mid (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\right\} \\
&= \left\{(x - 3y + 3z, 2y - z, 2y - z) \mid (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\right\} \\
&= \left\{x(1,0,0) + y(-3,2,2) + z(0,-1,-1) \mid (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\right\} \\
&= \mathrm{Vect}\Big((1,0,0), (-3,2,2), (0,-1,-1)\Big).
\end{aligned}$$

Ainsi les vecteurs $(1,0,0)$, $(-3,2,2)$ et $(0,-1,-1)$ forment une famille génératrice de $\mathrm{Im}(\varphi)$. Calculons le rang de cette famille :

$$\begin{aligned}
&\mathrm{rang}\Big((1,0,0),(-3,2,2),(0,-1,-1)\Big)\\
=&\mathrm{rang}\Big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\Big((1,0,0),(-3,2,2),(0,-1,-1)\Big)\Big) \quad \text{en notant } \mathscr{B} \text{ la base canonique de } \mathbb{R}^3\\
=&\mathrm{rang}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix} \begin{matrix}\\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2\end{matrix} = \mathrm{rang}\begin{pmatrix} \boxed{1} & -3 & 0\\ 0 & \boxed{2} & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = 2.
\end{aligned}$$

On en déduit que les vecteurs $(1,0,0)$, $(-3,2,2)$ et $(0,-1,-1)$ sont liées. En effet, on a :

$$(0,-1,-1) = \tfrac{3}{2}(1,0,0) + \tfrac{1}{2}(-3,2,2).$$

En reprenant les calculs précédents, on obtient donc :

$$\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Vect}\Big((1,0,0),(-3,2,2),(0,-1,-1)\Big) = \mathrm{Vect}\Big((1,0,0),(-3,2,2)\Big)$$

$$\text{et} \quad \mathrm{rang}\Big((1,0,0),(-3,2,2)\Big) = \mathrm{rang}\begin{pmatrix} 1 & -3\\ 0 & 2\\ 0 & 2\end{pmatrix} = 2.$$

Par conséquent, les vecteurs $(1,0,0)$ et $(-3,2,2)$ forment une famille libre et génératrice de $\mathrm{Im}(\varphi)$, donc une base de $\mathrm{Im}(\varphi)$. On en déduit que $\boxed{\dim(\mathrm{Im}(\varphi)) = 2}$.

En particulier, on a $\mathrm{Im}(\varphi) \neq \mathbb{R}^3$ (car $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$) donc $\boxed{\text{l'application linéaire } \varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \text{ n'est pas surjective}}$.

5. *On note* Id *l'application identité de* $\mathbb{R}^3$.

(a) *Que vaut l'application* $\varphi \circ \varphi$ *?*

▶ Puisque $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, on remarque que l'ensemble de départ et d'arrivée de $\varphi \circ \varphi$ sont égaux à $\mathbb{R}^3$ (par définition de la composition). Soit $\overrightarrow{u} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$\begin{aligned}
&(\varphi \circ \varphi)\left(\overrightarrow{u}\right)\\
=&\varphi\Big(\varphi\left(\overrightarrow{u}\right)\Big) \quad \text{par définition de la composition}\\
=&\varphi\Big(\varphi\big((x,y,z)\big)\Big) = \varphi\Big((x-3y+3z, 2y-z, 2y-z)\Big) \quad \text{par définition de } \varphi\\
=&\Big((x-3y+3z) - 3(2y-z) + 3(2y-z), 2(2y-z) - (2y-z), 2(2y-z) - (2y-z)\Big)\\
=&\Big(x-3y+3z, 2y-z, 2y-z\Big) = \varphi\Big((x,y,z)\Big) = \varphi\left(\overrightarrow{u}\right).
\end{aligned}$$

Puisque cette égalité est vraie pour tout $\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^3$, on en déduit que $\boxed{\varphi \circ \varphi = \varphi}$.

(b) *En déduire que* $\varphi \circ (\varphi - \mathrm{Id})$ *et* $(\varphi - \mathrm{Id}) \circ \varphi$ *sont égales à l'application constante au vecteur nul.*

▶ On a pour tout $\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned}
&\Big(\varphi \circ (\varphi - \mathrm{Id})\Big)\left(\overrightarrow{u}\right)\\
=&\varphi\Big((\varphi - \mathrm{Id})\left(\overrightarrow{u}\right)\Big) \quad \text{par définition de la composition}\\
=&\varphi\Big(\varphi\left(\overrightarrow{u}\right) - \mathrm{Id}\left(\overrightarrow{u}\right)\Big) = \varphi\Big(\varphi\left(\overrightarrow{u}\right) - \overrightarrow{u}\Big) \quad \text{par définition de l'application identité}\\
=&\varphi\Big(\varphi\left(\overrightarrow{u}\right)\Big) - \varphi\left(\overrightarrow{u}\right) \quad \text{car l'application } \varphi \text{ est linéaire}\\
=&(\varphi \circ \varphi)\left(\overrightarrow{u}\right) - \varphi\left(\overrightarrow{u}\right) \quad \text{par définition de la composition}\\
=&\varphi\left(\overrightarrow{u}\right) - \varphi\left(\overrightarrow{u}\right) = \boxed{\overrightarrow{0}} \quad \text{d'après le résultat de la question précédente,}
\end{aligned}$$

et de même :

