Sujets et corrigés des DS de mathématiques et d'informatique

BCPST1A lycée Hoche 2019-2020

Sébastien Godillon

Table des matières

DS n$^{\text{o}}$ 1 de mathématiques

durée : 3 heures

Exercice 1

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2 - 5}{3 - x}$. Déterminer les ensembles suivants :

$$\mathscr{E}_1 = \Big\{ f(x) \mid x \in]4, 7[\Big\} \quad \text{et} \quad \mathscr{E}_2 = \Big\{ x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in]-1, 2] \Big\}.$$

Problème 1

On dit que $A \subset \mathbb{N}$ est une partie **ouverte** de $\mathbb{N}$ si la propriété suivante est vérifiée :

$$\exists p \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant p \implies n \in A. \qquad (\star)$$

1. Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que l'ensemble $N_k = \mathbb{N} \setminus \{k\}$ est une partie ouverte de $\mathbb{N}$.
2. (a) Écrire la négation de la propriété $(\star)$.
   (b) Montrer que l'ensemble $P = \{2k \mid k \in \mathbb{N}\}$ n'est pas une partie ouverte de $\mathbb{N}$.
3. Soient A_1 et A_2 deux parties ouvertes de $\mathbb{N}$.
   (a) Montrer que $A_1 \cap A_2$ est une partie ouverte de $\mathbb{N}$.
   (b) Montrer que $A_1 \cup A_2$ est une partie ouverte de $\mathbb{N}$.
4. Soit $A \subset \mathbb{N}$. Montrer que A est une partie ouverte de $\mathbb{N}$ si et seulement si son complémentaire $\mathbb{N} \setminus A$ contient un nombre fini d'éléments.

Si A est une partie ouverte de $\mathbb{N}$, on définit son **départ**, noté $\text{dep}(A)$, par le plus petit entier p pour lequel la propriété $(\star)$ est vérifiée, autrement dit :

$$\text{dep}(A) = \min \Big\{ p \in \mathbb{N} \,|\, \forall n \geqslant p,\ n \in A \Big\}.$$

5. Soit $k \in \mathbb{N}$. Déterminer $\text{dep}(N_k)$ où $N_k = \mathbb{N} \setminus \{k\}$.
6. Déterminer toutes les parties ouvertes de $\mathbb{N}$ dont le départ est égal à 3. On donnera la liste exhaustive de ces parties, sans justifier, en explicitant au moins les cinq premiers éléments de chaque partie.
7. Soit A une partie ouverte de $\mathbb{N}$.
   (a) Justifier que $\text{dep}(A) \in A$.
   (b) Montrer que $\text{dep}(A) - 1 \notin A$ (on pourra distinguer le cas où $\text{dep}(A) = 0$).
   (c) En déduire que si $A \neq \mathbb{N}$ alors $\text{dep}(A) = \max(\mathbb{N} \setminus A) + 1$.
8. Soient A_1 et A_2 deux parties ouvertes de $\mathbb{N}$.
   (a) Montrer que $\text{dep}(A_1 \cap A_2) = \max(\text{dep}(A_1), \text{dep}(A_2))$.
   (b) Montrer que $\text{dep}(A_1 \cup A_2) \leqslant \min(\text{dep}(A_1), \text{dep}(A_2))$.
   (c) Déterminer un exemple de parties $A_1 \subset \mathbb{N}$ et $A_2 \subset \mathbb{N}$ pour lequel l'inégalité de la question précédente est stricte. On explicitera au moins les cinq premiers éléments de ces deux parties.

Exercice 2

Résoudre les inéquations suivantes d'inconnue x réelle.

(I_1) $|3x^2+4x+1| \geqslant |x^2+x|$

(I_2) $x^{(x^3)} < x^{3x}$

(I_3) $\left\lfloor x+\sqrt{x-2} \right\rfloor = 3$

(I_4) $\sin(7x)+\sin(5x) \geqslant 0$

(I_5) $\dfrac{x+m}{2x+3} < 1$ où $m \in \mathbb{R}$ est un paramètre fixé.

Problème 2

On rappelle qu'on définit l'exponentielle d'un nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ par :

$$\exp(z) = e^{\mathrm{Re}(z)} e^{i\mathrm{Im}(z)} = e^{\mathrm{Re}(z)}\Big(\cos(\mathrm{Im}(z)) + i\sin(\mathrm{Im}(z))\Big).$$

1. Montrer que :
$$\forall (z,w) \in \mathbb{C}^2, \quad \exp(z+w) = \exp(z)\exp(w).$$
2. Montrer que :
$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \exp(z) \neq 0 \text{ et } \frac{1}{\exp(z)} = \exp(-z).$$
3. (a) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$: $\exp(z) = 1 \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ z = 2ik\pi$.

   (b) En déduire que pour tout $(z,w) \in \mathbb{C}^2$: $\exp(z) = \exp(w) \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ z = w + 2ik\pi$.
4. Montrer que $\{z \in \mathbb{C} \,|\, |\exp(z)| = 1\} = \{it \,|\, t \in \mathbb{R}\}$.

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on définit les nombres complexes suivants :

$$\gamma(z) = \frac{\exp(iz)+\exp(-iz)}{2} \quad \text{et} \quad \sigma(z) = \frac{\exp(iz)-\exp(-iz)}{2i}.$$

5. Que valent $\gamma(x)$ et $\sigma(x)$ si $x \in \mathbb{R}$?
6. Montrer que :
$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \gamma(z)^2 + \sigma(z)^2 = 1.$$
7. Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que $\gamma(\frac{\pi}{2} - z) = \sigma(z)$.
8. Soit $z \in \mathbb{C}$. Sans justifier, simplifier les expressions $\gamma(-z)$, $\sigma(-z)$, $\gamma(\frac{\pi}{2}-z)$, $\sigma(\frac{\pi}{2}-z)$, $\gamma(\pi-z)$, $\sigma(\pi-z)$, $\gamma(z+\frac{\pi}{2})$, $\sigma(z+\frac{\pi}{2})$, $\gamma(z+\pi)$, $\sigma(z+\pi)$, $\gamma(z+2\pi)$ et $\sigma(z+2\pi)$.
9. Montrer que :
$$\forall (z,w) \in \mathbb{C}^2, \quad \gamma(z+w) = \gamma(z)\gamma(w) - \sigma(z)\sigma(w) \text{ et } \sigma(z+w) = \gamma(z)\sigma(w) + \sigma(z)\gamma(w).$$
10. Résoudre les équations suivantes d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

    (E_1) $\gamma(z) = 2$

    (E_2) $\sigma(z) = 2$

Exercice 3

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par

$$u_0 = 4, \quad u_1 = 3 \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 0,\ u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n.$$

Montrer qu'il existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_n = (an+b)c^n$.

Corrigé du DS n° 1 de mathématiques

Exercice 1

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2-5}{3-x}$. Déterminer les ensembles suivants :

$$\mathscr{E}_1 = \Big\{ f(x) \mid x \in]4,7[\Big\} \quad \text{et} \quad \mathscr{E}_2 = \Big\{ x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in]-1,2] \Big\}.$$

▶ La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ comme quotient de fonctions polynomiales dont le dénominateur ne s'annule pas. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}, \quad f'(x) = \frac{2x(3-x) - (x^2-5) \times (-1)}{(3-x)^2} = \frac{-x^2+6x-5}{(3-x)^2}.$$

On reconnaît au numérateur un polynôme du second degré de discriminant $\Delta = (6)^2 - 4 \times (-1) \times (-5) = 16 > 0$. Donc le numérateur s'annule en $(-6+\sqrt{16})/(-2) = 1$ et en $(-6-\sqrt{16})/(-2) = 5$. De plus, il est strictement positif sur $]1,5[$ et strictement négatif sur $]-\infty,1[\cup]5,+\infty[$. Puisque $(3-x)^2 > 0$ pour tout $x \neq 3$, on en déduit le tableau des variations de f.

x	$-\infty$	$-1-2\sqrt{3}$	-1	1	2	$-1+2\sqrt{3}$	3	4	5	7	$+\infty$
$f'(x)$		$-$		0		$+$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$ ↘	2 ↘	-1 ↘	-2 ↗	-1 ↗	2 ↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$ ↗	-11 ↗	-10 ↘	-11 ↘	$-\infty$

car :

$$\begin{array}{l|l|l}
\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x-\frac{5}{x}}{\frac{3}{x}-1} = +\infty & f(1) = \dfrac{1^2-5}{3-1} = -2 & \displaystyle\lim_{x\to3^-} f(x) = \lim_{x\to3^-} \frac{x^2-5}{3-x} = +\infty \\
\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-\frac{5}{x}}{\frac{3}{x}-1} = -\infty & f(5) = \dfrac{5^2-5}{3-5} = -10 & \displaystyle\lim_{x\to3^+} f(x) = \lim_{x\to3^+} \frac{x^2-5}{3-x} = -\infty
\end{array}$$

On a $f(4) = \dfrac{4^2-5}{3-4} = -11$ et $f(7) = \dfrac{7^2-5}{3-2} = -11$. On déduit du tableau des variations de f que :

$$\mathscr{E}_1 = \Big\{ f(x) \mid x \in]4,7[\Big\} = \boxed{]-11,-10]}.$$

Soyez précis avec les bornes des intervalles : -11 est exclus car $]4,7[$ est un intervalle ouvert mais -10 est inclus car $5 \in]4,7[$.

Pour déterminer $\mathscr{E}_2$, on résout les deux équations suivantes :

- $f(x) = -1 \iff \dfrac{x^2-5}{3-x} = -1 \iff x^2-5 = -(3-x) \iff x^2-x-2=0$
  On obtient une équation du second degré de discriminant $\Delta = (-1)^2 - 4\times 1\times(-2) = 9 > 0$ qui admet pour solutions $(1+\sqrt{9})/2 = (1+3)/2 = 2$ et $(1-3)/2 = -1$.
- $f(x) = 2 \iff \dfrac{x^2-5}{3-x} = 2 \iff x^2-5 = 2(3-x) \iff x^2+2x-11=0$
  On obtient une équation du second degré de discriminant $\Delta = 2^2 - 4\times 1\times(-11) = 48 > 0$ qui admet pour solutions $(-2+\sqrt{48})/2 = (-2+4\sqrt{3})/2 = -1+2\sqrt{3}$ et $(-2-4\sqrt{3})/2 = -1-2\sqrt{3}$.

De plus, $\frac{9}{4} < 3 < 4$ donc $\frac{3}{2} < \sqrt{3} < 2$ (car la fonction racine carrée est strictement croissante), par conséquent $-1+2\sqrt{3} \in]2,3[$ et $-1-2\sqrt{3} \in]-5,-4[$.

Il faut savoir encadrer rapidement des expressions avec des racines afin de les placer correctement dans un tableau des signes ou des variations. Ici, on a besoin de justifier que :

$$-1-2\sqrt{3} < -1 < 1 < 2 < -1+2\sqrt{3} < 3$$

On déduit du tableau des variations de f que :

$$\mathscr{E}_2 = \Big\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in]-1,2]\Big\} = \boxed{\Big[-1-2\sqrt{3}, -1\Big[\cup \Big]2, -1+2\sqrt{3}\Big]}.$$

Problème 1

*On dit que $A \subset \mathbb{N}$ est une partie **ouverte** de $\mathbb{N}$ si la propriété suivante est vérifiée :*

$$\exists p \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant p \implies n \in A. \qquad (\star)$$

1. *Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que l'ensemble $N_k = \mathbb{N}\setminus\{k\}$ est une partie ouverte de $\mathbb{N}$.*

   ► Montrons qu'il existe un entier naturel p tel que pour tout entier naturel n, si n est supérieur ou égal à p alors n appartient à l'ensemble N_k. On raisonne par analyse-synthèse.
   Analyse. On a :

   $$N_k = \mathbb{N}\setminus\{k\} = \{0,1,2,\ldots,k-2,k-1,k+1,k+2,k+3,\ldots\}.$$

   En particulier, tous les entiers à partir de $k+1$ appartiennent à N_k.
   Synthèse. On pose $p = k+1$. Alors on a par définition de N_k :

   $$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant k+1 \implies n \in N_k.$$

   Ainsi, la propriété $(\star)$ est vérifiée et donc $\boxed{N_k \text{ est une partie ouverte de } \mathbb{N}}$.

   Il n'est pas nécessaire de rédiger l'analyse. Par contre, il faut faire apparaître explicitement l'entier $p \in \mathbb{N}$ trouvé pour vérifier la propriété $(\star)$. Ici, n'importe quel entier supérieur ou égal à $k+1$ convient pour valeur de p.

2. (a) *Écrire la négation de la propriété $(\star)$.*

   ► La négation de la propriété $(\star)$ est :

   $$\boxed{\forall p \in \mathbb{N},\ \exists n \in \mathbb{N},\ n \geqslant p \text{ et } n \notin A}.$$

   (b) *Montrer que l'ensemble $P = \{2k \,|\, k \in \mathbb{N}\}$ n'est pas une partie ouverte de $\mathbb{N}$.*

   ► Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrons qu'il existe un entier naturel n tel que n est supérieur ou égal à p et n n'appartient pas à P. On raisonne par analyse-synthèse.
   Analyse. On a :

   $$P = \{2k \,|\, k \in \mathbb{N}\} = \{0,2,4,6,8,\ldots\}.$$

   Ainsi, P est l'ensemble des entiers pairs. En particulier :

— si p est impair, alors p n'appartient pas à P,

— si p est pair, alors $p+1$ est pair et n'appartient pas à P.

Synthèse. On pose $n = p$ si p est impair et $n = p+1$ si p est pair. Dans tous les cas, on a $n \geqslant p$ et n impair, donc $n \notin P$ par définition de P. Ainsi, la négation de la propriété $(\star)$ est vérifiée et donc $\boxed{P \text{ n'est pas une partie ouverte de } \mathbb{N}}$.

3. *Soient A_1 et A_2 deux parties ouvertes de $\mathbb{N}$.*

(a) *Montrer que $A_1 \cap A_2$ est une partie ouverte de $\mathbb{N}$.*

▶ Puisque A_1 et A_2 sont deux parties ouvertes de $\mathbb{N}$, la propriété $(\star)$ est vérifiée pour ces deux ensembles. On sait donc qu'il existe $p_1 \in \mathbb{N}$ et $p_2 \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} n \geqslant p_1 \implies n \in A_1, \\ n \geqslant p_2 \implies n \in A_2. \end{cases}$$

Attention aux notations : en général, p_1 et p_2 sont deux entiers différents.

Montrons qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; n \geqslant p \implies n \in A_1 \cap A_2.$$

Synthèse. On pose $p = \max(p_1, p_2)$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $n \geqslant p$. Puisque $p = \max(p_1, p_2)$, on a $n \geqslant p_1$ et $n \geqslant p_2$. Par définition de p_1 et p_2, on en déduit que $n \in A_1$ et $n \in A_2$. Par conséquent, $n \in A_1 \cap A_2$. Ainsi, on a montré l'implication $n \geqslant p \implies n \in A_1 \cap A_2$. Puisque cette implication est vraie pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Finalement, on a démontré que :

$$\exists p \in \mathbb{N}, \; \forall n \in \mathbb{N}, \; n \geqslant p \implies n \in A_1 \cap A_2.$$

Ainsi, la propriété $(\star)$ est vérifiée et donc $\boxed{A_1 \cap A_2 \text{ est une partie ouverte de } \mathbb{N}}$.

(b) *Montrer que $A_1 \cup A_2$ est une partie ouverte de $\mathbb{N}$.*

▶ On raisonne comme à la question précédente. On sait qu'il existe $p_1 \in \mathbb{N}$ et $p_2 \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} n \geqslant p_1 \implies n \in A_1, \\ n \geqslant p_2 \implies n \in A_2. \end{cases}$$

Synthèse. On pose $p = \min(p_1, p_2)$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $n \geqslant p$. Puisque $p = \min(p_1, p_2)$, on a $n \geqslant p_1$ ou $n \geqslant p_2$, donc $n \in A_1 \cup A_2$. Ainsi, la propriété $(\star)$ est vérifiée pour $A_1 \cup A_2$ et donc $\boxed{A_1 \cup A_2 \text{ est une partie ouverte de } \mathbb{N}}$.

Inutile de détailler la rédaction autant qu'à la question précédente. Le plus important est d'indiquer les principales différences dans le raisonnement, notamment la valeur de l'entier p.

4. *Soit $A \subset \mathbb{N}$. Montrer que A est une partie ouverte de $\mathbb{N}$ si et seulement si son complémentaire $\mathbb{N} \setminus A$ contient un nombre fini d'éléments.*

▶ On raisonne par double implication.

1re implication. On suppose que A est une partie ouverte de $\mathbb{N}$. On sait donc qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; n \geqslant p \implies n \in A.$$

D'après le principe de contraposition, on a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; n \notin A \implies n < p.$$

Autrement dit, tous les éléments du complémentaire de A sont strictement inférieurs à p. On en déduit que $\mathbb{N} \setminus A \subset [\![0, p-1]\!]$, donc que $\mathbb{N} \setminus A$ contient au maximum p éléments. En particulier, $\mathbb{N} \setminus A$ contient un nombre fini d'éléments.

2e implication. On suppose que $\mathbb{N} \setminus A$ contient un nombre fini d'éléments. Montrons qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; n \geqslant p \implies n \in \mathbb{N} \setminus A.$$

On raisonne par analyse-synthèse.

— *Analyse*. On note $m \in \mathbb{N}$ le nombre d'éléments de $\mathbb{N} \setminus A$ et $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_m$ les éléments de $\mathbb{N} \setminus A$ classés dans l'ordre croissant. Alors :

$$A = \mathbb{N} \setminus \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m\}.$$

En particulier, tous les entiers à partir de $a_m + 1$ appartiennent à A.

— *Synthèse*. On pose $p = a_m + 1$ où $a_m = \max(\mathbb{N} \setminus A)$ est le plus grand élément du complémentaire de A. Alors on a par définition de a_m :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant a_m + 1 \implies n \in A.$$

Ainsi, la propriété $(\star)$ est vérifiée pour A et donc A est une partie ouverte de $\mathbb{N}$.

Conclusion. Par double implication, on a bien montré que $\boxed{A \text{ est une partie ouverte de } \mathbb{N} \text{ si et}}$ $\boxed{\text{seulement s}}$

Les questions précédentes sont plus rapides à prouver à l'aide de cette caractérisation des parties ouvertes de $\mathbb{N}$. Par exemple, si $\mathbb{N} \setminus A_1$ et $\mathbb{N} \setminus A_2$ sont des ensembles finis, alors il en est de même pour :

$$(\mathbb{N} \setminus A_1) \cup (\mathbb{N} \setminus A_2) = \mathbb{N} \setminus (A_1 \cap A_2) \quad \text{et} \quad (\mathbb{N} \setminus A_1) \cap (\mathbb{N} \setminus A_2) = \mathbb{N} \setminus (A_1 \cup A_2)$$

d'après les lois de De Morgan.

*Si A est une partie ouverte de $\mathbb{N}$, on définit son **départ**, noté $\mathrm{dep}(A)$, par le plus petit entier p pour lequel la propriété $(\star)$ est vérifiée, autrement dit :*

$$\mathrm{dep}(A) = \min \Big\{ p \in \mathbb{N} \,|\, \forall n \geqslant p,\ n \in A \Big\}.$$

5. *Soit $k \in \mathbb{N}$. Déterminer $\mathrm{dep}(N_k)$ où $N_k = \mathbb{N} \setminus \{k\}$.*

▶ Par définition de N_k, on a :

$$\Big\{ p \in \mathbb{N} \,|\, \forall n \geqslant p,\ n \in N_k \Big\} = \{k+1, k+2, k+3, \ldots\}.$$

Ainsi, le départ de N_k vaut $k+1$:

$$\boxed{\mathrm{dep}(N_k) = k+1}.$$

6. *Déterminer toutes les parties ouvertes de $\mathbb{N}$ dont le départ est égal à 3. On donnera la liste exhaustive de ces parties, sans justifier, en explicitant au moins les cinq premiers éléments de chaque partie.*

▶ Les parties ouvertes de $\mathbb{N}$ dont le départ est égal à 3 sont :

$$\boxed{\begin{array}{l} \{0,1,3,4,5,\ldots\} = \mathbb{N} \setminus \{2\} = N_2 \\ \{1,3,4,5,6,\ldots\} = \mathbb{N} \setminus \{0,2\} \\ \{0,3,4,5,6,\ldots\} = \mathbb{N} \setminus \{1,2\} \\ \{3,4,5,6,7,\ldots\} = \mathbb{N} \setminus \{0,1,2\} \end{array}}.$$

7. *Soit A une partie ouverte de $\mathbb{N}$.*

(a) *Justifier que $\mathrm{dep}(A) \in A$.*

▶ Par définition du plus petit élément, $\mathrm{dep}(A) = \min\{p \in \mathbb{N} \,|\, \forall n \geqslant p,\ n \in A\}$ est un élément de l'ensemble $\{p \in \mathbb{N} \,|\, \forall n \geqslant p,\ n \in A\}$. Donc :

$$\forall n \geqslant \mathrm{dep}(A),\ n \in A.$$

En particulier, pour $n = \mathrm{dep}(A)$ on obtient que $\boxed{\mathrm{dep}(A) \in A}$.

(b) *Montrer que* $\mathrm{dep}(A) - 1 \notin A$ *(on pourra distinguer le cas où* $\mathrm{dep}(A) = 0$*).*

▶ On raisonne par disjonction de cas.

1^{er} cas : $\mathrm{dep}(A) = 0$. Alors $\mathrm{dep}(A) - 1 = -1 \notin A$ car $-1 \notin \mathbb{N}$ et $A \subset \mathbb{N}$.

2^e cas : $\mathrm{dep}(A) \neq 0$ donc $\mathrm{dep}(A) \geqslant 1$ et $\mathrm{dep}(A) - 1 \in \mathbb{N}$. Par définition du plus petit élément (voir le raisonnement de la question précédente), on sait que :

$$\forall n \geqslant \mathrm{dep}(A),\ n \in A.$$

On raisonne par l'absurde en supposant que $\mathrm{dep}(A) - 1 \in A$. Alors :

$$\forall n \geqslant \mathrm{dep}(A) - 1,\ n \in A.$$

Ainsi, $\mathrm{dep}(A) - 1$ est un élément de l'ensemble $\{p \in \mathbb{N} \,|\, \forall n \geqslant p,\ n \in A\}$. Or le plus petit élément de cet ensemble est $\min\{p \in \mathbb{N} \,|\, \forall n \geqslant p,\ n \in A\} = \mathrm{dep}(A)$. Donc $\mathrm{dep}(A) - 1 \geqslant \mathrm{dep}(A)$ ce qui est absurde. On en déduit que $\mathrm{dep}(A) - 1 \notin A$.

Conclusion. Dans tous les cas, on a $\boxed{\mathrm{dep}(A) - 1 \notin A}$.

(c) *En déduire que si* $A \neq \mathbb{N}$ *alors* $\mathrm{dep}(A) = \max(\mathbb{N} \setminus A) + 1$.

▶ On suppose que $A \neq \mathbb{N}$ donc $\mathrm{dep}(A) \neq 0$ (car si $\mathrm{dep}(A) = 0$ alors $A = \mathbb{N}$ puisque tous les entiers à partir de $\mathrm{dep}(A)$ appartiennent à A). On en déduit que $\mathrm{dep}(A) - 1 \in \mathbb{N} \setminus A$ d'après le résultat de la question précédente. Montrons que $\mathrm{dep}(A) - 1$ est le plus grand élément de $\mathbb{N} \setminus A$. Par définition du départ de A, on sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant \mathrm{dep}(A) \implies n \in A.$$

D'après le principe de contraposition, on a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \notin A \implies n < \mathrm{dep}(A).$$

Autrement dit, tous les éléments du complémentaire de A, c'est-à-dire de $\mathbb{N} \setminus A$, sont strictement inférieurs à $\mathrm{dep}(A)$, donc inférieurs ou égaux à $\mathrm{dep}(A) - 1$. On en déduit bien que $\mathrm{dep}(A) - 1$ est le plus grand élément de $\mathbb{N} \setminus A$:

$$\max(\mathbb{N} \setminus A) = \mathrm{dep}(A) - 1 \quad \text{donc} \quad \boxed{\mathrm{dep}(A) = \max(\mathbb{N} \setminus A) + 1}.$$

8. *Soient* A_1 *et* A_2 *deux parties ouvertes de* $\mathbb{N}$.

(a) *Montrer que* $\mathrm{dep}(A_1 \cap A_2) = \max(\mathrm{dep}(A_1), \mathrm{dep}(A_2))$.

▶ En reprenant le raisonnement de la question 3(a), on a montré que la propriété $(\star)$ est vérifiée pour $A_1 \cap A_2$ en posant $p = \max(\mathrm{dep}(A_1), \mathrm{dep}(A_2))$. Par définition du départ de $A_1 \cap A_2$, il suffit donc de montrer que $p = \max(\mathrm{dep}(A_1), \mathrm{dep}(A_2))$ est le plus petit entier pour lequel la propriété $(\star)$ est vérifiée. On raisonne par l'absurde en supposant que ce n'est pas le cas, c'est-à-dire en supposant que $\mathrm{dep}(A_1 \cap A_2) < p$ donc que $p - 1 \in A_1 \cap A_2$ (puisque tous les entiers à partir de $\mathrm{dep}(A_1 \cap A_2)$ appartiennent à $A_1 \cap A_2$). On raisonne par disjonction de cas.

1^{er} cas : $\mathrm{dep}(A_1) \leqslant \mathrm{dep}(A_2)$ donc $p - 1 = \max(\mathrm{dep}(A_1), \mathrm{dep}(A_2)) - 1 = \mathrm{dep}(A_1) - 1$. D'après le résultat de la question 7(b), on en déduit que $p - 1 \notin A_1$ ce qui est absurde car on a supposé que $p - 1 \in A_1 \cap A_2$.

2^e cas : $\mathrm{dep}(A_2) \leqslant \mathrm{dep}(A_1)$. En raisonnant comme dans le 1^{er} cas, on a $p - 1 = \mathrm{dep}(A_2) - 1 \notin A_2$ d'après le résultat de la question 7(b), ce qui contredit l'hypothèse $p - 1 \in A_1 \cap A_2$.

Conclusion. Dans tous les cas, on obtient une absurdité. On en déduit que $p = \max(\mathrm{dep}(A_1), \mathrm{dep}(A_2))$ est le plus petit entier pour lequel la propriété $(\star)$ est vérifiée. D'où :

$$\boxed{\mathrm{dep}(A_1 \cap A_2) = \max(\mathrm{dep}(A_1), \mathrm{dep}(A_2))} \quad \text{par définition du départ de } A_1 \cap A_2.$$

(b) *Montrer que* $\mathrm{dep}(A_1 \cup A_2) \leqslant \min(\mathrm{dep}(A_1), \mathrm{dep}(A_2))$.

▶ En reprenant le raisonnement de la question 3(b), on a montré que la propriété ($\star$) est vérifiée pour $A_1 \cup A_2$ en posant $p = \max(\mathrm{dep}(A_1), \mathrm{dep}(A_2))$. Par définition du départ de $A_1 \cup A_2$, on en déduit que :

$$\boxed{\mathrm{dep}(A_1 \cup A_2) \leqslant \min(\mathrm{dep}(A_1), \mathrm{dep}(A_2))}.$$

(c) *Déterminer un exemple de parties* $A_1 \subset \mathbb{N}$ *et* $A_2 \subset \mathbb{N}$ *pour lequel l'inégalité de la question précédente est stricte. On explicitera au moins les cinq premiers éléments de ces deux parties.*

▶ On pose :

$$\boxed{\begin{array}{l} A_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\} = \mathbb{N} \setminus \{0\} = N_0 \\ A_2 = \{0, 2, 3, 4, 5, \dots\} = \mathbb{N} \setminus \{1\} = N_1 \end{array}}.$$

Alors $\mathrm{dep}(A_1) = \mathrm{dep}(N_0) = 1$ et $\mathrm{dep}(A_2) = \mathrm{dep}(N_1) = 2$ d'après le résultat de la question 5, donc $\min(\mathrm{dep}(A_1), \mathrm{dep}(A_2)) = \min(1, 2) = 1$. D'autre part, $A_1 \cup A_2 = (\mathbb{N} \setminus \{0\}) \cup (\mathbb{N} \setminus \{1\}) = \mathbb{N}$, donc $\mathrm{dep}(A_1 \cup A_2) = \mathrm{dep}(\mathbb{N}) = 0$. On a donc bien $\mathrm{dep}(A_1 \cup A_2) < \min(\mathrm{dep}(A_1), \mathrm{dep}(A_2))$ pour cet exemple.

Exercice 2

Résoudre les inéquations suivantes d'inconnue x réelle.

(I_1) $|3x^2 + 4x + 1| \geqslant |x^2 + x|$

▶ L'inéquation (I_1) est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$. À gauche de l'inéquation, on reconnaît un polynôme du second degré de discriminant $\Delta = 4^2 - 4 \times 3 \times 1 = 4 > 0$ qui admet pour racines $(-4 + \sqrt{4})/(2 \times 3) = -\frac{1}{3}$ et $(-4 - \sqrt{4})/(2 \times 3) = -1$. De même, on reconnaît à droite de l'inéquation un polynôme du second degré qui admet pour racines évidentes 0 et -1. On obtient donc le tableau des signes suivant :

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{3}$		0		$+\infty$
$3x^2 + 4x + 1$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$x^2 + x$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	

On raisonne par disjonction de cas.

- <u>1^er cas</u> : $x \in]-\infty, -1]$. Alors :

$$\begin{aligned} (I_1) &\iff 3x^2 + 4x + 1 \geqslant x^2 + x \\ &\iff 2x^2 + 3x + 1 \geqslant 0. \end{aligned}$$

On reconnaît un polynôme du second degré de discriminant $\Delta = 3^2 - 4 \times 2 \times 1 = 1 > 0$ qui admet pour racines $(-3 + \sqrt{1})/(2 \times 2) = -\frac{1}{2}$ et $(-3 - \sqrt{1})/(2 \times 2) = -1$. On a le tableau des signes suivant :

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{3}$		0		$+\infty$
$2x^2 + 3x + 1$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$		$+$	

On en déduit que (I_1) est toujours vérifiée dans le cas où $x \in]-\infty, -1]$.

- <u>2^e cas</u> : $x \in [-1, -\frac{1}{3}]$. Alors :

$$\begin{aligned} (I_1) &\iff -(3x^2 + 4x + 1) \geqslant -(x^2 + x) \\ &\iff 2x^2 + 3x + 1 \leqslant 0. \end{aligned}$$

En reprenant le tableau des signes obtenu dans le 1[er] cas, on en déduit que dans le cas où $x \in [-1, -\frac{1}{3}]$:
$$(I_1) \iff x \in \left[-1, -\frac{1}{2}\right].$$

- 3[e] cas : $x \in [-\frac{1}{3}, 0]$. Alors :
$$\begin{aligned}(I_1) &\iff 3x^2+4x+1 \geqslant -(x^2+x)\\ &\iff 4x^2+5x+1 \geqslant 0.\end{aligned}$$
On reconnaît un polynôme du second degré de discriminant $\Delta = 5^2 - 4 \times 4 \times 1 = 9 > 0$ qui admet pour racines $(-5+\sqrt{9})/(2\times 4) = -\frac{1}{4}$ et $(-5-\sqrt{9})/(2 \times 4) = -1$. On a le tableau des signes suivant :

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{3}$		$-\frac{1}{4}$		0		$+\infty$
$4x^2+5x+1$		$+$	0	$-$	⋮	$-$	0	$+$	⋮	$+$	

On en déduit que dans le cas où $x \in [-\frac{1}{3}, 0]$:
$$(I_1) \iff x \in \left[-\frac{1}{4}, 0\right].$$

- 4[e] cas : $x \in [0, +\infty[$. Alors :
$$\begin{aligned}(I_1) &\iff 3x^2+4x+1 \geqslant x^2+x\\ &\iff 2x^2+3x+1 \geqslant 0.\end{aligned}$$
En reprenant le tableau des signes obtenu dans le 1[er] cas, on en déduit que (I_1) est toujours vérifiée dans le cas où $x \in [0, +\infty[$.

- Conclusion. Finalement, l'ensemble des solutions de (I_1) est :
$$]-\infty, -1] \cup \left[-1, -\frac{1}{2}\right] \cup \left[-\frac{1}{4}, 0\right] \cup [0, +\infty[= \boxed{\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup \left[-\frac{1}{4}, +\infty\right[}.$$

Il est également possible de résoudre (I_1) en utilisant la croissance de la fonction carrée sur $[0, +\infty[$ pour se débarasser des valeurs absolues :
$$\begin{aligned}(I_1) &\iff \left(3x^2+4x+1\right)^2 \geqslant \left(x^2+x\right)^2\\ &\iff \left(3x^2+4x+1\right)^2 - \left(x^2+x\right)^2 \geqslant 0\\ &\iff \Big(\left(3x^2+4x+1\right) + \left(x^2+x\right)\Big)\Big(\left(3x^2+4x+1\right) - \left(x^2+x\right)\Big) \geqslant 0\\ &\iff \left(4x^2+5x+1\right)\left(2x^2+3x+1\right) \geqslant 0.\end{aligned}$$
Puis il suffit d'étudier le signe de $f : x \mapsto (4x^2+5x+1)(2x^2+3x+x)$.

(I_2) $x^{(x^3)} < x^{3x}$

► Puisque les exposants x^3 et $3x$ sont des nombres réels, on a d'après la définition des puissances :
$$x^{(x^3)} = \exp\left(x^3 \ln(x)\right) \quad \text{et} \quad x^{3x} = \exp\left(3x \ln(x)\right).$$
Ainsi l'inéquation (I_2) est bien définie seulement pour $x > 0$ et on a :
$$\begin{aligned}(I_2) &\iff \exp\left(x^3 \ln(x)\right) < \exp\left(3x\ln(x)\right)\\ &\iff x^3 \ln(x) < 3x \ln(x) \quad \text{car la fonction exp est strictement croissante}\\ &\iff \left(x^3 - 3x\right)\ln(x) < 0\\ &\iff x\left(x^2-3\right)\ln(x) < 0.\end{aligned}$$
On étudie le signe de la fonction $f : x \mapsto x(x^2-3)\ln(x) = x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})\ln(x)$ sur $]0, +\infty[$.

x	0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$x(x+\sqrt{3})$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-\sqrt{3}$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$\ln(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit que l'ensemble des solutions de (I_2) est $\boxed{]1,\sqrt{3}[}$.

(I_3) $\left\lfloor x+\sqrt{x-2}\right\rfloor = 3$

▶ L'équation (I_3) est bien définie seulement pour $x-2 \geqslant 0 \iff x \geqslant 2$. D'après la définition de la partie entière, on a :

$$(I_3) \iff 3 \leqslant x+\sqrt{x-2} < 4 \iff \Big(\underbrace{\sqrt{x-2} \geqslant 3-x}_{1^{\text{re}}\text{ inéquation}} \text{ et } \underbrace{\sqrt{x-2} < 4-x}_{2^{\text{e}}\text{ inéquation}}\Big).$$

Attention avant d'élever au carré pour simplifier la racine : il faut d'abord isoler la racine d'un côté de l'inéquation (sinon elle ne se simplifie pas) puis vérifier que l'autre côté de l'inéquation est positif pour pouvoir utiliser la croissance de la fonction carrée sur $[0,+\infty[$.

- 1^{re} inéquation. On a : $3-x \geqslant 0 \iff x \leqslant 3$. On raisonne par disjonction de cas.
  - *1^{er}cas* : $x \in [2,3]$. Alors :

$$\begin{aligned}\sqrt{x-2} \geqslant 3-x &\iff x-2 \geqslant (3-x)^2 \\ &\qquad \text{car la fonction carrée est strictement croissante sur } [0,+\infty[\\ &\iff x-2 \geqslant 9-6x+x^2 \\ &\iff x^2-7x+11 \leqslant 0.\end{aligned}$$

On reconnaît un polynôme du second degré de discriminant $\Delta = (-7)^2 - 4\times 1\times 11 = 5 > 0$ qui admet pour racines $(7+\sqrt{5})/2$ et $(7-\sqrt{5})/2$. De plus, $4<5<9$ donc $2<\sqrt{5}<3$ (car la fonction racine carrée est strictement croissante), par conséquent $(7+\sqrt{5})/2 \in]\frac{9}{2},5[$ et $(7-\sqrt{5})/2 \in]2,\frac{5}{2}[$. On a le tableau des signes suivant :

x	$-\infty$		2		$\frac{7-\sqrt{5}}{2}$		3		$\frac{7+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
$x^2-7x+11$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	

On en déduit que dans le cas où $x \in [2,3]$:

$$\sqrt{x-2} \geqslant 3-x \iff x \in \left[\tfrac{7-\sqrt{5}}{2},3\right].$$

  - *2^e cas* : $x \in [3,+\infty[$. Alors la 1^{re} inéquation est toujours vérifiée car $\sqrt{x-2} \geqslant 0 \geqslant 3-x$.
  - *Conclusion de la 1^{re} inéquation*. On en déduit que :

$$\sqrt{x-2} \geqslant 3-x \iff x \in \left[\tfrac{7-\sqrt{5}}{2},3\right] \cup [3,+\infty[= \boxed{\left[\tfrac{7-\sqrt{5}}{2},+\infty\right[}.$$

- 2^{e} inéquation. On a : $4-x \geqslant 0 \iff x \leqslant 4$. On raisonne par disjonction de cas.

— *1^er cas* : $x \in [2,4]$. Alors :

$$\begin{aligned}\sqrt{x-2} < 4-x &\iff x-2 < (4-x)^2 \\ &\quad \text{car la fonction carrée est strictement croissante sur } [0,+\infty[\\ &\iff x-2 < 16-8x+x^2 \\ &\iff x^2-9x+18 > 0.\end{aligned}$$

On reconnaît un polynôme du second degré de discriminant $\Delta = (-9)^2 - 4\times 1\times 18 = 9 > 0$ qui admet pour racines $(9+\sqrt{9})/2 = 6$ et $(9-\sqrt{9})/2 = 3$. On a le tableau des signes suivant :

x	$-\infty$		2		3		4		6		$+\infty$
$x^2-7x+11$		$+$	⋮	$+$	0	$-$	⋮	$-$	0	$+$	

On en déduit que dans le cas où $x \in [2,4]$:

$$\sqrt{x-2} < 4-x \iff x \in [2,3[\,.$$

— *2^e cas* : $x \in [4,+\infty[$. Alors la 2^e inéquation n'est jamais vérifiée car $\sqrt{x-2} \geqslant 0 \geqslant 4-x$.

— *Conclusion de la 2^e inéquation.* On en déduit que :

$$\sqrt{x-2} < 4-x \iff x \in [2,3[\cup\emptyset = \boxed{[2,3[}.$$

• <u>Conclusion</u>. On a vu dans le 1^er cas de la 1^re inéquation que $2 < (7-\sqrt{5})/2 < \frac{5}{2} < 3$. On en déduit que l'ensemble des solutions (I_3) est :

$$\left[\tfrac{7-\sqrt{5}}{2},+\infty\right[\cap [2,3[= \boxed{\left[\tfrac{7-\sqrt{5}}{2},3\right[}.$$

(I_4) $\sin(7x)+\sin(5x) \geqslant 0$

▶ L'inéquation (I_4) est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\sin(7x)+\sin(5x) &= \mathrm{Im}\left(e^{i7x}+e^{i5x}\right) \\ &= \mathrm{Im}\left(2\cos\left(\frac{7x-5x}{2}\right)e^{i\frac{7x+5x}{2}}\right) \quad \text{en factorisant par l'angle moitié} \\ &= \mathrm{Im}\Big(2\cos(x)\Big[\cos(6x)+i\sin(6x)\Big]\Big) \\ &= 2\cos(x)\sin(6x).\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$(I_4) \iff \Big(\cos(x) \geqslant 0 \text{ et } \sin(6x) \geqslant 0\Big) \text{ ou } \Big(\cos(x) \leqslant 0 \text{ et } \sin(6x) \leqslant 0\Big).$$

Or on a d'après le cercle trigonométrique :

$$\begin{aligned}\cos(x) \geqslant 0 &\iff x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi\right] \\ \text{et} \quad \sin(6x) \geqslant 0 &\iff 6x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\Big[0+2k\pi, \pi+2k\pi\Big] \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z},\ 2k\pi \leqslant 6x \leqslant \pi+2k\pi \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z},\ \frac{2k\pi}{6} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{6} \quad \text{car } 6>0 \\ &\iff x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left[\frac{2k\pi}{6}, \frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{6}\right].\end{aligned}$$

On obtient donc le tableau des signes suivant entre 0 et 2π :

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{2\pi}{3}$		$\frac{5\pi}{6}$		π		$\frac{7\pi}{6}$		$\frac{4\pi}{3}$		$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{3}$		$\frac{11\pi}{6}$		2π
$\cos(x)$		$+$		$+$		$+$	0	$-$		$-$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$\sin(6x)$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0

On en déduit que l'ensemble des solutions de (I_4) est :

$$\boxed{\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left(\begin{array}{c}\left[2k\pi, \frac{\pi}{6}+2k\pi\right] \cup \left[\frac{\pi}{3}+2k\pi, \frac{2\pi}{3}+2k\pi\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}+2k\pi, \pi+2k\pi\right] \\ \cup \left[\frac{7\pi}{6}+2k\pi, \frac{4\pi}{3}+2k\pi\right] \cup \left[\frac{5\pi}{3}+2k\pi, \frac{11\pi}{6}+2k\pi\right]\end{array}\right)}$$

Il faut savoir écrire ce type d'ensembles à l'aide d'une union infinie d'intervalles.