$$\begin{aligned}
&\Big((\varphi - \mathrm{Id})\circ\varphi\Big)\Big(\overrightarrow{u}\Big)\\
=&(\varphi - \mathrm{Id})\Big(\varphi\Big(\overrightarrow{u}\Big)\Big) \quad \text{par définition de la composition}\\
=&\varphi\Big(\varphi\Big(\overrightarrow{u}\Big)\Big) - \mathrm{Id}\Big(\varphi\Big(\overrightarrow{u}\Big)\Big) = \varphi\Big(\varphi\Big(\overrightarrow{u}\Big)\Big) - \varphi\Big(\overrightarrow{u}\Big) \quad \text{par définition de l'application identité}\\
=&(\varphi\circ\varphi)\left(\overrightarrow{u}\right) - \varphi\Big(\overrightarrow{u}\Big) \quad \text{par définition de la composition}\\
=&\varphi\Big(\overrightarrow{u}\Big) - \varphi\Big(\overrightarrow{u}\Big) = \boxed{\overrightarrow{0}} \quad \text{d'après le résultat de la question précédente.}
\end{aligned}$$

On peut également retrouver ces résultats en développant les expressions $\varphi((\varphi - \mathrm{Id})(x,y,z))$ et $(\varphi - \mathrm{Id})(\varphi(x,y,z))$ à l'aide des définitions de φ et $\mathrm{Id} : (x,y,z) \mapsto (x,y,z)$ mais les calculs sont beaucoup plus longs. Pour gagner du temps, pensez à utiliser les résultats précédents !

Puisque ces égalités sont vraies pour tout $\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^3$, on en déduit bien que $\boxed{\varphi\circ(\varphi - \mathrm{Id}) \text{ et } (\varphi - \mathrm{Id})\circ\varphi \text{ sont égales à l'application constante au vecteur nul}}$.

(c) *À l'aide des résultats précédents, montrer que* $\mathrm{Im}(\varphi - \mathrm{Id}) \subset \mathrm{Ker}(\varphi)$ *et* $\mathrm{Im}(\varphi) \subset \mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{Id})$.

▶ Soit $\overrightarrow{u} \in \mathrm{Im}(\varphi - \mathrm{Id})$. Montrons que $\overrightarrow{u} \in \mathrm{Ker}(\varphi)$. Par définition de l'image, il existe un vecteur $\overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^3$ tel que $\overrightarrow{u} = (\varphi - \mathrm{Id})(\overrightarrow{w})$. On a donc :

$$\begin{aligned}
\varphi\Big(\overrightarrow{u}\Big) &= \varphi\Big((\varphi - \mathrm{Id})\Big(\overrightarrow{w}\Big)\Big) = \Big(\varphi\circ(\varphi - \mathrm{Id})\Big)\Big(\overrightarrow{w}\Big) \quad \text{par définition de la composition}\\
&= \overrightarrow{0} \quad \text{d'après le premier résultat de la question précédente.}
\end{aligned}$$

Par définition du noyau, on en déduit que $\overrightarrow{u} \in \mathrm{Ker}(\varphi)$. Puisque ceci est vrai pour tout $\overrightarrow{u} \in \mathrm{Im}(\varphi - \mathrm{Id})$, on a bien montré l'inclusion $\boxed{\mathrm{Im}(\varphi - \mathrm{Id}) \subset \mathrm{Ker}(\varphi)}$.

De même, soit $\overrightarrow{u} \in \mathrm{Im}(\varphi)$. Par définition de l'image, il existe un vecteur $\overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^3$ tel que $\overrightarrow{u} = \varphi(\overrightarrow{w})$. On a donc :

$$\begin{aligned}
(\varphi - \mathrm{Id})\Big(\overrightarrow{u}\Big) &= (\varphi - \mathrm{Id})\Big(\varphi\Big(\overrightarrow{w}\Big)\Big) = \Big((\varphi - \mathrm{Id})\circ\varphi\Big)\Big(\overrightarrow{w}\Big) \quad \text{par définition de la composition}\\
&= \overrightarrow{0} \quad \text{d'après le second résultat de la question précédente.}
\end{aligned}$$

Par définition du noyau, on en déduit que $\overrightarrow{u} \in \mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{Id})$. Puisque ceci est vrai pour tout $\overrightarrow{u} \in \mathrm{Im}(\varphi)$, on a bien montré l'inclusion $\boxed{\mathrm{Im}(\varphi) \subset \mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{Id})}$.

(d) *Que peut-on en déduire pour l'application $\varphi - \mathrm{Id}$?*

▶ On remarque que $\varphi - \mathrm{Id}$ est une application linéaire comme combinaison linéaire d'applications linéaires (φ est linéaire d'après le résultat de la question 1).

N'oubliez pas de préciser que $\varphi - \mathrm{Id}$ est linéaire pour justifier qu'il suffit d'étudier son noyau et son image pour savoir si elle est injective ou surjective.

Donc $\mathrm{Im}(\varphi - \mathrm{Id})$ et $\mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{Id})$ sont des sous-espaces vectoriels. De plus, on a d'après les résultats de la question précédente :

$$\begin{aligned}
&\dim(\mathrm{Im}(\varphi - \mathrm{Id})) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) = 1 \quad \text{d'après le résultat de la question 3(b)}\\
\text{et} \quad &\dim(\mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{Id})) \geqslant \dim(\mathrm{Im}(\varphi)) = 2 \quad \text{d'après le résultat de la question 4.}
\end{aligned}$$

En particulier, $\mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{Id}) \neq \{\overrightarrow{0}\}$ (car $\dim(\{\overrightarrow{0}\}) = 0 < 2$) et $\mathrm{Im}(\varphi - \mathrm{Id}) \neq \mathbb{R}^3$ (car $\dim(\mathbb{R}^3) = 3 > 1$). On en déduit que $\boxed{\varphi - \mathrm{Id} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \text{ n'est ni injective ni surjective}}$.

6. *Montrer que* $\mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{Id}) = \mathrm{Im}(\varphi)$.

▶ On a déjà montré que $\mathrm{Im}(\varphi) \subset \mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{Id})$ à la question 5(c). Par double inclusion, il suffit donc de montrer que $\mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{Id}) \subset \mathrm{Im}(\varphi)$.

Il suffit aussi de montrer que $\dim(\mathrm{Im}(\varphi)) = \dim(\mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{Id}))$. *Une autre méthode consiste donc à déterminer la dimension de* $\mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{Id})$ *en procédant comme à la question 3 (on écrit* $\mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{Id})$ *à l'aide d'une représentation paramétrique qui permet de trouver une famille génératrice puis on en extrait une base). On obtient* $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{Id})) = 2 = \dim(\mathrm{Im}(\varphi))$ *d'après le résultat de la question 4. Or* $\mathrm{Im}(\varphi) \subset \mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{Id})$ *donc* $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{Id})$.

Soit $\overrightarrow{u} \in \mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{Id})$. Montrons que $\overrightarrow{u} \in \mathrm{Im}(\varphi)$. Par définition de l'image, il suffit de trouver un vecteur $\overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^3$ tel que $\overrightarrow{u} = \varphi(\overrightarrow{w})$.

Analyse. On pose $\overrightarrow{u} = (a, b, c)$ et $\overrightarrow{w} = (x, y, z)$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{u} = \varphi(\overrightarrow{w}) &\iff \varphi\Big((x, y, z)\Big) = (a, b, c) \\
&\iff (x - 3y + 3z, 2y - z, 2y - z) = (a, b, c) \\
&\iff \begin{cases} x - 3y + 3z = a \\ \quad\quad 2y - z = b \\ \quad\quad 2y - z = c \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \boxed{1}x - 3y + 3z = a \\ \quad\quad \boxed{2}y - z = b \\ \quad\quad\quad\quad 0 = c - b \end{cases}.
\end{aligned}$$

On obtient un système linéaire homogène de rang 2 avec une équation auxiliaire et une inconnue auxiliaire. Or on a $\overrightarrow{u} \in \mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{Id})$ par hypothèse. D'où, par définition du noyau : $(\varphi - \mathrm{Id})(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}$, et par conséquent :

$$\begin{aligned}
(0, 0, 0) = (\varphi - \mathrm{Id})\Big((a, b, c)\Big) &= \varphi\Big((a, b, c)\Big) - \mathrm{Id}\Big((a, b, c)\Big) \\
&= (a - 3b + 3c, 2b - c, 2b - c) - (a, b, c) \quad \text{par définition de } \varphi \text{ et Id} \\
&= (-3b + 3c, b - c, b - c).
\end{aligned}$$

En particulier, on en déduit que $b - c = 0$. Ainsi, l'équation auxiliaire du système est compatible. Il y a donc une infinité de solutions.

Synthèse. On pose $\overrightarrow{w} = (x, y, z)$ où (x, y, z) est une solution du système étudié dans l'analyse (il en existe au moins une puisque le système admet une infinité de solutions). Alors, en remontant les équivalences des calculs effectués dans l'analyse, on obtient que $\overrightarrow{u} = \varphi(\overrightarrow{w})$. Par définition de l'image, on en déduit que $\overrightarrow{u} \in \mathrm{Im}(\varphi)$.

Une méthode plus rapide mais plus astucieuse consiste à rédiger seulement la synthèse en posant $\overrightarrow{w} = \varphi(\overrightarrow{u})$. *En effet, on a alors :*

$$\begin{aligned}
\varphi\Big(\overrightarrow{w}\Big) - \overrightarrow{u} = \varphi\Big(\varphi\Big(\overrightarrow{u}\Big)\Big) - \mathrm{Id}\Big(\overrightarrow{u}\Big) &= (\varphi \circ \varphi)\Big(\overrightarrow{u}\Big) - \mathrm{Id}\Big(\overrightarrow{u}\Big) \\
&= \varphi\Big(\overrightarrow{u}\Big) - \mathrm{Id}\Big(\overrightarrow{u}\Big) \quad \textit{d'après le résultat de la question 5(a)} \\
&= (\varphi - \mathrm{Id})\Big(\overrightarrow{u}\Big) = \overrightarrow{0} \quad \textit{car } \overrightarrow{u} \in \mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{Id}) \textit{ par hypothèse.}
\end{aligned}$$

Par conséquent, on a bien montré que $\overrightarrow{u} = \varphi(\overrightarrow{w}) \in \mathrm{Im}(\varphi)$.

Puisque ceci est vrai pour tout $\overrightarrow{u} \in \mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{Id})$, on vient de montrer l'inclusion $\mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{Id}) \subset \mathrm{Im}(\varphi)$. Finalement, d'après le second résultat de la question 5(c), on obtient par double inclusion que $\boxed{\mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{Id}) = \mathrm{Im}(\varphi)}$.