(I_5) $\dfrac{x+m}{2x+3} < 1$ *où $m \in \mathbb{R}$ est un paramètre fixé.*

▶ L'inéquation (I_5) est bien définie seulement pour $2x+3 \neq 0 \iff x \neq -\frac{3}{2}$. On a :

$$\begin{aligned}(I_5) &\iff \frac{x+m}{2x+3} - 1 < 0 \\ &\iff \frac{x+m-(2x+3)}{2x+3} < 0 \\ &\iff \frac{-x+(m-3)}{2x+3} < 0.\end{aligned}$$

On étudie le signe de la fonction $f : x \mapsto \frac{-x+(m-3)}{2x+3}$:

$$\begin{cases} -x+(m-3) \geqslant 0 \iff x \leqslant m-3, \\ 2x+3 \geqslant 0 \iff x \geqslant -\frac{3}{2}. \end{cases}$$

On raisonne par disjonction de cas pour dresser le tableau des signes de la fonction f.

- 1er cas : $m-3 < -\frac{3}{2} \iff m < \frac{3}{2}$. On obtient alors le tableau des signes suivant :

x	$-\infty$		$m-3$		$-\frac{3}{2}$		$+\infty$
$-x+(m-3)$		$+$	0	$-$		$-$	
$2x+3$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	

  On en déduit que dans le cas où $m < \frac{3}{2}$:

$$(I_5) \iff]-\infty, m-3[\cup]-\tfrac{3}{2}, +\infty[.$$

- 2e cas : $m-3 = -\frac{3}{2} \iff m = \frac{3}{2}$. Alors (I_5) est toujours vérifiée car :

$$\frac{-x+(m-3)}{2x+3} = \frac{-x-\frac{3}{2}}{2(x+\frac{3}{2})} = -\frac{1}{2} < 0.$$

- 3e cas : $m-3 > -\frac{3}{2} \iff m > \frac{3}{2}$. On obtient alors le tableau des signes suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$m-3$	$+\infty$
$-x+(m-3)$	$+$	$+$	0	$-$
$2x+3$	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	$-$	$\|$	$+$ 0	$-$

On en déduit que dans le cas où $m > \frac{3}{2}$:

$$(I_5) \iff]-\infty, -\tfrac{3}{2}[\cup]m-3, +\infty[.$$

- Conclusion. Finalement, l'ensemble des solutions de (I_5) est :

$$\boxed{\begin{cases}]-\infty, m-3[\cup]-\frac{3}{2}, +\infty[& \text{si } m < \frac{3}{2} \\ \mathbb{R}\setminus\{-\frac{3}{2}\} & \text{si } m = \frac{3}{2} \\ ]-\infty, -\frac{3}{2}[\cup]m-3, +\infty[& \text{si } m > \frac{3}{2} \end{cases}}.$$

Problème 2

On rappelle qu'on définit l'exponentielle d'un nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ par :

$$\exp(z) = e^{\mathrm{Re}(z)}e^{i\mathrm{Im}(z)} = e^{\mathrm{Re}(z)}\Big(\cos(\mathrm{Im}(z)) + i\sin(\mathrm{Im}(z))\Big).$$

1. *Montrer que :*

$$\forall (z,w) \in \mathbb{C}^2, \quad \exp(z+w) = \exp(z)\exp(w).$$

► Soit $(z,w) \in \mathbb{C}^2$. On a :

$$\begin{aligned} \exp(z+w) &= e^{\mathrm{Re}(z+w)}e^{i\mathrm{Im}(z+w)} \quad \text{par définition de l'exponentielle complexe} \\ &= e^{\mathrm{Re}(z)+\mathrm{Re}(w)}e^{i(\mathrm{Im}(z)+\mathrm{Im}(w))} \quad \text{car } z+w = (\mathrm{Re}(z)+\mathrm{Re}(w)) + i(\mathrm{Im}(z)+\mathrm{Im}(w)) \\ &= \left(e^{\mathrm{Re}(z)}e^{\mathrm{Re}(w)}\right)\left(e^{i\mathrm{Im}(z)}e^{i\mathrm{Im}(w)}\right) \quad \text{par propriété de l'exponentielle} \\ &= \left(e^{\mathrm{Re}(z)}e^{i\mathrm{Im}(z)}\right)\left(e^{\mathrm{Re}(w)}e^{i\mathrm{Im}(w)}\right) \quad \text{par associativité et commutativité du produit} \\ &= \exp(z)\exp(w) \quad \text{par défintion de l'exponentielle complexe.} \end{aligned}$$

Puisque ceci est vrai pour un couple $(z,w) \in \mathbb{C}^2$ fixé, c'est vrai pour tout couple $(z,w) \in \mathbb{C}^2$. Donc :

$$\boxed{\forall (z,w) \in \mathbb{C}^2, \quad \exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)}.$$

2. *Montrer que :*

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \exp(z) \neq 0 \textit{ et } \frac{1}{\exp(z)} = \exp(-z).$$

► Soit $z \in \mathbb{C}$. On a :

$$\begin{aligned} \exp(z)\exp(-z) &= \exp(z+(-z)) \quad \text{d'après le résultat de la question précédente} \\ &= \exp(0) \\ &= e^{\mathrm{Re}(0)}e^{i\mathrm{Im}(0)} \quad \text{par définition de l'exponentielle complexe} \\ &= e^0e^{i0} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Par conséquent, si on suppose que $\exp(z) = 0$ alors $1 = \exp(z)\exp(-z) = 0\exp(-z) = 0$ ce qui est absurde. On en déduit que $\exp(z) \neq 0$.

On peut aussi remarquer que :

$$\begin{aligned} |\exp(z)| &= |e^{\mathrm{Re}(z)} e^{i\mathrm{Im}(z)}| \quad \textit{par définition de l'exponentielle complexe} \\ &= e^{\mathrm{Re}(z)} \quad \textit{par définition du module} \\ &> 0 \quad \textit{car l'exponentielle réelle est strictement positive.} \end{aligned}$$

Puisque $|\exp(z)| \neq 0$*, on en déduit que* $\exp(z) \neq 0$*.*

Puis on obtient en divisant chaque membre de l'égalité précédente par $\exp(z) \neq 0$:

$$\exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}.$$

Puisque ceci est vrai pour un nombre $z \in \mathbb{C}$ fixé, c'est vrai pour tout nombre $z \in \mathbb{C}$. Donc :

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{C}, \quad \exp(z) \neq 0 \text{ et } \frac{1}{\exp(z)} = \exp(-z)}.$$

3. (a) *Montrer que pour tout* $z \in \mathbb{C}$ *:* $\exp(z) = 1 \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ z = 2ik\pi$*.*

▶ Soit $z \in \mathbb{C}$. On raisonne par double implication.

1^re^ implication. On suppose que $\exp(z) = 1$. Alors :

$$1 = \exp(z) = e^{\mathrm{Re}(z)} e^{i\mathrm{Im}(z)} \quad \text{par définition de l'exponentielle complexe.}$$

Or la forme exponentielle de $1 \in \mathbb{C}$ est $1 = 1e^{i0}$. Par conséquent :

$$\begin{cases} 1 = e^{\mathrm{Re}(z)} \\ 0 \equiv \mathrm{Im}(z)\ [2\pi]. \end{cases}$$

On déduit de l'égalité que $\mathrm{Re}(z) = \ln(1) = 0$ et de la congruence qu'il existe un entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\mathrm{Im}(z) = 0 + 2k\pi = 2k\pi$. Ainsi, on a bien montré qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$z = \mathrm{Re}(z) + i\mathrm{Im}(z) = 0 + 2ik\pi = 2ik\pi.$$

2^e^ implication. On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $z = 2ik\pi$. Alors :

$$\begin{aligned} \exp(z) &= \exp(2ik\pi) \\ &= e^{\mathrm{Re}(2ik\pi)} e^{i\mathrm{Im}(2ik\pi)} \quad \text{par définition de l'exponentielle complexe} \\ &= e^0 e^{i2k\pi} \\ &= 1 \times 1 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Conclusion. Par double implication, on a bien montré que :

$$\boxed{\exp(z) = 1 \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ z = 2ik\pi}$$

et puisque cette équivalence est vraie un nombre $z \in \mathbb{C}$ fixé, elle est vraie pour tout nombre $z \in \mathbb{C}$.

(b) *En déduire que pour tout* $(z, w) \in \mathbb{C}^2$ *:* $\exp(z) = \exp(w) \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ z = w + 2ik\pi$*.*

▶ Soit $(z, w) \in \mathbb{C}^2$. On a :

$$\begin{aligned} & \exp(z) = \exp(w) \\ \iff & \exp(z) \times \frac{1}{\exp(w)} = 1 \quad \text{car } \exp(w) \neq 0 \text{ d'après le résultat de la question 2} \\ \iff & \exp(z)\exp(-w) = 1 \quad \text{d'après le résultat de la question 2} \\ \iff & \exp(z - w) = 1 \quad \text{d'après le résultat de la question 1} \\ \iff & \exists k \in \mathbb{Z},\ z - w = 2ik\pi \quad \text{d'après le résultat de la question précédente} \\ \iff & \exists k \in \mathbb{Z},\ z = w + 2ik\pi. \end{aligned}$$

On a bien montré que :

$$\boxed{\exp(z) = \exp(w) \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ z = w + 2ik\pi}$$

et puisque cette équivalence est vraie pour un couple $(z, w) \in \mathbb{C}^2$ fixé, elle est vraie pour tout couple $(z, w) \in \mathbb{C}^2$.

4. *Montrer que* $\{z \in \mathbb{C} \,|\, |\exp(z)| = 1\} = \{it \,|\, t \in \mathbb{R}\}$.

► On raisonne par double inclusion.

1re inclusion. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|\exp(z)| = 1$. Montrons qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $z = it$. On raisonne par analyse-synthèse.

— *Analyse*. On a :

$$\begin{aligned} 1 &= |\exp(z)| \\ &= |e^{\mathrm{Re}(z)} e^{i\mathrm{Im}(z)}| \quad \text{par définition de l'exponentielle complexe} \\ &= e^{\mathrm{Re}(z)} \quad \text{par définition du module.} \end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Re}(z) = \ln(1) = 0$ et $z = 0 + i\mathrm{Im}(z) = i\mathrm{Im}(z)$.

— *Synthèse*. On pose $t = \mathrm{Im}(z)$. Alors $z = i\mathrm{Im}(z) = it$ d'après les calculs faits dans l'analyse. On a trouvé un nombre $t \in \mathbb{R}$ tel que $z = it$ donc $z \in \{it \,|\, t \in \mathbb{R}\}$. Puisque ceci est vrai pour un nombre $z \in \mathbb{C}$ fixé tel que $|\exp(z)| = 1$, c'est vrai pour tout $z \in \{z \in \mathbb{C} \,|\, |\exp(z)| = 1\}$. Par conséquent, on a montré que :

$$\{z \in \mathbb{C} \,|\, |\exp(z)| = 1\} \subset \{it \,|\, t \in \mathbb{R}\}.$$

2e inclusion. Soit $t \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} |\exp(it)| &= |e^{\mathrm{Re}(it)} e^{i\mathrm{Im}(it)}| \quad \text{par définition de l'exponentielle complexe} \\ &= |e^0 e^{it}| \\ &= e^0 \quad \text{par définition du module} \\ &= 1. \end{aligned}$$

On en déduit que $it \in \{z \in \mathbb{C} \,|\, |\exp(z)| = 1\}$. Puisque ceci est vrai pour un nombre $t \in \mathbb{R}$ fixé, c'est vrai pour tout $it \in \{it \,|\, t \in \mathbb{R}\}$. Par conséquent, on a montré que :

$$\{it \,|\, t \in \mathbb{R}\} \subset \{z \in \mathbb{C} \,|\, |\exp(z)| = 1\}.$$

Conclusion. Par double inclusion, on a bien montré que :

$$\boxed{\{z \in \mathbb{C} \,|\, |\exp(z)| = 1\} = \{it \,|\, t \in \mathbb{R}\}}.$$

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, *on définit les nombres complexes suivants :*

$$\gamma(z) = \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2} \quad \text{et} \quad \sigma(z) = \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i}.$$

5. *Que valent* $\gamma(x)$ *et* $\sigma(x)$ *si* $x \in \mathbb{R}$ *?*

► Si $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} \gamma(x) &= \frac{\exp(ix) + \exp(-ix)}{2} \quad \text{par définition de } \gamma(x) \\ &= \frac{1}{2}\left(e^{\mathrm{Re}(ix)} e^{i\mathrm{Im}(ix)} + e^{\mathrm{Re}(-ix)} e^{i\mathrm{Im}(-ix)}\right) \quad \text{par définition de l'exponentielle complexe} \\ &= \frac{1}{2}\left(e^0 e^{ix} + e^0 e^{i(-x)}\right) \\ &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\ &= \cos(x) \quad \text{d'après les formules d'Euler.} \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\gamma(x) = \cos(x)}$ si $x \in \mathbb{R}$ et de même $\boxed{\sigma(x) = \sin(x)}$ par définition de $\sigma(x)$, par définition de l'exponentielle complexe et d'après les formules d'Euler.

6. *Montrer que :*
$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \gamma(z)^2 + \sigma(z)^2 = 1.$$

► Soit $z \in \mathbb{C}$. On a :

$$\begin{aligned}
\gamma(z)^2 + \sigma(z)^2 &= \left(\frac{\exp(iz)+\exp(-iz)}{2}\right)^2 + \left(\frac{\exp(iz)-\exp(-iz)}{2i}\right)^2 \quad \text{par définition de } \gamma(z) \text{ et } \sigma(z)\\
&= \frac{1}{4}\Big(\exp(iz)^2 + 2\exp(iz)\exp(-iz) + \exp(-iz)^2\Big)\\
&\qquad\qquad - \frac{1}{4}\Big(\exp(iz)^2 - 2\exp(iz)\exp(-iz) + \exp(-iz)^2\Big)\\
&= \frac{1}{4}4\exp(iz)\exp(-iz) \quad \text{après simplifications}\\
&= \exp(iz)\frac{1}{\exp(iz)} \quad \text{d'après le résultat de la question 2}\\
&= 1.
\end{aligned}$$

Puisque ceci est vrai pour un nombre $z \in \mathbb{C}$ fixé, c'est vrai pour tout nombre $z \in \mathbb{C}$. Donc :

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{C}, \quad \gamma(z)^2 + \sigma(z)^2 = 1}.$$

7. *Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que $\gamma(\frac{\pi}{2} - z) = \sigma(z)$.*

► On a :

$$\begin{aligned}
\gamma(\tfrac{\pi}{2} - z) &= \frac{\exp(i(\frac{\pi}{2}-z)) + \exp(-i(\frac{\pi}{2}-z))}{2} \quad \text{par définition de } \gamma\\
&= \frac{1}{2}\left(e^{\mathrm{Re}(i(\frac{\pi}{2}-z))}e^{i\mathrm{Im}(i(\frac{\pi}{2}-z))} + e^{\mathrm{Re}(-i(\frac{\pi}{2}-z))}e^{i\mathrm{Im}(-i(\frac{\pi}{2}-z))}\right) \quad \text{par déf. de l'exp. complexe}\\
&= \frac{1}{2}\left(e^{\mathrm{Re}(-iz)}e^{i(\frac{\pi}{2}+\mathrm{Im}(-iz))} + e^{\mathrm{Re}(iz)}e^{i(-\frac{\pi}{2}+\mathrm{Im}(iz))}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(e^{\mathrm{Re}(-iz)}ie^{i\mathrm{Im}(-iz)} + e^{\mathrm{Re}(iz)}(-i)e^{i\mathrm{Im}(iz)}\right) \quad \text{car } e^{i\frac{\pi}{2}} = i \text{ et } e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i\\
&= -\frac{i}{2}\left(e^{\mathrm{Re}(iz)}e^{i\mathrm{Im}(iz)} - e^{\mathrm{Re}(-iz)}e^{i\mathrm{Im}(-iz)}\right)\\
&= -i^2\frac{\exp(iz)-\exp(-iz)}{2i} \quad \text{par définition de l'exponentielle complexe}\\
&= \sigma(z) \quad \text{par définition de } \sigma(z).
\end{aligned}$$

On a bien montré que $\boxed{\gamma(\frac{\pi}{2} - z) = \sigma(z)}$.

8. *Soit $z \in \mathbb{C}$. Sans justifier, simplifier les expressions $\gamma(-z)$, $\sigma(-z)$, $\gamma(\frac{\pi}{2}-z)$, $\sigma(\frac{\pi}{2}-z)$, $\gamma(\pi-z)$, $\sigma(\pi-z)$, $\gamma(z+\frac{\pi}{2})$, $\sigma(z+\frac{\pi}{2})$, $\gamma(z+\pi)$, $\sigma(z+\pi)$, $\gamma(z+2\pi)$ et $\sigma(z+2\pi)$.*

► On retrouve les propriétés de parité, de symétrie, de décalage et de périodicité des fonctions cosinus et sinus. Donc :

$$\boxed{\begin{aligned}\gamma(-z) &= \gamma(z)\\ \sigma(-z) &= -\sigma(z)\end{aligned}}, \quad \boxed{\begin{aligned}\gamma(\tfrac{\pi}{2}-z) &= \sigma(z)\\ \sigma(\tfrac{\pi}{2}-z) &= \gamma(z)\end{aligned}}, \quad \boxed{\begin{aligned}\gamma(\pi-z) &= -\gamma(z)\\ \sigma(\pi-z) &= \sigma(z)\end{aligned}},$$

$$\boxed{\begin{aligned}\gamma(z+\tfrac{\pi}{2}) &= -\sigma(z)\\ \sigma(z+\tfrac{\pi}{2}) &= \gamma(z)\end{aligned}}, \quad \boxed{\begin{aligned}\gamma(z+\pi) &= -\gamma(z)\\ \sigma(z+\pi) &= -\sigma(z)\end{aligned}}, \quad \boxed{\begin{aligned}\gamma(z+2\pi) &= \gamma(z)\\ \sigma(z+2\pi) &= \sigma(z)\end{aligned}}.$$

9. *Montrer que :*
$$\forall (z,w) \in \mathbb{C}^2, \quad \gamma(z+w) = \gamma(z)\gamma(w) - \sigma(z)\sigma(w) \text{ et } \sigma(z+w) = \gamma(z)\sigma(w) + \sigma(z)\gamma(w).$$

▶ Soit $(z,w)\in\mathbb{C}^2$. On a :

$$\begin{aligned}
&\gamma(z)\gamma(w)-\sigma(z)\sigma(w)\\
=&\frac{\exp(iz)+\exp(-iz)}{2}\times\frac{\exp(iw)+\exp(-iw)}{2}-\frac{\exp(iz)-\exp(-iz)}{2i}\times\frac{\exp(iw)-\exp(-iw)}{2i}\\
=&\frac{1}{4}\Big(\exp(iz)\exp(iw)+\exp(iz)\exp(-iw)+\exp(-iz)\exp(iw)+\exp(-iz)\exp(-iw)\Big)\\
&\qquad+\frac{1}{4}\Big(\exp(iz)\exp(iw)-\exp(iz)\exp(-iw)-\exp(-iz)\exp(iw)+\exp(-iz)\exp(-iw)\Big)\\
=&\frac{1}{4}\Big(2\exp(iz)\exp(iw)+2\exp(-iz)\exp(-iw)\Big)\quad\text{après simplifications}\\
=&\frac{\exp(i(z+w))+\exp(-i(z+w))}{2}\quad\text{d'après le résultat de la question 1}\\
=&\gamma(z+w).
\end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned}
&\gamma(z)\sigma(w)+\sigma(z)\gamma(w)\\
=&\frac{\exp(iz)+\exp(-iz)}{2}\times\frac{\exp(iw)-\exp(-iw)}{2i}+\frac{\exp(iz)-\exp(-iz)}{2i}\times\frac{\exp(iw)+\exp(-iw)}{2}\\
=&\frac{1}{4i}\Big(\exp(iz)\exp(iw)-\exp(iz)\exp(-iw)+\exp(-iz)\exp(iw)-\exp(-iz)\exp(-iw)\Big)\\
&\qquad+\frac{1}{4i}\Big(\exp(iz)\exp(iw)+\exp(iz)\exp(-iw)-\exp(-iz)\exp(iw)-\exp(-iz)\exp(-iw)\Big)\\
=&\frac{1}{4i}\Big(2\exp(iz)\exp(iw)-2\exp(-iz)\exp(-iw)\Big)\quad\text{après simplifications}\\
=&\frac{\exp(i(z+w))-\exp(-i(z+w))}{2i}\quad\text{d'après le résultat de la question 1}\\
=&\sigma(z+w).
\end{aligned}$$

On peut également démontrer la deuxième égalité à l'aide de la première (et inversement) en utilisant les résultats des questions 7 et 8 :

$$\begin{aligned}
\sigma(z+w)&=\gamma(\tfrac{\pi}{2}-(z+w))\\
&=\gamma((\tfrac{\pi}{2}-z)+(-w))\\
&=\gamma(\tfrac{\pi}{2}-z)\gamma(-w)-\sigma(\tfrac{\pi}{2}-z)\sigma(-w)\\
&=\sigma(z)\gamma(w)-\gamma(z)(-\sigma(w))\\
&=\gamma(z)\sigma(w)+\sigma(z)\gamma(w).
\end{aligned}$$

Puisque ceci est vrai pour un couple $(z,w)\in\mathbb{C}^2$ fixé, c'est vrai pour tout couple $(z,w)\in\mathbb{C}^2$. Donc :

$$\boxed{\forall(z,w)\in\mathbb{C}^2,\quad \gamma(z+w)=\gamma(z)\gamma(w)-\sigma(z)\sigma(w)\text{ et }\sigma(z+w)=\gamma(z)\sigma(w)+\sigma(z)\gamma(w)}.$$

10. *Résoudre les équations suivantes d'inconnue $z\in\mathbb{C}$:*

(E_1) $\gamma(z) = 2$

▶ On a :

$$\begin{aligned}
\gamma(z) = 2 &\iff \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2} = 2 \\
&\iff \exp(iz) + \frac{1}{\exp(iz)} = 4 \quad \text{d'après le résultat de la question 2} \\
&\iff w + \frac{1}{w} = 4 \quad \text{en posant } w = \exp(iz) \\
&\iff w^2 + 1 = 4w \\
&\iff w^2 - 4w + 1 = 0.
\end{aligned}$$

On reconnaît une équation du second degré de discriminant $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 12 > 0$ qui admet pour solutions $(4 + \sqrt{12})/2 = 2 + \sqrt{3}$ et $2 - \sqrt{3}$. De plus :

$$\begin{aligned}
w = 2 + \sqrt{3} &\iff \exp(iz) = 2 + \sqrt{3} \quad \text{car } w = \exp(iz) \\
&\iff e^{\mathrm{Re}(iz)} e^{i\mathrm{Im}(iz)} = 2 + \sqrt{3} \quad \text{par définition de l'exponentielle complexe} \\
&\iff e^{-\mathrm{Im}(z)} e^{i\mathrm{Re}(z)} = 2 + \sqrt{3} \quad \text{car } iz = -\mathrm{Im}(z) + i\mathrm{Re}(z) \\
&\iff \begin{cases} e^{-\mathrm{Im}(z)} = 2 + \sqrt{3} \\ \mathrm{Re}(z) \equiv 0 \ [2\pi] \end{cases} \quad \text{car la forme exp. de } 2 + \sqrt{3} \in \mathbb{C} \text{ est } (2 + \sqrt{3})e^{i0} \\
&\iff \begin{cases} \mathrm{Im}(z) = -\ln\left(2 + \sqrt{3}\right) \\ \mathrm{Re}(z) \equiv 0 \ [2\pi] \end{cases} \\
&\iff \exists k \in \mathbb{Z},\ z = 2k\pi - i \ln\left(2 + \sqrt{3}\right).
\end{aligned}$$

On obtient de même :

$$w = 2 - \sqrt{3} \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ z = 2k\pi - i \ln\left(2 - \sqrt{3}\right) \quad \text{car } 2 - \sqrt{3} > 0.$$

Finalement, l'ensemble des solutions de l'équation $\gamma(z) = 2$ est :

$$\boxed{\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{2k\pi - i \ln\left(2 + \sqrt{3}\right), 2k\pi - i \ln\left(2 - \sqrt{3}\right)\right\}}.$$

On remarque que :

$$-\ln\left(2 + \sqrt{3}\right) = \ln\left(\frac{1}{2 + \sqrt{3}}\right) = \ln\left(\frac{2 - \sqrt{3}}{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})}\right) = \ln\left(2 - \sqrt{3}\right)$$

$$\textit{et de même} \quad -\ln\left(2 - \sqrt{3}\right) = \ln\left(2 + \sqrt{3}\right).$$

Ainsi, on peut aussi écrire l'ensemble des solutions sous la forme suivante :

$$\boxed{\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{2k\pi + i \ln\left(2 + \sqrt{3}\right), 2k\pi + i \ln\left(2 - \sqrt{3}\right)\right\}}.$$

Cette propriété de l'ensemble des solutions est une conséquence de la propriété de parité de la fonction γ obtenue à la question 8 (tout comme l'union infinie est une conséquence de la propriété de périodicité de la fonction γ).

(E_2) $\sigma(z)=2$

▶ On a :

$$\begin{aligned}\sigma(z)=2 &\iff \gamma(\tfrac{\pi}{2}-z)=2 \quad \text{d'après le résultat de la question 7}\\ &\iff \exists k\in\mathbb{Z},\ \tfrac{\pi}{2}-z=2k\pi-i\ln\left(2+\sqrt{3}\right) \text{ ou } \tfrac{\pi}{2}-z=2k\pi-i\ln\left(2-\sqrt{3}\right)\\ &\qquad\qquad \text{d'après le résultat de la question précédente}\\ &\iff \exists k\in\mathbb{Z},\ z=\left(\tfrac{\pi}{2}-2k\pi\right)+i\ln\left(2+\sqrt{3}\right) \text{ ou } z=\left(\tfrac{\pi}{2}-2k\pi\right)+i\ln\left(2-\sqrt{3}\right).\end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation $\sigma(z)=2$ est :

$$\boxed{\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left\{\left(\tfrac{\pi}{2}-2k\pi\right)+i\ln\left(2+\sqrt{3}\right),\left(\tfrac{\pi}{2}-2k\pi\right)+i\ln\left(2-\sqrt{3}\right)\right\}}.$$

En raisonnant comme à la question précédente, on obtient l'équation du second degré suivante :

$$w^2-4iw-1=0 \quad \text{où} \quad w=\exp(iz).$$

Cependant, la résolution de cette équation n'est pas simple car ses coefficients sont des nombres complexes (en particulier, on ne peut pas parler du signe du discriminant qui est aussi un nombre complexe).

Exercice 3

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par

$$u_0=4,\quad u_1=3 \quad \text{et} \quad \forall n\geqslant 0,\ u_{n+2}=u_{n+1}-\frac{1}{4}u_n.$$

Montrer qu'il existe $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que pour tout entier $n\geqslant 0$, $u_n=(an+b)c^n$.

▶ On raisonne par analyse-synthèse pour déterminer $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$.

- Analyse. Si $u_n=(an+b)c^n$ pour tout entier $n\geqslant 0$, alors on a en particulier pour $n=0$:

$$4=u_0=(a\times 0+b)c^0=b \quad \text{donc} \quad b=4.$$

De même, on a pour $n=1$:

$$3=u_1=(a\times 1+b)c^1=(a+4)c \quad \text{donc} \quad a=\frac{3}{c}-4.$$

De plus, on a pour $n=2$:

$$u_2=u_1-\frac{1}{4}u_0=3-\frac{4}{4}=2$$

par conséquent :

$$2=u_2=(a\times 2+b)c^2=\left(2\left(\frac{3}{c}-4\right)+4\right)c^2=6c-4c^2 \quad \text{donc} \quad 2c^2-3c+1=0.$$

On reconnaît une équation du second degré de discriminant $\Delta=(-3)^2-4\times 2\times 1=1>0$ qui admet pour solutions $(3+\sqrt{1})/4=1$ et $(3-\sqrt{1})/4=\frac{1}{2}$. Si $c=1$ alors $a=\frac{3}{1}-4=-1$; si $c=\frac{1}{2}$ alors $a=\frac{3}{1/2}-4=2$. On vérifie pour $n=3$:

$$u_3=u_2-\frac{1}{4}u_1=2-\frac{3}{4}=\frac{5}{4} \quad \text{or} \quad (-1\times 3+4)\,1^3=1\neq\frac{5}{4}$$
$$\text{et} \quad (2\times 3+4)\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{10}{8}=\frac{5}{4}.$$

- Synthèse. On pose $\boxed{a = 2,\ b = 4 \text{ et } c = \frac{1}{2}}$. Montrons par récurrence double que $u_n = (2n+4)\left(\frac{1}{2}\right)^n$ pour tout entier $n \geqslant 0$.

  — *Initialisation.* On a :

  $$(2 \times 0 + 4)\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 4 = u_0 \quad \text{et} \quad (2 \times 1 + 4)\left(\frac{1}{2}\right)^1 = 3 = u_1$$

  donc la récurrence double est initialisée.

  — *Hérédité.* On suppose que $u_n = (2n+4)\left(\frac{1}{2}\right)^n$ et $u_{n+1} = (2(n+1)+4)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ pour un entier $n \geqslant 0$ fixé. Alors :

  $$\begin{aligned}
  u_{n+2} &= u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n \quad \text{d'après la relation de récurrence de l'énoncé} \\
  &= (2(n+1)+4)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{4}(2n+4)\left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{d'après les hypothèses de récurrence} \\
  &= \frac{1}{4}\left[4(2n+6)\frac{1}{2} - (2n+4)\right]\left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{en factorisant par } \frac{1}{4} \text{ à gauche et par } \left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ à droite} \\
  &= \left[4n+12-2n-4\right]\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} \quad \text{car } \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\
  &= (2n+8)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} \\
  &= (2(n+2)+4)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}.
  \end{aligned}$$

  Par conséquent, on a montré que si $u_n = (2n+4)\left(\frac{1}{2}\right)^n$ et $u_{n+1} = (2(n+1)+4)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ alors $u_{n+2} = (2(n+2)+4)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$. De plus, cette implication est vraie pour tout entier $n \geqslant 0$.

  — *Conclusion.* D'après le principe de récurrence double, on en déduit que

  $$\boxed{\forall n \geqslant 0,\ u_n = (2n+4)\left(\frac{1}{2}\right)^n}.$$

Finalement, on a bien trouvé $\boxed{(a,b,c) = (2,4,\frac{1}{2})}$ tel que $u_n = (an+b)c^n$ pour tout entier $n \geqslant 0$.

DS n$^\text{o}$ 2 de mathématiques et d'informatique

durée : 3 heures et 30 minutes

Exercice 1

On considère deux suites $(a_n)_{n\geqslant 1}$ et $(b_n)_{n\geqslant 1}$ définies par :

$$\begin{cases} a_1 = 4 \\ b_1 = 2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 1,\ \begin{cases} a_{n+1} = a_n^2 - 3b_n + 7 \\ b_{n+1} = 5a_n - 2b_n + 11 \end{cases}.$$

1. Calculer a_3 et b_3.
2. Écrire une fonction `suites` qui prend en argument un entier $n \geqslant 1$ et qui renvoie le couple (a_n, b_n).

Exercice 2

On considère la fonction ci-dessous.

```
def riddle(x):
    if x>=0:
        n=0
        while n+1<x:
            n=n+1
        return n
    else:
        n=0
        while n-1>x:
            n=n-1
        return n
```

1. Que renvoient les commandes `riddle(3.14)` et `riddle(-3.14)` ?
2. Que renvoient les commandes `riddle(99.9)` et `riddle(-99.9)` ?
3. Que renvoient les commandes `riddle(5)` et `riddle(-5)` ?
4. Que renvoient les commandes `riddle(42)` et `riddle(-42)` ?
5. Corriger la fonction `riddle` pour écrire une fonction `floor` qui prend en argument un réel et qui renvoie sa partie entière.

Exercice 3

Dans cet exercice, on fixe une suite $(u_k)_{k\geqslant 0}$ de nombres réels et on suppose avoir déjà écrit une fonction `suite` qui prend en argument un entier $n \geqslant 0$ et qui renvoie la valeur de u_n. On pourra donc utiliser la fonction `suite` pour écrire les fonctions demandées.

1. Écrire une fonction `somme` qui prend en argument un entier $n \geqslant 0$ et qui renvoie la somme des n premiers termes de la suite $(u_k)_{k\geqslant 0}$.
2. Écrire une fonction `produit` qui prend en argument un entier $n \geqslant 0$ et qui renvoie le produit des n premiers termes de la suite $(u_k)_{k\geqslant 0}$.
3. Écrire une fonction `seuil` qui prend en argument un réel A et qui renvoie le plus petit entier $n \geqslant 0$ tel que $u_n > A$.
4. Soit $n \geqslant 0$. On dit que la suite $(u_k)_{k\geqslant 0}$ est croissante jusqu'au rang n lorsque :

$$\forall (i,j) \in \{0,1,2,\ldots,n\}^2,\ i \leqslant j \implies u_i \leqslant u_j.$$

   Écrire une fonction `croissante` qui prend en argument l'entier $n \geqslant 0$ et qui renvoie `True` si la suite $(u_k)_{k\geqslant 0}$ est croissante jusqu'au rang n et qui renvoie `False` sinon.

Problème

Dans tout ce problème, on fixe une constante $\alpha \in [0,1]$ et on considère une fonction réelle f définie sur $[0,1]$ qui vérifie les propriétés suivantes :

(i) f est strictement monotone sur $[0,1]$,

(ii) $\forall t \in [0,1],\ f(t) \in [0,1]$ et $(\alpha+1)t - \alpha f(t) \in [0,1]$,

(iii) $\forall t \in [0,1],\ f((\alpha+1)t - \alpha f(t)) = t$.

1. Si $\alpha = 0$, reconnaître l'application $f : [0,1] \to [0,1]$ à l'aide de la propriété **(iii)**.

Dans la suite de l'énoncé, on suppose que $\alpha \in]0,1]$.

2. (a) Montrer que $f(0) = 0$ à l'aide de la propriété **(ii)**.
   (b) De même, montrer que $f(1) = 1$.
   (c) Que peut-on préciser à propos de la propriété **(i)** ?
3. Soit $y \in [0,1]$. On considère l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in [0,1]$.
   (a) Montrer que cette équation admet au plus une solution à l'aide de la propriété **(i)**.
   (b) Montrer que cette équation admet au moins une solution à l'aide de la propriété **(iii)**.
   (c) Que peut-on en déduire pour l'application $f : [0,1] \to [0,1]$?

Dans la suite de l'énoncé, on fixe un réel $t \in [0,1]$ et considère la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ définie par :

$$u_0 = t \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 0,\ u_{n+1} = f(u_n).$$

4. (a) Montrer que : $\forall n \geqslant 0,\ u_n \in [0,1]$.
   (b) Montrer que : $\forall n \geqslant 0,\ f((\alpha+1)u_{n+1} - \alpha u_{n+2}) = f(u_n)$.
   (c) En déduire que $(u_n)_{n \geqslant 0}$ est récurrente linéaire d'ordre 2 à l'aide du résultat de la question 3.
5. Dans cette question, on suppose que $\alpha = 1$. On peut alors écrire la relation obtenue à la question précédente sous la forme :
$$\forall n \geqslant 0,\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n.$$
   (a) Déterminer l'expression de u_n en fonction de $n \geqslant 0$, t et $f(t)$. Quelle suite usuelle reconnaît-on ?
   (b) Déterminer la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$ (on pourra distinguer plusieurs cas).
   (c) En déduire que $f(t) = t$ puis reconnaître l'application $f : [0,1] \to [0,1]$.
6. Dans cette question, on suppose que $\alpha \in]0,1[$. On peut alors écrire la relation obtenue à la question 4 sous la forme :
$$\forall n \geqslant 0,\ u_{n+2} = \frac{\alpha+1}{\alpha} u_{n+1} - \frac{1}{\alpha} u_n.$$
   (a) Déterminer l'expression de u_n en fonction de $n \geqslant 0$, α, t et $f(t)$.
   (b) Déterminer la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$ (on pourra distinguer plusieurs cas).
   (c) En déduire que $f(t) = t$ puis reconnaître l'application $f : [0,1] \to [0,1]$.

Exercice 4

Le but de cet exercice est de démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \arctan(x).$$

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Justifier que $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \in]-1,1[$.
2. Quel est l'ensemble des valeurs de $\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$ lorsque x décrit $\mathbb{R}$?
3. Soit $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Exprimer $\tan(\theta)$ en fonction de $\sin(\theta)$.
4. Conclure.

Exercice 5

Le but de cet exercice est d'étudier la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ définie par :

$$a_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 1,\ a_{n+1} = \frac{a_n}{3-a_n}.$$

1. On pose $f : x \mapsto \frac{x}{3-x}$.
   (a) Étudier les variations de la fonction f.
   (b) Étudier le signe de la fonction $x \mapsto f(x) - x$.
   (c) Sur un graphique, esquisser la courbe représentative de la fonction f, la droite d'équation $y = x$ et les premiers termes de la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$. Quelles conjectures peut-on formuler ?
   (d) Démontrer les conjectures précédentes et en déduire que la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ ne s'annule jamais.
2. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $b_n = 1/a_n$.
   (a) Soit $n \geqslant 1$. Exprimer b_{n+1} en fonction de b_n. Quelle suite usuelle reconnaît-on ?
   (b) Déterminer l'expression de b_n en fonction de $n \geqslant 1$.
   (c) En déduire l'expression de a_n en fonction de $n \geqslant 1$.
   (d) Déterminer la limite de a_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 6

Simplifier les expressions suivantes en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+3)}$ en reconnaissant une somme télescopique.
2. $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} \left(\sqrt{k} + \sqrt{n-k}\right)^{n-2k}$ en inversant l'ordre du produit.
3. $\displaystyle\sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \binom{j}{i} 42^i$ à l'aide de la formule du binôme de Newton.

Corrigé du DS n^o 2 de mathématiques et d'informatique

Exercice 1

On considère deux suites $(a_n)_{n\geqslant 1}$ et $(b_n)_{n\geqslant 1}$ définies par :

$$\begin{cases} a_1 = 4 \\ b_1 = 2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 1, \ \begin{cases} a_{n+1} = a_n^2 - 3b_n + 7 \\ b_{n+1} = 5a_n - 2b_n + 11 \end{cases}.$$

1. *Calculer a_3 et b_3.*

   ▶ On a :
$$\begin{cases} a_2 = a_1^2 - 3b_1 + 7 = 4^2 - 3\times 2 + 7 = 16 - 6 + 7 = 17 \\ b_2 = 5a_1 - 2b_1 + 11 = 5\times 4 - 2\times 2 + 11 = 20 - 4 + 11 = 27 \end{cases}$$
   puis :
$$\begin{cases} a_3 = a_2^2 - 3b_2 + 7 = 17^2 - 3\times 27 + 7 = 289 - 81 + 7 = 215 \\ b_3 = 5a_2 - 2b_2 + 11 = 5\times 17 - 2\times 27 + 11 = 85 - 54 + 11 = 42 \end{cases}$$
   donc $\boxed{a_3 = 215}$ et $\boxed{b_3 = 42}$.

2. *Écrire une fonction* `suites` *qui prend en argument un entier $n \geqslant 1$ et qui renvoie le couple (a_n, b_n).*

   ▶ Par exemple :

```
def suites(n):
    a=4
    b=2
    for k in range(n-1):
        auxiliaire=a
        a=a**2-3*b+7
        b=5*auxiliaire-2*b+11
    return (a,b)
```

Il est nécessaire d'utiliser une variable auxilaire pour mémoriser la valeur de la variable `a` $= a_n$ *car l'instruction* `a=a**2-3*b+7` *efface cette valeur pour enregistrer la nouvelle valeur* `a` $= a_{n+1}$ *alors que l'instruction* `b=5*a-2*b+11` *utilise la valeur* `a` $= a_n$ *(et* `b` $= b_n$*) pour calculer la nouvelle valeur* `b` $= b_{n+1}$.

Exercice 2

On considère la fonction ci-dessous.

```
def riddle(x):
    if x>=0:
        n=0
        while n+1<x:
            n=n+1
        return n
    else:
        n=0
        while n-1>x:
            n=n-1
        return n
```

1. *Que renvoient les commandes* `riddle(3.14)` *et* `riddle(-3.14)` *?*

▶ Si `x=3.14` alors on obtient en appliquant pas à pas la fonction `riddle` :

— `x` est positif donc le test `if` est vérifié, on continue sans lire ce qui se trouve après `else`,

— `n` prend la valeur `0`,

— `n+1=1` est strictement inférieur à `x` donc la condition `while` est vérifiée, on continue,

— `n` prend la valeur `n+1=1`,

— `n+1=2` est strictement inférieur à `x` donc la condition `while` est vérifiée, on continue,

— `n` prend la valeur `n+1=2`,

— `n+1=3` est strictement inférieur à `x` donc la condition `while` est vérifiée, on continue,

— `n` prend la valeur `n+1=3`,

— `n+1=4` est supérieur à `x` donc la condition `while` n'est pas vérifiée, on sort de la boucle,

— on renvoie `n=3`.

Donc `riddle(3.14) renvoie 3`. De même, on obtient si `x=-3.14` :

— `x` est strictement négatif donc le test `if` n'est pas vérifié, on va directement à ce qui se trouve après `else` sans lire ce qui se trouve avant,

— `n` prend la valeur `0`,

— `n-1=-1` est strictement supérieur à `x` donc la condition `while` est vérifiée, on continue,

— `n` prend la valeur `n-1=-1`,

— `n-1=-2` est strictement supérieur à `x` donc la condition `while` est vérifiée, on continue,

— `n` prend la valeur `n-1=-2`,

— `n-1=-3` est strictement supérieur à `x` donc la condition `while` est vérifiée, on continue,

— `n` prend la valeur `n-1=-3`,

— `n-1=-4` est inférieur à `x` donc la condition `while` n'est pas vérifiée, on sort de la boucle,

— on renvoie `n=-3`.

Donc `riddle(-3.14) renvoie -3`.

2. *Que renvoient les commandes* `riddle(99.9)` *et* `riddle(-99.9)` *?*

▶ En généralisant le fonctionnement de la fonction `riddle` détaillé à la question précédente, on obtient que `riddle(99.9) renvoie 99` et que `riddle(-99.9) renvoie -99`.

On reconnaît la partie entière lorsque `x` *est positif car* $\lfloor 3,14 \rfloor = 3$ *et* $\lfloor 99,9 \rfloor = 99$. *Par contre,* $\lfloor -3,14 \rfloor = -4 \neq -3$ *et* $\lfloor -99,9 \rfloor = -100 \neq -99$ *donc on reconnaît* $\lfloor \mathtt{x} \rfloor + 1$ *lorsque* `x` *est strictement négatif.*

3. *Que renvoient les commandes* `riddle(5)` *et* `riddle(-5)` *?*

▶ Si `x=5` alors, en reprenant le fonctionnement de la fonction `riddle` détaillé à la question 1, la condition `while` ne sera pas vérifiée lorsque `n=4` car `n+1=5` est égal à `x`. Donc `riddle(5) renvoie 4`. De même, si `x=-5`, la condition `while` ne sera pas vérifiée lorsque `n=-4` car `n-1=-5` est égal à `x`. Donc `riddle(-5) renvoie -4`.

4. *Que renvoient les commandes* `riddle(42)` *et* `riddle(-42)` *?*

▶ En généralisant le fonctionnement de la fonction `riddle` détaillé à la question 1, on obtient que `riddle(42) renvoie 41` et que `riddle(-42) renvoie -41`.

On reconnaît toujours $\lfloor \mathtt{x} \rfloor + 1$ *lorsque* `x` *est strictement négatif. Par contre, on reconnaît* $\lfloor \mathtt{x} \rfloor - 1$ *lorsque* `x` *est un entier strictement positif (et* $\lfloor \mathtt{x} \rfloor$ *lorsque* `x` *est un réel strictement positif qui n'est pas entier).*

5. *Corriger la fonction* `riddle` *pour écrire une fonction* `floor` *qui prend en argument un réel et qui renvoie sa partie entière.*

▶ Par exemple :

```
def floor(x):
    if x>=0:
        n=0
        while n+1<=x:
            n=n+1
        return n
    else:
        n=0
        while n>x:
            n=n-1
        return n
```

Pour trouver cette fonction, il faut bien comprendre les erreurs observées aux questions précédentes ($\lfloor x \rfloor + 1$ au lieu de $\lfloor x \rfloor$ lorsque `x` *est strictement négatif et $\lfloor x \rfloor - 1$ au lieu de $\lfloor x \rfloor$ lorsque* `x` *est un réel strictement positif qui n'est pas entier) puis de trouver ce qu'il faut changer dans la fonction* `riddle` *(la condition* `n>x` *au lieu de* `n-1>x` *lorsque* `x` *est strictement négatif et la condition* `n+1<=x` *au lieu de* `n+1<x` *lorsque* `x` *est positif). N'hésitez pas à faire des essais de modification de la fonction* `riddle` *puis à vérifier vos essais avec des exemples comme aux questions précédentes. On peut également retrouver les modifications à effectuer à l'aide de la définition de la partie entière $n = \lfloor x \rfloor$:*

$$\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

Ainsi, lorsque `x` *est positif, on continue la boucle* `while` *tant que $x < n + 1$ n'est pas vérifiée, c'est-à-dire tant que* `n+1<=x`*. De même, lorsque* `x` *est strictement négatif, on continue la boucle* `while` *tant que $n \leqslant x$ n'est pas vérifiée, c'est-à-dire tant que* `n>x`*.*

Exercice 3

On considère la fonction ci-dessous.

```
def riddle(x):
    if x>=0:
        n=0
        while n+1<x:
            n=n+1
        return n
    else:
        n=0
        while n-1>x:
            n=n-1
        return n
```

1. *Que renvoient les commandes* `riddle(3.14)` *et* `riddle(-3.14)` *?*

▶ Si `x=3.14` alors on obtient en appliquant pas à pas la fonction `riddle` :

— `x` est positif donc le test `if` est vérifié, on continue sans lire ce qui se trouve après `else`,

— `n` prend la valeur `0`,

— `n+1=1` est strictement inférieur à `x` donc la condition `while` est vérifiée, on continue,
— `n` prend la valeur `n+1=1`,
— `n+1=2` est strictement inférieur à `x` donc la condition `while` est vérifiée, on continue,
— `n` prend la valeur `n+1=2`,
— `n+1=3` est strictement inférieur à `x` donc la condition `while` est vérifiée, on continue,
— `n` prend la valeur `n+1=3`,
— `n+1=4` est supérieur à `x` donc la condition `while` n'est pas vérifiée, on sort de la boucle,
— on renvoie `n=3`.

Donc $\boxed{\texttt{riddle(3.14) renvoie 3}}$. De même, on obtient si `x=-3.14` :

— `x` est strictement négatif donc le test `if` n'est pas vérifié, on va directement à ce qui se trouve après `else` sans lire ce qui se trouve avant,
— `n` prend la valeur `0`,
— `n-1=-1` est strictement supérieur à `x` donc la condition `while` est vérifiée, on continue,
— `n` prend la valeur `n-1=-1`,
— `n-1=-2` est strictement supérieur à `x` donc la condition `while` est vérifiée, on continue,
— `n` prend la valeur `n-1=-2`,
— `n-1=-3` est strictement supérieur à `x` donc la condition `while` est vérifiée, on continue,
— `n` prend la valeur `n-1=-3`,
— `n-1=-4` est inférieur à `x` donc la condition `while` n'est pas vérifiée, on sort de la boucle,
— on renvoie `n=-3`.

Donc $\boxed{\texttt{riddle(-3.14) renvoie -3}}$.

2. *Que renvoient les commandes* `riddle(99.9)` *et* `riddle(-99.9)` *?*

▶ En généralisant le fonctionnement de la fonction `riddle` détaillé à la question précédente, on obtient que $\boxed{\texttt{riddle(99.9) renvoie 99}}$ et que $\boxed{\texttt{riddle(-99.9) renvoie -99}}$.

> *On reconnaît la partie entière lorsque* `x` *est positif car* $\lfloor 3,14 \rfloor = 3$ *et* $\lfloor 99,9 \rfloor = 99$. *Par contre,* $\lfloor -3,14 \rfloor = -4 \neq -3$ *et* $\lfloor -99,9 \rfloor = -100 \neq -99$ *donc on reconnaît* $\lfloor \mathtt{x} \rfloor + 1$ *lorsque* `x` *est strictement négatif.*

3. *Que renvoient les commandes* `riddle(5)` *et* `riddle(-5)` *?*

▶ Si `x=5` alors, en reprenant le fonctionnement de la fonction `riddle` détaillé à la question 1, la condition `while` ne sera pas vérifiée lorsque `n=4` car `n+1=5` est égal à `x`. Donc $\boxed{\texttt{riddle(5) renvoie 4}}$. De même, si `x=-5`, la condition `while` ne sera pas vérifiée lorsque `n=-4` car `n-1=-5` est égal à `x`. Donc $\boxed{\texttt{riddle(-5) renvoie -4}}$.

4. *Que renvoient les commandes* `riddle(42)` *et* `riddle(-42)` *?*

▶ En généralisant le fonctionnement de la fonction `riddle` détaillé à la question 1, on obtient que $\boxed{\texttt{riddle(42) renvoie 41}}$ et que $\boxed{\texttt{riddle(-42) renvoie -41}}$.

> *On reconnaît toujours* $\lfloor \mathtt{x} \rfloor + 1$ *lorsque* `x` *est strictement négatif. Par contre, on reconnaît* $\lfloor \mathtt{x} \rfloor - 1$ *lorsque* `x` *est un entier strictement positif (et* $\lfloor \mathtt{x} \rfloor$ *lorsque* `x` *est un réel strictement positif qui n'est pas entier).*

5. *Corriger la fonction* `riddle` *pour écrire une fonction* `floor` *qui prend en argument un réel et qui renvoie sa partie entière.*

▶ Par exemple :

```
def floor(x):
    if x>=0:
        n=0
        while n+1<=x:
            n=n+1
        return n
    else:
        n=0
        while n>x:
            n=n-1
        return n
```

Pour trouver cette fonction, il faut bien comprendre les erreurs observées aux questions précédentes ($\lfloor x \rfloor + 1$ au lieu de $\lfloor x \rfloor$ lorsque `x` est strictement négatif et $\lfloor x \rfloor - 1$ au lieu de $\lfloor x \rfloor$ lorsque `x` est un réel strictement positif qui n'est pas entier) puis de trouver ce qu'il faut changer dans la fonction `riddle` (la condition `n>x` au lieu de `n-1>x` lorsque `x` est strictement négatif et la condition `n+1<=x` au lieu de `n+1<x` lorsque `x` est positif). N'hésitez pas à faire des essais de modification de la fonction `riddle` puis à vérifier vos essais avec des exemples comme aux questions précédentes. On peut également retrouver les modifications à effectuer à l'aide de la définition de la partie entière $\mathtt{n} = \lfloor \mathtt{x} \rfloor$:

$$\lfloor \mathtt{x} \rfloor \leqslant \mathtt{x} < \lfloor \mathtt{x} \rfloor + 1.$$

Ainsi, lorsque `x` est positif, on continue la boucle `while` tant que $\mathtt{x} < \mathtt{n} + 1$ n'est pas vérifiée, c'est-à-dire tant que `n+1<=x`. De même, lorsque `x` est strictement négatif, on continue la boucle `while` tant que $\mathtt{n} \leqslant \mathtt{x}$ n'est pas vérifiée, c'est-à-dire tant que `n>x`.

Exercice 4

Dans cet exercice, on fixe une suite $(u_k)_{k\geqslant 0}$ de nombres réels et on suppose avoir déjà écrit une fonction `suite` qui prend en argument un entier $n \geqslant 0$ et qui renvoie la valeur de u_n. On pourra donc utiliser la fonction `suite` pour écrire les fonctions demandées.

1. *Écrire une fonction `somme` qui prend en argument un entier $n \geqslant 0$ et qui renvoie la somme des n premiers termes de la suite $(u_k)_{k\geqslant 0}$.*
   - ▶ Par exemple :

```
def somme(n):
    S=0
    for k in range(n):
        S=S+suite(k)
    return S
```

2. *Écrire une fonction `produit` qui prend en argument un entier $n \geqslant 0$ et qui renvoie le produit des n premiers termes de la suite $(u_k)_{k\geqslant 0}$.*
   - ▶ Par exemple :

```
def produit(n):
    P=1
    for k in range(n):
        P=P*suite(k)
    return P
```

3. *Écrire une fonction* `seuil` *qui prend en argument un réel A et qui renvoie le plus petit entier $n \geqslant 0$ tel que $u_n > A$.*

▶ Par exemple :

```
def seuil(A):
    n=0
    while suite(n)<=A
        n=n+1
    return n
```

4. *Soit $n \geqslant 0$. On dit que la suite $(u_k)_{k \geqslant 0}$ est croissante jusqu'au rang n lorsque :*

$$\forall (i,j) \in \{0,1,2,\ldots,n\}^2,\ i \leqslant j \implies u_i \leqslant u_j.$$

Écrire une fonction `croissante` *qui prend en argument l'entier $n \geqslant 0$ et qui renvoie* `True` *si la suite $(u_k)_{k \geqslant 0}$ est croissante jusqu'au rang n et qui renvoie* `False` *sinon.*

▶ Par exemple :

```
def croissante(n):
    reponse=True
    for i in range(n+1):
        for j in range(n+1):
            if i<=j:
                if suite(i)>suite(j):
                    reponse=false
    return reponse
```

Il existe bien sûr beaucoup d'autres façons plus simples d'écrire cette fonction. Par exemples :

```
def croissante(n):
    for i in range(n+1):
        for j in range(n+1):
            if i<=j and suite(i)>suite(j):
                return False
    return True
```

```
def croissante(n):
    for i in range(n):
        for j in range(i+1,n+1):
            if suite(i)>suite(j):
                return False
    return True
```

```
def croissante(n):
    for i in range(n):
        if suite(i)>suite(i+1):
            return False
    return True
```

```
def croissante(n):
    k=0
    while k<n and suite(k)<=suite(k+1):
        k=k+1
    if k==n:
        return True
    else:
        return False
```

Problème

Dans tout ce problème, on fixe une constante $\alpha \in [0,1]$ et on considère une fonction réelle f définie sur $[0,1]$ qui vérifie les propriétés suivantes :

(i) *f est strictement monotone sur $[0,1]$,*

(ii) $\forall t \in [0,1],\ f(t) \in [0,1]$ *et* $(\alpha+1)t - \alpha f(t) \in [0,1]$,

(iii) $\forall t \in [0,1],\ f((\alpha+1)t - \alpha f(t)) = t$.

1. *Si $\alpha = 0$, reconnaître l'application $f : [0,1] \to [0,1]$ à l'aide de la propriété **(iii)**.*

   ▶ Si $\alpha = 0$ alors la propriété **(iii)** devient :
   $$\forall t \in [0,1], \quad f(t) = t.$$
   On reconnaît l'application identité de $[0,1]$: $\boxed{f = \mathrm{Id}|_{[0,1]}}$.

Dans la suite de l'énoncé, on suppose que $\alpha \in]0,1]$.

2. (a) *Montrer que $f(0) = 0$ à l'aide de la propriété **(ii)**.*

   ▶ En prenant $t = 0$ dans la propriété **(ii)**, on obtient :
   $$f(0) \in [0,1] \quad \text{et} \quad -\alpha f(0) \in [0,1]$$
   $$\text{donc} \quad 0 \leqslant f(0) \leqslant 1 \quad \text{et} \quad 0 \geqslant f(0) \geqslant \frac{1}{-\alpha} \quad \text{car } \alpha > 0.$$
   En particulier, $f(0)$ est positif et négatif donc $\boxed{f(0) = 0}$.

   (b) *De même, montrer que $f(1) = 1$.*

   ▶ En prenant $t = 1$ dans la propriété **(ii)**, on obtient :
   $$f(1) \in [0,1] \quad \text{et} \quad (\alpha+1) - \alpha f(1) \in [0,1]$$
   $$\begin{aligned} \text{donc} \quad 0 \leqslant f(1) \leqslant 1 \quad \text{et} \quad & 0 \leqslant (\alpha+1) - \alpha f(1) \leqslant 1 \\ & -(\alpha+1) \leqslant -\alpha f(1) \leqslant 1 - (\alpha+1) = -\alpha \\ & \frac{-(\alpha+1)}{-\alpha} \geqslant f(1) \geqslant \frac{-\alpha}{-\alpha} = 1 \quad \text{car } \alpha > 0. \end{aligned}$$
   En particulier, $f(1) \leqslant 1$ et $f(1) \geqslant 1$ donc $\boxed{f(1) = 1}$.

   (c) *Que peut-on préciser à propos de la propriété **(i)** ?*

   ▶ Puisque $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$ d'après les résultats des questions précédentes, la fonction f ne peut pas être strictement décroissante sur $[0,1]$. D'après la propriété **(i)**, on en déduit que $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } [0,1]}$.

3. *Soit $y \in [0,1]$. On considère l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in [0,1]$.*

   (a) *Montrer que cette équation admet au plus une solution à l'aide de la propriété **(i)**.*

   ▶ On raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe au moins deux solutions distinctes de l'équation $f(x) = y$. Notons ces solutions $(x_1, x_2) \in [0,1]^2$ donc $f(x_1) = y$, $f(x_2) = y$ et $x_1 \neq x_2$. On raisonne par disjonction de cas.
   1^er^ cas : $x_1 < x_2$. Puisque f est strictement croissante sur $[0,1]$ d'après le résultat de la question précédente, on a $f(x_1) < f(x_2)$ ce qui est absurde car $f(x_1) = f(x_2) = y$.
   2^e^ cas : $x_1 > x_2$. De même, on a $f(x_1) > f(x_2)$ ce qui est absurde.
   Conclusion. Dans tous les cas on aboutit à une absurdité. Par conséquent, on a montré que l'équation admet $\boxed{\text{au plus une}}$ solution.

   *Ou plus simplement : puisque f est strictement monotone sur $[0,1]$ d'après la propriété **(i)**, l'application $f : [0,1] \to [0,1]$ est injective donc l'équation $f(x) = y$ admet au plus une solution par définition de l'injectivité.*

(b) *Montrer que cette équation admet au moins une solution à l'aide de la propriété **(iii)**.*

▶ On cherche une solution $x \in [0,1]$ de l'équation $f(x) = y$. On raisonne par analyse-synthèse.
Analyse. En prenant $t = y$ dans la propriété **(iii)** (car $y \in [0,1]$), on obtient :

$$f\Big(\underbrace{(\alpha+1)y - \alpha f(y)}_{=x}\Big) = y.$$

Synthèse. On pose $\boxed{x = (\alpha+1)y - \alpha f(y)}$. Vérifions que $x \in [0,1]$ et que $f(x) = y$.

N'oubliez pas de vérifier que la solution trouvée appartient bien à $[0,1]$.

En prenant $t = y$ dans la propriété **(ii)** (car $y \in [0,1]$), on obtient :

$$f(y) \in [0,1] \quad \text{et} \quad \underbrace{(\alpha+1)y - \alpha f(y)}_{=x} \in [0,1].$$

En particulier, $x \in [0,1]$. De plus, on a déjà vu dans l'analyse que $f(x) = y$. Par conséquent, on a montré que l'équation admet $\boxed{\text{au moins une}}$ solution, qui est $x = (\alpha+1)y - \alpha f(y)$.

(c) *Que peut-on en déduire pour l'application $f : [0,1] \to [0,1]$?*

▶ D'après les résultats des questions précédentes, l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in [0,1]$ admet $\boxed{\text{exactement une seule}}$ solution. Puisque ceci est vrai pour tout $y \in [0,1]$, on en déduit que $\boxed{\text{l'application } f : [0,1] \to [0,1] \text{ est bijective}}$.

En fait, on a montré l'injectivité dans la question 3(a) et la surjectivité dans la question 3(b).

Dans la suite de l'énoncé, on fixe un réel $t \in [0,1]$ et considère la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ définie par :

$$u_0 = t \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 0,\ u_{n+1} = f(u_n).$$

4. (a) *Montrer que : $\forall n \geqslant 0,\ u_n \in [0,1]$.*

▶ On raisonne par récurrence.
Initialisation. On a $u_0 = t \in [0,1]$ d'après l'énoncé.
Hérédité. On fixe un entier $n \geqslant 0$ et on suppose que $u_n \in [0,1]$. En prenant $t = u_n$ dans la propriété **(ii)** (car $u_n \in [0,1]$ d'après l'hypothèse de récurrence), on obtient :

$$\underbrace{f(u_n)}_{=u_{n+1}} \in [0,1] \quad \text{et} \quad (\alpha+1)u_n - \alpha f(u_n) \in [0,1].$$

En particulier, $u_{n+1} \in [0,1]$ car $u_{n+1} = f(u_n)$ d'après la relation de récurrence. Ainsi, on a montré que :

$$\forall n \geqslant 0, \quad u_n \in [0,1] \implies u_{n+1} \in [0,1].$$

Conclusion. D'après le principe de récurrence, on en déduit que :

$$\boxed{\forall n \geqslant 0, \quad u_n \in [0,1]}.$$

(b) *Montrer que : $\forall n \geqslant 0,\ f((\alpha+1)u_{n+1} - \alpha u_{n+2}) = f(u_n)$.*

▶ Soit $n \geqslant 0$. En prenant $t = u_{n+1}$ dans la propriété **(iii)** (car $u_{n+1} \in [0,1]$ d'après le résultat de la question précédente), on obtient :

$$f\Big((\alpha+1)u_{n+1} - \alpha \underbrace{f(u_{n+1})}_{=u_{n+2}}\Big) = \underbrace{u_{n+1}}_{=f(u_n)}.$$

D'après la relation de récurrence de la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$, on en déduit bien que :

$$\boxed{\forall n \geqslant 0,\ f((\alpha+1)u_{n+1} - \alpha u_{n+2}) = f(u_n)}.$$

(c) *En déduire que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est récurrente linéaire d'ordre 2 à l'aide du résultat de la question 3.*

▶ Soit $n \geqslant 0$. On pose $y = f(u_n)$ donc $y \in [0,1]$ (car $f(u_n) = u_{n+1}$ d'après la relation de récurrence et $u_{n+1} \in [0,1]$ d'après le résultat de la question 4(a)). D'après le résultat de la question 3, on sait que l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in [0,1]$ admet exactement une seule solution. Or :

— $x = u_n$ est une solution évidente puisque $f(u_n) = y$,

— $x = (\alpha+1)u_{n+1} - \alpha u_{n+2}$ est aussi une solution puisque :

$$f((\alpha+1)u_{n+1} - \alpha u_{n+2}) = \underbrace{f(u_n)}_{=y} \quad \text{d'après le résultat de la question précédente.}$$

Par unicité de la solution, on en déduit que :

$$u_n = (\alpha+1)u_{n+1} - \alpha u_{n+2}.$$

Autrement dit, on a montré que :

$$\boxed{\forall n \geqslant 0, \quad u_{n+2} = \frac{\alpha+1}{\alpha}u_{n+1} - \frac{1}{\alpha}u_n}.$$

On reconnaît bien une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

5. *Dans cette question, on suppose que $\alpha = 1$. On peut alors écrire la relation obtenue à la question précédente sous la forme :*

$$\forall n \geqslant 0,\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n.$$

(a) *Déterminer l'expression de u_n en fonction de $n \geqslant 0$, t et $f(t)$. Quelle suite usuelle reconnaît-on ?*

▶ L'équation caractéristique associée à cette suite récurrente linéaire d'ordre 2 est :

$$q^2 = 2q - 1 \iff q^2 - 2q + 1 = 0 \iff (q-1)^2 = 0.$$

Elle admet une unique solution $q_0 = 1$.

Lorsque les solutions sont évidentes, ne perdez pas de temps à calculer le discriminant et l'expression des solutions à l'aide du discriminant.

Par conséquent, il existe deux constantes $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ telles que :

$$\forall n \geqslant 0, \quad u_n = (\lambda + \mu n)q_0^n = \lambda + \mu n \quad \text{car } q_0 = 1.$$

Pour déterminer les constantes λ et μ, on utilise les premiers termes de la suite :

— pour $n = 0$, on a $t = u_0 = \lambda + \mu \times 0 = \lambda$ donc $\lambda = t$,

— pour $n = 1$, on a $f(t) = u_1 = \lambda + \mu \times 1 = t + \mu$ donc $\mu = f(t) - t$.

Finalement, on a :

$$\boxed{\forall n \geqslant 0, \quad u_n = t + n(f(t) - t)}.$$

On reconnaît $\boxed{\text{une suite arithmétique de raison } f(t) - t}$.

(b) *Déterminer la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$ (on pourra distinguer plusieurs cas).*

▶ D'après le résultat de la question précédente, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} t + n(f(t) - t) = \boxed{\begin{cases} +\infty \text{ si } f(t) - t > 0 \\ t \text{ si } f(t) - t = 0 \\ -\infty \text{ si } f(t) - t < 0 \end{cases}}.$$

(c) *En déduire que $f(t) = t$ puis reconnaître l'application $f : [0,1] \to [0,1]$.*

▶ D'après le résultat de la question 4(a), on sait que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est minorée par 0 et majorée par 1. Par conséquent, la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$ ne peut pas être égale à $+\infty$ ou $-\infty$. On en déduit que les cas $f(t)-t>0$ et $f(t)-t<0$ sont absurdes dans le résultat de la question précédente. Il reste seulement le cas $f(t)-t=0$ donc $\boxed{f(t)=t}$. Puisque ceci est vrai pour tout $t \in [0,1]$, on a montré que :

$$\forall t \in [0,1], \quad f(t) = t.$$

On reconnaît l'application identité de $[0,1]$: $\boxed{f = \mathrm{Id}|_{[0,1]}}$.

6. *Dans cette question, on suppose que $\alpha \in]0,1[$. On peut alors écrire la relation obtenue à la question 4 sous la forme :*

$$\forall n \geqslant 0,\ u_{n+2} = \frac{\alpha+1}{\alpha} u_{n+1} - \frac{1}{\alpha} u_n.$$

(a) *Déterminer l'expression de u_n en fonction de $n \geqslant 0$, α, t et $f(t)$.*

▶ L'équation caractéristique associée à cette suite récurrente linéaire d'ordre 2 est :

$$q^2 = \frac{\alpha+1}{\alpha} q - \frac{1}{\alpha} \iff q^2 - \frac{\alpha+1}{\alpha} q + \frac{1}{\alpha} = 0 \iff (q-1)\left(q - \frac{1}{\alpha}\right) = 0.$$

Elle admet deux solutions réelles distinctes $q_1 = 1$ et $q_2 = \frac{1}{\alpha}$.

Lorsqu'une solution est évidente (ici $q_1 = 1$), utilisez que le produit des solutions vaut le coefficient constant (ici $q_1 q_2 = \frac{1}{\alpha}$) ou que la somme des solutions vaut l'opposé du coefficient de degré 1 (ici $q_1 + q_2 = \frac{\alpha+1}{\alpha}$) pour déterminer la deuxième solution.

Par conséquent, il existe deux constantes $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ telles que :

$$\forall n \geqslant 0, \quad u_n = \lambda_1 q_1^n + \lambda_2 q_2^n = \lambda_1 + \frac{\lambda_2}{\alpha^n}.$$

Pour déterminer les constantes λ_1 et λ_2, on utilise les premiers termes de la suite :

- pour $n=0$, on a $t = u_0 = \lambda_1 + \frac{\lambda_2}{\alpha^0} = \lambda_1 + \lambda_2$ donc $\lambda_1 = t - \lambda_2$,
- pour $n=1$, on a $f(t) = u_1 = \lambda_1 + \frac{\lambda_2}{\alpha^1} = t - \lambda_2 + \frac{\lambda_2}{\alpha} = t + \lambda_2\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)$ donc $\lambda_2 = \frac{f(t)-t}{\frac{1}{\alpha}-1}$.

  Finalement, on a :

$$\boxed{\forall n \geqslant 0, \quad u_n = t - \frac{f(t)-t}{\frac{1}{\alpha}-1} + \frac{\frac{f(t)-t}{\frac{1}{\alpha}-1}}{\alpha^n}}.$$

(b) *Déterminer la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$ (on pourra distinguer plusieurs cas).*

▶ Puisque $\alpha \in]0,1[$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\alpha^n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{\alpha}\right)^n = +\infty \quad \text{car } \frac{1}{\alpha} > 1.$$

De plus, $\frac{1}{\alpha} - 1 > 0$. D'après le résultat de la question précédente, on en déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} t - \frac{f(t)-t}{\frac{1}{\alpha}-1} + \frac{\frac{f(t)-t}{\frac{1}{\alpha}-1}}{\alpha^n} = \boxed{\begin{cases} +\infty \text{ si } f(t)-t>0 \\ t \text{ si } f(t)-t=0 \\ -\infty \text{ si } f(t)-t<0 \end{cases}}.$$

(c) *En déduire que $f(t) = t$ puis reconnaître l'application $f : [0,1] \to [0,1]$.*

▶ En raisonnant comme dans la question 5(c), on en déduit que les cas $f(t)-t > 0$ et $f(t)-t < 0$ dans le résultat de la question précédente sont absurdes car la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est bornée d'après le résultat de la question 4(a). Il reste seulement le cas $\boxed{f(t) = t}$. Puisque ceci est vrai pour tout $t \in [0,1]$, on reconnaît l'application identité de $[0,1]$: $\boxed{f = \mathrm{Id}|_{[0,1]}}$.

Exercice 5

Le but de cet exercice est de démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \arctan(x).$$

1. *Soit $x \in \mathbb{R}$. Justifier que $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \in]-1,1[$.*

▶ On a $1 + x^2 > x^2$ donc :

$$\sqrt{1+x^2} > \sqrt{x^2} = |x| \quad \text{car la fonction racine carrée est strictement croissante.}$$

Par définition de la valeur absolue, on en déduit que :

$$-\sqrt{1+x^2} < -|x| \leqslant x \leqslant |x| < \sqrt{1+x^2}.$$

Puis on obtient en divisant par $\sqrt{1+x^2} > 0$:

$$-1 = \frac{-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} < \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} < \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} = 1.$$

Par conséquent, $\boxed{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \in]-1,1[}$.

On peut aussi étudier les variations de la fonction $x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ mais c'est beaucoup plus long.

2. *Quel est l'ensemble des valeurs de $\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$ lorsque x décrit $\mathbb{R}$?*

▶ Par définition de la fonction arcsinus, pour tout $y \in [-1,1]$, $\arcsin(y)$ est égal à l'unique solution de l'équation $\sin(\theta) = y$ d'inconnue θ qui appartient à $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Si on prend $y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, alors on a vu à la question précédente que $y \in]-1,1[$. De plus, $\frac{\pi}{2}$ est l'unique solution de $\sin(\theta) = 1$ qui appartient à $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ (autrement dit $\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$) et $-\frac{\pi}{2}$ est l'unique solution de $\sin(\theta) = -1$ qui appartient à $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ (autrement dit $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$). On en déduit que $\arcsin(y)$ peut prendre n'importe quelle valeur de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sauf $\frac{\pi}{2}$ (car $y \neq 1$) et $-\frac{\pi}{2}$ (car $y \neq -1$). Par conséquent, l'ensemble des valeurs de $\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$ est $\boxed{]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[}$.

Aidez-vous d'un schéma du cercle trigonométrique pour visualiser l'ensemble des valeurs possibles de $\arcsin(y)$ lorsque $y \in]-1,1[$.

3. *Soit $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Exprimer $\tan(\theta)$ en fonction de $\sin(\theta)$.*

▶ On sait que $\tan(\theta) = \sin(\theta)/\cos(\theta)$ d'après le théorème de Thalès. De plus, on a d'après le théorème de Pythagore :

$$\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1 \quad \text{donc} \quad \sqrt{1-\sin^2(\theta)} = \sqrt{\cos^2(\theta)} = |\cos(\theta)|.$$

N'oubliez pas les valeurs absolues !!

Or $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ donc $\cos(\theta) \geqslant 0$. On en déduit que :

$$\cos(\theta) = |\cos(\theta)| = \sqrt{1-\sin^2(\theta)}.$$

Finalement :

$$\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \boxed{\frac{\sin(\theta)}{\sqrt{1-\sin^2(\theta)}}}.$$

4. *Concluire.*

▶ Par définition de la fonction arctangente, $\arctan(x)$ est égal à l'unique solution de l'équation $\tan(\theta) = x$ d'inconnue θ qui appartient à $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. On a déjà montré à la question 2 que $\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Vérifions que $\theta = \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$ est solution de l'équation $\tan(\theta) = x$. On a :

$$\begin{aligned}
\tan(\theta) &= \frac{\sin(\theta)}{\sqrt{1-\sin^2(\theta)}} && \text{d'après le résultat de la question précédente} \\
&= \frac{\sin\left(\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\right)}{\sqrt{1-\sin^2\left(\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\right)}} && \text{car } \theta = \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) \\
&= \frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}} && \begin{array}{l}\text{car } \forall y \in [-1,1],\ \sin(\arcsin(y)) = y \\ \text{par définition de la fonction arcsinus}\end{array} \\
&= \frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{1+x^2}}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{\frac{1+x^2-x^2}{1+x^2}}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{\frac{1}{1+x^2}}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \times \sqrt{1+x^2} = x.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\theta = \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$ est une solution de l'équation $\tan(\theta) = x$ qui appartient à $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Par définition de la fonction arctangente, on en déduit que :

$$\boxed{\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \arctan(x)}.$$

Exercice classique qui nécessite de bien connaître les définitions des fonctions arcsinus et arctangente.

Exercice 6

Le but de cet exercice est d'étudier la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ définie par :

$$a_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 1,\ a_{n+1} = \frac{a_n}{3-a_n}.$$

1. *On pose $f : x \mapsto \frac{x}{3-x}$.*

(a) *Étudier les variations de la fonction f.*

▶ La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ comme quotient de fonctions usuelles dont le dénominateur ne s'annule pas. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}, \quad f'(x) = \frac{1 \times (3-x) - x \times (-1)}{(3-x)^2} = \frac{3}{(3-x)^2} > 0.$$

D'où le tableau des variations de la fonction f :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f(x)$	-1 $\nearrow$	$+\infty$	$\Vert$	$-\infty$ $\nearrow$	-1

car :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{3-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\frac{3}{x}-1} = \frac{1}{0-1} = -1 \text{ et de même } \lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{0-1} = -1$$

$$\lim_{x\to3^-} f(x) = \lim_{x\to3^-} \frac{x}{3-x} = \frac{3}{0^+} = +\infty \quad \text{et de même} \quad \lim_{x\to3^+} f(x) = \frac{3}{0^-} = -\infty.$$

(b) *Étudier le signe de la fonction $x \mapsto f(x) - x$.*

▶ On a pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$:

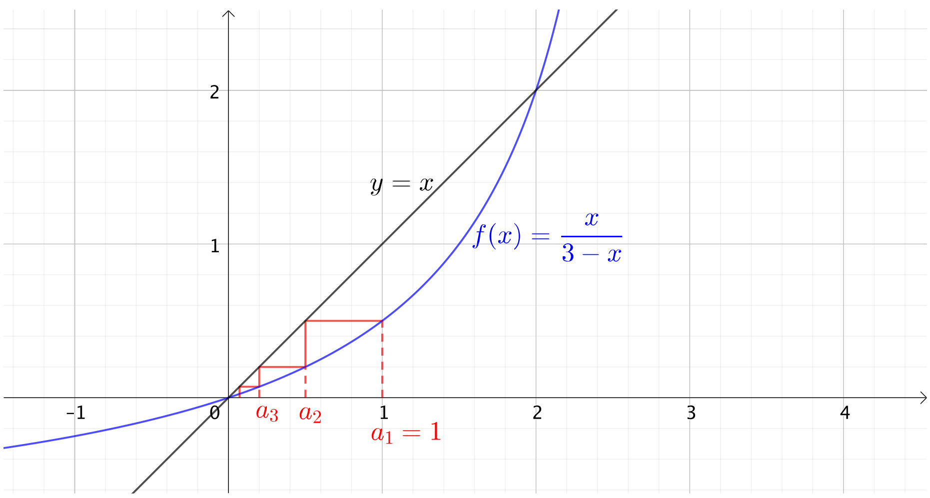
$$f(x) - x = \frac{x}{3-x} - x = \frac{x - x(3-x)}{3-x} = \frac{x(x-2)}{3-x}.$$

D'où le tableau des signes de $x \mapsto f(x) - x$.

x	$-\infty$		0		2		3		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$3-x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)-x$		$+$	0	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

(c) *Sur un graphique, esquisser la courbe représentative de la fonction f, la droite d'équation $y = x$ et les premiers termes de la suite $(a_n)_{n\geqslant1}$. Quelles conjectures peut-on formuler ?*

▶ D'après le résultat de la question précédente, la courbe représentative de la fonction f est au-dessus de la droite d'équation $y = x$ sur $]-\infty, 0[\cup]2, 3[$ et en-dessous sur $]0, 2[\cup]3, +\infty[$. De plus, on connaît les variations de la courbe représentative de la fonction f d'après le résultat de la question 1(a). On en déduit le graphique suivant :



On conjecture que la suite $(a_n)_{n\geqslant1}$ est $\boxed{\text{strictement décroissante}}$, $\boxed{\text{strictement minorée par } 0}$ et $\boxed{\text{majorée par } 1}$.

(d) *Démontrer les conjectures précédentes et en déduire que la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ ne s'annule jamais.*

▶ Pour chaque entier $n \geqslant 1$, on note $P(n)$ la proposition «$0 < a_{n+1} < a_n \leqslant 1$». On raisonne par récurrence pour montrer que $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant 1$.

Initialisation. On a $a_1 = 1$ d'après l'énoncé et $a_2 = f(a_1) = \frac{1}{3-1} = \frac{1}{2}$. Ainsi $1 < a_2 < a_1 \leqslant 1$, donc $P(1)$ est vraie.

Hérédité. On suppose que $P(n)$ est vraie pour un entier $n \geqslant 1$ fixé, donc que $0 < a_{n+1} < a_n \leqslant 1$. Puisque la fonction f est strictement croissante sur $]0,1] \subset]-\infty, 3[$ d'après le résultat de la question 1(a), on en déduit que :

$$f(0) < \underbrace{f(a_{n+1})}_{=a_{n+2}} < \underbrace{f(a_n)}_{=a_{n+1}} \leqslant f(1) \quad \text{donc} \quad 0 < a_{n+2} < a_{n+1} \leqslant \tfrac{1}{2} \leqslant 1.$$

On reconnaît $P(n+1)$. Ainsi, on a montré que $P(n) \implies P(n+1)$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

Conclusion. D'après le principe de récurrence, on peut conclure que $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant 1$, c'est-à-dire que :

$$\forall n \geqslant 1, \quad 0 < a_{n+1} < a_n \leqslant 1.$$

Par conséquent, la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est $\boxed{\text{strictement décroissante}}$, $\boxed{\text{strictement minorée par } 0}$ et $\boxed{\text{majorée par } 1}$. En particulier, $\boxed{\text{la suite } (a_n)_{n\geqslant 1} \text{ ne s'annule jamais}}$ puisque ses termes sont strictement positifs.

2. *Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $b_n = 1/a_n$.*

(a) *Soit $n \geqslant 1$. Exprimer b_{n+1} en fonction de b_n. Quelle suite usuelle reconnaît-on ?*

▶ On a :

$$b_{n+1} = \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{f(a_n)} = \frac{1}{\frac{a_n}{3-a_n}} = \frac{3-a_n}{a_n} = \frac{3-\frac{1}{b_n}}{\frac{1}{b_n}} = \boxed{3b_n - 1}.$$

On reconnaît $\boxed{\text{une suite arithmético-géométrique}}$.

(b) *Déterminer l'expression de b_n en fonction de $n \geqslant 1$.*

▶ On résout l'équation caractéristique associée à cette suite arithmético-géométrique :

$$\alpha = 3\alpha - 1 \iff \alpha = \frac{1}{2}.$$

On pose la suite auxiliaire $(u_n = b_n - \frac{1}{2})_{n\geqslant 1}$. Alors :

$$\forall n \geqslant 1, \quad u_{n+1} = b_{n+1} - \frac{1}{2} = 3b_n - 1 - \frac{1}{2} = 3b_n - \frac{3}{2} = 3\left(b_n - \frac{1}{2}\right) = 3u_n.$$

On reconnaît une suite géométrique de raison 3 et de premier terme $u_1 = b_1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ car $a_1 = 1$. Par conséquent :

$$\forall n \geqslant 1, \quad u_n = u_1 3^{n-1} = \frac{3^{n-1}}{2} \quad \text{donc} \quad b_n = u_n + \frac{1}{2} = \frac{3^{n-1}}{2} + \frac{1}{2} = \boxed{\frac{3^{n-1}+1}{2}}.$$

(c) *En déduire l'expression de a_n en fonction de $n \geqslant 1$.*

▶ D'après le résultat de la question précédente, on a :

$$\forall n \geqslant 1, \quad a_n = \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\frac{3^{n-1}+1}{2}} = \boxed{\frac{2}{3^{n-1}+1}}.$$

(d) *Déterminer la limite de a_n quand n tend vers $+\infty$.*

▶ D'après le résultat de la question précédente, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{3^{n-1}+1} = \boxed{0} \quad \text{car} \lim_{n\to+\infty} 3^{n-1} = +\infty.$$

Exercice 7

Simplifier les expressions suivantes en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+3)}$ *en reconnaissant une somme télescopique.*

▶ On a pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+3} = \frac{(k+3)-(k+1)}{(k+1)(k+3)} = \frac{2}{(k+1)(k+3)} \quad \text{donc} \quad \frac{1}{(k+1)(k+3)} = \frac{1/2}{k+1} - \frac{1/2}{k+3}.$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+3)} &= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1/2}{k+1} - \frac{1/2}{k+3} \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+3} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) \quad \text{après simplifications en reconnaissant une somme télescopique} \\
&= \frac{2(n+2)(n+3) + (n+2)(n+3) - 2(n+3) - 2(n+2)}{4(n+2)(n+3)} \\
&= \boxed{\frac{3n^2+11n+8}{4(n+2)(n+3)}}.
\end{aligned}$$

Pour visualiser plus facilement les simplifications de la somme télescopique, on peut détailler les termes de la somme sans utiliser le symbole $\sum$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+3} \right) &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3} \right) \\
&= \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}} \right) - \left(\underbrace{\frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right) \\
&= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}.
\end{aligned}$$

On peut aussi utiliser un décalage d'indice et l'associativité de la somme :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+3} \right) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+3} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} - \sum_{\ell=2}^{n+2} \frac{1}{\ell+1} \quad \textit{en posant } \ell+1 = k+3 \iff \ell = k+2 \\
&= \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \underbrace{\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k+1}} \right) - \left(\underbrace{\sum_{\ell=2}^{n} \frac{1}{\ell+1}} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} \right) \\
&= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}.
\end{aligned}$$

2. $\displaystyle\prod_{k=0}^{n}\left(\sqrt{k}+\sqrt{n-k}\right)^{n-2k}$ *en inversant l'ordre du produit.*

▶ On a en inversant l'ordre du produit :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n}\left(\sqrt{k}+\sqrt{n-k}\right)^{n-2k} &= \prod_{\ell=0}^{n}\left(\sqrt{n-\ell}+\sqrt{n-(n-\ell)}\right)^{n-2(n-\ell)} && \text{en posant } \ell=n-k \iff k=n-\ell\\
&= \prod_{\ell=0}^{n}\left(\sqrt{n-\ell}+\sqrt{\ell}\right)^{-n+2\ell}\\
&= \prod_{k=0}^{n}\left(\sqrt{n-k}+\sqrt{k}\right)^{-(n-2k)} && \text{en changeant l'indice du produit qui est une variable muette}\\
&= \prod_{k=0}^{n}\frac{1}{\left(\sqrt{k}+\sqrt{n-k}\right)^{n-2k}} && \text{par définition des puissances négatives}\\
&= \frac{1}{\prod_{k=0}^{n}\left(\sqrt{k}+\sqrt{n-k}\right)^{n-2k}} && \text{par multiplicativité.}
\end{aligned}$$

Par conséquent, si on note $P=\prod_{k=0}^{n}\left(\sqrt{k}+\sqrt{n-k}\right)^{n-2k}$ le produit à simplifier, on vient de montrer que $P=1/P$, donc que $P^2=1$. On en déduit que $P=1$ ou $P=-1$. Or tous les facteurs du produit P sont positifs (car les racines carrées sont positives), donc $P\geqslant 0$. Finalement, on en déduit que :

$$\boxed{\prod_{k=0}^{n}\left(\sqrt{k}+\sqrt{n-k}\right)^{n-2k}=1}.$$

3. $\displaystyle\sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n}\binom{j}{i}42^i$ *à l'aide de la formule du binôme de Newton.*

▶ On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n}\binom{j}{i}42^i &= \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}42^i && \text{en reconnaissant une somme double sur un triangle d'indices}\\
&= \sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}42^i 1^{j-i}\right) && \text{car } 1^{j-i}=1\\
&= \sum_{j=0}^{n}(42+1)^j && \text{d'après la formule du binôme de Newton}\\
&= \sum_{j=0}^{n}43^j && \text{on reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique}\\
&= \frac{43^{n+1}-1}{43-1} = \boxed{\frac{43^{n+1}-1}{42}}.
\end{aligned}$$

DS n^o 3 de mathématiques et d'informatique

durée : 4 heures

Problème 1

Dans ce problème, on considère des suites de nombres réels indexées par les entiers naturels. Une telle suite sera notée $u = (u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, \dots) = (u_n)_{n\geqslant 0}$. On rappelle que la somme de deux suites a et b est la suite notée $a+b$ définie par $(a+b)_n = a_n + b_n$ pour tout $n \geqslant 0$. De même, on définit une nouvelle opération entre deux suites a et b, appelée le produit de convolution et notée $a \star b$, par :

$$\forall n \geqslant 0, \quad (a \star b)_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Ainsi, si $a = (0, 2, 4, 6, 8, \dots)$ et $b = (1, 3, 5, 7, 9, \dots)$ alors :

$$\begin{aligned}(a \star b)_4 &= a_0b_4 + a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1 + a_4b_0 \\ &= 0\times 9 + 2\times 7 + 4\times 5 + 6\times 3 + 8\times 1 = 60.\end{aligned}$$

La partie I propose de calculer des exemples de produits de convolution. La partie II propose de résoudre une équation de suites faisant intervenir le produit de convolution.