7. (a) *Déterminer une base $(\overrightarrow{e_1})$ de $\mathrm{Ker}(\varphi)$ et une base $(\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ de $\mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{Id})$.*

▶ À la question 3, on a obtenu que le vecteur $(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 1)$ forme une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$. On peut donc poser par exemple $\boxed{\overrightarrow{e_1} = (-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 1)}$. À la question 4, on a obtenu que les vecteurs $(1, 0, 0)$ et $(-3, 2, 2)$ forment une base de $\mathrm{Im}(\varphi)$. De plus, $\mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{Id}) = \mathrm{Im}(\varphi)$ d'après le résultat de la question précédente. On peut donc poser par exemple $\boxed{\overrightarrow{e_2} = (1, 0, 0)}$ et $\boxed{\overrightarrow{e_3} = (-3, 2, 2)}$.

Inutile de perdre du temps à refaire des calculs déjà faits précédemment. Pour être efficace, utilisez le plus possible les résultats des questions précédentes.

(b) *Montrer que $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ est une base de $\mathbb{R}^3$.*

▶ Calculons le rang de la famille $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{rang}(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}) &= \mathrm{rang}\Big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})\Big) \quad \text{en notant } \mathscr{B} \text{ la base canonique de } \mathbb{R}^3 \\
&= \mathrm{rang}\begin{pmatrix} \boxed{-\frac{3}{2}} & 1 & -3 \\ \frac{1}{2} & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow 3L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow 3L_3 + 2L_1 \end{matrix} = \mathrm{rang}\begin{pmatrix} \boxed{-\frac{3}{2}} & 1 & -3 \\ 0 & \boxed{1} & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\
&= \mathrm{rang}\begin{pmatrix} \boxed{-\frac{3}{2}} & 1 & -3 \\ 0 & \boxed{1} & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{-6} \end{pmatrix} = 3.
\end{aligned}$$

Ainsi $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ est une famille de trois vecteurs de rang égal à $3 = \dim(\mathbb{R}^3)$. On en déduit que $\boxed{(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3}$.

Exercice 3

Dans tout cet exercice, on fixe un entier $n \geqslant 2$ et on considère une variable aléatoire X à valeurs dans $X(\Omega) = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ dont la loi de probabilité est de la forme :

$$\forall k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\},\ \mathrm{P}(X = k) = \mu \binom{n}{k} \quad \textit{où } \mu \in \mathbb{R} \textit{ est une constante.}$$

1. *Déterminer la valeur de la constante μ.*

▶ Puisque les événements $(X = 0)$, $(X = 1)$, $(X = 2)$, …et $(X = n)$ forment un système complet d'événements, on a :

$$\begin{aligned}
1 = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{n} \mu \binom{n}{k} &= \mu \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} \quad \text{par linéarité de la sommme} \\
&= \mu(1 + 1)^n = \mu 2^n \quad \text{d'après la formule du binôme de Newton.}
\end{aligned}$$

On en déduit que $\boxed{\mu = 1/2^n}$.

2. *Montrer que l'espérance de X est égale à $n/2$.*

▶ On a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= \sum_{k=0}^{n} k\mathrm{P}(X=k) \quad \text{par définition de l'espérance}\\
&= \sum_{k=0}^{n} k\mu\binom{n}{k} = \frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} + 0 \quad \begin{array}{l}\text{par linéarité de la somme et}\\ \text{d'après le résultat de la question précédente}\end{array}\\
&= \frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{n} k\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1} \quad \text{d'après la formule du pion}\\
&= \frac{n}{2^n}\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1} \quad \text{par linéarité de la somme}\\
&= \frac{n}{2^n}\sum_{\ell=0}^{n-1}\binom{n-1}{\ell}1^{\ell}1^{n-1-\ell} \quad \text{en posant le décalage d'indice } \ell = k-1\\
&= \frac{n}{2^n}(1+1)^{n-1} = \frac{n}{2^n}2^{n-1} \quad \text{d'après la formule du binôme de Newton}\\
&= n2^{n-1-n} = n2^{-1} = \boxed{\frac{n}{2}}.
\end{aligned}$$

3. *Calculer la variance de X.*

▶ On a :

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}(X(X-1))\\
=&\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\mathrm{P}(X=k) \quad \text{d'après la formule de transfert}\\
=&\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\mu\binom{n}{k} = \frac{1}{2^n}\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} + 0 \quad \begin{array}{l}\text{par linéarité de la somme et}\\ \text{d'après le résultat de la question 1}\end{array}\\
=&\frac{1}{2^n}\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1} = \frac{1}{2^n}\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\frac{n}{k}\left(\frac{n-1}{k-1}\right)\binom{n-2}{k-2} \quad \text{d'après la formule du pion}\\
=&\frac{n(n-1)}{2^n}\sum_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2} \quad \text{par linéarité de la somme}\\
=&\frac{n(n-1)}{2^n}\sum_{\ell=0}^{n-2}\binom{n-2}{\ell}1^{\ell}1^{n-2-\ell} \quad \text{en posant le décalage d'indice } \ell = k-2\\
=&\frac{n(n-1)}{2^n}(1+1)^{n-2} = \frac{n}{2^n}2^{n-2} \quad \text{d'après la formule du binôme de Newton}\\
=&n(n-1)2^{n-2-n} = n(n-1)2^{-2} = \frac{n(n-1)}{4}.
\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\frac{n(n-1)}{4} = \mathrm{E}(X(X-1)) = \mathrm{E}(X^2 - X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X) \quad \text{d'après la formule de transfert}$$