On utilisera le langage Python pour écrire les fonctions demandées dans les questions d'informatique. Dans tout le sujet, l'expression «0 à n» signifiera tous les entiers «0, 1, 2, 3, …, $n-1$ et n» (0 et n inclus).

I) Quelques exemples

Dans cette partie, on considère les suites suivantes :

— la suite des entiers naturels notée $i = (0, 1, 2, 3, 4, \dots)$;

— pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la suite $g(\alpha) = (1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4, \dots)$;

— pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la suite $e(\alpha)$ definie par $e(\alpha)_n = \alpha^n/n!$ pour tout $n \geqslant 0$.

On utilisera la convention que $0^0 = 1$, ainsi $e(0) = (1, 0, 0, 0, 0, \dots) = g(0)$.

1. **[Informatique]**
   (a) Écrire une fonction `suiteI` qui prend en argument un entier naturel n puis qui renvoie la liste des termes d'indice 0 à n de la suite i. Ainsi, `suiteI(4)` renvoie la liste `[0,1,2,3,4]`.

   (b) On considère la fonction `mystere` écrite ci-contre.

   ```
   def mystere(alpha,n):
       L=[1]
       for i in range(n):
           print(L[i])
           L=L+[L[i]*alpha]
       return L
   ```

   i. Détailler ce qu'affiche `mystere(2,4)`, c'est-à-dire le résultat de chaque exécution de l'instruction `print` et le résultat de l'instruction `return`.

   ii. De manière générale, à quoi sert la fonction `mystere` (sans prendre en compte la ligne comportant l'inscrution `print`) ?

   (c) i. Écrire une fonction `fact` qui permet de calculer la factorielle d'un entier naturel.

   ii. En utilisant la fonction `fact`, écrire une fonction `suiteE` qui prend en arguments un réel α et un entier naturel n puis qui renvoie la liste des termes d'indice 0 à n de la suite $e(\alpha)$.

   (d) Dans cette question, on suppose avoir déjà écrit deux fonctions `suiteA` et `suiteB` qui prennent en argument un entier naturel n puis qui renvoient la liste des termes d'indice 0 à n de deux suites a et b respectivement.

   i. Écrire une fonction `termeAstarB` qui prend en argument un entier naturel n puis qui renvoie la valeur de $(a \star b)_n$.

   ii. Écrire une fonction `suiteAstarB` qui prend en argument un entier naturel n puis qui renvoie la liste des termes d'indice 0 à n de la suite $a \star b$.

2. Montrer que $(i \star i)_n = (n-1)n(n+1)/6$ pour tout $n \geqslant 0$.
3. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que :

$$\forall n \geqslant 0, \quad (g(\alpha) \star g(\beta))_n = \begin{cases} (n+1)\alpha^n & \text{si } \alpha = \beta \\ \dfrac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} & \text{si } \alpha \neq \beta. \end{cases}$$

4. Dans cette question, on propose de retrouver le résultat de la question précédente (qu'on ne pourra donc pas utiliser) à l'aide d'une méthode différente. On fixe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et on pose $u = g(\alpha) \star g(\beta)$.
   (a) Calculer u_0 et u_1.
   (b) Soit $n \geqslant 0$. Montrer que $(\alpha + \beta)u_{n+1} - u_{n+2} = \alpha\beta u_n$. Quel type de suite reconnaît-on ?
   (c) Conclure en distinguant les cas $\alpha = \beta$ et $\alpha \neq \beta$.
5. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Dans cette question, on propose de calculer $i \star g(\alpha)$.
   (a) Soit $n \geqslant 0$. Simplifier $(i \star g(\alpha))_n$ dans le cas où $\alpha = 1$.
   (b) Dans cette question, on suppose que $\alpha \neq 1$ et on pose $u = ((i \star g(\alpha))_{n+1} - (i \star g(\alpha))_n)_{n \geqslant 0}$.
      i. Soit $n \geqslant 0$. Montrer que u_n est égal à la somme des $n+1$ premiers termes de la suite $g(\alpha)$ et en déduire une expression de u_n qui n'utilise pas le symbole Σ.
      ii. Soit $n \geqslant 1$. En calculant la somme $\sum_{k=0}^{n-1} u_k$ de deux façons différentes, déterminer une expression de $(i \star g(\alpha))_n$ qui n'utilise pas le symbole Σ.
   (c) Vérifier que l'expression obtenue à la question précédente reste vraie si $n = 0$ puis conclure.
6. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. À l'aide d'une formule du cours à préciser, montrer que $e(\alpha) \star e(\beta) = e(\alpha + \beta)$, c'est-à-dire que $(e(\alpha) \star e(\beta))_n = e(\alpha + \beta)_n$ pour tout $n \geqslant 0$.

II) Résolution d'une équation de suites

Dans cette partie, on propose de résoudre des équations de la forme $a \star u = b$ où a et b sont deux suites fixées avec $a_0 \neq 0$ et u est une suite inconnue.

7. Dans cette question, on suppose que $a = (\alpha, \beta, 0, 0, 0, \dots)$ et $b = (\gamma, \gamma, \gamma, \gamma, \gamma, \dots)$ où α, β et γ sont trois constantes réelles fixées avec $\alpha \neq 0$. On considère une suite u solution de l'équation $a \star u = b$.
   (a) Déterminer u_0.
   (b) Soit $n \geqslant 0$. À l'aide de l'égalité $(a \star u)_{n+1} = b_{n+1}$, exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. Quel type de suite reconnaît-on ?
   (c) En déduire l'expression de u_n en fonction de $n \geqslant 0$ et en distinguant deux cas.
8. Dans cette question, on revient au cas général où a et b sont deux suites fixées avec $a_0 \neq 0$. Montrer que $a \star u = b$ si et seulement si u est la suite définie par

$$u_0 = \frac{b_0}{a_0} \quad \text{et la relation de récurrence :} \quad \forall n \geqslant 1, \quad u_n = \frac{b_n}{a_0} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_{n-k}}{a_0} u_k.$$

9. **[Informatique]** On suppose avoir déjà écrit deux fonctions `suiteA` et `suiteB` qui prennent en argument un entier naturel n puis qui renvoient la liste des termes d'indice 0 à n des suites a et b respectivement. Le but de cette question est d'écrire une fonction `solution` qui prend en argument un entier naturel n puis qui renvoie la liste des termes d'indice 0 à n de l'unique suite u solution de l'équation $a \star u = b$. Pour cela, on considère la fonction suivante :

```
def n1porteKoi(n):
    A=suiteA(n)
    B=suiteB(n)
    L=[1]
    for i in range(1,n+1):
        S=0
        for k in range(i):
            S=S+A[k]*L[k]
        L=L+[B[i]-S]
    return L
```

   (a) Que renvoie `n1porteKoi(1)` en fonction de a_0, a_1, b_0 et b_1 ?
   (b) Que doit renvoyer `solution(1)` en fonction de a_0, a_1, b_0 et b_1 ?
   (c) Corriger la fonction `n1porteKoi` pour obtenir une fonction `solution`.

Problème 2 (Étude des applications de $[|n|]$ dans lui-même)

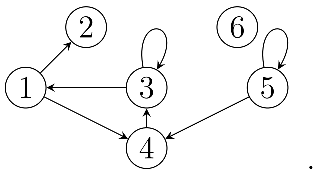
I) Introduction et définitions

Dans tout le sujet, la notation $[|n|]$ désigne l'ensemble des entiers $\{1, 2, \dots, n\}$. Par convention, $[|0|] = \emptyset$. L'objectif du problème est de décrire des parties de $F_n = \{f : [|n|] \to [|n|]\}$ vérifiant des propriétés particulières. Pour cela, on introduit un nouvel objet combinatoire : les graphes. **Définition 1**. Soit $n \in \mathbb{N}$. Un **graphe** G **à** n **sommets** est un couple (n, A) où $\underline{A \text{ est une partie de } [|n|] \times [|n|]}$. Un élément $k \in [|n|]$ est appelé **sommet** de G et un couple $(i, j) \in A$ est appelée **arête** de G.

Pour tout entier $n \geq 1$, on note $\mathscr{G}_n$ l'ensemble des graphes à n sommets.

Il est commode de représenter un graphe G par un dessin construit comme suit : on place tous les sommets de G et si (i, j) est une arête de G on dessine une flèche allant de i vers j.

Par exemple, $G = (6, \{(1, 2), (1, 4), (3, 1), (3, 3), (4, 3), (5, 4), (5, 5)\})$ est un élément de $\mathscr{G}_6$ que l'on représente ainsi :



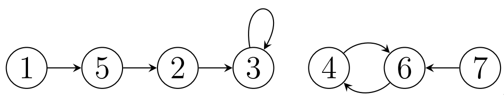
.

Définition 2. Soient $n \geq 1$ et $f : [|n|] \to [|n|]$ une application. On définit **le graphe** de f, noté G_f par :

$$G_f = (n, \{(i, f(i)), i \text{ décrit } [|n|]\}).$$

Par exemple, si l'application $f : [|7|] \to [|7|]$ est définie par : $f(1) = 5, f(2) = 3, f(3) = 3, f(4) = 6, f(5) = 2, f(6) = 4, f(7) = 6$

le graphe G_f est représenté par



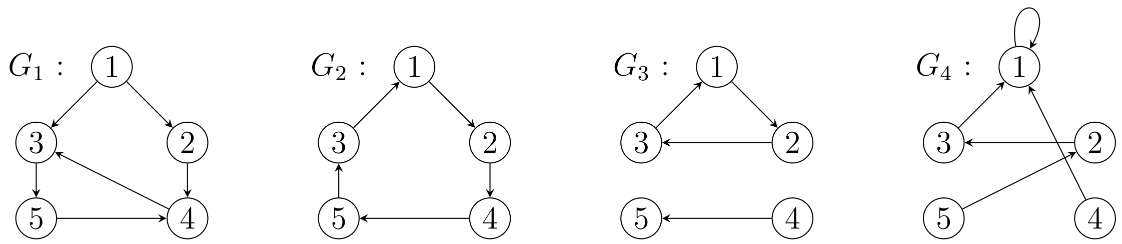
.

II) Dénombrement de familles de graphes

1. Dessiner tous les graphes de $\mathscr{G}_3$ ayant exactement 1 arête.
2. Quel est le nombre maximal d'arêtes pour un graphe G de $\mathscr{G}_3$?
3. Combien y-a-t-il de graphes de $\mathscr{G}_3$ ayant exactement 7 arêtes ?
4. Déterminer le cardinal de $\mathscr{G}_3$.
5. Soient $n \geq 1$ et $G \in \mathscr{G}_n$. Combien G a-t-il de sommets ? Quel est le nombre maximal d'arêtes pour G ?
6. Soit $n \geq 1$. Déterminer le cardinal de $\mathscr{G}_n$. Justifier votre réponse.
7. Soient $n \geq 1, k \in \mathbb{N}$. Combien y-a-t-il de graphes de $\mathscr{G}_n$ ayant exactement k arêtes ? Justifier votre réponse.
8. Soit $n \geq 1$. On dit qu'un graphe G de $\mathscr{G}_n$ est une chaîne s'il existe des entiers $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ de $[|n|]$ distincts deux à deux et tels que G est représenté par $a_1 \to a_2 \to \cdots \to a_{n-1} \to a_n$. Autrement dit, les arêtes de G sont exactement les couples de la forme (a_i, a_{i+1}) pour i décrivant $\{1, 2, \dots, n-1\}$. Combien y-a-t-il de chaînes de $\mathscr{G}_n$? Justifier votre réponse.

III) Applications et graphes

9. Pour chacun des graphes G_i suivants



   Expliquer s'il existe une application $f_i \in F_5$ vérifiant $G_{f_i} = G_i$. Dans le cas où f_i est bien définie, expliciter celle-ci.

10. Soit $n \geq 1$. On pose $A_n = \{G_f, f \text{ décrit } F_n\}$.
    (a) Montrer que pour tout $(f, h) \in F_n^2$, si $G_f = G_h$ alors $f = h$.
    (b) En déduire le cardinal de A_n.
11. Déduire des questions précédentes que pour tout $n \geq 1, n^n \leq 2^{(n^2)}$.

IV) Étude d'une partie de F_n

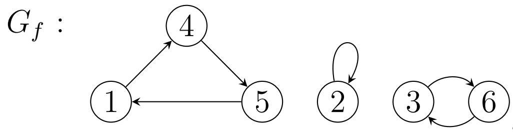
Dans la suite, pour tout $n \geq 1$ on note $I_n : [|n|] \to [|n|]$ l'application identité sur $[|n|]$ et pour tout élément $f \in F_n$ et $p \in \mathbb{N}$, la notation f^p désigne l'application $\underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{\text{p fois}}$. Par convention, $f^0 = I_n$.

Étant donnés $f \in F_n$ et $x \in [|n|]$, une manière pratique de trouver la valeur de $f^p(x)$ à l'aide de G_f est de se placer sur x dans G_f et d'avancer p fois suivant le chemin indiqué par les arêtes. La valeur atteinte est alors $f^p(x)$. On définit également B_n par

$$B_n = \{f \in F_n | \exists p \geq 1, f^p = I_n\}$$

et on note b_n son cardinal.

Par exemple, si $f : [|6|] \to [|6|]$ est définie par $f(1) = 4, f(2) = 2, f(3) = 6, f(4) = 5, f(5) = 1, f(6) = 3$,



, en partant de 1 et en avançant quatre fois, on arrive sur 4. On a donc $f^4(1) = 4$. Pour tout $i \in [|6|]$, on remarque que $f^6(i) = i$. Autrement dit $f^6 = I_6$. Par conséquent, f est un élément de B_6.

Désormais, on fixe $n \geq 1$.

12. Soit $f \in F_n$. Dans cette question, on démontre une condition suffisante pour que f ne soit pas un élément de B_n. On pourra utiliser cette propriété dans la suite du problème sans la redémontrer.
    (a) Montrer que pour tout $i \geq 1, f^i([|n|]) \subset f([|n|])$.
    (b) En déduire que si $f([|n|])$ est strictement inclus dans $[|n|]$ alors f n'est pas un élément de B_n.
13. Parmi les f_i existantes dans la question 9, la ou lesquelles sont des éléments de B_5 ? Justifier vos réponses.
14. Pour toute application f élément de B_3, dessiner le graphe G_f.
15. Pour chacune des applications f_i suivantes,
    (a) $f_1 : [|7|] \to [|7|], f_1(1) = 5, f_1(2) = 4, f_1(3) = 1, f_1(4) = 2, f_1(5) = 7, f_1(6) = 6, f_1(7) = 3$
    (b) $f_2 : [|7|] \to [|7|], f_2(1) = 3, f_2(2) = 5, f_2(3) = 4, f_2(4) = 7, f_2(5) = 7, f_2(6) = 3, f_2(7) = 4$
    (c) $f_3 : [|7|] \to [|7|], f_3(1) = 3, f_3(2) = 6, f_3(3) = 1, f_3(4) = 4, f_3(5) = 5, f_3(6) = 2, f_3(7) = 7$

    justifier s'il s'agit d'un élément de B_7. Dans le cas où f_i est un élément de B_7, expliciter une valeur $p \in \mathbb{N}$ vérifiant $(f_i)^p = I_7$. Le détail des calculs n'est pas demandé.
16. Déterminer le nombre de $f \in B_7$ vérifiant $f^2 = I_7$. Expliquer votre réponse.

17. Soit f un élément de B_n. On note $p \geq 1$ un entier vérifiant $f^p = I_n$. Montrer que f est bijective et exprimer la réciproque de f en fonction de f et p.
18. Soit $f \in F_n$.
    (a) Montrer que la liste $[f, f^2, \ldots, f^{(n^n+1)}]$ contient au moins une répétition.
    Dans la suite, on fixe q, r des entiers vérifiant $1 \leq q < r \leq n^n + 1$ et $f^q = f^r$.
    (b) En déduire que si f est bijective alors il existe un entier $p \geq 1$ vérifiant $f^p = I_n$.
19. Déduire des questions précédentes une formule simple pour b_n.

Corrigé du DS n^{o} 3 de mathématiques et d'informatique

Problème 1

Dans ce problème, on considère des suites de nombres réels indexées par les entiers naturels. Une telle suite sera notée $u = (u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, \dots) = (u_n)_{n \geqslant 0}$. On rappelle que la somme de deux suites a et b est la suite notée $a + b$ définie par $(a + b)_n = a_n + b_n$ pour tout $n \geqslant 0$. De même, on définit une nouvelle opération entre deux suites a et b, appelée le produit de convolution et notée $a \star b$, par :

$$\forall n \geqslant 0, \quad (a \star b)_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Ainsi, si $a = (0, 2, 4, 6, 8, \dots)$ et $b = (1, 3, 5, 7, 9, \dots)$ alors :

$$\begin{aligned}(a \star b)_4 &= a_0b_4 + a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1 + a_4b_0 \\ &= 0 \times 9 + 2 \times 7 + 4 \times 5 + 6 \times 3 + 8 \times 1 = 60.\end{aligned}$$

La partie I propose de calculer des exemples de produits de convolution. La partie II propose de résoudre une équation de suites faisant intervenir le produit de convolution.

On utilisera le langage Python pour écrire les fonctions demandées dans les questions d'informatique. Dans tout le sujet, l'expression «0 à n» signifiera tous les entiers «0, 1, 2, 3, ..., $n - 1$ et n» (0 et n inclus).

I) Quelques exemples

Dans cette partie, on considère les suites suivantes :

- *la suite des entiers naturels notée $i = (0, 1, 2, 3, 4, \dots)$;*
- *pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la suite $g(\alpha) = (1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4, \dots)$;*
- *pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la suite $e(\alpha)$ definie par $e(\alpha)_n = \alpha^n/n!$ pour tout $n \geqslant 0$.*

On utilisera la convention que $0^0 = 1$, ainsi $e(0) = (1, 0, 0, 0, 0, \dots) = g(0)$.

1. ***[Informatique]***
   (a) *Écrire une fonction `suiteI` qui prend en argument un entier naturel n puis qui renvoie la liste des termes d'indice 0 à n de la suite i. Ainsi, `suiteI(4)` renvoie la liste `[0,1,2,3,4]`.*

   ▶ Par exemple :

```
def suiteI(n):
    L=[]
    for i in range(n+1):
        L=L+[i]
    return L
```

   (b) *On considère la fonction `mystere` écrite ci-contre.*

```
def mystere(alpha,n):
    L=[1]
    for i in range(n):
        print(L[i])
        L=L+[L[i]*alpha]
    return L
```

i. *Détailler ce qu'affiche* `mystere(2,4)`*, c'est-à-dire le résultat de chaque exécution de l'instruction* `print` *et le résultat de l'instruction* `return`.

▶ Avant la boucle `for`, la liste `L` est initialisée à `L=[1]`. Ensuite, la boucle `for` va se répéter 4 fois, la variable `i` prenant successivement les valeurs entières de 0 à 3.

— Pour `i=0`, l'instruction `print` affiche `L[0]`, c'est-à-dire le premier élément de la liste `L=[1]`. Elle affiche donc $\boxed{1}$. Puis l'élément `L[0]*2=2` est ajouté à la fin de la liste `L` qui devient `L=[1,2]`.

— Pour `i=1`, l'instruction `print` affiche `L[1]`, c'est-à-dire le deuxième élément de la liste `L=[1,2]`. Elle affiche donc $\boxed{2}$. Puis l'élément `L[1]*2=4` est ajouté à la fin de la liste `L` qui devient `L=[1,2,4]`.

— Pour `i=2`, l'instruction `print` affiche `L[2]`, c'est-à-dire le troisième élément de la liste `L=[1,2,4]`. Elle affiche donc $\boxed{4}$. Puis l'élément `L[2]*2=8` est ajouté à la fin de la liste `L` qui devient `L=[1,2,4,8]`.

— Pour `i=3`, l'instruction `print` affiche `L[3]`, c'est-à-dire le quatrième élément de la liste `L=[1,2,4,8]`. Elle affiche donc $\boxed{8}$. Puis l'élément `L[2]*2=16` est ajouté à la fin de la liste `L` qui devient `L=[1,2,4,8,16]`.

Après la boucle `for`, l'instruction `return` renvoie la liste `L`, donc elle affiche $\boxed{\texttt{[1,2,4,8,16]}}$.

ii. *De manière générale, à quoi sert la fonction* `mystere` *(sans prendre en compte la ligne comportant l'inscrution* `print`*) ?*

▶ $\boxed{\text{La fonction } \texttt{mystere} \text{ prend en arguments un réel } \alpha \text{ et un entier naturel } n \text{ puis renvoie la liste des termes d'indice 0 à } n \text{ de la suite } g(\alpha)}$.

(c) i. *Écrire une fonction* `fact` *qui permet de calculer la factorielle d'un entier naturel.*

▶ Par exemple :

```
def fact(n):
    P=1
    for i in range(1,n+1):
        P=P*i
    return P
```

ii. *En utilisant la fonction* `fact`*, écrire une fonction* `suiteE` *qui prend en arguments un réel α et un entier naturel n puis qui renvoie la liste des termes d'indice 0 à n de la suite $e(\alpha)$.*

▶ Par exemple :

```
def suiteE(alpha,n):
    L=[]
    for i in range(n+1):
        L=L+[(alpha**i)/fact(i)]
    return L
```

(d) *Dans cette question, on suppose avoir déjà écrit deux fonctions* `suiteA` *et* `suiteB` *qui prennent en argument un entier naturel n puis qui renvoient la liste des termes d'indice 0 à n de deux suites a et b respectivement.*

i. *Écrire une fonction* `termeAstarB` *qui prend en argument un entier naturel n puis qui renvoie la valeur de $(a \star b)_n$.*

▶ Par exemple :

```
def termeAstarB(n):
    A=suiteA(n)
    B=suiteB(n)
    S=0
    for k in range(n+1):
        S=S+A[k]*B[n-k]
    return S
```

ii. *Écrire une fonction* `suiteAstarB` *qui prend en argument un entier naturel* n *puis qui renvoie la liste des termes d'indice 0 à* n *de la suite* $a \star b$.

▶ Par exemple :

```
def suiteAstarB(n):
    L=[]
    for i in range(n+1):
        L=L+[termeAstarB(i)]
    return L
```

2. *Montrer que* $(i \star i)_n = (n-1)n(n+1)/6$ *pour tout* $n \geqslant 0$.

▶ Soit $n \geqslant 0$. On a :

$$\begin{aligned}
(i \star i)_n &= \sum_{k=0}^{n} i_k i_{n-k} \quad \text{par définition du produit de convolution} \\
&= \sum_{k=0}^{n} k(n-k) \quad \text{par définition de la suite } i \\
&= n\sum_{k=0}^{n} k - \sum_{k=0}^{n} k^2 \quad \text{par linéarité} \\
&= n\frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{en reconnaissant des sommes usuelles} \\
&= \frac{n(n+1)}{6}\Big[3n-(2n+1)\Big] \quad \text{en factorisant par } \tfrac{n(n+1)}{6} \\
&= \frac{n(n+1)}{6}[n-1] = \boxed{\frac{(n-1)n(n+1)}{6}}.
\end{aligned}$$

3. *Soit* $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. *Montrer que :*

$$\forall n \geqslant 0, \quad (g(\alpha) \star g(\beta))_n = \begin{cases} (n+1)\alpha^n & \text{si } \alpha = \beta \\ \dfrac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} & \text{si } \alpha \neq \beta. \end{cases}$$

▶ Soit $n \geqslant 0$. On a :

$$\begin{aligned}
(g(\alpha) \star g(\beta))_n &= \sum_{k=0}^{n} g(\alpha)_k g(\beta)_{n-k} \quad \text{par définition du produit de convolution} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \alpha^k \beta^{n-k} \quad \text{par définition des suites } g(\alpha) \text{ et } g(\beta) \\
&= \beta^n \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^k \quad \text{par propriétés de la puissance et par linéarité.}
\end{aligned}$$

On reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique de raison $\frac{\alpha}{\beta}$. On considère deux cas :

Pour la somme des termes d'une suite géométrique, n'oubliez pas de distinguer le cas où la raison est égale à 1.

1^er^ cas : $\frac{\alpha}{\beta} = 1 \iff \alpha = \beta$. Alors :

$$(g(\alpha) \star g(\beta))_n = \beta^n \sum_{k=0}^{n} 1 = \beta^n (n+1) = \boxed{(n+1)\alpha^n} \quad \text{car } \alpha = \beta.$$

2e cas : $\frac{\alpha}{\beta} \neq 1 \iff \alpha \neq \beta$. Alors :

$$\begin{aligned}
(g(\alpha) \star g(\beta))_n &= \beta^n \frac{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n+1} - 1}{\frac{\alpha}{\beta} - 1} \\
&= \beta^n \frac{\frac{\alpha^{n+1}}{\beta^{n+1}} - 1}{\frac{\alpha-\beta}{\beta}} = \beta^{n+1} \frac{\frac{\alpha^{n+1}}{\beta^{n+1}} - 1}{\alpha - \beta} = \boxed{\frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}}.
\end{aligned}$$

Conclusion. Finalement, on a bien montré que :

$$\boxed{\forall n \geqslant 0, \quad (g(\alpha) \star g(\beta))_n = \begin{cases} (n+1)\alpha^n & \text{si } \alpha = \beta \\ \dfrac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} & \text{si } \alpha \neq \beta. \end{cases}}$$

4. *Dans cette question, on propose de retrouver le résultat de la question précédente (qu'on ne pourra donc pas utiliser) à l'aide d'une méthode différente. On fixe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et on pose $u = g(\alpha) \star g(\beta)$.*

   (a) *Calculer u_0 et u_1.*

   ▶ On a :

$$\begin{aligned}
u_0 &= (g(\alpha) \star g(\beta))_0 \quad \text{par définition de la suite } u \\
&= \sum_{k=0}^{0} g(\alpha)_k g(\beta)_{0-k} \quad \text{par définition du produit de convolution} \\
&= g(\alpha)_0 g(\beta)_0 \\
&= 1 \times 1 = \boxed{1} \quad \text{par définition des suites } g(\alpha) \text{ et } g(\beta) \\
\text{et} \quad u_1 &= (g(\alpha) \star g(\beta))_1 \quad \text{par définition de la suite } u \\
&= \sum_{k=0}^{1} g(\alpha)_k g(\beta)_{1-k} \quad \text{par définition du produit de convolution} \\
&= g(\alpha)_0 g(\beta)_1 + g(\alpha)_1 g(\beta)_0 \\
&= 1 \times \beta + 1 \times \alpha = \boxed{\beta + \alpha} \quad \text{par définition des suites } g(\alpha) \text{ et } g(\beta).
\end{aligned}$$

   (b) *Soit $n \geqslant 0$. Montrer que $(\alpha + \beta)u_{n+1} - u_{n+2} = \alpha\beta u_n$. Quel type de suite reconnaît-on ?*

   ▶ On a :

$$\begin{aligned}
&(\alpha + \beta)u_{n+1} - u_{n+2} \\
=&(\alpha + \beta)(g(\alpha) \star g(\beta))_{n+1} - (g(\alpha) \star g(\beta))_{n+2} \quad \text{par définition de la suite } u \\
=&(\alpha + \beta)\sum_{k=0}^{n+1} g(\alpha)_k g(\beta)_{n+1-k} - \sum_{k=0}^{n+2} g(\alpha)_k g(\beta)_{n+2-k} \quad \text{par définition du produit de convolution} \\
=& (\alpha + \beta)\sum_{k=0}^{n+1} \alpha^k \beta^{n+1-k} - \sum_{k=0}^{n+2} \alpha^k \beta^{n+2-k} \quad \text{par définition des suites } g(\alpha) \text{ et } g(\beta) \\
=& (\alpha + \beta)\beta\sum_{k=0}^{n+1} \alpha^k \beta^{n-k} - \beta^2\sum_{k=0}^{n+2} \alpha^k \beta^{n-k} \quad \text{par propriétés de la puissance et par linéarité} \\
=& (\alpha + \beta)\beta\left(\sum_{k=0}^{n} \alpha^k \beta^{n-k} + \alpha^{n+1}\beta^{-1}\right) - \beta^2\left(\sum_{k=0}^{n} \alpha^k \beta^{n-k} + \alpha^{n+1}\beta^{-1} + \alpha^{n+2}\beta^{-2}\right) \\
& \text{par associativité}
\end{aligned}$$

$$= \left[(\alpha+\beta)\beta - \beta^2\right] \sum_{k=0}^{n} \alpha^k \beta^{n-k} + (\alpha+\beta)\alpha^{n+1} - \beta\alpha^{n+1} - \alpha^{n+2}$$
$$= \alpha\beta \sum_{k=0}^{n} \alpha^k \beta^{n-k} + 0 \quad \text{après simplifications}$$
$$= \alpha\beta \sum_{k=0}^{n} g(\alpha)_k g(\beta)_{n-k} \quad \text{par définition des suites } g(\alpha) \text{ et } g(\beta)$$
$$= \alpha\beta (g(\alpha) \star g(\beta))_n \quad \text{par définition du produit de convolution}$$
$$= \boxed{\alpha\beta u_n} \quad \text{par définition de la suite } u.$$

On a donc montré que :

$$\boxed{u_{n+2} = (\alpha+\beta)u_{n+1} - \alpha\beta u_n}.$$

Puisque ceci est vrai pour tout $n \geqslant 0$, on reconnaît $\boxed{\text{une suite récurrente linéaire d'ordre 2}}$.

(c) Conclure en distinguant les cas $\alpha = \beta$ et $\alpha \neq \beta$.

▶ On résout l'équation caractéristique d'inconnue $q \in \mathbb{C}$ associée à la suite u d'après la relation de récurrence linéaire d'ordre 2 obtenue à la question précédente :

$$q^2 = (\alpha+\beta)q - \alpha\beta \iff q^2 - (\alpha+\beta)q + \alpha\beta = 0.$$

On reconnaît une équation du second degré de discriminant :

$$\Delta = (-(\alpha+\beta))^2 - 4 \times 1 \times \alpha\beta = (\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta$$
$$= \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - 4\alpha\beta = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha-\beta)^2 \geqslant 0.$$

On peut également éviter de perdre du temps à calculer ce discriminant en remarquant que α et β sont les solutions évidentes de l'équation caractéristique (car la somme des solutions vaut $\alpha+\beta$ et le produit vaut $\alpha\beta$). Mais attention : il faut distinguer le cas $\alpha = \beta$ où l'équation admet une seule solution double (donc $\Delta = 0$) et le cas $\alpha \neq \beta$ où l'équation admet deux solutions réelles distinctes (donc $\Delta > 0$).

1$^{\text{er}}$ cas : $\alpha = \beta$ donc $\Delta = (\alpha-\beta)^2 = 0$. Alors l'équation caractéristique admet une seule solution double qui est :

$$q_0 = \frac{-(-(\alpha+\beta))}{2 \times 1} = \frac{\alpha+\beta}{2} = \alpha \quad \text{car } \alpha = \beta.$$

Dans ce cas, on sait qu'il existe deux constantes $(\alpha, \mu) \in \mathbb{R}^2$ telles que :

$$\forall n \geqslant 0, \quad u_n = (\alpha + \mu n)q_0^n = (\alpha + \mu n)\alpha^n.$$

Pour $n = 0$ et $n = 1$, on obtient d'après les résultats de la question 4(a) :

$$1 = u_0 = (\lambda + \mu \times 0)\alpha^0 = \lambda \quad \text{et} \quad \beta + \alpha = u_1 = (\lambda + \mu \times 1)\alpha^1 = (\lambda+\mu)\alpha.$$

On en déduit que $\lambda = 1$ et $(1+\mu)\alpha = \alpha + \beta = 2\alpha$ (car $\alpha = \beta$) donc $\mu = 1$.

En toute rigueur, on obtient $\mu = 1$ seulement si $\alpha \neq 0$ (car si $\alpha = 0$ la relation $(1+\mu)\alpha = 2\alpha$ ne permet pas d'en déduire μ). Il faudrait donc distinguer le cas $\alpha = 0$. Mais dans ce cas $\alpha = \beta = 0$ et $u = g(0) \star g(0) = g(0)$, ce qui constitue donc un cas particulier inintéressant (et on retrouve bien le résultat à démontrer : $u_n = g(0)_n = 0^n = (n+1)0^n$).

On a donc montré dans le 1^{er} cas que :

$$\forall n \geqslant 0, \quad \boxed{u_n = (1+n)\alpha^n}.$$

2^e cas : $\alpha \neq \beta$ donc $\Delta = (\alpha-\beta)^2 > 0$. Alors l'équation caractéristique admet deux solutions réelles distinctes qui sont :

$$q_1 = \frac{-(-(\alpha+\beta)) + (\alpha-\beta)}{2\times 1} = \alpha \quad \text{et} \quad q_2 = \frac{-(-(\alpha+\beta)) - (\alpha-\beta)}{2\times 1} = \beta.$$

Dans ce cas, on sait qu'il existe deux constantes $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ telles que :

$$\forall n \geqslant 0, \quad u_n = \lambda_1 q_1^n + \lambda_2 q_2^n = \lambda_1 \alpha^n + \lambda_2 \beta^n.$$

Pour $n = 0$ et $n = 1$, on obtient d'après les résultats de la question 4(a) :

$$1 = u_0 = \lambda_1 \alpha^0 + \lambda_2 \beta^0 = \lambda_1 + \lambda_2 \quad \text{et} \quad \beta + \alpha = u_1 = \lambda_1 \alpha^1 + \lambda_2 \beta^1 = \lambda_1 \alpha + \lambda_2 \beta.$$

On en déduit que $\lambda_2 = 1 - \lambda_1$ et :

$$\beta + \alpha = \lambda_1 \alpha + (1-\lambda_1)\beta = \beta + \lambda_1(\alpha - \beta) \quad \text{donc} \quad \lambda_1 = \frac{\alpha}{\alpha-\beta} \quad \text{car } \alpha - \beta \neq 0 \text{ puisque } \alpha \neq \beta$$

$$\text{et} \quad \lambda_2 = 1 - \lambda_1 = 1 - \frac{\alpha}{\alpha-\beta} = \frac{-\beta}{\alpha-\beta}.$$

On a donc montré dans le 2^e cas que :

$$\forall n \geqslant 0, \quad \boxed{u_n = \frac{\alpha}{\alpha-\beta}\alpha^n + \frac{-\beta}{\alpha-\beta}\beta^n}.$$

Conclusion. Finalement, on a bien retrouvé que :

$$\boxed{\forall n \geqslant 0, \quad (g(\alpha) \star g(\beta))_n = u_n = \begin{cases} (n+1)\alpha^n & \text{si } \alpha = \beta \\ \dfrac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} & \text{si } \alpha \neq \beta. \end{cases}}$$

5. *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Dans cette question, on propose de calculer $i \star g(\alpha)$.*

   (a) *Soit $n \geqslant 0$. Simplifier $(i \star g(\alpha))_n$ dans le cas où $\alpha = 1$.*

   ▶ On a :

$$\begin{aligned} (i \star g(1))_n &= \sum_{k=0}^{n} i_k g(1)_{n-k} \quad \text{par définition du produit de convolution} \\ &= \sum_{k=0}^{n} k 1^{n-k} \quad \text{par définitions des suites } i \text{ et } g(1) \\ &= \sum_{k=0}^{n} k = \boxed{\frac{n(n+1)}{2}} \quad \text{en reconnaissant une somme usuelle.} \end{aligned}$$

   (b) *Dans cette question, on suppose que $\alpha \neq 1$ et on pose $u = ((i \star g(\alpha))_{n+1} - (i \star g(\alpha))_n)_{n \geqslant 0}$.*

      i. *Soit $n \geqslant 0$. Montrer que u_n est égal à la somme des $n+1$ premiers termes de la suite $g(\alpha)$ et en déduire une expression de u_n qui n'utilise pas le symbole Σ.*

▶ On a :

$$\begin{aligned}
u_n &= (i\star g(\alpha))_{n+1} - (i\star g(\alpha))_n \quad \text{par définition de la suite } u\\
&= \sum_{k=0}^{n+1} i_k g(\alpha)_{n+1-k} - \sum_{k=0}^{n} i_k g(\alpha)_{n-k} \quad \text{par définition du produit de convolution}\\
&= \sum_{k=0}^{n+1} k g(\alpha)_{n+1-k} - \sum_{k=0}^{n} k g(\alpha)_{n-k} \quad \text{par définition de la suite } i\\
&= \sum_{\ell=-1}^{n} (\ell+1) g(\alpha)_{n+1-(\ell+1)} - \sum_{k=0}^{n} k g(\alpha)_{n-k}\\
&\quad \text{en utilisant le décalage d'indice } k=\ell+1 \iff \ell=k-1 \text{ dans la 1}^{\text{re}} \text{ somme}\\
&= 0\times g(\alpha)_{n+1} + \sum_{k=0}^{n}(k+1) g(\alpha)_{n-k} - \sum_{k=0}^{n} k g(\alpha)_{n-k} \quad \text{par associativité}\\
&= \sum_{k=0}^{n}\Big(k+1-k\Big) g(\alpha)_{n-k} \quad \text{par linéarité}\\
&= \sum_{k=0}^{n} g(\alpha)_{n-k}\\
&= \boxed{\sum_{\ell=0}^{n} g(\alpha)_\ell} \quad \text{en utilisant l'inversion de l'ordre de sommation } \ell=n-k.
\end{aligned}$$

On retrouve bien $\boxed{\text{la somme des } n+1 \text{ premiers termes de la suite } g(\alpha)}$. Or la suite $g(\alpha)$ est définie par $g(\alpha) = (1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4, \dots)$. On reconnaît donc la somme des termes d'une suite géométrique de raison α. Puisque $\alpha \neq 1$ par hypothèse de l'énoncé, on en déduit que :

$$u_n = \sum_{\ell=0}^{n} g(\alpha)_\ell = \sum_{\ell=0}^{n} \alpha^\ell = \boxed{\frac{\alpha^{n+1}-1}{\alpha-1}}.$$

ii. Soit $n \geqslant 1$. En calculant la somme $\sum_{k=0}^{n-1} u_k$ de deux façons différentes, déterminer une expression de $(i\star g(\alpha))_n$ qui n'utilise pas le symbole Σ.

▶ On a d'une part :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} u_k &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha^{k+1}-1}{\alpha-1} \quad \text{d'après le résultat de la question précédente}\\
&= \frac{1}{\alpha-1}\left(\alpha\sum_{k=0}^{n-1}\alpha^k - \sum_{k=0}^{n-1} 1\right) \quad \text{par linéarité}\\
&= \frac{1}{\alpha-1}\left(\alpha\frac{\alpha^n-1}{\alpha-1} - n\right) \quad \text{en reconnaissant des sommes usuelles}\\
&= \frac{\alpha^{n+1}-\alpha-n(\alpha-1)}{(\alpha-1)^2} = \boxed{\frac{\alpha^{n+1}-(n+1)\alpha+n}{(\alpha-1)^2}}.
\end{aligned}$$

Et d'autre part :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} u_k &= \sum_{k=0}^{n-1}\Big((i\star g(\alpha))_{k+1} - (i\star g(\alpha))_k\Big) \quad \text{par définition de la suite } u\\
&= (i\star g(\alpha))_{(n-1)+1} - (i\star g(\alpha))_0 \quad \text{en reconnaissant une somme télescopique}\\
&= \boxed{(i\star g(\alpha))_n - (i\star g(\alpha))_0}.
\end{aligned}$$

Or on a par définition du produit de convolution et des suites i et $g(\alpha)$:

$$(i \star g(\alpha))_0 = \sum_{k=0}^{0} i_k g(\alpha)_{0-k} = i_0 g(\alpha)_0 = 0 \times 1 = 0.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{(i \star g(\alpha))_n = \frac{\alpha^{n+1} - (n+1)\alpha + n}{(\alpha - 1)^2}}.$$

Remarquez que le calcul de cette expression est a priori vrai seulement pour $n \geqslant 1$ car la somme $\sum_{k=0}^{n-1} u_k$ n'a plus vraiment de sens si $n = 0$.

(c) Vérifier que l'expression obtenue à la question précédente reste vraie si $n = 0$ puis conclure.

► On a montré dans la question précédente que $(i \star g(\alpha))_0 = 0$. Or on obtient en remplaçant n par 0 dans l'expression obtenue à la question précédente :

$$\frac{\alpha^{0+1} - (0+1)\alpha + 0}{(\alpha - 1)^2} = \frac{\alpha - \alpha}{(1 - \alpha)^2} = 0.$$

Donc $\boxed{\text{l'expression reste vraie si } n = 0}$. Finalement, on a montré que :

$$\boxed{\forall n \geqslant 0, \quad (i \star g(\alpha))_n = \begin{cases} \frac{n(n+1)}{2} & \text{si } \alpha = 1 \\ \frac{\alpha^{n+1} - (n+1)\alpha + n}{(\alpha - 1)^2} & \text{si } \alpha \neq 1. \end{cases}}$$

N'oubliez pas le cas $\alpha = 1$ traité à la question 5(a). Rédigez des conclusions qui prennent en compte tous vos résultats intermédiaires afin de montrer que vous avez compris l'ordre logique des questions posées.

6. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. À l'aide d'une formule du cours à préciser, montrer que $e(\alpha) \star e(\beta) = e(\alpha + \beta)$, c'est-à-dire que $(e(\alpha) \star e(\beta))_n = e(\alpha + \beta)_n$ pour tout $n \geqslant 0$.

► Soit $n \geqslant 0$. On a :

$$\begin{aligned}
(e(\alpha) \star e(\beta))_n &= \sum_{k=0}^{n} e(\alpha)_k e(\beta)_{n-k} \quad \text{par définition du produit de convolution} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!} \frac{\beta^{n-k}}{(n-k)!} \quad \text{par définition des suites } e(\alpha) \text{ et } e(\beta) \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \alpha^k \beta^{n-k} \quad \text{par linéarité} \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha^k \beta^{n-k} \quad \text{en reconnaissant la définition du coefficient binomial } \binom{n}{k} \\
&= \frac{1}{n!} (\alpha + \beta)^n \quad \text{d'après la } \boxed{\text{formule du binôme de Newton}} \\
&= \frac{(\alpha + \beta)^n}{n!} = \boxed{e(\alpha + \beta)_n} \quad \text{par définition de la suite } e(\alpha + \beta).
\end{aligned}$$

Puisque ceci est vrai pour tout $n \geqslant 0$, on a bien montré que :

$$\boxed{e(\alpha) \star e(\beta) = e(\alpha + \beta)}.$$

II) Résolution d'une équation de suites

Dans cette partie, on propose de résoudre des équations de la forme $a \star u = b$ où a et b sont deux suites fixées avec $a_0 \neq 0$ et u est une suite inconnue.

7. *Dans cette question, on suppose que $a = (\alpha, \beta, 0, 0, 0, \dots)$ et $b = (\gamma, \gamma, \gamma, \gamma, \gamma, \dots)$ où α, β et γ sont trois constantes réelles fixées avec $\alpha \neq 0$. On considère une suite u solution de l'équation $a \star u = b$.*

(a) *Déterminer u_0.*

▶ On sait que $a \star u = b$, donc $(a \star u)_n = b_n$ pour tout n$\geqslant 0$. En particulier, on a pour $n = 0$:

$$(a \star u)_0 = b_0 = \gamma \quad \text{par définition de la suite } b.$$

Or :

$$(a \star u)_0 = \sum_{k=0}^{0} a_k u_{0-k} = a_0 u_0 = \alpha u_0 \quad \text{par définition du produit de convolution et de la suite } a.$$

On en déduit que :

$$\alpha u_0 = (a \star u)_0 = b_0 = \gamma \quad \text{donc} \quad \boxed{u_0 = \frac{\gamma}{\alpha}} \quad \text{car } \alpha \neq 0.$$

(b) *Soit $n \geqslant 0$. À l'aide de l'égalité $(a \star u)_{n+1} = b_{n+1}$, exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. Quel type de suite reconnaît-on ?*

▶ On a :

$$\begin{aligned}(a \star u)_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} a_k u_{n+1-k} \quad \text{par définition du produit de convolution} \\ &= a_0 u_{n+1} + a_1 u_n + \sum_{k=2}^{n+1} \underbrace{a_k}_{=0} u_{n+1-k} \quad \text{par associativité} \\ &= \alpha u_{n+1} + \beta u_n + 0 \quad \text{par définition de la suite } a.\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\alpha u_{n+1} + \beta u_n = (a \star u)_{n+1} = b_{n+1} = \gamma \quad \text{par définition de la suite } b$$

$$\text{donc} \quad u_{n+1} = \frac{\gamma - \beta u_n}{\alpha} = \boxed{\frac{-\beta}{\alpha} u_n + \frac{\gamma}{\alpha}} \quad \text{car } \alpha \neq 0.$$

Puisque ceci est vrai pour tout $n \geqslant 0$, on reconnaît $\boxed{\text{une suite arithmético-géométrique}}$.

(c) *En déduire l'expression de u_n en fonction de $n \geqslant 0$ et en distinguant deux cas.*

▶ On considère deux cas :

Pour une suite arithmético-géométrique, n'oubliez pas de distinguer le cas où la suite est arithmétique.

1^er cas : $\frac{-\beta}{\alpha} = 1 \iff \beta = -\alpha$. Alors la suite u est arithmétique de raison $\frac{\gamma}{\alpha}$ d'après le résultat de la question précédente et de premier terme $u_0 = \frac{\gamma}{\alpha}$ d'après le résultat de la question 7(a). Donc :

$$\forall n \geqslant 0, \quad u_n = \frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\gamma}{\alpha} n = \boxed{\frac{\gamma}{\alpha}(n+1)}.$$

2^e cas : $\frac{-\beta}{\alpha} \neq 1 \iff \beta \neq -\alpha$. Alors on résout l'équation caractéristique d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ associée à la suite u d'après la relation de récurrence arithmético-géométrique obtenue à la question précédente :

$$x = \frac{-\beta}{\alpha} x + \frac{\gamma}{\alpha} \iff x = \frac{\frac{\gamma}{\alpha}}{1 + \frac{\beta}{\alpha}} = \frac{\gamma}{\alpha + \beta} \quad \text{car } 1 + \frac{\beta}{\alpha} \neq 0 \text{ puisque } \beta \neq -\alpha.$$

On pose une suite auxiliaire $w = (w_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $w_n = u_n - x$ pour tout $n \geqslant 0$. Alors :

$$\forall n \geqslant 0, \quad w_{n+1} = u_{n+1} - x = \left(\frac{-\beta}{\alpha}u_n + \frac{\gamma}{\alpha}\right) - \left(\frac{-\beta}{\alpha}x + \frac{\gamma}{\alpha}\right) = \frac{-\beta}{\alpha}\Big(u_n - x\Big) = \frac{-\beta}{\alpha}w_n.$$

On reconnaît une suite géométrique de raison $\frac{-\beta}{\alpha}$ et de premier terme :

$$w_0 = u_0 - x = \frac{\gamma}{\alpha} - \frac{\gamma}{\alpha+\beta} = \frac{\gamma\beta}{\alpha(\alpha+\beta)} \quad \text{d'après le résultat de la question 7(a).}$$

Donc :

$$\forall n \geqslant 0, \quad w_n = \frac{\gamma\beta}{\alpha(\alpha+\beta)}\left(\frac{-\beta}{\alpha}\right)^n.$$

On en déduit que :

$$\forall n \geqslant 0, \quad u_n = w_n + x = \boxed{\frac{\gamma\beta}{\alpha(\alpha+\beta)}\left(\frac{-\beta}{\alpha}\right)^n + \frac{\gamma}{\alpha+\beta}}.$$

<u>Conclusion</u>. Finalement, on a montré que :

$$\boxed{u_n = \begin{cases} \frac{\gamma}{\alpha}(n+1) & \text{si } \beta = -\alpha \\ \frac{\gamma\beta}{\alpha(\alpha+\beta)}\left(\frac{-\beta}{\alpha}\right)^n + \frac{\gamma}{\alpha+\beta} & \text{si } \beta \neq -\alpha. \end{cases}}$$

8. *Dans cette question, on revient au cas général où a et b sont deux suites fixées avec $a_0 \neq 0$. Montrer que $a \star u = b$ si et seulement si u est la suite définie par*

$$u_0 = \frac{b_0}{a_0} \quad \textit{et la relation de récurrence :} \quad \forall n \geqslant 1, \quad u_n = \frac{b_n}{a_0} - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{a_{n-k}}{a_0}u_k.$$

► On raisonne par double implication.
<u>1re implication</u>. On suppose que $a \star u = b$, donc $(a\star u)_n = b_n$ pour tout $n \geqslant 0$. On a en particulier $(a\star u)_0 = b_0$ pour $n = 0$. Or :

$$(a\star u)_0 = \sum_{k=0}^{0} a_k u_{0-k} = a_0 u_0 \quad \text{par définition du produit de convolution.}$$

On en déduit que :

$$a_0 u_0 = (a\star u)_0 = b_0 \quad \text{donc} \quad \boxed{u_0 = \frac{b_0}{a_0}} \quad \text{car } a_0 \neq 0.$$

Soit $n \geqslant 1$. On a :

$$\begin{aligned} b_n &= (a\star u)_n \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k u_{n-k} \quad \text{par définition du produit de convolution} \\ &= \sum_{\ell=0}^{n} a_{n-\ell}u_\ell \quad \text{en utilisant l'inversion de l'odre de sommation } k = n-\ell \iff \ell = n-k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-k}u_k + a_0 u_n \quad \text{par associativité.} \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$u_n = \frac{b_n - \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-k}u_k}{a_0} = \boxed{\frac{b_n}{a_0} - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{a_{n-k}}{a_0}u_k} \quad \text{par linéarité.}$$

Puisque ceci est vrai pour tout $n \geqslant 1$, on a bien montré la 1re implication.
2e implication. On suppose que $u_0 = \frac{b_0}{a_0}$ et que $u_n = \frac{b_n}{a_0} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_{n-k}}{a_0} u_k$ pour tout $n \geqslant 1$. En reprenant les calculs de la 1re implication, on obtient :

$$(a \star u)_0 = a_0 u_0 = a_0 \frac{b_0}{a_0} = b_0$$

et pour tout $n \geqslant 1$:

$$\begin{aligned}(a \star u)_n &= \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-k} u_k + a_0 u_n \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-k} u_k + a_0 \left(\frac{b_n}{a_0} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_{n-k}}{a_0} u_k \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-k} u_k + b_n - \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-k} u_k = b_n.\end{aligned}$$

On en déduit que $(a \star u)_n = b_n$ pour tout $n \geqslant 0$, donc $a \star u = b$ ce qui prouve la 2e implication.
Conclusion. Par double implication, on a bien montré l'équivalence :

$$\boxed{a \star u = b \iff \left(u_0 = \frac{b_0}{a_0} \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 1,\ u_n = \frac{b_n}{a_0} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_{n-k}}{a_0} u_k \right)}.$$

On peut également aller plus vite en raisonnant directement par équivalences mais en n'oubliant pas de distinguer les cas $n = 0$ et $n \geqslant 1$.

9. ***[Informatique]*** *On suppose avoir déjà écrit deux fonctions* `suiteA` *et* `suiteB` *qui prennent en argument un entier naturel n puis qui renvoient la liste des termes d'indice 0 à n des suites a et b respectivement. Le but de cette question est d'écrire une fonction* `solution` *qui prend en argument un entier naturel n puis qui renvoie la liste des termes d'indice 0 à n de l'unique suite u solution de l'équation $a \star u = b$. Pour cela, on considère la fonction suivante :*

```
def n1porteKoi(n):
    A=suiteA(n)
    B=suiteB(n)
    L=[1]
    for i in range(1,n+1):
        S=0
        for k in range(i):
            S=S+A[k]*L[k]
        L=L+[B[i]-S]
    return L
```

(a) *Que renvoie* `n1porteKoi(1)` *en fonction de a_0, a_1, b_0 et b_1 ?*

▶ Avant la première boucle `for`, les listes `A`, `B` et `L` sont initialisées à `A=[`a_0`,`a_1`]`, `B=[`b_0`,`b_1`]` et `L=[1]`. Ensuite, la première boucle `for` va se répéter une seule fois, la variable `i` prenant seulement la valeur `i=1`. Avant la deuxième boucle `for`, la variable `S` est initialisée à `S=0`. Ensuite, la deuxième boucle `for` va se répéter une seule fois, la variable `k` prenant seulement la valeur `k=0`. Le nombre `A[0]*L[0]=`a_0`*1=`a_0 est ajouté à la variable `S` qui devient `S=`a_0. Après la deuxième boucle `for`, l'élément `B[1]-S=`b_1`-`a_0 est ajouté à la fin de la liste `L` qui devient `L=[1,`b_1`-`a_0`]`. Après la première boucle `for`, la fonction renvoie la liste `L`, c'est-à-dire $\boxed{\texttt{[1,}b_1\texttt{-}a_0\texttt{]}}$.

(b) *Que doit renvoyer* `solution(1)` *en fonction de a_0, a_1, b_0 et b_1 ?*

▶ D'après l'énoncé, `solution(1)` renvoie la liste des termes d'indice 0 à 1 de la suite u solution de l'équation $a \star u = b$, c'est-à-dire `[`u_0`,`u_1`]`. Or on a d'après le résultat de la question 8 :

$$u_0 = \frac{b_0}{a_0} \quad \text{et} \quad u_1 = \frac{b_1}{a_0} - \sum_{k=0}^{1-1} \frac{a_{1-k}}{a_0} u_k = \frac{b_1}{a_0} - \frac{a_1}{a_0} u_0 = \frac{b_1}{a_0} - \frac{a_1}{a_0}\frac{b_0}{a_0} = \frac{a_0 b_1 - a_1 b_0}{a_0^2}.$$

Par conséquent, `solution(1)` renvoie $\boxed{\texttt{[}b_0/a_0\texttt{,}(a_0b_1 - a_1b_0)/a_0^2\texttt{]}}$.

(c) Corriger la fonction `n1porteKoi` *pour obtenir une fonction* `solution`*.*

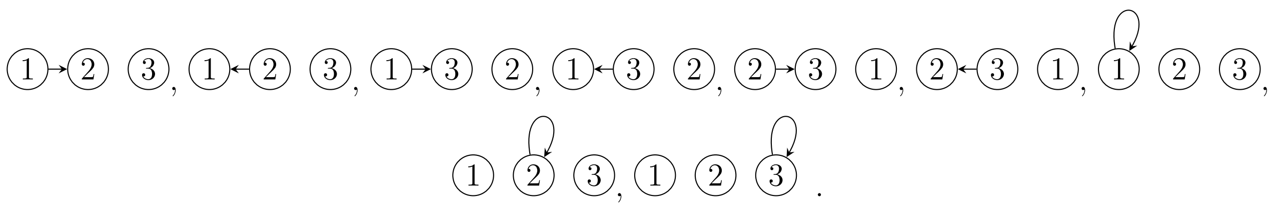
▶ Par exemple :

```
def solution(n):
    A=suiteA(n)
    B=suiteB(n)
    L=[B[0]/A[0]]
    for i in range(1,n+1):
        S=0
        for k in range(i):
            S=S+A[i-k]*L[k]/A[0]
        L=L+[B[i]/A[0]-S]
    return L
```

N'hésitez pas à faire plusieurs essais de modifications de la fonction `n1porteKoi` *puis à vérifier le résultat de la question précédente pour chacun des essais à l'aide d'un raisonnement similaire à celui de la question 9(a). Par tâtonnements, vous comprendrez les effets de chaque modification et les essais suivants se rapprocheront de plus en plus de la fonction* `solution` *cherchée.*

Problème 2
Énoncé et corrigé de V. Vong

1. Représentons les différents graphes de $\mathscr{G}_3$ ayant exactement 1 arête :



On a bien tous les graphes à une arête de $\mathscr{G}_3$ puisque par définition l'ensemble des arêtes possibles est exactement égal à

$$[|3|] \times [|3|] = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}.$$

2. L'ensemble des arêtes étant de cardinal 9, on en déduit que le nombre maximal d'arêtes d'un graphe de $\mathscr{G}_3$ est égal à 9.

3. On cherche à compter le nombre d'éléments de $\{(7, A), A \subset [|3|]\times[|3|] \text{ et } \mathrm{card}(A) = 7\}$. Par construction, cela revient donc à compter le nombre de 7-combinaisons de $[|3|] \times [|3|]$ qui contient exactement 9 éléments. Il y en a donc exactement $\boxed{\binom{9}{7} = 36}$.

4. Par définition, $\mathscr{G}_3 = \{(3, A), A \subset [|3|] \times [|3|]\}$. Compter le nombre d'éléments de $\mathscr{G}_3$ revient donc à compter le nombre de sous-parties de $[|3|] \times [|3|]$. Or il y en a exactement 2^9. Il en résulte que

$$\boxed{\text{card}(\mathscr{G}_3) = 2^9.}$$

5. Soient $n \geq 1, G \in \mathscr{G}_n$. Par définition de G, il possède exactement n sommets. L'ensemble de ses arêtes étant une partie de $[|n|] \times [|n|]$, on en déduit que G a au plus n^2 arêtes.
6. Soit $n \geq 1$. Par définition, $\mathscr{G}_n = \{(n, A), A \subset [|n|] \times [|n|]\}$. Compter le nombre d'éléments de $\mathscr{G}_n$ revient donc à compter le nombre de sous-parties de $[|n|] \times [|n|]$. Or il y en a exactement $2^{(n^2)}$. Il en résulte que

$$\boxed{\text{card}(\mathscr{G}_n) = 2^{(n^2)}.}$$

7. Soient $n \geq 1, k \in \mathbb{N}$. L'ensemble des graphes de $\mathscr{G}_n$ ayant exactement k arêtes que l'on note $E_{n,k}$ est exactement l'ensemble $\{(n, A), A \subset [|n|] \times [|n|] \text{ et } \text{card}(A) = k\}$. Il nous suffit donc de compter le nombre de k-combinaisons de $[|n|] \times [|n|]$ qui est de cardinal n^2. D'où

$$\boxed{\text{card}(E_{n,k}) = \binom{n^2}{k}.}$$

8. Soit $n \geq 1$. Notons $C_n = \{G \in \mathscr{G}_n | G \text{ est une chaîne}\}$ et L_n l'ensemble des n-listes sans répétition de $[|n|]$. Considérons les applications suivantes :

$$\begin{array}{rl} \phi : C_n & \to L_n \\ a_1 \to a_2 \to \ldots \to a_n & \mapsto [a_1, a_2, \ldots, a_n] \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rl} \psi : L_n & \to C_n \\ [a_1, a_2, \ldots, a_n] & \mapsto a_1 \to a_2 \to \ldots \to a_n \end{array}.$$

Montrons que ϕ et ψ sont réciproques l'une de l'autre.

— Montrons que $\psi \circ \phi = I_{C_n}$.
Soit $a_1 \to a_2 \to \ldots \to a_n$ une chaîne. Par hypothèse, les a_i sont bien distincts deux à deux. Par construction :

$$\phi(a_1 \to a_2 \to \ldots \to a_n) = [a_1, a_2, \ldots, a_n].$$

D'où $\psi(\phi(a_1 \to a_2 \to \ldots \to a_n)) = \psi([a_1, a_2, \ldots, a_n]) = a_1 \to a_2 \to \ldots \to a_n$. On a bien $\psi \circ \phi = I_{C_n}$.

— Monntrons que $\phi \circ \psi = I_{L_n}$. Soit $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ un élément de L_n. Par hypothèse, les a_i sont bien distincts deux à deux. Par construction :

$$\psi([a_1, a_2, \ldots, a_n]) = a_1 \to a_2 \to \ldots \to a_n.$$

D'où $\phi(\psi([a_1, a_2, \ldots, a_n)] = \phi(a_1 \to a_2 \to \ldots \to a_n) = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$. On a bien $\phi \circ \psi = I_{L_n}$.

Il en résulte que ϕ est une bijection entre C_n et L_n. Ils ont donc le même cardinal. D'où

$$\boxed{\text{card}(C_n) = n!.}$$

9. — G_1 ne peut pas être le graphe d'une application car $(1, 2), (1, 3)$ sont deux arêtes qui partent de 1.
   — En définissant $f_2 : [|5|] \to [|5|]$ par : $f(1) = 2, f(2) = 4, f(3) = 1, f(4) = 5, f(5) = 3$, on a bien $G_{f_2} = G_2$.

— G_3 ne peut pas être le graphe d'une application car aucune arête ne part de 5.

— En définissant $f_4 : [|5|] \to [|5|]$ par : $f(1) = 1, f(2) = 3, f(3) = 1, f(4) = 1, f(5) = 2$, on a bien $G_{f_4} = G_4$.

10. Soit $n \geq 1$. On pose $A_n = \{G_f, f \text{ décrit } F_n\}$.

(a) Soit $(f, h) \in F_n^2$, supposons que $G_f = G_h$. Montrons que $f = h$.
Soit $i \in [|n|]$.
Par hypothèse, $G_f = G_h$. Donc $(i, f(i)) = (i, h(i))$. Autrement dit, $f(i) = h(i)$.
Il en résulte que $f = h$.

(b) Dans la description de A_n, les éléments apparaissent une et une seule fois. Donc $\text{card}(A_n) = \text{card}(F_n)$.
Donc :

$$\boxed{\text{card}(A_n) = n^n.}$$

11. Soit $n \geq 1$. L'ensemble A_n étant inclus dans $\mathscr{G}_n$, on en déduit que

$$\text{card}(A_n) \leq \text{card}(\mathscr{G}_n).$$

D'où

$$\boxed{n^n \leq 2^{(n^2)}.}$$

12. Soit $f \in F_n$.

(a) Soit $i \geq 1$. Montrons que $f^i([|n|]) \subset f([|n|])$.
Soit $y \in f^i([|n|])$. Par définition, il existe $x \in [|n|]$ vérifiant $f^i(x) = y$. Autrement dit $f\left(f^{i-1}(x)\right) = y$. Or $f^{i-1}(x) \in [|n|]$. En posant $z = f^{i-1}(x)$, on a $z \in [|n|]$ et $f(z) = y$. Donc $y \in f([|n|])$.
On a bien $f^i([|n|]) \subset f([|n|])$.

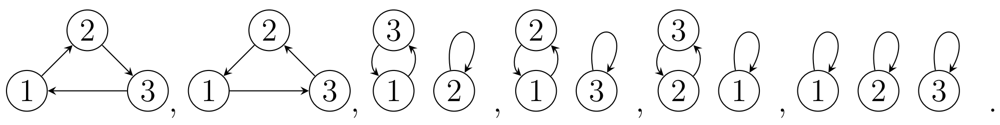
(b) Supposons que $f([|n|])$ est strictement inclus dans $[|n|]$. Autrement dit f n'est pas surjective. D'après la question précédente,

$$\forall i \geq 1, f^i([|n|]) \subset f([|n|]).$$

Par transitivité de l'inclusion, pour tout $i \geq 1$, $f^i([|n|])$ est strictement inclus dans $[|n|]$. Donc pour tout $i \geq 1$, f^i n'est pas surjective. En particulier, pour tout $i \geq 1$, f^i n'est pas l'application identité. Autrement dit, f n'est pas un élément de B_n.

13. Constatons que l'on a $f_2^5 = I_5$ donc f_2 est un élément de B_5. On a $f_4([|5|]) = \{1, 2, 3\}$. Donc pour tout $i \geq 1$, $f_4^i([|5|])$ est nécessairement inclus dans $\{1, 2, 3\}$ et ne peut donc être égal à $[|5|]$ ce qui implique que $f_4^i \neq I_5$. Donc f_4 n'est pas un élément de B_4.

14. Représentons tous les éléments G_f où f est un élément de B_3 :



15. (a) Dans le cas de f_1, on constate que $f_1^4 = I_7$. Donc f_1 est bien un élément de B_7.

(b) Constatons que $f_2([|7|]) = \{3, 4, 5, 7\}$. Donc pour tout $i \geq 1$, $f_2^i([|7|]) \subset \{3, 4, 5, 7\}$. Il en résulte que pour tout $i \geq 1$, $f_2^i([|7|])$ n'est jamais égal à $[|7|]$ et donc $f_2^i \neq I_7$. Ainsi, f_2 n'est pas un élément de B_7.

(c) On constate que l'on a $f_3^2 = I_7$. Donc f_3 est un élément de B_7.

16. Notons $C = \{f \in B_7 | f^2 = I_7\}$. Soient $f \in B_7$, $i \in [|7|]$ et vérifiant $f^2 = I_7$.

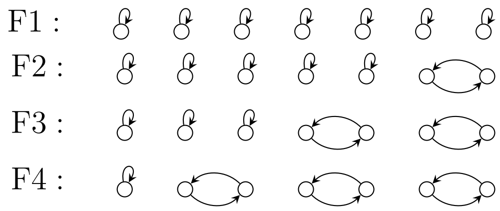
— Cas 1 : $f(i) = i$

— Cas 2 : $f(i) \neq i$. Et dans ce cas, $f^2(i) = i$.

Ainsi, étant donné un point $i \in [|7|]$ il y a deux possibilités : i est fixe ($f(i) = i$) ou non ($f(i) \neq i$) et dans ce dernier cas, on peut regrouper i et $f(i)$. Décrivons les graphes associés aux éléments de C. Étant donné un élément $f \in C$, en notant $(7, A) = G_f$, les arêtes de A vérifient les propriétés :

— $P_1 : \forall i \in [|7|], \exists! j \in [|7|], (i,j) \in A$.
— $P_2 : \forall (i,j) \in [|7|]^2, (i,j) \in A \iff (j,i) \in A$.

Réciproquement, on peut remarquer que si un graphe $G = (7, A)$ vérifie les deux propriétés précédentes, alors il existe $f \in C$ vérifiant $G_f = G$. Ainsi, compter le nombre d'éléments de C revient à compter le nombre de graphes vérifiant les propriétés P_1 et P_2. En représentant les différentes formes possibles de graphes, on constate que l'on est dans un des cas suivants :



Pour chacune des formes de graphes, on va compter le nombre de façons de les numéroter.

— Dans le cas de F1 : il y a une seule façon de numéroter, on constate que l'ordre dans lequel on numérote donne toujours le même élément.
— Dans le cas de F2 : il y a $\binom{7}{2}$ façons de numéroter les éléments pour le cycle de taille 2. Les autres entiers sont utilisés pour numéroter les cycles de taille 1. On a donc $\binom{7}{2} = 21$ éléments de cette forme.
— Dans le cas de F3 : il y a $\binom{7}{3}$ façons de numéroter les trois cycles de taille 1. Il reste alors 4 éléments que l'on note a, b, c, d pour numéroter les deux cycles de taille 2. On a alors les possibilités suivantes : $a \leftrightarrow b$ $c \leftrightarrow d$, $a \leftrightarrow c$ $b \leftrightarrow d$, $a \leftrightarrow d$ $b \leftrightarrow c$. En tout, il y a $3\binom{7}{3} = 105$ éléments qui ont comme forme F3.
— Dans le cas de F4 : il y a 7 façons de numéroter le cycle de taille 1. Notons $a < b < c < d < e < f$ les 6 éléments restants. Il y a 5 façons d'associer un élément de a : $a \leftrightarrow r$ où $r \in \{b, c, d, e, f\}$. Après avoir associé a, il reste 4 éléments à regrouper par paires. Or ce cas a été traité dans F3 et il y en a 3. Donc il y a exactement 15 façons de regrouper par paires les éléments a, b, c, d, e, f. Ainsi, il y a exactement $7 \times 15 = 105$ éléments de forme F4.

Un élément ne pouvant avoir qu'une forme, on en déduit que le nombre d'éléments de C est égal à :

$$\boxed{1 + 21 + 105 + 105 = 232}.$$

17. Soit f un élément de B_n. On note $p \geq 1$ un entier vérifiant $f^p = I_n$. On a donc : $f \circ f^{p-1} = I_n$ et $f^{p-1} \circ f = I_n$. Il en résulte que f est bijective et admet comme réciproque f^{p-1}. Autrement dit, $\boxed{f^{-1} = f^{p-1}}$.
18. Soit $f \in F_n$.
    (a) Posons $L = [f, f^2, \ldots, f^{(n^n+1)}]$. Par définition, L est une liste de taille $n^n + 1$ d'éléments de F_n. Or F_n ne contient que n^n éléments. Donc au moins deux éléments de cette listes sont égaux. Autrement dit, il existe q, r des entiers vérifiant $1 \leq q < r \leq n^n + 1$ et $f^q = f^r$.
    (b) On a : $f^q = f^r$. f étant par hypothèse bijective, f^q aussi. D'où, en composant par f^{-q} :
    $$I_n = f^{r-q}.$$
    Comme $r > q$, en posant $p = r - q$, on a bien $p \geq 1$ et $f^p = I_n$. Il en résulte que
    $$\boxed{f \in B_n}.$$
19. D'après les questions 16 et 17, on en déduit que $B_n = \{f \in F_n | f \text{ bijective}\}$. Par conséquent, $\boxed{b_n = n!}$.

DS n$^{\text{o}}$ 4 de mathématiques

durée : 3 heures

Problème 1

Le but de ce problème est de résoudre l'équation suivante :

$$X^{n+1} + X^n = U \tag{E_n}$$

où $n \geqslant 2$ est un entier fixé, $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et X est une matrice inconnue à coefficients réels.

1. Justifier que les solutions de (E_n) sont des matrices carrées d'ordre 2.
2. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et on note $\mathscr{S}'_n$ l'ensemble des solutions de l'équation suivante d'inconnue $Y \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$:
$$Y^{n+1} + Y^n = D \tag{E'_n}$$
   (a) Justifier que P est inversible et calculer P^{-1}.
   (b) Calculer $P^{-1}UP$.
   (c) Montrer que toutes les solutions de (E_n) sont de la forme $X = PYP^{-1}$ où $Y \in \mathscr{S}'_n$.
3. Dans cette question, on fixe $Y \in \mathscr{S}'_n$ et on pose $Y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
   (a) Justifier que Y et D commutent.
   (b) En déduire que $b = c = 0$.
   (c) Montrer que a est solution de l'équation suivante :
$$x^{n+1} + x^n = 2 \tag{E''_n}$$
   (d) Quelles sont les valeurs possibles pour d ?
4. Dans cette question, on considère la fonction $f_n : x \mapsto x^{n+1} + x^n$ et on pose $\mu_n = -n/(n+1)$.
   (a) Montrer que $f_n(\mu_n) < 2$.
   (b) Dresser le tableau de variations de f_n en distinguant deux cas selon la parité de n. On précisera les limites aux bords de l'ensemble de définition de f_n.
   (c) Déterminer le nombre de solutions de l'équation (E''_n).
5. Dans cette question, on considère le cas $n = 3$ et on note α la solution négative de (E''_3). Déterminer les solutions de (E_3) en exprimant leurs coefficients à l'aide de α.

Exercice 1

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on considère la matrice suivante :

$$M(a) = \begin{pmatrix} 1-3a & a & a & a \\ a & 1-3a & a & a \\ a & a & 1-3a & a \\ a & a & a & 1-3a \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R}).$$

1. Déterminer les valeurs de a pour lesquelles $M(a)$ est inversible.
2. Pour les valeurs de a obtenues à la question précédente, calculer $M(a)^{-1}$.
3. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que $M(a)M(b) = M(c)$ où c est un réel à exprimer en fonction de a et b.
4. Retrouver le résultats des questions 1 et 2 à l'aide du résultat de la question précédente.

Exercice 2

On considère la fonction $f : x \mapsto \cos\left(\sqrt[3]{x}\right)$. Justifier que f admet des primitives sur son ensemble de définition et calculer ces primitives à l'aide du changement de variable $x = y^3$.

Problème 2

Ce problème propose de résoudre quelques équations différentielles. Chaque partie est donc indépendante des autres.

1. **Une équation différentielle presque linéaire d'ordre 1**
   Dans cette partie, on considère l'équation différentielle suivante :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) + f(-x) = x^2 \tag{E_1}$$
   (a) Soit f une solution de (E_1). Justifier que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et montrer que f est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.
   (b) Résoudre l'équation différentielle obtenue à la question précédente.
   (c) En déduire que les solutions de (E_1) sont de la forme $f : x \mapsto A(\cos(x) - \sin(x)) + x^2 + 2x - 2$ où $A \in \mathbb{R}$ est une constante quelconque.
2. **Une équation intégrale**
   Dans cette partie, on considère l'équation intégrale suivante :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) + \int_0^x f(t)\mathrm{d}t = 1 \tag{E_2}$$
   où la fonction inconnue f est supposée continue sur $\mathbb{R}$.
   (a) Soit f une solution de (E_2). Calculer $f(0)$.
   (b) Soit f une solution de (E_2). Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et montrer que f est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants.
   (c) En déduire les solutions de (E_2).
3. **Une équation différentielle non linéaire**
   Dans cette partie, on cherche les solutions qui ne s'annulent pas de l'équation différentielle suivante :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = f(x)^2 + f(x) \tag{E_3}$$
   (a) Soit f une solution de (E_3) qui ne s'annule pas. Justifier que $g : x \mapsto 1/f(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et montrer que g est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants.
   (b) Résoudre l'équation différentielle obtenue à la question précédente.
   (c) En déduire que les solutions de (E_3) qui ne s'annulent pas sont de la forme $f : x \mapsto e^x/(\lambda - e^x)$ où $\lambda \in \mathbb{R}_-$ est une constante négative quelconque.
4. **Un système d'équations différentielles**
   Dans cette partie, on considère le système d'équations différentielles suivant :
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x'(t) = 3x(t) - y(t) \\ y'(t) = 2x(t) + y(t) \end{cases} \tag{E_4}$$
   (a) Soit (x, y) un couple de solutions de (E_4). Justifier que x est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et montrer que x est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.
   (b) Résoudre l'équation différentielle obtenue à la question précédente.
   (c) En déduire que les couples de solutions de (E_4) sont de la forme $x : t \mapsto Ae^{2t}\cos(t) + Be^{2t}\sin(t)$ et $y : t \mapsto (A - B)e^{2t}\cos(t) + (A + B)e^{2t}\sin(t)$ où $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ sont des constantes quelconques.

Corrigé du DS n° 4 de mathématiques

Problème 1

Le but de ce problème est de résoudre l'équation suivante :

$$X^{n+1}+X^n=U \qquad (E_n)$$

où $n \geqslant 2$ est un entier fixé, $U=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ et X est une matrice inconnue à coefficients réels.

1. *Justifier que les solutions de (E_n) sont des matrices carrées d'ordre 2.*

   ▶ Soit X une solution de (E_n). On note p le nombre de lignes de X et q son nombre de colonnes, donc $X \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$. Pour calculer les puissances X^{n+1} et X^n, la matrice X doit être carrée donc $p=q$. Ainsi $X \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$, donc $X^{n+1} \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ et $X^n \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$. Par somme de matrices de même taille, on en déduit que $X^{n+1}+X^n \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$. Or $X^{n+1}+X^n=U \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ d'après l'énoncé, donc $p=2$. Finalement, $\boxed{X \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \text{ pour toute solution } X \text{ de } (E_n)}$.

2. *On pose $P=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}$ et on note $\mathscr{S}_n'$ l'ensemble des solutions de l'équation suivante d'inconnue $Y \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$:*

$$Y^{n+1}+Y^n=D \qquad (E_n')$$

   (a) *Justifier que P est inversible et calculer P^{-1}.*

   ▶ La matrice P est carrée d'ordre 2 et :

$$\det(P)=1\times(-1)-1\times 1=-2\neq 0.$$

   Donc $\boxed{P \text{ est inversible}}$ et :

$$P^{-1}=\frac{1}{-2}\begin{pmatrix}-1&-1\\-1&1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}=\boxed{\frac{1}{2}P}.$$

   (b) *Calculer $P^{-1}UP$.*

   ▶ On a :

$$\begin{aligned}
P^{-1}UP &= P^{-1}\left[UP\right] \quad \text{par associativité du produit matriciel}\\
&= P^{-1}\left[\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}\right]=\frac{1}{2}P\begin{pmatrix}2&0\\2&0\end{pmatrix} \quad \text{d'après le résultat de la question précédente}\\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\2&0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}=\boxed{D}.
\end{aligned}$$

   (c) *Montrer que toutes les solutions de (E_n) sont de la forme $X=PYP^{-1}$ où $Y \in \mathscr{S}_n'$.*

   ▶ Soit X une solution de (E_n). On cherche une matrice $Y \in \mathscr{S}_n'$ telle que $X=PYP^{-1}$. On raisonne par analyse-synthèse.

   <u>Analyse</u>. On a en multipliant à gauche par P^{-1} et à droite par P :

$$\begin{aligned}
P^{-1}XP = P^{-1}\left(PYP^{-1}\right)P &= \underbrace{\left(P^{-1}P\right)}_{=\mathrm{I}_2}Y\underbrace{\left(P^{-1}P\right)}_{=\mathrm{I}_2} \quad \text{par associativité du produit matriciel}\\
&= \mathrm{I}_2Y\mathrm{I}_2 \quad \text{par définition de la matrice inverse}\\
&= Y \quad \text{car la matrice identité } \mathrm{I}_2 \text{ est l'élément neutre du produit matriciel.}
\end{aligned}$$

Synthèse. On pose $Y = P^{-1}XP$. Vérifions que $Y \in \mathscr{S}_n'$, c'est-à-dire que Y est une solution de (E_n'). On a :

$$\begin{aligned}
Y^n &= \left(P^{-1}XP\right)^n \quad \text{par définition de } Y\\
&= \underbrace{\left(P^{-1}XP\right)\left(P^{-1}XP\right)\dots\left(P^{-1}XP\right)}_{n \text{ fois}} \quad \text{par définition de la puissance d'une matrice}\\
&= P^{-1}X\underbrace{\left(PP^{-1}\right)}_{=\mathrm{I}_2}X\underbrace{\left(PP^{-1}\right)}_{=\mathrm{I}_2}\dots\underbrace{\left(PP^{-1}\right)}_{=\mathrm{I}_2}XP \quad \text{par associativité du produit matriciel}\\
&= P^{-1}X\mathrm{I}_2X\mathrm{I}_2\dots\mathrm{I}_2XP \quad \text{par définition de la matrice inverse}\\
&= P^{-1}\underbrace{XX\dots X}_{n \text{ fois}}P \quad \text{car la matrice identité } \mathrm{I}_2 \text{ est l'élément neutre du produit matriciel}\\
&= P^{-1}X^nP \quad \text{par définition de la puissance d'une matrice.}
\end{aligned}$$

On montre de même que $Y^{n+1} = P^{-1}X^{n+1}P$. Par conséquent :

$$\begin{aligned}
Y^{n+1} + Y^n &= P^{-1}X^{n+1}P + P^{-1}X^nP\\
&= P^{-1}\underbrace{\left(X^{n+1} + X^n\right)}_{=U}P \quad \text{par distributivité du produit sur la somme}\\
&= P^{-1}UP \quad \text{car } X \text{ est une solution de } (E_n)\\
&= D \quad \text{d'après le résultat de la question précédente.}
\end{aligned}$$

Par conséquent, $Y \in \mathscr{S}_n'$. Ainsi, X est bien de la forme $\boxed{X = PYP^{-1} \text{ où } Y \in \mathscr{S}_n'}$ et ceci est vrai pour toute matrice X solution de (E_n).

Si on note $\mathscr{S}_n$ l'ensemble des solutions de (E_n), on vient de démontrer que :

$$\mathscr{S}_n \subset \left\{X = PYP^{-1} \mid Y \in \mathscr{S}_n'\right\}.$$

On peut vérifier l'inclusion réciproque à l'aide de calculs similaires :

$$\begin{aligned}
\left(PYP^{-1}\right)^{n+1} + \left(PYP^{-1}\right)^n &= PY^{n+1}P^{-1} + PY^nP^{-1}\\
&= P\underbrace{\left(Y^{n+1} + Y^n\right)}_{=D=P^{-1}UP}P^{-1} = U.
\end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions de (E_n) est en fait égal à l'ensemble des matrices de la forme $X = PYP^{-1}$ où $Y \in \mathscr{S}_n'$ (mais il est inutile de perdre du temps à le démontrer puisque l'inclusion réciproque n'était pas demandée dans l'énoncé).

3. *Dans cette question, on fixe $Y \in \mathscr{S}_n'$ et on pose $Y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.*

   (a) *Justifier que Y et D commutent.*

▶ On a :

$$\begin{aligned}
YD &= Y\left(Y^{n+1} + Y^n\right) \quad \text{car } Y \text{ est une solution de } (E_n')\\
&= Y^{n+2} + Y^{n+1} = \underbrace{\left(Y^{n+1} + Y^n\right)}_{=D}Y \quad \text{par distributivité du produit sur la somme}\\
&= DY \quad \text{car } Y \text{ est une solution de } (E_n').
\end{aligned}$$

Donc, $\boxed{Y \text{ et } D \text{ commutent}}$.