On peut également justifier la dernière égalité par la linéarité de l'espérance.

donc :

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X^2) &= \frac{n(n-1)}{4} + \mathrm{E}(X) = \frac{n(n-1)}{4} + \frac{n}{2} \quad \text{d'après le résultat de la question précédente}\\
&= \frac{n(n-1)+2n}{4} = \frac{n^2+n}{4} = \frac{n(n+1)}{4}.
\end{aligned}$$

Enfin, on obtient d'après la formule de Koenig-Huygens :

$$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-(\mathrm{E}(X))^2=\frac{n(n+1)}{4}-\left(\frac{n}{2}\right)^2=\frac{n(n+1)-n^2}{4}=\boxed{\frac{n}{4}}.$$

Exercice 4

Le but de cet exercice est d'étudier la fonction suivante :

$$\Psi : x\mapsto \int_x^{2x}\frac{\arctan(t)}{t}\mathrm{d}t$$

1. *(Approximation numérique)*

   (a) *On fixe un réel x dans cette question et on suppose que $\Psi(x)$ est bien défini. Écrire $\Psi(x)$ comme la limite quand n tend vers $+\infty$ de sommes de Riemann.*

   ▶ On a d'après les sommes de Riemann :

$$\begin{aligned}\Psi(x)&=\int_x^{2x}\frac{\arctan(t)}{t}\mathrm{d}t=\int_x^{2x}f(t)\mathrm{d}t\quad\text{en posant } f:t\mapsto\frac{\arctan(t)}{t}\\&=\lim_{n\to+\infty}\frac{2x-x}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(x+\frac{2x-x}{n}k\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{x}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\arctan\left(x+\frac{x}{n}k\right)}{x+\frac{x}{n}k}\\&=\lim_{n\to+\infty}\frac{x}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\arctan\left(x(1+\frac{k}{n})\right)}{x(1+\frac{k}{n})}=\boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\arctan\left(x(1+\frac{k}{n})\right)}{1+\frac{k}{n}}}.\end{aligned}$$

   (b) ***[Informatique]*** *Écrire une fonction* `approxPsi(x,n)` *qui retourne la valeur de la n-ième somme de Riemann de la question précédente (on utilisera la fonction* `arctan` *de la bibliothèque* `numpy`*}.*

   ▶ Par exemple :

```
import numpy as np
def approxPsi(x,n):
    S = 0
    for k in range(n):
        S += np.arctan(x*(1+k/n))/(1+k/n)
    return (1/n)*S
```

2. *(Étude globale)*

   (a) *Justifier que Ψ est bien définie sur $\mathbb{R}^\star$ (on pourra introduire la fonction $f:t\mapsto\arctan(t)/t$).*

   ▶ Soit $x\in\mathbb{R}^\star$.

   1er cas : $x>0$. Alors $x<2x$. La fonction $f:t\mapsto\arctan(t)/t$ est continue sur $[x,2x]$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas (car $0\notin[x,2x]$). Par conséquent, $\int_x^{2x}f(t)\mathrm{d}t=\Psi(x)$ est bien défini.

   2e cas : $x<0$. Alors $2x<x$. La fonction $f:t\mapsto\arctan(t)/t$ est continue sur $[2x,x]$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas (car $0\notin[2x,x]$). Par conséquent, $-\int_{2x}^{x}f(t)\mathrm{d}t=\int_x^{2x}f(t)\mathrm{d}t=\Psi(x)$ est bien défini.

   Conclusion. Dans tous les cas, $\Psi(x)$ est bien défini. Puisque ceci est vrai pour tout $x\in\mathbb{R}^\star$, on en déduit que $\boxed{\Psi \text{ est bien définie sur } \mathbb{R}^\star}$.

   Attention à votre rédaction. La question n'est pas difficile mais il faut être très rigoureux dans vos justifications. Pensez à distinguer des cas en fonction de l'ordre des bornes du segment sur lequel f doit être continue.

(b) *À l'aide d'un changement de variable, montrer que Ψ est impaire.*

▶ On remarque que $\mathbb{R}^\star$ est symétrique par rapport à 0. Soit $x \in \mathbb{R}^\star$. On a :

$$\Psi(-x) = \int_{-x}^{-2x} \frac{\arctan(t)}{t}\mathrm{d}t.$$

On effectue le changement de variable $t = -s = \varphi(s)$ où $\varphi : s \mapsto -s$. Alors :

— La fonction φ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, en particulier φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[x, 2x]$ si $x > 0$ et sur $[2x, x]$ si $x < 0$.

— On a $\varphi(x) = -x$ et $\varphi(2x) = -2x$.

— On a $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\varphi(s)}{\mathrm{d}s} = \varphi'(s) = -1$ donc $\mathrm{d}t = -\mathrm{d}s$.

Rappelez précisément toutes les hypothèses du théorème de changement de variable lorsque vous l'appliquer.

Par conséquent :

$$\begin{aligned}\Psi(-x) &= \int_x^{2x} \frac{\arctan(-s)}{-s}(-\mathrm{d}s)\\ &= -\int_x^{2x} \frac{-\arctan(s)}{-s}\mathrm{d}s \quad \text{par linéarité de l'intégrale et car arctan est impaire}\\ &= -\int_x^{2x} \frac{\arctan(s)}{s}\mathrm{d}s = -\Psi(x) \quad \text{par définition de } \Psi.\end{aligned}$$

Puisque cette égalité est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}^\star$, on en déduit bien que $\boxed{\Psi \text{ est impaire sur } \mathbb{R}^\star}$.