(b) *En déduire que $b = c = 0$.*

▶ On a :

$$YD = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 2c & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad DY = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

D'après le résultat de la question précédente, on en déduit que :

$$\begin{cases} 2a = 2a \\ 0 = 2b \\ 2c = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad \text{donc} \quad \boxed{b = c = 0}.$$

(c) *Montrer que a est solution de l'équation suivante :*

$$x^{n+1} + x^n = 2 \qquad (E''_n)$$

▶ D'après le résultat de la question précédente, $Y = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale. Par conséquent, $Y^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & d^n \end{pmatrix}$ et $Y^{n+1} = \begin{pmatrix} a^{n+1} & 0 \\ 0 & d^{n+1} \end{pmatrix}$ par propriété des matrices diagonales. Puisque Y est une solution de (E'_n), on en déduit que :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = D = Y^{n+1} + Y^n = \begin{pmatrix} a^{n+1} & 0 \\ 0 & d^{n+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & d^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{n+1} + a^n & 0 \\ 0 & d^{n+1} + d^n \end{pmatrix}.$$

En particulier, on obtient que $a^{n+1} + a^n = 2$ donc $\boxed{a \text{ est solution de } (E''_n)}$.

(d) *Quelles sont les valeurs possibles pour d ?*

▶ En reprenant le raisonnement de la question précédente, on obtient que $d^{n+1} + d^n = 0$. Or :

$$\begin{aligned} & d^{n+1} + d^n = 0 \\ \iff & d^n(d+1) = 0 \\ \iff & d^n = 0 \quad \text{ou} \quad d + 1 = 0 \quad \text{(par intégrité)} \\ \iff & d = 0 \quad \text{ou} \quad d = -1. \end{aligned}$$

Par conséquent, $\boxed{d \in \{-1, 0\}}$.

4. *Dans cette question, on considère la fonction $f_n : x \mapsto x^{n+1} + x^n$ et on pose $\mu_n = -n/(n+1)$.*

(a) *Montrer que $f_n(\mu_n) < 2$.*

▶ Puisque $n \geqslant 2$, on a $0 > -n/(n+1) \geqslant -2/3 > -1$ donc $\mu_n \in]-1, 0[$. Par propriété de la fonction $x \mapsto x^n$, on en déduit que $\mu_n^n \in]-1, 1[$ donc que $\mu_n^n < 1$. De même, par propriété de la fonction $x \mapsto x^{n+1}$, on obtient que $\mu_n^{n+1} < 1$. Par conséquent :

$$f_n(\mu_n) = \mu_n^{n+1} + \mu_n^n < 1 + 1 = 2 \quad \text{donc} \quad \boxed{f_n(\mu_n) < 2}.$$

Pensez à utiliser les fonctions usuelles pour gagner du temps. N'hésitez pas à faire un croquis de la courbe représentative de la fonction usuelle $x \mapsto x^n$ (dans chaque cas selon la parité de n) pour visualiser que l'image directe de $]-1, 0[$ est toujours incluse dans $]-1, 1[$. On peut aussi factoriser :

$$f_n(\mu_n) = \mu_n^{n+1} + \mu_n^n = \mu_n^n(\mu_n + 1) = \frac{\mu_n^n}{n+1} \leqslant \frac{(2/3)^n}{3} < 2.$$

(b) *Dresser le tableau de variations de f_n en distinguant deux cas selon la parité de n. On précisera les limites aux bords de l'ensemble de définition de f_n.*

▶ La fonction f_n est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions usuelles.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n'(x) = (n+1)x^n + nx^{n-1} = x^{n-1}\left((n+1)x + n\right).$$

On a :

$$(n+1)x + n > 0 \iff x > \frac{-n}{n+1} = \mu_n.$$

Pour étudier le signe de x^{n-1}, on raisonne par disjonction de cas.
<u>1er cas</u>. Si n est pair alors $n-1$ est impair donc $x^{n-1} > 0 \iff x > 0$. On obtient le tableau des variations suivant.

x	$-\infty$		μ_n		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$			
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f_n(\mu_n)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

car :

$$\lim_{x\to-\infty} f_n(x) = \lim_{x\to-\infty} x^{n+1} + x^n = \lim_{x\to-\infty} \underbrace{x^n}_{\to+\infty}\underbrace{(x+1)}_{\to-\infty} = -\infty$$

$$\text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim_{x\to+\infty} x^{n+1} + x^n = +\infty.$$

<u>2e cas</u>. Si n est impair alors $n-1$ est pair donc $x^{n-1} > 0 \iff x \neq 0$. On obtient le tableau des variations suivant.

x	$-\infty$				μ_n		0		1		$+\infty$
$f'(x)$			$-$		0		$+$				
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\searrow$	$f_n(\mu_n)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

car :

$$\lim_{x\to-\infty} f_n(x) = \lim_{x\to-\infty} x^{n+1} + x^n = \lim_{x\to-\infty} \underbrace{x^n}_{\to-\infty}\underbrace{(x+1)}_{\to-\infty} = +\infty$$

$$\text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim_{x\to+\infty} x^{n+1} + x^n = +\infty.$$

(c) *Déterminer le nombre de solutions de l'équation (E_n'').*

▶ D'après l'énoncé, x est solution de (E_n'') si et seulement si $f_n(x) = 2$. On raisonne par disjonction de cas.
<u>1er cas</u>. On suppose que n est pair. D'après le tableau des variations obtenu à la question précédente, on a $f_n(x) \leqslant f_n(\mu_n)$ pour tout $x \in]-\infty, 0]$. Or $f_n(\mu_n) < 2$ d'après le résultat de la question $4(a)$ donc (E_n'') n'a pas de solution dans $]-\infty, 0]$. De plus, f_n est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]0, +\infty[$ donc $f_n =]0, +\infty[\to f_n(]0, +\infty[) =]0, +\infty[$ est bijective d'après le théorème de la bijection. On en déduit que $2 \in]0, +\infty[$ admet un unique

antécédent dans $]0,+\infty[$, donc (E''_n) admet une unique solution dans $]0,+\infty[$ qui est la solution évidente $x=1$. Finalement, $\boxed{(E''_n) \text{ admet pour unique solution } x=1 \text{ si } n \text{ est pair}}$.

2^e^ cas. On suppose que n est impair. D'après le tableau des variations obtenu à la question précédente, f_n est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty,\mu_n]$ donc $f_n =]-\infty,\mu_n] \to f_n(]-\infty,\mu_n]) = [f_n(\mu_n),+\infty[$ est bijective d'après le théorème de la bijection. Or $f_n(\mu_n) < 2$ d'après le résultat de la question 4(a). On en déduit que $2 \in [f_n(\mu_n),+\infty[$ admet un unique antécédent dans $]-\infty,\mu_n]$, donc que (E''_n) admet une unique solution dans $]-\infty,\mu_n]$. De même, (E''_n) admet une unique solution dans $]\mu_n,+\infty[$ d'après le théorème de la bijection qui est la solution évidente $x=1$. Finalement, $\boxed{(E''_n) \text{ admet deux solutions si } n \text{ est impair, une solution négative et la solution } x=1}$.

5. *Dans cette question, on considère le cas $n=3$ et on note α la solution négative de (E''_3). Déterminer les solutions de (E_3) en exprimant leurs coefficients à l'aide de α.*

▶ D'après le résultat de la question précédente, l'ensemble des solutions (E''_3) est $\{\alpha,1\}$. D'après le résultat de la question 3, on en déduit que :

$$\mathscr{S}'_3 = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

D'après le résultat de la question 2, on sait que toutes les solutions de (E_3) sont de la forme $X = PYP^{-1}$ où $Y \in \mathscr{S}'_3$. Or $P^{-1} = \frac{1}{2}P$ d'après le résultat de la question 2(a) donc :

$$P\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\frac{1}{2}P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \alpha-1 & \alpha+1 \\ \alpha+1 & \alpha-1 \end{pmatrix},$$

$$P\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\frac{1}{2}P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix} = \frac{\alpha}{2}U,$$

$$P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\frac{1}{2}P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{et} \quad P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\frac{1}{2}P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}U.$$

Finalement, l'ensemble des solutions de (E_3) est :

$$\boxed{\left\{ \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \alpha-1 & \alpha+1 \\ \alpha+1 & \alpha-1 \end{pmatrix}, \frac{\alpha}{2}U, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}U \right\}}.$$

Exercice 1

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on considère la matrice suivante :

$$M(a) = \begin{pmatrix} 1-3a & a & a & a \\ a & 1-3a & a & a \\ a & a & 1-3a & a \\ a & a & a & 1-3a \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R}).$$

1. *Déterminer les valeurs de a pour lesquelles $M(a)$ est inversible.*

▶ Soit $a \in \mathbb{R}$. On calcule le rang de $M(a)$ à l'aide de la méthode du pivot de Gauss.

$$\operatorname{rang}(M(a)) = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1-3a & a & a & a \\ a & 1-3a & a & a \\ a & a & 1-3a & a \\ a & a & a & 1-3a \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftrightarrow L_4 \\ \\ \\ L_4 \leftrightarrow L_1 \end{matrix}$$

$$= \operatorname{rang}\begin{pmatrix} a & a & a & 1-3a \\ a & 1-3a & a & a \\ a & a & 1-3a & a \\ 1-3a & a & a & a \end{pmatrix}$$

On raisonne par disjonction de cas.
1er cas. Si $a \neq 0$ alors on peut choisir a comme pivot et on obtient :

$$\operatorname{rang}(M(a)) = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} \boxed{a} & a & a & 1-3a \\ a & 1-3a & a & a \\ a & a & 1-3a & a \\ 1-3a & a & a & a \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow aL_4 - (1-3a)L_1 \end{array}$$

$$= \operatorname{rang}\begin{pmatrix} \boxed{a} & a & a & 1-3a \\ 0 & 1-4a & 0 & -(1-4a) \\ 0 & 0 & 1-4a & -(1-4a) \\ 0 & x & x & x' \end{pmatrix}$$

$$\text{où} \quad \begin{cases} x = a^2 - (1-3a)a = -(1-4a)a \\ x' = a^2 - (1-3a)^2 = -(1-4a)(1-2a) \end{cases}$$

$$= \operatorname{rang}\begin{pmatrix} \boxed{a} & a & a & 1-3a \\ 0 & \boxed{1-4a} & 0 & -(1-4a) \\ 0 & 0 & 1-4a & -(1-4a) \\ 0 & -(1-4a)a & x & x' \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ L_4 \leftarrow L_4 + aL_2 \end{array}$$

$$= \operatorname{rang}\begin{pmatrix} \boxed{a} & a & a & 1-3a \\ 0 & \boxed{1-4a} & 0 & -(1-4a) \\ 0 & 0 & \boxed{1-4a} & -(1-4a) \\ 0 & 0 & -(1-4a)a & x'' \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ L_4 \leftarrow L_4 + aL_3 \end{array}$$

$$\text{où} \quad x'' = -(1-4a)(1-2a) - a(1-4a) = -(1-4a)(1-a)$$

$$= \operatorname{rang}\begin{pmatrix} \boxed{a} & a & a & 1-3a \\ 0 & \boxed{1-4a} & 0 & -(1-4a) \\ 0 & 0 & \boxed{1-4a} & -(1-4a) \\ 0 & 0 & 0 & x''' \end{pmatrix}$$

$$\text{où} \quad x''' = -(1-4a)(1-a) - a(1-4a) = -(1-4a)$$

$$= \operatorname{rang}\begin{pmatrix} \boxed{a} & a & a & 1-3a \\ 0 & \boxed{1-4a} & 0 & -(1-4a) \\ 0 & 0 & \boxed{1-4a} & -(1-4a) \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-(1-4a)} \end{pmatrix}.$$

Inutile de distinguer le sous-cas où $1-4a=0$ puisque toutes les opérations élémentaires utilisées pour échelonner sont bien de la forme $L_i \leftarrow \lambda L_i + \mu L_j$ avec $i \neq j$ et $\lambda \neq 0$. La seule opération qui pose problème était $L_4 \leftarrow aL_4 - (1-3a)L_3$, ce qui justifie de distinguer seulement le cas où $a = 0$.

Or $1-4a = 0$ si et seulement si $a = 1/4$, donc :

$$\operatorname{rang}(M(a)) = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} \boxed{a} & a & a & 1-3a \\ 0 & \boxed{1-4a} & 0 & -(1-4a) \\ 0 & 0 & \boxed{1-4a} & -(1-4a) \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-(1-4a)} \end{pmatrix} = \begin{cases} 1 \text{ si } a = \frac{1}{4} \\ 4 \text{ si } a \in \mathbb{R} \setminus \{0, \frac{1}{4}\}. \end{cases}$$

2e cas. Si $a = 0$ alors $\operatorname{rang}(M(a)) = \operatorname{rang}(M(0)) = \operatorname{rang}(\mathrm{I}_4) = 4$.

Conclusion. Finalement, $\boxed{\text{pour tout } a \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{4}\},\ M(a) \text{ est de rang maximal donc inversible}}$. Et pour $a = 1/4$, $\operatorname{rang}(M(a)) = 1$ donc $M(a)$ n'est pas inversible.

2. *Pour les valeurs de a obtenues à la question précédente, calculer $M(a)^{-1}$.*

▶ Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{4}\}$. On fixe $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ et on résout l'équation $M(a)X = Y$ d'inconnue

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ à l'aide de la méthode du pivot de Gauss en reprenant les opérations élémentaires utilisées à la question précédente.

$$\begin{aligned} & M(a)X = Y \\ \iff & \begin{pmatrix} 1-3a & a & a & a \\ a & 1-3a & a & a \\ a & a & 1-3a & a \\ a & a & a & 1-3a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftrightarrow L_4 \\ \\ \\ L_4 \leftrightarrow L_1 \end{matrix} \\ \iff & \begin{pmatrix} a & a & a & 1-3a \\ a & 1-3a & a & a \\ a & a & 1-3a & a \\ 1-3a & a & a & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_4 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

1^er^ cas. Si $a \neq 0$ alors on peut choisir a comme pivot et on obtient :

$$\begin{aligned} & M(a)X = Y \\ \iff & \begin{pmatrix} \boxed{a} & a & a & 1-3a \\ a & 1-3a & a & a \\ a & a & 1-3a & a \\ 1-3a & a & a & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_4 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow aL_4 - (1-3a)L_1 \end{matrix} \\ \iff & \begin{pmatrix} \boxed{a} & a & a & 1-3a \\ 0 & \boxed{1-4a} & 0 & -(1-4a) \\ 0 & 0 & 1-4a & -(1-4a) \\ 0 & -(1-4a)a & x & x' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_4 \\ y_2 - y_4 \\ y_3 - y_4 \\ ay_1 - (1-3a)y_4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ L_4 \leftarrow L_4 + aL_2 \end{matrix} \\ \iff & \begin{pmatrix} \boxed{a} & a & a & 1-3a \\ 0 & \boxed{1-4a} & 0 & -(1-4a) \\ 0 & 0 & \boxed{1-4a} & -(1-4a) \\ 0 & 0 & -(1-4a)a & x'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_4 \\ y_2 - y_4 \\ y_3 - y_4 \\ ay_1 + ay_2 - (1-2a)y_4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ L_4 \leftarrow L_4 + aL_3 \end{matrix} \\ \iff & \begin{pmatrix} \boxed{a} & a & a & 1-3a \\ 0 & \boxed{1-4a} & 0 & -(1-4a) \\ 0 & 0 & \boxed{1-4a} & -(1-4a) \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-(1-4a)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_4 \\ y_2 - y_4 \\ y_3 - y_4 \\ ay_1 + ay_2 + ay_3 - (1-a)y_4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On reconnaît un système échelonné de rang maximal (car $a \neq 0$ et $a \neq 1/4$) qui admet donc une unique solution. Puis on obtient cette solution en remontant le système par substitution.

$$M(a)X = Y \iff \left\{ \begin{aligned} x_4 &= (-ay_1 - ay_2 - ay_3 + (1-a)y_4)/(1-4a) \\ x_3 &= x_4 + (y_3 - y_4)/(1-4a) = (-ay_1 - ay_2 + (1-a)y_3 - ay_4)/(1-4a) \\ x_2 &= x_4 + (y_2 - y_4)/(1-4a) = (-ay_1 + (1-a)y_2 - ay_3 - ay_4)/(1-4a) \\ x_1 &= -x_2 - x_3 - (1-3a)x_4/a + y_4/a \\ &= (2ay_1 - (1-2a)y_2 + (1-2a)y_3 + 2ay_4)/(1-4a) \\ &\quad +((1-3a)y_1 + (1-3a)y_2 + (1-3a)y_3 - (1-a)(1-3a)y_4/a)/(1-4a) \\ &\quad +((1-4a)y_4/a)/(1-4a) \\ &= ((1-a)y_1 - ay_2 - ay_3 + (2a^2 - 1 + 4a - 3a^2 + 1 - 4a)y_4/a)/(1-4a) \\ &= ((1-a)y_1 - ay_2 - ay_3 - ay_4)/(1-4a) \end{aligned} \right.$$

$$\iff \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ((1-a)y_1 - ay_2 - ay_3 - ay_4)/(1-4a) \\ (-ay_1 + (1-a)y_2 - ay_3 - ay_4)/(1-4a) \\ (-ay_1 - ay_2 + (1-a)y_3 - ay_4)/(1-4a) \\ (-ay_1 - ay_2 - ay_3 + (1-a)y_4)/(1-4a) \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{1}{1-4a}\begin{pmatrix} 1-a & -a & -a & -a \\ -a & 1-a & -a & -a \\ -a & -a & 1-a & -a \\ -a & -a & -a & 1-a \end{pmatrix}}_{=M(a)^{-1}} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

$$\iff X = M(a)^{-1}Y.$$

2e cas. Si $a = 0$ alors l'inverse de $M(a) = M(0) = \mathrm{I}_4$ est égal à $\mathrm{I}_4^{-1} = \mathrm{I}_4$.
Conclusion. On remarque que l'expression de $M(a)^{-1}$ trouvée dans le 1er cas est égale à I_4 si $a = 0$, ce qui est cohérent avec le résultat du 2e cas. Finalement, on obtient dans tous les cas :

$$\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{\tfrac{1}{4}\}, \quad \boxed{M(a)^{-1} = \frac{1}{1-4a}\begin{pmatrix} 1-a & -a & -a & -a \\ -a & 1-a & -a & -a \\ -a & -a & 1-a & -a \\ -a & -a & -a & 1-a \end{pmatrix}}.$$

3. *Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que $M(a)M(b) = M(c)$ où c est un réel à exprimer en fonction de a et b.*
   ▶ On a :

$$\begin{aligned} M(a)M(b) &= \begin{pmatrix} 1-3a & a & a & a \\ a & 1-3a & a & a \\ a & a & 1-3a & a \\ a & a & a & 1-3a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-3b & b & b & b \\ b & 1-3b & b & b \\ b & b & 1-3b & b \\ b & b & b & 1-3b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x & c & c & c \\ c & x & c & c \\ c & c & x & c \\ c & c & c & x \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \begin{cases} x = (1-3a)(1-3b) + 3ab = 1 - 3a - 3b + 12ab \\ c = a(1-3b) + b(1-3a) + 2ab = \boxed{a + b - 4ab} \end{cases} \\ &= \boxed{M(c)} \quad \text{car } 1 - 3c = 1 - 3(a+b-4ab) = 1 - 3a - 3b + 12ab = x. \end{aligned}$$

4. *Retrouver le résultats des questions 1 et 2 à l'aide du résultat de la question précédente.*
   ▶ Si $a = 1/4$ alors $a + b - 4ab = a = 1/4$ pour tout $b \in \mathbb{R}$. Par conséquent, on obtient d'après le résultat de la question précédente que :

$$\forall b \in \mathbb{R}, \quad M(\tfrac{1}{4})M(b) = M(\tfrac{1}{4}).$$

Si $M(\frac{1}{4})$ est inversible, on en déduit que $M(b) = \mathrm{I}_4$ pour tout $b \in \mathbb{R}$ (en multipliant de chaque côté de l'égalité par $M(\frac{1}{4})^{-1}$) ce qui est absurde (par exemple pour n'importe quelle valeur $b \neq 0$). Donc $M(a)$ n'est pas inversible pour $a = 1/4$.
Si $a \neq 1/4$ alors :

$$a + b - 4ab = 0 \iff \underbrace{(1-4a)}_{\neq 0} b = -a \iff b = \frac{-a}{1-4a}.$$

Par conséquent, on obtient d'après le résultat de la question précédente que :

$$M(a)M\left(\frac{-a}{1-4a}\right) = M(0) = \mathrm{I}_4 \quad \text{et par symétrie} \quad M\left(\frac{-a}{1-4a}\right)M(a) = \mathrm{I}_4.$$

On en déduit que $\boxed{M(a) \text{ est inversible pour tout } a \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{4}\}}$ et que :

$$\begin{aligned}
M(a)^1 &= M\left(\frac{-a}{1-4a}\right) \\
&= \begin{pmatrix} (1-a)/(1-4a) & -a/(1-4a) & -a/(1-4a) & -a/(1-4a) \\ -a/(1-4a) & (1-a)/(1-4a) & -a/(1-4a) & -a/(1-4a) \\ -a/(1-4a) & -a/(1-4a) & (1-a)/(1-4a) & -a/(1-4a) \\ -a/(1-4a) & -a/(1-4a) & -a/(1-4a) & (1-a)/(1-4a) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (1-a)/(1-4a) & -a/(1-4a) & -a/(1-4a) & -a/(1-4a) \\ -a/(1-4a) & (1-a)/(1-4a) & -a/(1-4a) & -a/(1-4a) \\ -a/(1-4a) & -a/(1-4a) & (1-a)/(1-4a) & -a/(1-4a) \\ -a/(1-4a) & -a/(1-4a) & -a/(1-4a) & (1-a)/(1-4a) \end{pmatrix} \\
&= \boxed{\frac{1}{1-4a}\begin{pmatrix} 1-a & -a & -a & -a \\ -a & 1-a & -a & -a \\ -a & -a & 1-a & -a \\ -a & -a & -a & 1-a \end{pmatrix}}.
\end{aligned}$$

Exercice 2

On considère la fonction $f : x \mapsto \cos\left(\sqrt[3]{x}\right)$. Justifier que f admet des primitives sur son ensemble de définition et calculer ces primitives à l'aide du changement de variable $x = y^3$.

▶ La fonction f est définie et continue sur l'intervalle $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions usuelles. Donc $\boxed{f \text{ admet une infinité de primitives sur } \mathbb{R}}$ d'après le théorème fondamental de l'analyse. Soit F l'unique primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0. Alors on a pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$F(t) = \int_0^t f(x)\mathrm{d}x = \int_0^t \cos\left(\sqrt[3]{x}\right)\mathrm{d}x.$$

On pose le changement de variable $y = \sqrt[3]{x} = x^{1/3} \iff x = y^3 = \varphi(y)$. On a :

— la fonction $\varphi : y \mapsto y^3$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée $\varphi' : y \mapsto 3y^2$ est continue,

— $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(\sqrt[3]{t}) = \left(t^{1/3}\right)^3 = t$,

— $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}\varphi(y)}{\mathrm{d}y} = \varphi'(y) = 3y^2$ donc $\mathrm{d}x = 3y^2\mathrm{d}y$.

On peut donc appliquer le théorème de changement de variable dans une intégrale et on obtient :

Vérifiez précisément toutes les hypothèses d'un théorème avant de l'appliquer !

$$F(t) = \int_0^{\sqrt[3]{t}} \cos(y)3y^2\mathrm{d}y = 3\int_0^{\sqrt[3]{t}} \underbrace{\cos(y)}_{=u'(y)}\underbrace{y^2}_{=v(y)}\mathrm{d}y \quad \text{par linéarité de l'intégrale.}$$

On calcule cette intégrale par intégration par parties en posant $u'(y) = \cos(y)$ et $v(y) = y^2$. Les fonctions $u : y \mapsto \sin(y)$ et $v : y \mapsto y^2$ sont continues sur $\mathbb{R}$ et leurs dérivées $u' : t \mapsto \cos(y)$ et $v' : y \mapsto 2y$ sont continues. On peut donc appliquer le théorème d'intégration par parties et on obtient :

$$\begin{aligned}
F(t) &= 3\int_0^{\sqrt[3]{t}} u'(y)v(y)\mathrm{d}y \\
&= 3\left(\Big[u(y)v(y)\Big]_0^{\sqrt[3]{t}} - \int_0^{\sqrt[3]{t}} u(y)v'(y)\mathrm{d}y\right) \\
&= 3\left(\Big[\sin(y)y^2\Big]_0^{\sqrt[3]{t}} - \int_0^{\sqrt[3]{t}} \sin(y)2y\mathrm{d}y\right) \\
&= 3\sin\left(\sqrt[3]{t}\right)\left(\sqrt[3]{t}\right)^2 - 0 - 6\int_0^{\sqrt[3]{t}} \underbrace{\sin(y)}_{=u'(y)}\underbrace{y}_{=v(y)}\mathrm{d}y \quad \text{par linéarité de l'intégrale.}
\end{aligned}$$

De même, on calcule cette intégrale par intégration par parties en posant $u'(y) = \sin(y)$ et $v(y) = y$. Les fonctions $u : y \mapsto -\cos(y)$ et $v : y \mapsto y$ sont continues sur $\mathbb{R}$ et leurs dérivées $u' : y \mapsto \sin(y)$ et $v' : y \mapsto 1$ sont continues. On peut donc appliquer le théorème d'intégration par parties et on obtient :

$$\begin{aligned}
F(t) &= 3\sin\left(\sqrt[3]{t}\right)\left(\sqrt[3]{t}\right)^2 - 6\left(\Big[-\cos(y)y\Big]_0^{\sqrt[3]{t}} - \int_0^{\sqrt[3]{t}} -\cos(y)\mathrm{d}y\right) \\
&= 3\sin\left(\sqrt[3]{t}\right)\left(\sqrt[3]{t}\right)^2 + 6\cos\left(\sqrt[3]{t}\right)\sqrt[3]{t} - 0 - 6\int_0^{\sqrt[3]{t}} \cos(y)\mathrm{d}y \quad \text{par linéarité de l'intégrale} \\
&= 3\sin\left(\sqrt[3]{t}\right)\left(\sqrt[3]{t}\right)^2 + 6\cos\left(\sqrt[3]{t}\right)\sqrt[3]{t} - 6\Big[\sin(y)\Big]_0^{\sqrt[3]{t}} \quad \text{en reconnaissant une primitive usuelle} \\
&= 3\sin\left(\sqrt[3]{t}\right)\left(\sqrt[3]{t}\right)^2 + 6\cos\left(\sqrt[3]{t}\right)\sqrt[3]{t} - 6\sin\left(\sqrt[3]{t}\right) + 0.
\end{aligned}$$

On en déduit que les primitives de f sont de la forme :

$$\boxed{x \mapsto 3\sin\left(\sqrt[3]{x}\right)\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 + 6\cos\left(\sqrt[3]{x}\right)\sqrt[3]{x} - 6\sin\left(\sqrt[3]{x}\right) + C} \quad \text{où } C \text{ est une constante quelconque.}$$

Problème 2

Ce problème propose de résoudre quelques équations différentielles. Chaque partie est donc indépendante des autres.

1. ***Une équation différentielle presque linéaire d'ordre 1***

   Dans cette partie, on considère l'équation différentielle suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) + f(-x) = x^2 \qquad (E_1)$$

(a) *Soit f une solution de (E_1). Justifier que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et montrer que f est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.*

▶ La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme solution de (E_1). De plus :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = x^2 - f(-x).$$

Donc f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme et composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. On en déduit que $\boxed{f \text{ est deux fois dérivables sur } \mathbb{R}}$. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) = 2x - (-f'(-x)) = 2x + f'(-x) = 2x + (-x)^2 - f(-(-x)) = 2x + x^2 - f(x).$$

On reconnaît bien une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \boxed{f''(x) + f(x) = 2x + x^2}.$$

(b) *Résoudre l'équation différentielle obtenue à la question précédente.*

▶ On commence par résoudre l'équation différentielle linéaire homogène $f'' + f = 0$ associée à l'équation différentielle obtenue à la question précédente. On reconnaît une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants. Son équation caractéristique $r^2+1 = 0$ admet deux solutions complexes conjuguées : $\alpha + i\beta = i$ et $\alpha - i\beta = -i$, donc $\alpha = 0$ et $\beta = 1$. On en déduit que les solutions de l'équation différentielle linéaire homogène $f'' + f = 0$ sont de la forme :

$$f_{\mathrm{H}} : x \mapsto e^{\alpha x}\left(A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x)\right) = A\cos(x) + B\sin(x)$$

où $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ sont deux constantes quelconques. Ensuite, on cherche une solution particulière de l'équation différentielle obtenue à la question précédente de la forme :

$$f_{\mathrm{P}} : x \mapsto ax^2 + bx + c \quad \text{où } (a, b, c) \in \mathbb{R}^3.$$

La fonction f_{P} est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynomiale et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} f_{\mathrm{P}}'(x) = 2ax + b \\ f_{\mathrm{P}}''(x) = 2a. \end{cases}$$

En réinjectant dans l'équation différentielle obtenue à la question précédente, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 2a + ax^2 + bx + c = 2x + x^2.$$

En identifiant les coefficients de deux polynômes, on en déduit que :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ 2a + c = 0 \iff c = -2a = -2. \end{cases}$$

Donc $f_{\mathrm{P}} : x \mapsto x^2 + 2x - 2$ est une solution particulière de l'équation différentielle obtenue à la question précédente. D'après le principe de superposition, on en déduit que toutes les solutions de l'équation différentielle obtenue à la question précédente sont de la forme :

$$\boxed{f : x \mapsto f_{\mathrm{H}}(x) + f_{\mathrm{P}}(x) = A\cos(x) + B\sin(x) + x^2 + 2x - 2}$$

où $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ sont deux constantes quelconques.

(c) En déduire que les solutions de (E_1) sont de la forme $f : x \mapsto A(\cos(x) - \sin(x)) + x^2 + 2x - 2$ où $A \in \mathbb{R}$ est une constante quelconque.

▶

Attention à bien comprendre la logique du raisonnement. À la question 1(a), on a montré que les solutions de (E_1) sont solutions d'une équation différentielle qu'on a résolue à la question précédente. Mais on ne sait pas si la réciproque est vraie ! Certaines solutions obtenues à la question précédente peuvent ne pas être des solutions de (E_1).

Soit f une solution de (E_1). D'après les résultats précédents, f est de la forme :

$$f : x \mapsto A\cos(x) + B\sin(x) + x^2 + 2x - 2$$

où $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ sont deux constantes fixées. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = -A\sin(x) + B\cos(x) + 2x + 2.$$

En réinjectant dans (E_1), on obtient :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 &= -A\sin(x) + B\cos(x) + 2x + 2 + A\cos(-x) + B\sin(-x) + (-x)^2 + 2(-x) - 2 \\ &= -A\sin(x) + B\cos(x) + 2x + 2 + A\cos(x) - B\sin(x) + x^2 - 2x - 2 \\ &= (A + B)\big(\cos(x) - \sin(x)\big) + x^2. \end{aligned}$$

Donc $(A + B)\big(\cos(x) - \sin(x)\big) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En particulier pour $x = 0$, on obtient que $A + B = 0$ donc que $B = -A$. Finalement, on en déduit que les solutions de (E_1) sont de la forme :

$$\boxed{f : x \mapsto A\big(\cos(x) - \sin(x)\big) + x^2 + 2x - 2}$$

où $A \in \mathbb{R}$ est une constante quelconque.

On vient donc de démontrer que l'ensemble des solutions de (E_1) est inclus dans l'ensemble des fonctions de cette forme. On peut aussi vérifier l'inclusion réciproque (mais ce n'est pas demandé dans l'énoncé), c'est-à-dire que toute fonction de cette forme est bien solution de (E_1). On a donc trouvé toutes les solutions de (E_1).

2. ***Une équation intégrale***
Dans cette partie, on considère l'équation intégrale suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) + \int_0^x f(t)\mathrm{d}t = 1 \tag{E_2}$$

où la fonction inconnue f est supposée continue sur $\mathbb{R}$.

(a) *Soit f une solution de (E_2). Calculer $f(0)$.*

▶ On a :

$$f(0) + \underbrace{\int_0^0 f(t)\mathrm{d}t}_{=0} = 1 \quad \text{donc} \quad \boxed{f(0) = 1}.$$

(b) *Soit f une solution de (E_2). Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et montrer que f est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants.*

▶ On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = 1 - \int_0^x f(t)\mathrm{d}t.$$

Or la fonction $x \mapsto \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme étant égale à l'unique primitive de f qui s'annule en 0. Donc $\boxed{f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. De plus :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 0 - f(x).$$

On reconnaît bien une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants :

$$\boxed{f' + f = 0}.$$

(c) *En déduire les solutions de (E_2).*

▶ Puisque l'équation différentielle obtenue à la question précédente est linéaire homogène d'ordre 1 à coefficients constants, ses solutions sont de la forme :

$$f : x \mapsto \lambda e^{-x}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ est une constante quelconque. Ainsi, d'après les résultats précédents, si f est solution de (E_2) alors f est de la forme $f : x \mapsto \lambda e^{-x}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ est une constante fixée, et $f(0) = 1$. En particulier pour $x = 0$, on obtient que $\lambda = 1$. On en déduit que $f : x \mapsto e^{-x}$ est la seule solution possible de (E_2). Or :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^{-x} + \int_0^x e^{-t}\mathrm{d}t = e^{-x} + \Big[-e^{-t}\Big]_0^x = e^{-x} + \left(-e^{-x} + e^{-0}\right) = 1.$$

Par conséquent, $\boxed{f : x \mapsto e^{-x} \text{ est la seule solution de } (E_2)}$.

N'oubliez pas de vérifier que $f : x \mapsto e^{-x}$ est bien solution de (E_2). Sans cette vérification, on a seulement démontré que si f est solution de (E_2) alors f est de la forme $f : x \mapsto e^{-x}$ mais on n'aurait pas prouvé l'implication réciproque.

3. ***Une équation différentielle non linéaire***
Dans cette partie, on cherche les solutions qui ne s'annulent pas de l'équation différentielle suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = f(x)^2 + f(x) \tag{E_3}$$

(a) *Soit f une solution de (E_3) qui ne s'annule pas. Justifier que $g : x \mapsto 1/f(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et montrer que g est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants.*

▶ La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme solution de (E_3). Donc $\boxed{g \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}}$ comme inverse d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ qui ne s'annule pas. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{g(x)} \quad \text{et} \quad f'(x) = \frac{-g'(x)}{g(x)^2}.$$

En réinjectant dans (E_3), on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{-g'(x)}{g(x)^2} = \left(\frac{1}{g(x)}\right)^2 + \frac{1}{g(x)} = \frac{1+g(x)}{g(x)^2}.$$

Après simplification, on reconnaît bien une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \boxed{g'(x) + g(x) = -1}.$$

(b) *Résoudre l'équation différentielle obtenue à la question précédente.*

▶ On commence par résoudre l'équation différentielle linéaire homogène $g' + g = 0$ associée à l'équation différentielle obtenue à la question précédente. On reconnaît une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 à coefficients constants. Ses solutions sont de la forme :

$$g_{\mathrm{H}} : x \mapsto \lambda e^{-x}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ est une constante quelconque. Ensuite, on remarque que $g_{\mathrm{P}} : x \mapsto -1$ est une solution particulière de l'équation différentielle obtenue à la question précédente. D'après le principe de superposition, on en déduit que toutes les solutions de l'équation différentielle obtenue à la question précédente sont de la forme :

$$\boxed{g : x \mapsto g_{\mathrm{H}}(x) + g_{\mathrm{P}}(x) = \lambda e^{-x} - 1}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ est une constante quelconque.

(c) *En déduire que les solutions de (E_3) qui ne s'annulent pas sont de la forme $f : x \mapsto e^x/(\lambda - e^x)$ où $\lambda \in \mathbb{R}_-$ est une constante négative quelconque.*

▶ Soit f une solution de (E_3) qui ne s'annule pas. D'après les résultats précédents, f est de la forme :

$$f : x \mapsto \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{\lambda e^{-x} - 1} = \frac{e^x}{\lambda - e^x} \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{R} \text{ est une constante fixée.}$$

Attention à bien comprendre la logique du raisonnement. On a montré que les solutions de (E_3) sont de cette forme. Mais on ne sait pas si la réciproque est vraie ! Certaines fonctions de cette forme peuvent ne pas être des solutions de (E_3).

Puisque f est définie sur $\mathbb{R}$, son dénominateur ne s'annule pas. Or :

$$\lambda - e^x = 0 \iff e^x = \lambda.$$

Par conséquent, si $\lambda > 0$ alors cette équation admet pour solution $x = \ln(\lambda)$ donc le dénominateur de f s'annule et f n'est pas définie en $x = \ln(\lambda)$ ce qui est absurde. On en déduit que $\lambda \leqslant 0$ (donc $\lambda - e^x < 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$). Finalement, les solutions de (E_3) sont de la forme :

$$\boxed{f : x \mapsto \frac{e^x}{\lambda - e^x} \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{R}_- \text{ est une constante négative quelconque}}.$$

On vient de démontrer que l'ensemble des solutions de (E_3) est inclus dans l'ensemble des fonctions de cette forme. On peut aussi vérifier l'inclusion réciproque (mais ce n'est pas demandé dans l'énoncé), c'est-à-dire que toute fonction de cette forme est bien solution de (E_3). On a donc trouvé toutes les solutions de (E_3).

4. ***Un système d'équations différentielles***
Dans cette partie, on considère le système d'équations différentielles suivant :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x'(t) = 3x(t) - y(t) \\ y'(t) = 2x(t) + y(t) \end{cases} \tag{E_4}$$

(a) *Soit (x, y) un couple de solutions de (E_4). Justifier que x est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et montrer que x est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.*
▶ Les fonctions x et y sont dérivables sur $\mathbb{R}$ comme solutions de (E_4). De plus :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x'(t) = 3x(t) - y(t).$$

Donc x' est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. On en déduit que $\boxed{x \text{ est deux fois dérivable sur } \mathbb{R}}$. On a à l'aide de la première équation de (E_4) :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = 3x(t) - x'(t) \quad \text{et} \quad y'(t) = 3x'(t) - x''(t).$$

En réinjectant dans la deuxième équation de (E_4), on obtient que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad 3x'(t) - x''(t) = 2x(t) + 3x(t) - x'(t).$$

On reconnaît bien une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \boxed{x''(t) - 4x'(t) + 5x(t) = 0}.$$

(b) *Résoudre l'équation différentielle obtenue à la question précédente.*
▶ On reconnaît une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants. Son équation caractéristique $r^2 - 4r + 5 = 0$ a pour discriminant $\Delta = -4 < 0$ et admet deux solutions complexes conjuguées : $\alpha + i\beta = 2 + i$ et $\alpha - i\beta = 2 - i$, donc $\alpha = 2$ et $\beta = 1$. On en déduit que toutes les solutions de l'équation différentielle obtenue à la question précédente sont de la forme :

$$\boxed{x : t \mapsto e^{\alpha t}\left(A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t)\right) = e^{2t}\left(A\cos(t) + B\sin(t)\right)}$$

où $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ sont deux constantes quelconques.

(c) *En déduire que les couples de solutions de (E_4) sont de la forme $x : t \mapsto Ae^{2t}\cos(t) + Be^{2t}\sin(t)$ et $y : t \mapsto (A - B)e^{2t}\cos(t) + (A + B)e^{2t}\sin(t)$ où $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ sont des constantes quelconques.*
▶ Soit (x, y) un couple de solutions de (E_4). D'après les résultats précédents, x est de la forme :

$$x : t \mapsto e^{2t}\left(A\cos(t) + B\sin(t)\right) = Ae^{2t}\cos(t) + Be^{2t}\sin(t)$$

où $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ sont deux constantes fixées. La fonction x est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme et produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et :

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, \quad x'(t) &= 2Ae^{2t}\cos(t) - Ae^{2t}\sin(t) + 2Be^{2t}\sin(t) + Be^{2t}\cos(t) \\ &= (2A + B)e^{2t}\cos(t) + (-A + 2B)e^{2t}\sin(t). \end{aligned}$$

En réinjectant dans la première équation de (E_4), on obtient :

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) &= 3x(t) - x'(t) \\ &= 3Ae^{2t}\cos(t) + 3Be^{2t}\sin(t) - (2A+B)e^{2t}\cos(t) - (-A+2B)e^{2t}\sin(t) \\ &= (A-B)e^{2t}\cos(t) + (A+B)e^{2t}\sin(t).\end{aligned}$$

Finalement, on en déduit que les couples de solutions de (E_4) sont de la forme :

$$\boxed{x : t \mapsto Ae^{2t}\cos(t) + Be^{2t}\sin(t)} \quad \text{et} \quad \boxed{y : t \mapsto (A-B)e^{2t}\cos(t) + (A+B)e^{2t}\sin(t)}$$

où $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ sont des constantes quelconques.

On vient de démontrer que l'ensemble des couples de solutions de (E_4) est inclus dans l'ensemble des couples de fonctions de cette forme. On peut aussi vérifier l'inclusion réciproque (mais ce n'est pas demandé dans l'énoncé), c'est-à-dire que tout couple de fonctions de cette forme est bien solution de (E_4). On a donc trouvé toutes les solutions de (E_4).

DS n$^{\text{o}}$ 5 de mathématiques et d'informatique

durée : 3 heures

Problème A - Géométrie

Dans tout ce problème, on se place dans un plan affine $\mathscr{P}$ muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Pour tout cercle $\mathscr{C}$ de centre C et de rayon R, on appelle **puissance** d'un point M par rapport à $\mathscr{C}$ le réel :

$$p(M) = CM^2 - R^2.$$

De plus, si $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ sont deux cercles non concentriques dont les puissances respectives sont notées p_1 et p_2, on appelle **axe radical** de $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ l'ensemble :

$$\Delta_{1,2} = \big\{M \in \mathscr{P} \mid p_1(M) = p_2(M)\big\}.$$

Ce problème propose d'étudier quelques propriétés de ces deux notions. Les quatre parties sont indépendantes. Les questions des parties II et III peuvent être traitées sans l'aide de coordonnées. Cependant, il n'est pas interdit d'en introduire (c'est même conseillé si on ne sait pas faire autrement). On indiquera alors précisément les notations utilisées.

Partie I - Étude d'un exemple

Dans cette partie, on considère trois exemples de cercles : le cercle $\mathscr{C}_1$ de centre $C_1(2,2)$ et de rayon $R_1 = 3$, le cercle $\mathscr{C}_2$ de diamètre $[D_2D_2']$ dont les extrémités ont pour coordonnées $D_2(-2,-1)$ et $D_2'(2,-1)$, et le cercle $\mathscr{C}_3$ d'équation cartésienne $x^2 + y^2 + 6x - 2y + 9 = 0$. On note respectivement p_1, p_2 et p_3 les puissances par rapport à $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$. Enfin, on note $\Delta_{1,2}$ l'axe radical de $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$, $\Delta_{1,3}$ l'axe radical de $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_3$, et $\Delta_{2,3}$ l'axe radical de $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$.

1. Calculer la puissance du point $M(1,1)$ par rapport à $\mathscr{C}_1$.
2. (a) Déterminer les coordonnées du centre C_2 et le rayon R_2 de $\mathscr{C}_2$. De même pour $\mathscr{C}_3$.
   (b) En déduire les valeurs de $p_2(M)$ et $p_3(M)$ où M est le point de coordonnées $M(1,1)$.
3. Montrer qu'une équation cartésienne de $\Delta_{1,2}$ est $2x + 3y - 1 = 0$.
4. (a) Déterminer une équation cartésienne de $\mathscr{C}_1$. De même pour $\mathscr{C}_2$.
   (b) Montrer que $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ s'intersectent en deux points A et B dont on déterminera les coordonnées.
   (c) Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB). Que remarque-t-on ? Est-ce surprenant ?
5. (a) Les cercles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_3$ s'intersectent-ils ?
   (b) Déterminer une équation cartésienne de $\Delta_{1,3}$.
6. (a) Montrer que $\Delta_{1,2}$ et $\Delta_{1,3}$ se coupent au point de coordonnées $\Gamma(-\frac{16}{13}, \frac{15}{13})$.
   (b) Démontrer que les axes radicaux $\Delta_{1,2}$, $\Delta_{1,3}$ et $\Delta_{2,3}$ sont concourants.

Partie II - Calcul de la puissance d'un point par rapport à un cercle

Dans cette partie, on fixe un cercle $\mathscr{C}$ de centre C et de rayon R. Pour tout point M, on note $p(M)$ la puissance de M par rapport à $\mathscr{C}$.

7. Que vaut $p(M)$ si M est un point appartenant à $\mathscr{C}$?
8. Dans cette question, on considère un point M n'appartenant pas à $\mathscr{C}$ et une droite $\mathscr{D}$ issue de M qui intersecte $\mathscr{C}$ en deux points A et B distincts. On note A' le point diamétralement opposé à A.
   (a) Montrer que $p(M) = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MA'}$.
   (b) Justifier que $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BA'}$ sont orthogonaux et en déduire que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BA'} = 0$.
   (c) Déduire des résultats précédents que $p(M) = MA \times MB$ si M est à l'extérieur du disque délimité par $\mathscr{C}$ et $p(M) = -MA \times MB$ sinon.

Partie III - Construction de l'axe radical

Dans cette partie, on fixe deux cercles non concentriques $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ de centres respectifs $C_1 \neq C_2$ et de rayons respectifs R_1 et R_2. Pour tout point M, on note respectivement $p_1(M)$ et $p_2(M)$ les puissances de M par rapport à $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$. Enfin, on note $\Delta_{1,2}$ l'axe radical de $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.

9. On note I le milieu du segment $[C_1C_2]$ et on fixe $M \in \mathscr{P}$.
   (a) Montrer que $M \in \Delta_{1,2}$ si et seulement si $\overrightarrow{C_1C_2}.\overrightarrow{IM} = (R_1^2 - R_2^2)/2$.
   (b) Trouver deux réels μ_1 et μ_2 tels que le barycentre G de (C_1, μ_1) et (C_2, μ_2) appartienne à $\Delta_{1,2}$. On choisira les poids μ_1 et μ_2 afin que $\mu_1 + \mu_2 = 2C_1C_2^2$ et on les exprimera en fonction de $p_1(C_2)$, $p_2(C_1)$, R_1 et R_2.
   (c) En déduire que $\Delta_{1,2}$ est une droite dont on précisera un point et un vecteur normal.
10. Déterminer $\Delta_{1,2}$ dans le cas où $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ s'intersectent en deux points A et B distincts.
11. On note $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ les deux tangentes communes à $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$. On note respectivement T_1 et T_2 les points de tangence de $\mathscr{D}$ avec $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$. De plus, on note J le milieu du segment $[T_1T_2]$.
   (a) Justifier que $J \in \Delta_{1,2}$.
   (b) En déduire une manière de construire l'axe radical $\Delta_{1,2}$.

Partie IV - Centre radical

Dans cette partie, on fixe trois cercles $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ de centres respectifs C_1, C_2 et C_3 et de rayons respectifs R_1, R_2 et R_3. On suppose que les trois centres ne sont pas alignés et on note $C_1(a_1, b_1)$, $C_2(a_2, b_2)$ et $C_3(a_3, b_3)$ leurs coordonnées. Enfin, on note $\Delta_{1,2}$ l'axe radical de $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$, $\Delta_{1,3}$ l'axe radical de $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_3$, et $\Delta_{2,3}$ l'axe radical de $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$.

12. (a) Montrer qu'une équation cartésienne de $\Delta_{1,2}$ est :
   $$\Delta_{1,2} : (a_2 - a_1)x + (b_2 - b_1)y + K_{1,2} = 0$$
   où $K_{1,2} = (a_1^2 + b_1^2 - R_1^2 - a_2^2 - b_2^2 + R_2^2)/2$.
   (b) Montrer qu'étudier l'intersection de $\Delta_{1,2}$, $\Delta_{1,3}$ et $\Delta_{2,3}$ revient à résoudre un système linéaire (S) de trois équations à deux inconnues. On écrira ce système sous forme matricielle.
   (c) Justifier que le système linéaire (S) obtenu à la question précédente est équivalent au système linéaire (S') formé des deux premières équations de (S).
   (d) Conclure que les axes radicaux $\Delta_{1,2}$, $\Delta_{1,3}$ et $\Delta_{2,3}$ sont concourants. Les coordonnées du point de concourance ne sont pas demandées.

Le point de concourance des trois axes radicaux est appelé le **centre radical** de $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$.

Problème B : étude de suites

Pour tout entier $n \geq 1$, on définit l'équation (E_n) par : $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x+2} + \ldots + \dfrac{1}{x+n} = 1$.
L'objectif du problème est d'étudier les solutions de ces équations.
À cet effet, on introduit la fonction f_n, de la variable réelle x définie par :

$$f_n(x) = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{x+k}\right) - 1.$$

1. **Étude d'un cas particulier.**
   Pour cette question seulement, on prend $n = 1$.
   (a) Donner le domaine de définition de f_1, dresser le tableau de variations de f_1.
   (b) Résoudre l'équation (E_1).
2. **Dénombrement des solutions de (E_n).**
   On fixe un entier naturel $n \geq 1$.
   (a) Donner le domaine de définition de la fonction f_n.
   (b) On suppose dans cette question $n = 5$. Dresser le tableau de variations complet de f_n sur $\mathbb{R}$. On placera également les différentes limites.
   (c) Faire de même pour f_n avec n quelconque. On donnera le tableau avec une brève justification.
   (d) En déduire que (E_n) a exactement $n+1$ solutions réelles.
3. **Informatique.**
   (a) Écrire une fonction Python `fonction_n(n,x)` qui prend en argument un entier naturel $n \geq 1$, un réel x dans le domaine de D_{f_n} et qui renvoie la valeur $f_n(x)$.
   Dans la suite, on supposera que la fonction `fonction_n` est définie.
   (b) On considère la fonction suivante :

```
def precision(n,d) :
    a = -1
    b = 0
    while (b-a)> d :
        c = (a+b)/2
        if fonction_n(n,c) > 0 :
            a = c
        else :
            b = c
   return [a,b]
```

   i. Écrire la valeur de retour de l'instruction `fonction_n(2,1/4)`.
   ii. Modifier le code précédent pour que la valeur de retour soit une liste $[a, b]$ vérifiant $|b-a| \leq d$ et $-2 \leq a \leq b \leq -1$.

   (c) On aimerait écrire une fonction `approx_sol(n,d)` qui prend en argument un entier $n \geq 1$ et un réel strictement positif `d` et qui renvoie une liste de listes de réels L où pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ la liste $L[k]$ est de la forme $[a_k, b_k]$ avec $|b_k - a_k| \leq d$ et $k-n \leq a_k \leq b_k \leq k-n+1$.
   On propose le pseudo-code pour la fonction `approx_sol` :

```
approx_sol(n,d) :
    initialiser debut à [-n,-n+1,...,-1]
    initialiser fin  à [-n,-n+1,...,0]
    ecart = 1
    tant que ecart > d:
        pour tout 0<=k<=(n-1) :
            poser c = (debut[k]+fin[k])/2
            si fonction_n(x)>0 :
                debut[k] = c
            sinon :
                fin[k] = c
   retourner [[debut[k],fin[k]] pour k parcourant {0,...,n-1}]
```

i. Traduire en Python le pseudo-code précédent.

ii. À quoi correspond la valeur de retour de `approx_sol` ?

4. **Des inégalités utiles.**

(a) Démontrer que pour tout réel $x > 1$: $\dfrac{1}{x} \leq \ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right) \leq \dfrac{1}{x-1}$.

On pourra remarquer que : $\forall t \in [x-1, x]$, $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{x-1}$ et utiliser la croissance de l'intégrale.

(b) Soit $x > 0$. En remarquant que

$$\forall k \in \{1, 2, \ldots, n\},\ \frac{1}{x+k} \leq \ln\left(\frac{x+k}{x+k-1}\right) \leq \frac{1}{x+k-1}.$$

établir que :

$$f_n(x) - \frac{1}{x} + 1 \leq \ln\left(1 + \frac{n}{x}\right) \leq f_n(x) - \frac{1}{x+n} + 1$$

puis que

$$\ln\left(1 + \frac{n}{x}\right) + \frac{1}{x+n} - 1 \leq f_n(x) \leq \ln\left(1 + \frac{n}{x}\right) + \frac{1}{x} - 1.$$

5. **Équivalent de la plus grande des solutions quand n tend vers $+\infty$.**

Pour tout $n \geq 1$, on note x_n la plus grande des solutions de (E_n).

(a) Expliciter x_1 puis montrer que pour tout $n \geq 1$, on a : $1 < x_n < 2n$. On rappelle que $\ln(\frac{3}{2}) < 0,41$ et que $\ln(3) > 1$.

(b) Écrire une fonction `approx_x(n,d)` qui prend en argument un entier $n \geq 1$ un réel $d > 0$ et qui renvoie une liste de deux réels $[a, b]$ vérifiant $a \leq x_n \leq b$ et $|b - a| \leq d$.

(c) Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a : $1 - \dfrac{1}{x_n} \leq \ln\left(1 + \dfrac{n}{x_n}\right) \leq 1 - \dfrac{1}{x_n + n}$.

(d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$: $x_n \geq \dfrac{n}{e^1 - 1}$.

(e) Montrer que les suites $(x_n)_{n\geq 1}$ et $\left(\ln\left(1 + \dfrac{n}{x_n}\right)\right)_{n\geq 1}$ admettent des limites (finies ou infinies) et les calculer.

(f) Prouver enfin l'existence d'un réel δ, que l'on explicitera vérifiant : $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \delta \cdot n$.

Corrigé du DS n$^{\text{o}}$ 5 de mathématiques et d'informatique

Problème A - Géométrie

*Dans tout ce problème, on se place dans un plan affine $\mathscr{P}$ muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. Pour tout cercle $\mathscr{C}$ de centre C et de rayon R, on appelle **puissance** d'un point M par rapport à $\mathscr{C}$ le réel :*

$$p(M) = CM^2 - R^2.$$

*De plus, si $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ sont deux cercles non concentriques dont les puissances respectives sont notées p_1 et p_2, on appelle **axe radical** de $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ l'ensemble :*

$$\Delta_{1,2} = \left\{M \in \mathscr{P} \mid p_1(M) = p_2(M)\right\}.$$

Ce problème propose d'étudier quelques propriétés de ces deux notions. Les quatre parties sont indépendantes. Les questions des parties II et III peuvent être traitées sans l'aide de coordonnées. Cependant, il n'est pas interdit d'en introduire (c'est même conseillé si on ne sait pas faire autrement). On indiquera alors précisément les notations utilisées.

Partie I - Étude d'un exemple

Dans cette partie, on considère trois exemples de cercles : le cercle $\mathscr{C}_1$ de centre $C_1(2,2)$ et de rayon $R_1 = 3$, le cercle $\mathscr{C}_2$ de diamètre $[D_2D_2']$ dont les extrémités ont pour coordonnées $D_2(-2,-1)$ et $D_2'(2,-1)$, et le cercle $\mathscr{C}_3$ d'équation cartésienne $x^2+y^2+6x-2y+9=0$. On note respectivement p_1, p_2 et p_3 les puissances par rapport à $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$. Enfin, on note $\Delta_{1,2}$ l'axe radical de $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$, $\Delta_{1,3}$ l'axe radical de $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_3$, et $\Delta_{2,3}$ l'axe radical de $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$.

1. *Calculer la puissance du point $M(1,1)$ par rapport à $\mathscr{C}_1$.*

   ▶ On a :

   $$p_1(M) = C_1M^2 - R_1^2 = \left\|\overrightarrow{C_1M}\right\|^2 - 3^2 = (1-2)^2 + (1-2)^2 - 9 = \boxed{-7}.$$

2. (a) *Déterminer les coordonnées du centre C_2 et le rayon R_2 de $\mathscr{C}_2$. De même pour $\mathscr{C}_3$.*

   ▶ Le centre C_2 de $\mathscr{C}_2$ est le milieu du diamètre $[D_2D_2']$. Ses coordonnées sont donc égales à la moyenne des coordonnées de D_2 et D_2'. D'où :

   $$\boxed{C_2\left(\frac{-2+2}{2} = 0, \frac{-1+(-1)}{2} = -1\right)}.$$

   Le rayon R_2 de $\mathscr{C}_2$ est égal à la moitié du diamètre, donc :

   $$R_2 = \frac{1}{2}D_2D_2' = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{D_2D_2'}\right\| = \frac{1}{2}\sqrt{(2-(-2))^2 + (-1-(-1))^2} = \boxed{2}.$$

   L'équation cartésienne de $\mathscr{C}_3$ peut s'écrire sous la forme :

   $$\begin{aligned} & x^2+y^2+6x-2y+9=0 \\ \iff & (x^2+6x)+(y^2-2y) = -9 \\ \iff & (x+3)^2 - 9 + (y-1)^2 - 1 = -9 \\ \iff & (x+3)^2+(y-1)^2 = 1^2. \end{aligned}$$

   On reconnaît donc le cercle de centre $\boxed{C_3(-3,1)}$ et de rayon $\boxed{R_3 = 1}$.

(b) *En déduire les valeurs de $p_2(M)$ et $p_3(M)$ où M est le point de coordonnées $M(1,1)$.*

▶ On a d'après les résultats de la question précédente :

$$p_2(M) = C_2M^2 - R_2^2 = \left\|\overrightarrow{C_2M}\right\|^2 - 2^2 = (1-0)^2 + (1-(-1))^2 - 4 = \boxed{1}$$

$$\text{et} \quad p_3(M) = C_3M^2 - R_3^2 = \left\|\overrightarrow{C_3M}\right\|^2 - 1^2 = (1-(-3))^2 + (1-1)^2 - 1 = \boxed{15}.$$

3. *Montrer qu'une équation cartésienne de $\Delta_{1,2}$ est $2x + 3y - 1 = 0$.*

▶ Par définition de l'axe radical, un point $M(x,y)$ appartient à $\Delta_{1,2}$ si et seulement si :

$$\begin{aligned}
p_1(M) = p_2(M) &\iff C_1M^2 - R_1^2 = C_2M^2 - R_2 \\
&\iff \left\|\overrightarrow{C_1M}\right\|^2 - 3^2 = \left\|\overrightarrow{C_2M}\right\|^2 - 2^2 \\
&\iff (x-2)^2 + (y-2)^2 - 9 = (x-0)^2 + (y-(-1))^2 - 4 \\
&\iff x^2 + y^2 - 4x - 4y - 1 = x^2 + y^2 + 2y - 3 \\
&\iff -4x + (-4-2)y + (-1+3) = 0 \\
&\iff -4x - 6y + 2 = 0 \\
&\iff \boxed{2x + 3y - 1 = 0}.
\end{aligned}$$

4. (a) *Déterminer une équation cartésienne de $\mathscr{C}_1$. De même pour $\mathscr{C}_2$.*

▶ On a :

$$\mathscr{C}_1 : (x-2)^2 + (y-2)^2 = 3^2 \iff \boxed{x^2 + y^2 - 4x - 4y - 1 = 0}.$$

Et d'après les résultats de la question 2(a), on obtient :

$$\mathscr{C}_2 : (x-0)^2 + (y-(-1))^2 = 2^2 \iff \boxed{x^2 + y^2 + 2y - 3 = 0}.$$

(b) *Montrer que $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ s'intersectent en deux points A et B dont on déterminera les coordonnées.*

▶ D'après les résultats de la question 3(a), un point $M(x,y)$ appartient à $\mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_2$ si et seulement si :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 4y - 1 = 0 & (E_1) \\ x^2 + y^2 + 2y - 3 = 0 & (E_2) \end{cases}$$

Attention, ce n'est pas un système linéaire ! Évoquer la méthode du pivot de Gauss pour sa résolution est donc incorrect.

L'opération $(E_1) - (E_2)$ donne :

$$-4x - 6y + 2 = 0 \iff x = -\frac{3}{2}y + \frac{1}{2}. \tag{E}$$

En reportant dans l'équation (E_2), on obtient :

$$\begin{aligned}
\left(-\frac{3}{2}y + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 + 2y - 3 = 0 &\iff \left(\frac{9}{4} + 1\right)y^2 + \left(-\frac{3}{2}y + 2\right) + \left(\frac{1}{4} - 3\right) = 0 \\
&\iff 13y^2 + 2y - 11 = 0.
\end{aligned}$$

On obtient une équation du second degré qui admet -1 comme racine évidente. On peut donc factoriser le polynôme du second degré par $(y - (-1)) = (y+1)$:

$$\begin{aligned}
13y^2 + 2y - 11 = 0 &\iff (y+1)(13y - 11) = 0 \\
&\iff y = -1 \quad \text{ou} \quad y = \frac{11}{13}.
\end{aligned}$$

Pensez à utiliser les racines évidentes pour aller plus vite qu'un calcul de discriminant. Ici, on obtiendrait : $\Delta = 2^2 - 4 \times 13 \times (-11) = 576 = 24^2$.

En reportant ces solutions dans l'équation (E), on obtient :

$$x = -\frac{3}{2}y + \frac{1}{2} = \begin{cases} \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2 \text{ si } y = -1 \\ -\frac{33}{26} + \frac{13}{26} = -\frac{10}{13} \text{ si } y = \frac{11}{13}. \end{cases}$$

Finalement, on a bien montré que $\boxed{\mathscr{C}_1 \text{ et } \mathscr{C}_2 \text{ s'intersectent en deux points}}$ qui ont pour coordonnées $\boxed{A(2,-1)}$ et $\boxed{B(-\frac{10}{13}, \frac{11}{13})}$.

(c) *Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB). Que remarque-t-on ? Est-ce surprenant ?*

▶ La droite (AB) est dirigée par le vecteur :

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -\frac{10}{13} - 2 \\ \frac{11}{13} + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{36}{13} \\ \frac{24}{13} \end{pmatrix} = \frac{12}{13}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

qui est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ car :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{n} = -\frac{36}{13} \times 2 + \frac{24}{13} \times 3 = \frac{-72+32}{13} = 0.$$

On en déduit qu'une équation cartésienne de (AB) est de la forme $2x + 3y + c = 0$ où $c \in \mathbb{R}$ est une constante. Puisque (AB) passe par $A(2,-1)$, on obtient :

$$2 \times 2 + 3 \times (-1) + c = 0 \iff c = -4 + 3 = -1.$$

Par conséquent, une équation cartésienne de (AB) est $\boxed{2x + 3y - 1 = 0}$. D'après le résultat de la question 3, on remarque que $\boxed{\text{la droite } (AB) \text{ est confondue avec l'axe radical } \Delta_{1,2}}$. Ce résultat n'est pas surprenant car $p_1(A) = 0 = p_2(A)$ (puisque $A \in \mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_2$ donc $C_1A = R_1$ et $C_2A = R_2$) donc $\boxed{A \in \Delta_{1,2}}$ par définition de l'axe radical, et de même $\boxed{B \in \Delta_{1,2}}$.

5. (a) *Les cercles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_3$ s'intersectent-ils ?*

▶ On raisonne comme à la question 4(a) : un point $M(x,y)$ appartient à $\mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_3$ si et seulement si :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 4y - 1 = 0 & (E_1) \\ x^2 + y^2 + 6x - 2y + 9 = 0 & (E_3) \end{cases}$$

L'opération $(E_3) - (E_1)$ donne :

$$10x + 2y + 10 = 0 \iff y = -5x - 5. \qquad (E')$$

En reportant dans l'équation (E_1), on obtient :

$$\begin{aligned} & x^2 + \big(-5x-5\big)^2 - 4x - 4\big(-5x-5\big) - 1 = 0 \\ \iff & \big(1+25\big)x^2 + \big(50 - 4 + 20\big)x + \big(25 + 20 - 1\big) = 0 \\ \iff & 26x^2 + 66x + 44 = 0 \\ \iff & 13x^2 + 33x + 22 = 0. \end{aligned}$$

On obtient une équation du second degré de discriminant :

$$\Delta' = 33^2 - 4 \times 13 \times 22 = 1089 - 1144 = -55 < 0.$$

Cette équation n'admet donc pas de solutions. On en déduit que $\mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_3 = \emptyset$, autrement dit $\boxed{\mathscr{C}_1 \text{ et } \mathscr{C}_3 \text{ ne s'intersectent pas}}$.

(b) *Déterminer une équation cartésienne de $\Delta_{1,3}$.*

▶ On raisonne comme à la question 3(b) : un point $M(x,y)$ appartient à $\Delta_{1,3}$ si et seulement si :

$$\begin{aligned} p_1(M) = p_3(M) &\iff C_1M^2 - R_1^2 = C_3M^2 - R_3 \\ &\iff \left\|\overrightarrow{C_1M}\right\|^2 - 3^2 = \left\|\overrightarrow{C_3M}\right\|^2 - 1^2 \\ &\iff (x-2)^2 + (y-2)^2 - 9 = (x-(-3))^2 + (y-1)^2 - 1 \\ &\iff x^2 + y^2 - 4x - 4y - 1 = x^2 + y^2 + 6x - 2y + 9 \\ &\iff (-4-6)x + (-4+2)y + (-1-9) = 0 \\ &\iff -10x - 2y - 10 = 0 \\ &\iff \boxed{5x + y + 5 = 0}. \end{aligned}$$

6. (a) *Montrer que $\Delta_{1,2}$ et $\Delta_{1,3}$ se coupent au point de coordonnées $\Gamma(-\frac{16}{13}, \frac{15}{13})$.*

▶ D'après les résultats des questions 3(b) et 5(b), un point $M(x,y)$ appartient à $\Delta_{1,2} \cap \Delta_{1,3}$ si et seulement si :

$$\begin{cases} 2x + 3y - 1 = 0 \\ 5x + y + 5 = 0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Ayez le réflexe d'écrire les systèmes linéaires sous forme matricielle pour aller plus vite dans leur résolution. En particulier pour les systèmes de deux équations à deux inconnues pour lesquels on peut utiliser le déterminant.

On a :

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = 2 \times 1 - 5 \times 3 = -13 \neq 0.$$

Donc le système linéaire admet une unique solution :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} = \frac{1}{-13} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} = \frac{1}{-13} \begin{pmatrix} 16 \\ -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{16}{13} \\ \frac{15}{13} \end{pmatrix}.$$

On en déduit que $\boxed{\Delta_{1,2} \text{ et } \Delta_{1,3} \text{ se coupent en un point}}$ qui a pour coordonnées $\boxed{\Gamma(-\frac{16}{13}, \frac{15}{13})}$.

(b) *Démontrer que les axes radicaux $\Delta_{1,2}$, $\Delta_{1,3}$ et $\Delta_{2,3}$ sont concourants.*

▶ On a d'après le résultat de la question précédente :

$$\begin{aligned} p_2(\Gamma) &= C_2\Gamma^2 - R_2^2 = \left\|\overrightarrow{C_2\Gamma}\right\|^2 - 2^2 = \left(-\frac{16}{13} - 0\right)^2 + \left(\frac{15}{13} - (-1)\right)^2 - 4 \\ &= \frac{16^2 + 28^2 - 4 \times 13^2}{13^2} = \frac{256 + 784 - 676}{169} = \frac{364}{169} \\ \text{et} \quad p_3(\Gamma) &= C_3\Gamma^2 - R_3^2 = \left\|\overrightarrow{C_3\Gamma}\right\|^2 - 1^2 = \left(-\frac{16}{13} - (-3)\right)^2 + \left(\frac{15}{13} - 1\right)^2 - 1 \\ &= \frac{23^2 + 2^2 - 13^2}{13^2} = \frac{529 + 4 - 169}{169} = \frac{364}{169}. \end{aligned}$$

Puisque $p_2(\Gamma) = p_3(\Gamma)$, on en déduit que $\Gamma \in \Delta_{2,3}$ par définition de l'axe radical. Par conséquent, $\Delta_{1,2}$, $\Delta_{1,3}$ et $\Delta_{2,3}$ se coupent au point Γ, autrement dit $\boxed{\text{les axes radicaux } \Delta_{1,2}, \Delta_{1,3} \text{ et } \Delta_{2,3} \text{ sont concourants}}$.

Il est inutile de calculer $p_2(\Gamma)$ (qui est aussi égale à $\frac{364}{169}$ par définition de $\Delta_{1,2}$ et $\Delta_{1,3}$). Par contre, une autre méthode possible consiste à déterminer une équation cartésienne de $\Delta_{2,3}$ en raisonnant comme aux questions 4(b) et 5(b), on obtient par exemple $3x - 2y + 6 = 0$, puis à remarquer que les coordonnées de Γ vérifient bien cette équation.

Partie II - Calcul de la puissance d'un point par rapport à un cercle

Dans cette partie, on fixe un cercle $\mathscr{C}$ de centre C et de rayon R. Pour tout point M, on note $p(M)$ la puissance de M par rapport à $\mathscr{C}$.

7. *Que vaut $p(M)$ si M est un point appartenant à $\mathscr{C}$?*

   ▶ Si M appartient à $\mathscr{C}$ alors $CM = R$ et donc $p(M) = CM^2 - R^2 = \boxed{0}$.

8. *Dans cette question, on considère un point M n'appartenant pas à $\mathscr{C}$ et une droite $\mathscr{D}$ issue de M qui intersecte $\mathscr{C}$ en deux points A et B distincts. On note A' le point diamétralement opposé à A.*

   (a) *Montrer que $p(M) = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MA'}$.*

   ▶ On a :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MA'} &= \left(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CA}\right).\left(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CA'}\right) \quad \text{d'après la relation de Chasles}\\
&= \left(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CA}\right).\left(\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{CA}\right) \quad \text{car } C \text{ est le milieu de } [AA']\\
&= \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MC} + \underbrace{\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{CA}}_{=0} - \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CA} \quad \text{par bilinéarité du produit scalaire}\\
&= \left\|\overrightarrow{MC}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{CA}\right\|^2 \quad \text{par symétrie du produit scalaire et par définition de la norme}\\
&= CM^2 - R^2 \quad \text{car } [CA] \text{ est un rayon de } \mathscr{C}\\
&= p(M).
\end{aligned}$$

   Donc $\boxed{p(M) = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MA'}}$.

   (b) *Justifier que $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BA'}$ sont orthogonaux et en déduire que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BA'} = 0$.*

   ▶ En raisonnant comme à la question précédente en remplaçant M par B, on obtient que $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BA'} = p(B)$. Or $p(B) = 0$ d'après le résultat de la question 7 puisque $B \in \mathscr{C}$. On en déduit que $\boxed{\overrightarrow{BA} \text{ et } \overrightarrow{BA'} \text{ sont orthogonaux}}$. De plus, $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont colinéaires puisque M, A et B sont alignés sur la droite $\mathscr{D}$. Donc $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{BA'}$ sont aussi orthogonaux, d'où $\boxed{\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BA'} = 0}$.

   Géométriquement, $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BA'}$ sont orthogonaux car B appartient au cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[AA']$, donc le triangle ABA' est rectangle en B.

   (c) *Déduire des résultats précédents que $p(M) = MA \times MB$ si M est à l'extérieur du disque délimité par $\mathscr{C}$ et $p(M) = -MA \times MB$ sinon.*

   ▶ On a :

$$\begin{aligned}
p(M) &= \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MA'} \quad \text{d'après le résultat de la question 8(c)}\\
&= \overrightarrow{MA}.\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BA'}\right) \quad \text{d'après la relation de Chasles}\\
&= \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} + \underbrace{\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BA'}}_{=0} \quad \text{par bilinéarité du produit scalaire}\\
&= \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} \quad \text{d'après le résultat de la question précédente.}
\end{aligned}$$

   De plus, $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MA}$ sont colinéaires puisque M, A et B sont alignés sur la droite $\mathscr{D}$. Par conséquent, le produit sclaire $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ est égal à $-MA \times MB$ si $M \in [AB]$ (donc si M est à l'intérieur du disque délimité par $\mathscr{C}$) et à $MA \times MB$ sinon. On en déduit que :

$$\boxed{p(M) = \begin{cases} MA \times MB \text{ si } M \text{ est à l'extérieur du disque délimité par } \mathscr{C} \\ -MA \times MB \text{ sinon.} \end{cases}}$$

Partie III - Construction de l'axe radical

Dans cette partie, on fixe deux cercles non concentriques $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ de centres respectifs $C_1 \neq C_2$ et de rayons respectifs R_1 et R_2. Pour tout point M, on note respectivement $p_1(M)$ et $p_2(M)$ les puissances de M par rapport à $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$. Enfin, on note $\Delta_{1,2}$ l'axe radical de $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.

9. *On note I le milieu du segment $[C_1C_2]$ et on fixe $M \in \mathscr{P}$.*

(a) *Montrer que $M \in \Delta_{1,2}$ si et seulement si $\overrightarrow{C_1C_2}.\overrightarrow{IM} = (R_1^2 - R_2^2)/2$.*

▶ On a :

$$\begin{aligned}
M \in \Delta_{1,2} &\iff p_1(M) = p_2(M) \quad \text{par définition de l'axe radical} \\
&\iff C_1M^2 - R_1^2 = C_2M^2 - R_2^2 \quad \text{par définition de la puissance} \\
&\iff \left\|\overrightarrow{C_1M}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{C_2M}\right\|^2 = R_1^2 - R_2^2 \\
&\iff \left\|\overrightarrow{C_1I} + \overrightarrow{IM}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{C_2I} + \overrightarrow{IM}\right\|^2 = R_1^2 - R_2^2 \quad \text{d'après la relation de Chasles} \\
&\iff \left\|\tfrac{1}{2}\overrightarrow{C_1C_2} + \overrightarrow{IM}\right\|^2 - \left\|-\tfrac{1}{2}\overrightarrow{C_1C_2} + \overrightarrow{IM}\right\|^2 = R_1^2 - R_2^2 \quad \text{car } I \text{ est le milieu de } [C_1C_2] \\
&\iff \left(\left\|\tfrac{1}{2}\overrightarrow{C_1C_2}\right\|^2 + 2\tfrac{1}{2}\overrightarrow{C_1C_2}.\overrightarrow{IM} + \left\|\overrightarrow{IM}\right\|^2\right) - \left(\left\|-\tfrac{1}{2}\overrightarrow{C_1C_2}\right\|^2 - 2\tfrac{1}{2}\overrightarrow{C_1C_2}.\overrightarrow{IM} + \left\|\overrightarrow{IM}\right\|^2\right) \\
&\qquad\qquad = R_1^2 - R_2^2 \quad \text{par propriété de la norme} \\
&\iff 2\overrightarrow{C_1C_2}.\overrightarrow{IM} = R_1^2 - R_2^2 \quad \text{après simplifications} \\
&\iff \boxed{\overrightarrow{C_1C_2}.\overrightarrow{IM} = (R_1^2 - R_2^2)/2}.
\end{aligned}$$

(b) *Trouver deux réels μ_1 et μ_2 tels que le barycentre G de (C_1, μ_1) et (C_2, μ_2) appartienne à $\Delta_{1,2}$. On choisira les poids μ_1 et μ_2 afin que $\mu_1 + \mu_2 = 2C_1C_2^2$ et on les exprimera en fonction de $p_1(C_2)$, $p_2(C_1)$, R_1 et R_2.*

▶ On raisonne par analyse-synthèse.

Analyse. On cherche $(\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $G = \mathrm{bar}\left((C_1, \mu_1), (C_2, \mu_2)\right) \in \Delta_{1,2}$ et $\mu_1 + \mu_2 = 2C_1C_2^2$. Puisque $G \in \Delta_{1,2}$, on a d'après le résultat de la question précédente appliqué à $M = G$:

$$\overrightarrow{C_1C_2}.\overrightarrow{IG} = (R_1^2 - R_2^2)/2.$$

Or on a :

$$\begin{aligned}
(\mu_1 + \mu_2)\overrightarrow{IG} &= \mu_1\overrightarrow{IC_1} + \mu_2\overrightarrow{IC_2} \quad \text{par définition du barycentre} \\
&= -\tfrac{\mu_1}{2}\overrightarrow{C_1C_2} + \tfrac{\mu_2}{2}\overrightarrow{C_1C_2} \quad \text{car } I \text{ est le milieu de } [C_1C_2] \\
&= \frac{-\mu_1 + \mu_2}{2}\overrightarrow{C_1C_2}.
\end{aligned}$$

En réinjectant dans la première égalité, on obtient que :

$$(R_1^2 - R_2^2)/2 = \overrightarrow{C_1C_2}.\overrightarrow{IG} = \overrightarrow{C_1C_2}.\left(\frac{-\mu_1 + \mu_2}{2(\mu_1 + \mu_2)}\overrightarrow{C_1C_2}\right) = \frac{-\mu_1 + \mu_2}{2(\mu_1 + \mu_2)}\left\|\overrightarrow{C_1C_2}\right\|^2.$$

Puisque $\mu_1 + \mu_2 = 2C_1C_2^2$, on en déduit que :

$$(R_1^2 - R_2^2)/2 = \frac{-\mu_1 + \mu_2}{4C_1C_2^2}C_1C_2^2 \iff -\mu_1 + \mu_2 = 2(R_1^2 - R_2^2).$$

Par conséquent, on obtient le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} \mu_1 + \mu_2 = 2C_1C_2^2 \\ -\mu_1 + \mu_2 = 2(R_1^2 - R_2^2) \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2C_1C_2^2 \\ 2(R_1^2 - R_2^2) \end{pmatrix}.$$

Ayez le réflexe d'écrire les systèmes linéaires sous forme matricielle pour aller plus vite dans leur résolution. En particulier pour les systèmes de deux équations à deux inconnues pour lesquels on peut utiliser le déterminant.

On a :

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 1\times 1 - (-1)\times 1 = 2 \neq 0.$$

Donc le système linéaire admet une unique solution :

$$\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2C_1C_2^2 \\ 2(R_1^2 - R_2^2) \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2C_1C_2^2 \\ 2(R_1^2 - R_2^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1C_2^2 - R_1^2 + R_2^2 \\ C_1C_2^2 + R_1^2 - R_2^2 \end{pmatrix}.$$

Synthèse. On pose :

$$\boxed{\mu_1 = p_1(C_2) + R_2^2} \quad \text{et} \quad \boxed{\mu_2 = p_2(C_1) + R_1^2}.$$

Puisque $p_1(C_2) = C_1C_2^2 - R_1^2$ et $p_2(C_1) = C_2C_1^2 - R_2^2$ par définition de la puissance, on obtient bien que $G = \mathrm{bar}\left((C_1,\mu_1),(C_2,\mu_2)\right) \in \Delta_{1,2}$ et $\mu_1 + \mu_2 = 2C_1C_2^2$ d'après les calculs de l'analyse.

(c) En déduire que $\Delta_{1,2}$ est une droite dont on précisera un point et un vecteur normal.

▶ Puisque $G \in \Delta_{1,2}$ d'après le résultat de la question précédente, on a d'après le résultat de la question 9(a) appliqué à $M = G$:

$$\overrightarrow{C_1C_2}.\overrightarrow{IG} = (R_1^2 - R_2^2)/2.$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} M \in \Delta_{1,2} &\iff \overrightarrow{C_1C_2}.\overrightarrow{IM} = (R_1^2 - R_2^2)/2 \quad \text{d'après le résultat de la question 9(a)} \\ &\iff \overrightarrow{C_1C_2}.\left(\overrightarrow{IG} + \overrightarrow{GM}\right) = (R_1^2 - R_2^2)/2 \quad \text{d'après la relation de Chasles} \\ &\iff \underbrace{\overrightarrow{C_1C_2}.\overrightarrow{IG}}_{=(R_1^2 - R_2^2)/2} + \overrightarrow{C_1C_2}.\overrightarrow{GM} = (R_1^2 - R_2^2)/2 \\ &\iff \overrightarrow{C_1C_2}.\overrightarrow{GM} = 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, M appartient à $\Delta_{1,2}$ si et seulement si $\overrightarrow{GM}$ est orthogonal à $\overrightarrow{C_1C_2}$. On reconnaît une $\boxed{\text{droite passant par } G \text{ et de vecteur normal } \overrightarrow{C_1C_2}}$.

10. Déterminer $\Delta_{1,2}$ dans le cas où $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ s'intersectent en deux points A et B distincts.

▶ On a $p_1(A) = 0 = p_2(A)$ puisque A appartient à $\mathscr{C}_1$ et à $\mathscr{C}_2$ (d'après le résultat de la question 7). Donc $A \in \Delta_{1,2}$ par définition de l'axe radical. De même, $B \in \Delta_{1,2}$ puisque $B \in \mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_2$. Or $\Delta_{1,2}$ est une droite d'après le résultat de la question précédente. On en déduit que $\boxed{\Delta_{1,2} \text{ est la droite } (AB) \text{ passant par } A \text{ et } B}$.

11. On note $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ les deux tangentes communes à $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$. On note respectivement T_1 et T_2 les points de tangence de $\mathscr{D}$ avec $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$. De plus, on note J le milieu du segment $[T_1T_2]$.

(a) Justifier que $J \in \Delta_{1,2}$.

▶ On a :

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{IJ} &= \overrightarrow{IT_1} + \overrightarrow{IT_2} \quad \text{car } J = \mathrm{bar}((T_1,1),(T_2,1)) \\ &= \overrightarrow{IC_1} + \overrightarrow{C_1T_1} + \overrightarrow{IC_2} + \overrightarrow{C_2T_2} \quad \text{d'après la relation de Chasles} \\ &= \overrightarrow{C_1T_1} + \underbrace{\overrightarrow{IC_1} + \overrightarrow{IC_2}}_{=2\overrightarrow{II}=\overrightarrow{0}} + \overrightarrow{C_2T_2} \\ &= \overrightarrow{C_1T_1} + \overrightarrow{C_2T_2} \quad \text{car } I = \mathrm{bar}((C_1,1),(C_2,1)). \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\overrightarrow{C_1C_2}.\overrightarrow{IJ} = \left(\overrightarrow{C_1T_1}+\overrightarrow{T_1T_2}+\overrightarrow{T_2C_2}\right).\tfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{C_1T_1}+\overrightarrow{C_2T_2}\right) \quad \text{d'après la relation de Chasles}$$

$$=\tfrac{1}{2}\left(\underbrace{\overrightarrow{C_1T_1}.\overrightarrow{C_1T_1}}_{=\|\overrightarrow{C_1T_1}\|^2=R_1^2}+\overrightarrow{C_1T_1}.\overrightarrow{C_2T_2}+\underbrace{\overrightarrow{T_1T_2}.\overrightarrow{C_1T_1}}_{=0}+\underbrace{\overrightarrow{T_1T_2}.\overrightarrow{C_2T_2}}_{=0}+\underbrace{\overrightarrow{T_2C_2}.\overrightarrow{C_1T_1}}_{=-\overrightarrow{C_1T_1}.\overrightarrow{C_2T_2}}+\underbrace{\overrightarrow{T_2C_2}.\overrightarrow{C_2T_2}}_{-\|\overrightarrow{C_2T_2}\|^2=-R_2^2}\right).$$

Faites un petit schéma au brouillon pour savoir comment mener les calculs afin de les simplifier (en reconnaissant des vecteurs orthogonaux et des rayons de $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$).

Puisque la droite $\mathscr{D}=(T_1T_2)$ est tangente à $\mathscr{C}_1$ en T_1, les vecteurs $\overrightarrow{T_1T_2}$ et $\overrightarrow{C_1T_1}$ sont orthogonaux, donc $\overrightarrow{T_1T_2}.\overrightarrow{C_1T_1}=0$. De même, on a $\overrightarrow{T_1T_2}.\overrightarrow{C_2T_2}=0$. Finalement, on obtient que :

$$\overrightarrow{C_1C_2}.\overrightarrow{IJ}=\tfrac{1}{2}\left(R_1^2+0-R_2^2\right)=\left(R_1^2-R_2^2\right)/2.$$

On en déduit que $\boxed{J\in\Delta_{1,2}}$ d'après le résultat de la question 9(a).