(c) *Justifier que Ψ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^\star$.*

▶ La fonction $f : t \mapsto \arctan(t)/t$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ comme quotient de fonction fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ dont le dénominateur ne s'annule pas, en particulier f est continue sur $]0, +\infty[$. D'après le théorème fondamental de l'analyse, f admet donc des primitives sur $]0, +\infty[$. On pose F une primitive de f sur $]0, +\infty[$. Alors on a pour tout $x > 0$:

$$\Psi(x) = \int_x^{2x} f(t)\mathrm{d}t = \Big[F(t)\Big]_x^{2x} = F(2x) - F(x) \quad \text{car } [x, 2x] \subset]0, +\infty[.$$

Attention : les primitives ne sont bien définies que sur des intervalles ! Il est donc nécessaire de distinguer les cas $x > 0$ et $x < 0$ car les primitives de f sont différentes sur $]0, +\infty[$ et sur $]-\infty, 0[$.

Or F est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ car $F' = f$ (par définition d'une primitive) et $f \in \mathscr{C}^\infty(]0, +\infty[)$. Par conséquent, Ψ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ comme composée et différence de fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$.

En raisonnant de même, on a pour tout $x < 0$:

$$\Psi(x) = -\int_{2x}^{x} f(t)\mathrm{d}t = -\Big[G(t)\Big]_{2x}^{x} = -(G(x) - G(2x)) = G(2x) - G(x) \quad \text{car } [2x, x] \subset]-\infty, 0[$$

où G est une primitive de f sur $]-\infty, 0[$. On en déduit que Ψ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-\infty, 0[$ comme composée et différence de fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$.

On peut aussi (plus rapidement) utiliser le résultat de la question précédente :

$$\forall x < 0, \quad \Psi(x) = -\Psi(-x)$$

donc $\Psi \in \mathscr{C}^\infty(]-\infty, 0[)$ comme produit et composée de fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ car $-x \in]0, +\infty[$ si $x < 0$ et $\Psi \in \mathscr{C}^\infty(]0, \infty[)$.

Finalement, on a bien montré que $\boxed{\Psi \text{ est de classe } \mathscr{C}^\infty \text{ sur }]-\infty,0[\cup]0,+\infty[=\mathbb{R}^\star}$.

(d) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^\star$:

$$\Psi'(x) = \frac{1}{x}\Big(\arctan(2x) - \arctan(x)\Big)$$

puis en déduire les variations de Ψ sur $\mathbb{R}^\star$.

▶ Soit $x > 0$. À la question précédente, on a montré que :

$$\Psi(x) = F(2x) - F(x) \quad \text{où } F \text{ est une primitive de } f : t \mapsto \arctan(t)/t \text{ sur }]0,+\infty[.$$

Par conséquent :

$$\Psi'(x) = 2F'(2x) - F'(x) = 2f(2x) - f(x) = 2\frac{\arctan(2x)}{2x} - \frac{\arctan(x)}{x} = \frac{\arctan(2x) - \arctan(x)}{x}.$$

De même, on a pour $x < 0$ (avec G une primitive de f sur $]-\infty,0[$) :

$$\Psi'(x) = 2G'(2x) - G'(x) = 2f(2x) - f(x) = \frac{\arctan(2x) - \arctan(x)}{x}.$$

Finalement, on a bien dans tous les cas :

$$\forall x \in \mathbb{R}^\star, \quad \boxed{\Psi'(x) = \frac{1}{x}\Big(\arctan(2x) - \arctan(x)\Big)}.$$

On a pour $x > 0$:

$$x < 2x \quad \text{donc} \quad \arctan(x) < \arctan(2x) \quad \text{car arctan est strictement croissante}$$

par conséquent :

$$\Psi'(x) = \underbrace{\frac{1}{x}}_{>0}\Big(\underbrace{\arctan(2x) - \arctan(x)}_{>0}\Big) > 0.$$

De même, pour $x < 0$:

$$\Psi'(x) = \underbrace{\frac{1}{x}}_{<0}\Big(\underbrace{\arctan(2x) - \arctan(x)}_{<0}\Big) > 0.$$

D'après le principe de Lagrange, on en déduit que $\boxed{\Psi \text{ est strictement croissante sur }]-\infty,0[\text{ et sur }]0,+\infty[}$.

Attention : $\mathbb{R}^\star$ n'est pas un intervalle ! Le principe de Lagrange ne permet donc pas d'affirmer que Ψ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^\star$ (ce qui est pourtant vrai comme on le verra dans la suite du sujet).

(e) Montrer que pour tout $x > 0$:

$$\ln(2)\arctan(x) \leqslant \Psi(x) \leqslant \ln(2)\arctan(2x).$$

▶ Soit $x > 0$. On a :

$$\Psi(x) = \int_x^{2x} \frac{\arctan(t)}{t}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad x < 2x.$$

Or on a pour tout $t \in [x, 2x]$:

$$\begin{array}{lccccccl}
 & x & \leqslant & t & \leqslant & 2x & & \\
\text{donc} & \arctan(x) & \leqslant & \arctan(t) & \leqslant & \arctan(2x) & & \text{car arctan est croissante} \\
\text{donc} & \dfrac{\arctan(x)}{t} & \leqslant & \dfrac{\arctan(t)}{t} & \leqslant & \dfrac{\arctan(2x)}{t} & & \text{car } t > 0 \text{ (puisque } t \geqslant x > 0) \\
\text{donc} & \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\arctan(x)}{t}\,\mathrm{d}t & \leqslant & \underbrace{\displaystyle\int_x^{2x} \frac{\arctan(t)}{t}\,\mathrm{d}t}_{=\Psi(x)} & \leqslant & \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\arctan(2x)}{t}\,\mathrm{d}t & & \text{par croissance de l'intégrale sur } [x, 2x].
\end{array}$$

Attention : l'hypothèse $x < 2x$ (équivalente à $x > 0$) est nécessaire ici pour pouvoir utiliser la croissance de l'intégrale. Le résultat est évidemment faux si $x < 0$ car dans ce cas $\ln(2)\arctan(x) > \ln(2)\arctan(2x)$.

De plus, on a :

$$\begin{aligned}\int_x^{2x} \frac{\arctan(x)}{t}\mathrm{d}t &= \arctan(x)\int_x^{2x}\frac{1}{t}\mathrm{d}t \quad \text{par linéarité de l'intégrale}\\ &= \arctan(x)\Big[\ln|t|\Big]_x^{2x} = \arctan(x)\Big(\ln|2x| - \ln|x|\Big)\\ &= \arctan(x)\Big(\ln(2x) - \ln(x)\Big) \quad \text{car } x > 0\\ &= \arctan(x)\ln\left(\frac{2x}{x}\right) = \arctan(x)\ln(2)\end{aligned}$$

et de même :

$$\int_x^{2x}\frac{\arctan(2x)}{t}\mathrm{d}t = \arctan(2x)\int_x^{2x}\frac{1}{t}\mathrm{d}t = \arctan(2x)\ln(2).$$

Finalement, on bien montré pour tout $x > 0$ que :

$$\boxed{\ln(2)\arctan(x) \leqslant \Psi(x) \leqslant \ln(2)\arctan(2x)}.$$

3. *(Étude au voisinage de 0)*

   (a) *Montrer que Ψ se prolonge par continuité en 0.*

▶ On a :

$$\lim_{x\to 0}\ln(2)\arctan(x) = \lim_{x\to 0}\ln(2)\arctan(2x) = \ln(2)\arctan(0) = 0 \quad \text{car arctan est continue.}$$

D'après le théorème de limite par encadrement, on déduit du résultat de la question précédente que :

$$\lim_{x\to 0^+}\Psi(x) = 0.$$

Attention : ce n'est pas fini ! Puisque le résultat de la question précédente est vrai seulement pour $x > 0$, il faut également étudier la limite de $\Psi(x)$ quand x tend vers 0^-.

Puisque Ψ est impaire d'après le résultat de la question 2(b), on a également :

$$\lim_{x\to 0^-}\Psi(x) = \lim_{x\to 0^-} -\Psi(-x) = -\lim_{X\to 0^+}\Psi(X) = -0 = 0 \quad \text{en posant } X = -x.$$

Ainsi $\lim_{x\to 0^+}\Psi(x) = \lim_{x\to 0^-}\Psi(x) = 0$ donc $\boxed{\Psi \text{ se prolonge par continuité en 0 en posant}}$ $\boxed{\Psi(0) = 0}$.

   (b) *Avec la méthode de votre choix, calculez le développement limité à l'ordre trois de arctan en 0.*

▶ On a :

$$\frac{1}{1+h} = 1 - h + o_{h\to 0}(h)$$

donc :

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + o_{x\to 0}(x^2) \quad \text{en posant } h = x^2 \text{ car } \lim_{x\to 0} h = \lim_{x\to 0} x^2 = 0.$$

On reconnait la dérivée de la fonction arctan. Donc en primitivant ce développement limité, on obtient :

$$\arctan(x) = \arctan(0) + x - \frac{x^3}{3} + o_{x\to 0}(x^3) = \boxed{x - \frac{x^3}{3} + o_{x\to 0}(x^3)} \quad \text{car } \arctan(0) = 0.$$

N'oubliez pas le coefficient constant quand vous primitivez un DL !!

On peut aussi utiliser la formule de Taylor-Young :

$$\arctan(x) = \arctan(0) + \arctan'(0)x + \frac{\arctan''(0)}{2}x^2 + \frac{\arctan'''(0)}{6}x^3 + o_{x\to 0}(x^3)$$

mais cela conduit à des calculs de dérivées beaucoup plus longs :

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2},\ \arctan''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \text{ et } \arctan'''(x) = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}.$$

(c) *Déterminer un développement limité à l'ordre deux de Ψ' en 0.*

▶ On a d'après les résultats de la question 2(d) et de la question précédente :

$$\begin{aligned}\Psi'(x) &= \frac{1}{x}\Big(\arctan(2x) - \arctan(x)\Big)\\ &= \frac{1}{x}\left(\left(2x - \frac{(2x)^3}{3} + o_{x\to 0}(x^3)\right) - \left(x - \frac{x^3}{3} + o_{x\to 0}(x^3)\right)\right)\\ &= \frac{1}{x}\left(x - \frac{7}{3}x^3 + o_{x\to 0}(x^3)\right) = \boxed{1 - \frac{7}{3}x^2 + o_{x\to 0}(x^2)}.\end{aligned}$$

(d) *En déduire un développement limité de Ψ en 0. Quel est l'ordre de ce développement limité ?*

▶ En primitivant le développement limité obtenu à la question précédente, on obtient :

$$\Psi(x) = \Psi(0) + x - \frac{7}{9}x^3 + o_{x\to 0}(x^3) = \boxed{x - \frac{7}{9}x^3 + o_{x\to 0}(x^3)}$$

car $\Psi(0) = 0$ d'après le résultat de la question 3(a).

N'oubliez pas le coefficient constant quand vous primitivez un DL !!

Or la fonction Ψ est impaire d'après le résultat de la question 2(b) donc tous les coefficients d'ordre pair de son développement limité sont nuls. Ce développement limité est donc même $\boxed{\text{d'ordre quatre}}$:

$$\Psi(x) = x - \frac{7}{9}x^3 + 0x^4 + o_{x\to 0}(x^4) = x - \frac{7}{9}x^3 + o_{x\to 0}(x^4).$$

(e) *À l'aide des résultats précédents, discuter de la dérivabilité sur $\mathbb{R}$ du prolongement continu de Ψ, de la tangente en 0 à sa courbe représentative et de leur position relative au voisinage de 0.*

▶ À la question précédente, on a obtenu un développement limité à l'ordre quatre de Ψ en 0. En particulier, Ψ admet un développement limité à l'ordre un en 0 donc le prolongement continu de Ψ est dérivable en 0. Puisque Ψ est dérivable sur $\mathbb{R}^\star$ d'après le résultat de la question 2(c), on en déduit que $\boxed{\text{le prolongement continu de } \Psi \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}}$. De plus, on a d'après le résultat de la question précédente :

$$\Psi(x) - x \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{7}{9}x^3.$$

On en déduit que la tangente en 0 à la courbe représentative du prolongement continu de Ψ admet pour équation $\boxed{y = x}$, que $\boxed{\text{la courbe est au-dessus de cette tangente dans un voisinage à gauche de 0 et en-dessous dans un voisinage à droite de 0}}$.

4. *(Étude au voisinage de $+\infty$)*

(a) *Déterminer la limite de Ψ en $+\infty$ et en déduire le comportement asymptotique (asymptote ou branche parabolique) de la courbe représentative de Ψ au voisinage de $+\infty$.*

▶ On a :

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(2)\arctan(x) = \lim_{x\to+\infty} \ln(2)\arctan(2x) = \ln(2)\frac{\pi}{2}.$$

D'après le théorème de la limite par encadrement, on déduit du résultat de la question 2(e) que :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \Psi(x) = \frac{\pi\ln(2)}{2}}.$$

Ainsi, la courbe représentative de Ψ admet $\boxed{\text{une asymptote } +\infty \text{ d'équation } y = \pi\ln(2)/2}$ et n'admet pas de branche parabolique en $+\infty$ (car $\lim_{x\to+\infty} \Psi(x)/x = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} \Psi(x) - 0x = \pi\ln(2)/2$). Puisque Ψ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ d'après le résultat de la question 2(d), on en déduit que $\boxed{\text{la courbe est en-dessous de son asymptote au voisinage de } +\infty}$.

(b) *À l'aide des résultats précédents, justifier que le prolongement continu de Ψ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers un ensemble à déterminer et décrire la courbe représentative de sa bijection réciproque.*

▶ On a :

— Le prolongement continu de Ψ est continue sur $\mathbb{R}$ (par définition du prolongement continu).

— $\Psi' > 0$ sur $\mathbb{R}^\star$ d'après le résultat de la question 2(e). Donc Ψ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ d'après le principe de Lagrange.

> *Notez qu'il est inutile de préciser que $\Psi'(0) = 1 > 0$ pour appliquer le principe de Lagrange puisqu'il reste vrai même si on exclut un nombre fini de points de l'intervalle.*

— $\lim_{x\to+\infty} \Psi(x) = \pi\ln(2)/2$ d'après le résultat de la question précédente, et en utilisant l'imparité de Ψ (démontrée à la question 2(b)) :

$$\lim_{x\to-\infty} \Psi(x) = \lim_{x\to-\infty} -\Psi(-x) = \lim_{X\to+\infty} -\Psi(X) = -\frac{\pi\ln(2)}{2} \quad \text{en posant } X = -x.$$

> *Rappelez précisément toutes les hypothèses du théorème de la bijection lorsque vous l'appliquer.*

D'après le théorème de la bijection, on en déduit que la fonction $\boxed{\Psi \text{ réalise une bijection de } \mathbb{R} \text{ vers }]-\pi\ln(2)/2, \pi\ln(2)/2[}$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\Psi(x)$	$-\frac{\pi\ln(2)}{2}$ $\nearrow$	0 $\nearrow$	$\frac{\pi\ln(2)}{2}$

On sait que la courbe représentative de la bijection réciproque $\Psi^{-1} :]-\pi\ln(2)/2, \pi\ln(2)/2[\to \mathbb{R}$ est $\boxed{\text{symétrique par rapport à la droite d'équation } y = x}$ à la courbe représentative de la fonction $\Psi : \mathbb{R} \to]-\pi\ln(2)/2, \pi\ln(2)/2[$.

x	$-\frac{\pi \ln(2)}{2}$		0		$\frac{\pi \ln(2)}{2}$
$\Psi^{-1}(x)$	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$ $\Vert$