Une autre méthode consiste à utiliser la définition de l'axe radical en calculant la puissance de J par rapport à $\mathscr{C}_1$ et à $\mathscr{C}_2$. On a :

$$p_1(J)=C_1J^2-R_1^2=C_1J^2-C_1T_1^2=T_1J^2$$

d'après le théorème de Pythagore, car le triangle C_1T_1J est rectangle en T_1. Puisque J est le milieu de $[T_1T_2]$, on en déduit que $p_1(J)=\frac{1}{4}T_1T_2^2$. De même, on obtient que $p_2(J)=T_2J^2=\frac{1}{4}T_1T_2^2=p_1(J)$. Par conséquent, $J\in\Delta_{1,2}$.

(b) *En déduire une manière de construire l'axe radical $\Delta_{1,2}$.*

► En raisonnant comme à la question précédente, on obtient que $J'\in\Delta_{1,2}$ où J' est le milieu du segment $[T_1'T_2']$ reliant les points de tangence T_1 et T_2 de $\mathscr{D}$ avec $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ respectivement. Or $\Delta_{1,2}$ est une droite d'après le résultat de la question 9(b). On en déduit que $\boxed{\Delta_{1,2} \text{ est la droite } (JJ') \text{ passant par } J \text{ et } J'}$.

Partie IV - Centre radical

Dans cette partie, on fixe trois cercles $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ de centres respectifs C_1, C_2 et C_3 et de rayons respectifs R_1, R_2 et R_3. On suppose que les trois centres ne sont pas alignés et on note $C_1(a_1,b_1)$, $C_2(a_2,b_2)$ et $C_3(a_3,b_3)$ leurs coordonnées. Enfin, on note $\Delta_{1,2}$ l'axe radical de $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$, $\Delta_{1,3}$ l'axe radical de $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_3$, et $\Delta_{2,3}$ l'axe radical de $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$.

12. (a) *Montrer qu'une équation cartésienne de $\Delta_{1,2}$ est :*

$$\Delta_{1,2} : (a_2-a_1)x+(b_2-b_1)y+K_{1,2}=0$$

où $K_{1,2}=(a_1^2+b_1^2-R_1^2-a_2^2-b_2^2+R_2^2)/2$.

▶ Par définition de l'axe radical, un point $M(x,y)$ appartient à $\Delta_{1,2}$ si et seulement si :

$$\begin{aligned}
& p_1(M) = p_2(M) \\
\iff & C_1M - R_1^2 = C_2M - R_2^2 \\
\iff & \left\|\overrightarrow{C_1M}\right\|^2 - R_1^2 - \left\|\overrightarrow{C_2M}\right\|^2 + R_2^2 = 0 \\
\iff & (x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 - R_1^2 - (x-a_2)^2 - (y-b_2)^2 + R_2^2 = 0 \\
\iff & x^2 - 2a_1x + a_1^2 + y^2 - 2b_1y + b_1^2 - R_1^2 - x^2 + 2a_2x - a_2^2 - y^2 + 2b_2y - b_2^2 + R_2^2 = 0 \\
\iff & 2(a_2-a_1)x + 2(b_2-b_1)y + \underbrace{\left(a_1^2 + b_1^2 - R_1^2 - a_2^2 - b_2^2 + R_2^2\right)}_{=2K_{1,2}} = 0 \\
\iff & \boxed{(a_2-a_1)x + (b_2-b_1)y + K_{1,2} = 0} \quad \text{où} \quad \boxed{K_{1,2} = (a_1^2 + b_1^2 - R_1^2 - a_2^2 - b_2^2 + R_2^2)/2}.
\end{aligned}$$

(b) *Montrer qu'étudier l'intersection de $\Delta_{1,2}$, $\Delta_{1,3}$ et $\Delta_{2,3}$ revient à résoudre un système linéaire (S) de trois équations à deux inconnues. On écrira ce système sous forme matricielle.*

▶ En raisonnant comme à la question précédente, on obtient des équations cartésiennes de $\Delta_{1,3}$ et $\Delta_{2,3}$ de la forme :

$$\Delta_{1,3} : (a_3-a_1)x + (b_3-b_1)y + K_{1,3} = 0 \quad \text{où} \quad K_{1,3} = (a_1^2 + b_1^2 - R_1^2 - a_3^2 - b_3^2 + R_3^2)/2,$$

$$\Delta_{2,3} : (a_3-a_2)x + (b_3-b_2)y + K_{2,3} = 0 \quad \text{où} \quad K_{2,3} = (a_2^2 + b_2^2 - R_2^2 - a_3^2 - b_3^2 + R_3^2)/2.$$

Par conséquent, un point $M(x,y)$ appartient à $\Delta_{1,2} \cap \Delta_{1,3} \cap \Delta_{2,3}$ si et seulement si :

$$\begin{aligned}
& \begin{cases} (a_2-a_1)x + (b_2-b_1)y + K_{1,2} = 0 \\ (a_3-a_1)x + (b_3-b_1)y + K_{1,3} = 0 \\ (a_3-a_2)x + (b_3-b_2)y + K_{2,3} = 0 \end{cases} \\
\iff & \boxed{\begin{pmatrix} (a_2-a_1) & (b_2-b_1) \\ (a_3-a_1) & (b_3-b_1) \\ (a_3-a_2) & (b_3-b_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -K_{1,2} \\ -K_{1,3} \\ -K_{2,3} \end{pmatrix}}.
\end{aligned} \tag{S}$$

(c) *Justifier que le système linéaire (S) obtenu à la question précédente est équivalent au système linéaire (S') formé des deux premières équations de (S).*

▶ On utilise les opérations élémentaires sur les lignes suivantes :

$$\begin{aligned}
(S) \iff & \begin{pmatrix} (a_2-a_1) & (b_2-b_1) \\ (a_3-a_1) & (b_3-b_1) \\ (a_3-a_2) & (b_3-b_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -K_{1,2} \\ -K_{1,3} \\ -K_{2,3} \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\
\iff & \begin{pmatrix} (a_2-a_1) & (b_2-b_1) \\ (a_3-a_1) & (b_3-b_1) \\ (a_1-a_2) & (b_1-b_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -K_{1,2} \\ -K_{1,3} \\ -K_{2,3} + K_{1,3} \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \\
\iff & \begin{pmatrix} (a_2-a_1) & (b_2-b_1) \\ (a_3-a_1) & (b_3-b_1) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -K_{1,2} \\ -K_{1,3} \\ -K_{2,3} + K_{1,3} - K_{1,2} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned}
& -K_{2,3} + K_{1,3} + K_{1,2} \\
= & -\tfrac{1}{2}\left(a_2^2 + b_2^2 - R_2^2 - a_3^2 - b_3^2 + R_3^2\right) + \tfrac{1}{2}\left(a_1^2 + b_1^2 - R_1^2 - a_3^2 - b_3^2 + R_3^2\right) \\
& \qquad - \tfrac{1}{2}\left(a_1^2 + b_1^2 - R_1^2 - a_2^2 - b_2^2 + R_2^2\right) \\
= & \tfrac{1}{2}\left(-a_2^2 - b_2^2 + R_2^2 + a_3^2 + b_3^2 - R_3^2 + a_1^2 + b_1^2 - R_1^2 - a_3^2 - b_3^2 + R_3^2\right. \\
& \qquad \left. -a_1^2 - b_1^2 + R_1^2 + a_2^2 + b_2^2 - R_2^2\right) \\
= & 0.
\end{aligned}$$

Ainsi, la troisième équation du système équivalent à (S) peut s'écrire «$0 = 0$». Par conséquent, le système linéaire (S) est bien équivalent au système :

$$\boxed{\begin{pmatrix} (a_2 - a_1) & (b_2 - b_1) \\ (a_3 - a_1) & (b_3 - b_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -K_{1,2} \\ -K_{1,3} \end{pmatrix}}. \tag{S'}$$

(d) *Conclure que les axes radicaux $\Delta_{1,2}$, $\Delta_{1,3}$ et $\Delta_{2,3}$ sont concourants. Les coordonnées du point de concourance ne sont pas demandées.*

▶ Puisque C_1, C_2 et C_3 ne sont pas alignés, les vecteurs $\overrightarrow{C_1C_2}$ et $\overrightarrow{C_1C_3}$ ne sont pas colinéaires. Par définition de la colinéarité, on en déduit que le système linéaire $\lambda\overrightarrow{C_1C_2} + \mu\overrightarrow{C_1C_3} = \overrightarrow{0}$ admet pour unique solution $(\lambda, \mu) = (0, 0)$. Or la forme matricielle de ce système linéaire est :

$$\lambda\overrightarrow{C_1C_2} + \mu\overrightarrow{C_1C_3} = \overrightarrow{0} \iff \begin{pmatrix} (a_2 - a_1) & (a_3 - a_1) \\ (b_2 - b_1) & (b_3 - b_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Puisque ce système admet une unique solution, le déterminant de la matrice de ses coefficients est non nul :

$$\det \begin{pmatrix} (a_2 - a_1) & (a_3 - a_1) \\ (b_2 - b_1) & (b_3 - b_1) \end{pmatrix} = (a_2 - a_1)(b_3 - b_1) - (b_2 - b_1)(a_3 - a_1) \neq 0.$$

Or, on remarque que ce déterminant est égal à celui de la matrice des coefficients du système (S') obtenu à la question précédente :

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} (a_2 - a_1) & (b_2 - b_1) \\ (a_3 - a_1) & (b_3 - b_1) \end{pmatrix} &= (a_2 - a_1)(b_3 - b_1) - (a_3 - a_1)(b_2 - b_1) \\ &= (a_2 - a_1)(b_3 - b_1) - (b_2 - b_1)(a_3 - a_1) \neq 0. \end{aligned}$$

On en déduit que le système (S') admet une unique solution, donc que le système (S) admet aussi une unique solution d'après le résultat de la question précédente. Finalement, on conclut que $\boxed{\text{les axes radicaux } \Delta_{1,2}, \Delta_{1,3} \text{ et } \Delta_{2,3} \text{ sont concourants}}$ d'après le résultat de la question 12(b).

*Le point de concourance des trois axes radicaux est appelé le **centre radical** de $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$.*

Problème B : étude de suites

Énoncé et corrigé de V. Vong

1. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. $f_1(x)$ est bien définie si et seulement si $x \neq 0$ et $x \neq -1$. Donc

$$\boxed{D_{f_1} =]-\infty, -1[\cup]-1, 0[\cup]0, +\infty[}$$

La fonction f_1 étant une somme de fractions rationnelles, elle est dérivable sur son domaine de définition et :

$$\forall x \in D_{f_1}, f'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2} < 0.$$

f' étant strictement négative sur D_{f_1}, on en déduit que :

— f est strictement décroissante sur $]-\infty, -1[$,

— f est strictement décroissante sur $]-1, 0[$,

— f est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.

À l'aide des opérations usuelles sur les limites, on constate que

$$\lim_{x\to-\infty} f_1(x) = -1, \quad \lim_{x\to-1, x<-1} f_1(x) = -\infty, \lim_{x\to-1,x>-1} f_1(x) = +\infty,$$
$$\lim_{x\to0,x<0} f_1(x) = -\infty, \lim_{x\to0,x>0} f_1(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} f_1(x) = -1.$$

x	$+\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	‖	$-$	
$f(x)$	$-1 \searrow$		$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	-1

(b) Résolvons (E_1). Soit $x \in D_{f_1}$. Raisonnons par équivalence.

$$\begin{aligned}(E_1) &\iff \tfrac{1}{x} + \tfrac{1}{x+1} - 1 = 0 \\ &\iff \tfrac{1+x+x-x(x+1)}{x(x+1)} = 0 \\ &\iff -x^2 + x + 1 = 0 \ (x \in D_{f_1})\end{aligned}.$$

On reconnaît une équation du second degré de discriminant $1 - 4(-1) = 5 > 0$. Les solutions de cette équation sont donc exactement :

$$x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{-2} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{-2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Ces deux valeurs étant bien dans D_{f_1}, on en déduit que les solutions de (E_1) sont donc exactement :

$$\boxed{S = \left\{\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}}.$$

2. (a) La fonction f_n étant une somme de fractions rationnelles, on en déduit que son domaine de définition est $\mathbb{R}$ privé des points annulant un des dénominateurs. Donc

$$\boxed{D_{f_n} = \mathbb{R}\backslash\{-n, -(n-1), \dots, -i, \dots, -1, 0\}}.$$

(b) La fonction f_5 étant une somme de fractions rationnelles, elle est dérivable sur son domaine de définition et :

$$\begin{aligned}\forall x \in D_{f_5},\ f_5'(x) &= \textstyle\sum_{i=0}^5 \left(-\frac{1}{(x+i)^2}\right) \\ &= -\textstyle\sum_{i=0}^5 \left(\frac{1}{(x+i)^2}\right) < 0\end{aligned}.$$

f_5' étant strictement négative sur D_{f_5}, on en déduit que :

- f est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty, -5[$,
- pour tout $i \in \{-5, -4, -3, -2, -1\}$, f_5 est strictement décroissante sur $]-i, -i+1[$,
- f est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.

À l'aide des opérations usuelles sur les limites, on constate que

$$\lim_{x\to-\infty} f_5(x) = -1 \ \lim_{x\to+\infty} f_5(x) = -1\,.$$

De plus,

$$\forall i \in \{-5, -4, \dots, -1, 0\}, \lim_{x\to i, x>i} f_5(x) = +\infty, \lim_{x\to i, x<i} f_5(x) = -\infty.$$

Il en vient le tableau de variations :

x	$+\infty$	-5	-4	-3	-2	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	
$f(x)$	$-1 \searrow -\infty$	$\Vert$ $+\infty \searrow -\infty$	$\Vert$ $+\infty \searrow -\infty$	$\Vert$ $+\infty \searrow -\infty$	$\Vert$ $+\infty \searrow -\infty$	$\Vert$ $+\infty \searrow -\infty$	$\Vert$ $+\infty \searrow -1$	

(c) De façon similaire, la fonction f_n étant une somme de fractions rationnelles, elle est dérivable sur son domaine de définition et :

$$\forall x \in D_{f_n},\ f_n'(x) = \sum_{i=0}^{n}\left(-\frac{1}{(x+i)^2}\right)$$
$$= -\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{1}{(x+i)^2}\right) < 0 \ .$$

f_n' étant strictement négative sur D_{f_n}, on en déduit que :

— f_n est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty,-n[$,

— pour tout $i \in \{-n,-(n-1),-(n-2),\ldots,-2,-1\}$, f_5 est strictement décroissante sur $]-i,-i+1[$,

— f est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$.

À l'aide des opérations usuelles sur les limites, on constate que

$$\lim_{x\to-\infty} f_n(x) = -1 \ \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = -1\,.$$

De plus,

$$\forall i \in \{-n,-(n-1),\ldots,-1,0\},\ \lim_{x\to i, x>i} f_n(x) = +\infty,\ \lim_{x\to i, x<i} f_n(x) = -\infty.$$

On obtient alors le tableau de variations

x	$+\infty$	$-n$	$-(n-1)$	$-(n-2)$	$\cdots$	$-i$	$-i+1$	$\cdots$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$ $\cdots$ $-$		$-$	$-$ $\cdots$ $-$		$-$	
$f(x)$	$-1 \searrow -\infty$	$\Vert$ $+\infty \searrow -\infty$	$\Vert$ $+\infty \searrow -\infty$	$\Vert$ $+\infty$ $\cdots$	$-\infty$	$\Vert$ $+\infty \searrow -\infty$	$\Vert$ $+\infty$ $\cdots$	$-\infty$	$\Vert$ $+\infty \searrow -1$	

(d) D'après les variations de f_n, l'équation (E_n) n'a pas de solution sur $]-\infty,-n[$. Soit $i \in \{-n,-n+1,\ldots,-1\}$. On sait que :

— f est continue sur $]i,i+1[$ (car fraction rationnelle)

— $\lim_{x\to i, x>i} f_n(x) = +\infty$, $\lim_{x\to i+1, x<i+1} f_n(x) = -\infty$

— f est strictement décroissante sur $]i,i+1[$

— $0 \in]-\infty,+\infty[$

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $\alpha_i \in]i,i+1[$ vérifiant $f_n(\alpha_i) = 0$

De même, sur $]0,+\infty[$, en raisonnant de façon similaire on en déduit qu'il existe un unique $\alpha_0 \in]0,+\infty[$ vérifiant $f_n(\alpha_0) = 0$. De l'étude précédente, on en déduit que les solutions de l'équation (E_n) sont exactement :

$$\alpha_0, \alpha_{-1}, \alpha_{-2}, \cdots, \alpha_{-n},$$

ce qui nous donne exactement $\boxed{n+1 \text{ solutions réelles}}$.

3. (a) Voici la fonction `fonction_n(n,x)` :

```
def fonction_n(n,x) :
    S = -1
    for i in range(n+1) :
        S = S+ (1/(x+i))
    return S
```

(b) On considère la fonction suivante :

```
def precision(n,d) :
    a = -1
    b = 0
    while (b-a)> d :
        c = (a+b)/2
        if fonction_n(n,c) > 0 :
            a = c
        else :
            b = c
   return [a,b]
```

i. Après éxécution, on trouve la valeur `[-0.75,-0.5]`

ii. Il suffit de modifier les lignes 2 et 3 du code comme suit :

```
def precision(n,d) :
    a = -2
    b =-1
    while (b-a)> d :
        c = (a+b)/2
        if fonction_n(n,c) > 0 :
            a = c
        else :
            b = c
   return [a,b]
```

(c) On aimerait écrire une fonction `approx_sol(n,d)` qui prend en argument un entier $n \geq 1$ et un réel strictement positif `d` et qui renvoie une liste de listes de réels L où pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ la liste $L[k]$ est de la forme $[a_k, b_k]$ avec $|b_k - a_k| \leq d$ et $k-n \leq a_k \leq b_k \leq k-n+1$. On propose le pseudo-code pour la fonction `approx_sol` :

```
approx_sol(n,d) :
    initialiser debut à [-n,-n+1,...,-1]
    initialiser fin  à [-n+1,...,0]
    ecart = 1
    tant que ecart > d:
        pour tout 0<=k<=(n-1) :
            poser c = (debut[k]+fin[k])/2
            si fonction_n(n,c)>0 :
                debut[k] = c
            sinon :
                fin[k] = c
   retourner [[debut[k],fin[k]] pour k parcourant {0,...,n-1}]
```

i. Écrivons le code python correspondant :

```
def approx_sol(n,d) :
    debut=[i for i in range(-n,0,-1)]
    fin=[i for i in range(-n+1,1,-1)]
    ecart = 1
    while ecart > d:
        for k in range(n) :
            c = (debut[k]+fin[k])/2
            if fonction_n(n,c)>0 :
                debut[k] = c
            else :
                fin[k] = c
return [[debut[k],fin[k]]  k parcourant {0,...,n-1}]
```

ii. La valeur de retour de ce code correspond à une liste L de listes $I_k = [a_k, b_k]$ où $a_k \leq x_k \leq b_k$, $|a_k - b_k| \leq d$ et x_k est une solution de (E_n). On a ainsi des approximations des n premières solutions de l'équation (E_n). Il nous manque la plus grande.

4. (a) Soit $x > 1$. Par décroissance de la fonction inverser sur $\mathbb{R}^{+\star}$:

$$\forall t \in [x-1, x], \frac{1}{x} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{x-1}.$$

Par croissance de l'intégrale et en intégrant les inégalités sur $[x-1, x]$, on en déduit que

$$\int_{x-1}^{x} \frac{1}{x} dt \leq \int_{x-1}^{x} \frac{1}{t} dt \leq \int_{x-1}^{x} \frac{1}{x-1} dt.$$

D'où

$$\frac{1}{x} \leq \ln(x) - \ln(x-1) \leq \frac{1}{x-1}.$$

Autrement dit,

$$\frac{1}{x} \leq \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) \leq \frac{1}{x-1}.$$

Les inégalités étant établies pour un $x > 1$ arbitraire, on en déduit que

$$\boxed{\forall x > 1, \frac{1}{x} \leq \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) \leq \frac{1}{x-1}}.$$

(b) Soit $x > 0$. Pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $x + k > 1$. Donc d'après la question 5.a, on en déduit que

$$\forall k \in \{1, 2, \ldots, n\},\ \frac{1}{x+k} \leq \ln\left(\frac{x+k}{x+k-1}\right) \leq \frac{1}{x+k-1}.$$

En sommant ces inégalités pour k décrivant $\{1, 2, \ldots, n\}$, on en déduit que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x+k} \leq \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{x+k}{x+k-1}\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x+k-1}. \qquad \text{(I)}$$

Or :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x+k} = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{x+k}\right) - \frac{1}{x} + 1 - 1 = \underline{f_n(x) - \frac{1}{x} + 1}.$$

De plus,

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{x+k}{x+k-1}\right) &= \textstyle\sum_{k=1}^{n} \left(\ln(x+k) - \ln(x+k-1)\right) \\
&= \ln(x+n) - \ln(x) \qquad \text{(somme télescopique)} \\
&= \ln\left(\tfrac{x+n}{x}\right) \\
&= \underline{\ln\left(1 + \tfrac{n}{x}\right)}
\end{aligned}.$$

Enfin,

$$\begin{aligned}\textstyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x+k-1} &= \textstyle\sum_{l=0}^{n-1} \frac{1}{x+l} && \text{(changement de variable l=k-1)}\\ &= \textstyle\sum_{l=0}^{n} \frac{1}{x+l} - \frac{1}{x+n} - 1 + 1 \\ &= \underline{f_n(x) - \tfrac{1}{x+n} + 1}\end{aligned}.$$

En reprenant l'inégalité (I), on obtient

$$\boxed{f_n(x) - \frac{1}{x} + 1 \leq \ln\left(1 + \frac{n}{x}\right) \leq f_n(x) - \frac{1}{x+n} + 1}.$$

En considérant l'inégalité de gauche :

$$f_n(x) - \frac{1}{x} + 1 \leq \ln(1 + \frac{n}{x}),$$

on obtient

$$\underline{f_n(x) \leq \ln\left(1 + \frac{n}{x}\right) + \frac{1}{x} - 1.}$$

De même,

$$\ln\left(1 + \frac{n}{x}\right) \leq f_n(x) - \frac{1}{x+n} + 1.$$

D'où

$$\underline{\ln\left(1 + \frac{n}{x}\right) + \frac{1}{x+n} - 1 \leq f_n(x).}$$

Il en résulte que

$$\boxed{\ln\left(1 + \frac{n}{x}\right) + \frac{1}{x+n} - 1 \leq f_n(x) \leq \ln\left(1 + \frac{n}{x}\right) + \frac{1}{x} - 1.}$$

5. (a) D'après la question 1.b, la plus grande solution de (E_1) est égale à $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. On a donc $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, qui est bien strictement compris entre 1 et 2.
Soit $n > 1$. D'après la question 4b :

$$\forall x > 0, \ln\left(1 + \frac{n}{x}\right) + \frac{1}{x+n} - 1 \leq f_n(x) \leq \ln\left(1 + \frac{n}{x}\right) + \frac{1}{x} - 1.$$

Or 1 et $2n$ sont strictement positifs. D'où

$$\ln(1+n) + \frac{1}{1+n} - 1 \leq f_n(1), f_n(2n) \leq \ln(\frac{3}{2}) + \frac{1}{2n} - 1.$$

Or $n \geq 2$. Donc $\ln(1+n) + \frac{1}{1+n} - 1 \geq \ln(3) - 1 > 0$ et $\ln(\frac{3}{2}) - 1 + \frac{1}{2n} \leq \ln\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{1}{2} < 0$. De ces inégalités, on en déduit que

$$f_n(1) > 0, f_n(2n) < 0.$$

Par stricte décroissance de f_n sur $]0, +\infty[$, on en déduit que $\boxed{1 < x_n < 2n}$, l'existence étant prouvé dans la partie 2.

(b) Voici le programme correspondant :

```
def approx_x(n,d) :
    a = 1
    b = 2*n
    while (b-a)> d :
        c = (a+b)/2
        if fonction_n(n,c) > 0 :
```

```
            a = c
        else :
            b = c
    return [a,b]
```

(c) Fixons $n \geq 1$. Sachant que $2n > x_n > 1$, on en déduit à l'aide de l'inégalité de la question 4b :

$$\ln\left(1+\frac{n}{x_n}\right)+\frac{1}{x_n+n}-1 \leq f_n(x_n) \leq \ln\left(1+\frac{n}{x_n}\right)+\frac{1}{x_n}-1..$$

Or par définition, $f_n(x_n)=0$. D'où

$$\ln\left(1+\frac{n}{x_n}\right)+\frac{1}{x_n+n}-1 \leq 0 \leq \ln\left(1+\frac{n}{x_n}\right)+\frac{1}{x_n}-1..$$

En manipulant la première inégalité, on obtient :

$$\ln\left(1+\frac{n}{x_n}\right) \leq 1+\frac{1}{x_n+n}.$$

En manipulant la deuxième inégalité, on a

$$\frac{1}{x_n}-1 \leq \ln\left(1+\frac{n}{x_n}\right).$$

D'où

$$\boxed{1-\frac{1}{x_n} \leq \ln\left(1+\frac{n}{x_n}\right) \leq 1-\frac{1}{x_n+n}}.$$

(d) Soit $n \geq 1$. D'après la question 5c, on a

$$\ln(1+\frac{n}{x_n}) \leq 1-\frac{1}{x_n+n} \leq 1.$$

Donc

$$\ln\left(1+\frac{n}{x_n}\right) \leq 1.$$

Par croissance de la fonction exponentielle, on en déduit que

$$1+\frac{n}{x_n} \leq e^1.$$

D'où

$$0 < \frac{n}{x_n} \leq e^1-1.$$

Par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}^{+\star}$

$$\frac{x_n}{n} \geq \frac{1}{e^1-1}.$$

D'où

$$\boxed{x_n \geq \frac{n}{e^1-1}}.$$

(e) D'après la question 5d :

$$\forall n \geq 1, x_n \geq \frac{n}{e^1-1}.$$

Or $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{e^1-1} = +\infty$. Donc par comparaison de limites, $\underline{\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty}$.

D'après la question 5c :

$$\forall n \geq 1, 1 - \frac{1}{x_n} \leq \ln\left(1 + \frac{n}{x_n}\right) \leq 1 - \frac{1}{x_n + n}.$$

Or $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$. D'où $\lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{1}{x_n} = 1, \lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{1}{x_n+n} = 1$. D'après le théorème des gendarmes, on en déduit que

$$\underline{\lim_{n\to+\infty} \ln(1 + \frac{n}{x_n}) = 1.}$$

(f) Par continuité de la fonction exponentielle, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{n}{x_n} = e.$$

Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{x_n} = e^1 - 1.$$

Autement dit,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{n}{e^1-1}}{x_n} = 1.$$

En posant $\delta = \frac{1}{e^1-1}$, on a bien

$$\boxed{x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \delta \cdot n}.$$

DS n° 6 de mathématiques et d'informatique

durée : 3 heures à distance

Exercice 1

Pour tout $x > 0$, on considère l'équation suivante d'inconnue $y \in \mathbb{R}$:

$$e^{x-y} = y + 1 \tag{E_x}$$

1. On fixe $x > 0$ dans cette question.
   (a) Étudier la fonction $g_x : y \mapsto e^{x-y} - y - 1$.
   (b) En déduire que (E_x) admet une unique solution.

Dans la suite de l'énoncé, on note $f(x)$ l'unique solution de (E_x) pour tout $x > 0$.

2. Montrer que $f(x) \in]0, x[$ pour tout $x > 0$.
3. **[Informatique]**. À l'aide d'un algorithme de dichotomie, écrire une fonction `approx_f(x,epsilon)` qui prend en argument un réel $x > 0$ et une précision $\varepsilon > 0$, puis qui renvoie une approximation de $f(x)$ à ε près.
4. (a) Soient $x_2 > x_1 > 0$. Déterminer le signe de $g_{x_1}(f(x_2))$.
   (b) En déduire que f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.
5. (a) Justifier que f admet une limite en $+\infty$.
   (b) En raisonnant par l'absurde, montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
   (c) Montrer que :
   $$\forall x > 0, \quad \frac{x}{f(x)} = 1 + \frac{\ln(1 + f(x))}{f(x)}.$$
   (d) En déduire un équivalent simple de $f(x)$ quand $x \to +\infty$.
6. (a) Justifier que f se prolonge par continuité en 0.
   (b) Montrer que la valeur de ce prolongement en 0 vaut $f(0) = 0$.
   (c) En utilisant le résultat de la question 5(c), montrer que $f(x)$ est équivalent à $x/2$ quand $x \to 0$.

Exercice 2

On considère trois urnes contenant respectivement :

— urne n° 1 : 1 boule rouge, 1 boule verte et 1 boule bleue ;

— urne n° 2 : 1 boule rouge, 2 boules vertes et 3 boules bleues ;

— urne n° 3 : 2 boules rouges, 3 boules vertes et 5 boules bleues.

1. On choisit au hasard une urne et une boule dans cette urne. Quelle est la probabilité que la boule tirée soit rouge ?
2. Quelle est la probabilité d'avoir choisi l'urne n° 2 sachant que la boule tirée est verte ?
3. On tire une deuxième boule de la même façon après avoir remis la première boule dans son urne. Quelle est la probabilité que les deux boules tirées soient de la même couleur ?
4. Même question sans remettre la première boule dans son urne.

Problème

On fixe $n \in \mathbb{N}^*$ pour tout ce problème et on considère le polynôme :

$$P_n = 4 - \frac{(-1)^n}{4^{n-1}} X^{4n}(1-X)^{4n}.$$

1. Calculer $(1-i)^4$.
2. Justifier que P_n est factorisable par le polynôme X^2+1.

Dans la suite de l'énoncé, on note Q_n le polynôme tel que $P_n = (X^2+1)Q_n$.

3. Montrer que :
$$\int_0^1 Q_n(x)\mathrm{d}x = \pi - \frac{(-1)^n}{4^{n-1}} \int_0^1 \frac{x^{4n}(1-x)^{4n}}{x^2+1}\mathrm{d}x.$$
4. En déduire que :
$$\left|\pi - \int_0^1 Q_n(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{1}{4^{n-1}} \int_0^1 x^{4n}(1-x)^{4n}\mathrm{d}x.$$
5. Dans cette question, on fixe $p \in \mathbb{N}^*$ et on souhaite calculer $I_p = \int_0^1 x^p(1-x)^p\mathrm{d}x$.
   (a) Montrer que :
   $$I_p = \frac{p}{p+1} \int_0^1 x^{p+1}(1-x)^{p-1}\mathrm{d}x.$$
   (b) En itérant le raisonnement de la question précédente, prouver que :
   $$I_p = \frac{p(p-1)(p-2)\cdots \times 2 \times 1}{(p+1)(p+2)(p+3)\dots(2p-1)(2p)(2p+1)}.$$
6. Montrer que :
$$\left|\pi - \int_0^1 Q_n(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{((4n)!)^2}{4^{n-1}(8n+1)!}.$$
7. Dans cette question, on suppose que $n = 1$.
   (a) Quel est le degré de Q_1 ?
   (b) Déterminer Q_1.
   (c) À l'aide du résultat de la question 6, déterminer une approximation de π par une fraction. Quelle est la précision de cette approximation ?

Exercice 3 (Informatique)

Chaque polynôme est représenté en Python par la liste de ses coefficients dans l'ordre croissant des puissances. Ainsi le polynôme $1 - X^2 + 2X^3$ est représenté par la liste `[1,0,-1,2]` et la liste `[0,3,1,0-3]` représente le polynôme $3X + X^2 - 3X^4$. Le polynôme nul est représenté par la liste vide.

1. Écrire une fonction `derive` qui prend en argument un polynôme P puis qui renvoie son polynôme dérivée P'.
2. Écrire une fonction `evalue` qui prend en argument un polynôme P et un réel a puis qui renvoie la valeur de $P(a)$.

On considère les fonctions écrites en page suivante.

3. (a) Expliquer ce que renvoie la fonction `mystere1`.
   (b) Dans quel cas la fonction `mystere1` renvoie une liste vide ? Pourquoi ce cas a-t-il été distingué ?
   (c) Donner un exemple explicite d'arguments de la fonction `mystere1` pour lesquels au moins une racine du polynôme P se situe entre `debut` et `fin` mais pas entre les valeurs renvoyées `a` et `b`.
4. (a) Que renvoie `mystere2([1,9,-6,1],-0.5,4.5,1,0.1)` ?
   (b) Expliquer ce que renvoie la fonction `mystere2`.
   (c) Donner un exemple explicite d'arguments de la fonction `mystere2` pour lesquels au moins un extremum du polynôme P se situe entre `debut` et `fin` mais n'est pas «détecté» par l'algorithme.

```
def mystere1(P,debut,fin,epsilon):
    a=debut
    b=fin
    if evalue(P,a)*evalue(P,b)>0:
        return []
    while (b-a)>epsilon:
        if evalue(P,a)*evalue(P,(a+b)/2)<=0:
            b=(a+b)/2
        else:
            a=(a+b)/2
    return [a,b]

def mystere2(P,debut,fin,pas,epsilon):
    L=[]
    Pprime=derive(P)
    a=debut
    b=debut+pas
    while b<fin:
        while evalue(Pprime,a)*evalue(Pprime,b)>0:
            b=b+pas
        L=L+[mystere1(Pprime,a,b,epsilon)]
        a=b
        b=a+pas
    return L
```

Corrigé du DS n° 6 de mathématiques et d'informatique

Exercice 1

Pour tout $x > 0$, on considère l'équation suivante d'inconnue $y \in \mathbb{R}$:

$$e^{x-y} = y + 1 \tag{E_x}$$

1. *On fixe $x > 0$ dans cette question.*

   (a) *Étudier la fonction $g_x : y \mapsto e^{x-y} - y - 1$.*

   ► La fonction g_x est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme et composée de fonctions usuelles. On a :

   $$\forall y \in \mathbb{R}, \quad g_x'(y) = -e^{x-y} - 1 < 0.$$

   Par conséquent, g_x est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ d'après le principe de Lagrange. De plus :

   $$\lim_{y \to -\infty} g_x(y) = \lim_{y \to -\infty} \underbrace{e^{x-y}}_{\to +\infty} \underbrace{-y-1}_{\to +\infty} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{y \to +\infty} g_x(y) = \lim_{y \to +\infty} \underbrace{e^{x-y}}_{\to 0} \underbrace{-y-1}_{\to -\infty} = -\infty.$$

   On en déduit le tableau des variations de g_x :

y	$-\infty$	$f(x)$	$+\infty$
$g_x(y)$	$+\infty$	0	$-\infty$

   (b) *En déduire que (E_x) admet une unique solution.*

   ► La fonction g_x est <u>continue</u> et <u>strictement monotone</u> sur l'<u>intervalle</u> $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$. De plus, $g_x(\mathbb{R}) =]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$ d'après le tableau des variations de la question précédente. Par conséquent, $g_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est bijective d'après le théorème de la bijection. En particulier, 0 n'admet qu'un seul antécédent. On en déduit que $\boxed{(E_x) \text{ admet une unique solution}}$.

Dans la suite de l'énoncé, on note $f(x)$ l'unique solution de (E_x) pour tout $x > 0$.

2. *Montrer que $f(x) \in]0, x[$ pour tout $x > 0$.*

   ► Soit $x > 0$. On a :

   $$g_x(0) = e^{x-0} - 0 - 1 = e^x - 1 > 0 \quad \text{car } e^x > e^0 = 1 \text{ pour tout } x > 0$$

   $$\text{et} \quad g_x(x) = e^{x-x} - x - 1 = -x < 0 \quad \text{car } x > 0.$$

   Puisque g_x est strictement décroissante d'après le résultat de la question 1(a), on a en reportant dans le tableau des variations :

y	$-\infty$	0	$f(x)$	x	$+\infty$
$g_x(y)$	$+\infty$	> 0	0	< 0	$-\infty$

On en déduit bien que $\boxed{f(x) \in]0, x[}$ pour tout $x > 0$.

3. ***[Informatique]**. À l'aide d'un algorithme de dichotomie, écrire une fonction* `approx_f(x,epsilon)` *qui prend en argument un réel $x > 0$ et une précision $\varepsilon > 0$, puis qui renvoie une approximation de $f(x)$ à ε près.*

   ▶ Soit $x > 0$. La fonction g_x est continue sur $[0, x]$ comme somme de fonctions usuelles. De plus $g_x(0)$ et $g_x(x)$ sont de signes opposés d'après le résultat de la question précédente. On peut donc appliquer la méthode de dichotomie pour calculer une approximation d'un point où la fonction g_x s'annule. Puisque g_x s'annule en un seul point d'après le résultat de la question 1(b), la méthode calcule une approximation de $f(x)$. Par exemple en Python :

```
import math as m

def g(x,y):
    return m.exp(x-y)-y-1

def approx_f(x,epsilon):
    a=0
    b=x
    while (b-a)>epsilon:
        if g(x,(a+b)/2)<=0:
            b=(a+b)/2
        else:
            a=(a+b)/2
    return (a+b)/2
```

4. (a) *Soient $x_2 > x_1 > 0$. Déterminer le signe de $g_{x_1}(f(x_2))$.*

   ▶ On a :

$$g_{x_1}(f(x_2)) = e^{x_1 - f(x_2)} - f(x_2) - 1.$$

   Or on a par définition de $f(x_2)$:

$$0 = g_{x_2}(f(x_2)) = e^{x_2 - f(x_2)} - f(x_2) - 1 \quad \text{donc} \quad f(x_2) = e^{x_2 - f(x_2)} - 1.$$

   En reportant dans $g_{x_1}(f(x_2))$, on obtient :

$$g_{x_1}(f(x_2)) = e^{x_1 - f(x_2)} - \left(e^{x_2 - f(x_2)} - 1\right) - 1 = e^{x_1 - f(x_2)} - e^{x_2 - f(x_2)} = \frac{e^{x_1} - e^{x_2}}{e^{f(x_2)}}.$$

   Or $e^{f(x_2)} > 0$ et $e^{x_2} > e^{x_1}$ car $x_2 > x_1$ (par croissance de la fonction exp). On en déduit que $\boxed{g_{x_1}(f(x_2)) < 0}$.

   (b) *En déduire que f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.*

   ▶ On a $g_{x_1}(f(x_2)) < 0$ d'après le résultat de la question précédente et $g_{x_1}(f(x_1)) = 0$ par définition de $f(x_1)$. Donc $g_{x_1}(f(x_2)) < g_{x_1}(f(x_1))$. Puisque g_{x_1} est strictement décroissante d'après le résultat de la question 1(a), on a en reportant dans le tableau des variations :

y	$-\infty$		0		$f(x_1)$		$f(x_2)$		$+\infty$
$g_{x_1}(y)$	$+\infty$	$\searrow$	> 0	$\searrow$	0	$\searrow$	< 0	$\searrow$	$-\infty$

   Par conséquent $f(x_2) > f(x_1)$. Puisque ceci est vrai pour tout $x_2 > x_1 > 0$, on en déduit bien que $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur }]0, +\infty[}$.

5. (a) *Justifier que f admet une limite en $+\infty$.*

▶ Puisque f est croissante sur $]0,+\infty[$ d'après le résultat de la question précédente, $\boxed{f \text{ admet une limite en } +\infty}$ d'après le théorème de la limite monotone.

Rappel : le théorème de la limite monotone affirme qu'il n'y a que deux cas possibles : si f est majorée alors f tend vers une limite finie en $+\infty$, sinon f tend vers $+\infty$ en $+\infty$. Dans les deux cas, f admet une limite (finie ou infinie).

(b) *En raisonnant par l'absurde, montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.*

▶ Par l'absurde, on suppose que f est majorée. Puisque f est croissante sur $]0,+\infty[$ d'après le résultat de la question 4(b), on en déduit que f tend vers une limite finie en $+\infty$ d'après le théorème de la limite monotone. On note $\ell = \lim_{x\to+\infty} f(x)$ cette limite. On a par définition de f :

$$\forall x > 0, \quad 0 = g_x(f(x)) = e^{x-f(x)} - f(x) - 1.$$

En passant à la limite quand $x \to +\infty$, on obtient :

$$0 = \lim_{x\to+\infty} 0 = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{\underbrace{e^{x-f(x)}}_{\to+\infty} \underbrace{-f(x)-1}_{\to-\ell-1}}_{\to+\infty} = +\infty$$

ce qui est absurde. Par conséquent, f n'est pas majorée. Puisque f est croissante sur $]0,+\infty[$ d'après le résultat de la question 4(b), on en déduit que f tend vers $+\infty$ en $+\infty$ d'après le théorème de la limite monotone, c'est-à-dire $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$.

(c) *Montrer que :*

$$\forall x > 0, \quad \frac{x}{f(x)} = 1 + \frac{\ln(1+f(x))}{f(x)}.$$

▶ Soit $x > 0$. On a par définition de f :

$$0 = g_x(f(x)) = e^{x-f(x)} - f(x) - 1 \quad \text{donc} \quad e^{x-f(x)} = 1 + f(x).$$

En passant à la fonction ln, on obtient :

$$x - f(x) = \ln(1+f(x)) \quad \text{donc} \quad x = f(x) + \ln(1+f(x)).$$

Puis on peut diviser par $f(x) \neq 0$ car $f(x) \in]0,x[$ d'après le résultat de la question 2. On obtient alors :

$$\boxed{\frac{x}{f(x)} = 1 + \frac{\ln(1+f(x))}{f(x)}}.$$

(d) *En déduire un équivalent simple de $f(x)$ quand $x \to +\infty$.*

▶ On a :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+f(x))}{f(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+f(x))}{1+f(x)} \times \frac{1+f(x)}{f(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+f(x))}{1+f(x)} \times \left(1 + \frac{1}{f(x)}\right).$$

On pose le changement de variable $X = 1 + f(x)$. Puisque $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ d'après le résultat de la question 5(b), on a $\lim_{x\to+\infty} X = +\infty$. Donc :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+f(x))}{1+f(x)} = \lim_{X\to+\infty} \frac{\ln(X)}{X} = 0 \quad \text{d'après le théorème des croissances comparées.}$$

Faites bien apparaître la forme du théorème des croissances comparées pour pouvoir l'appliquer. Au besoin, transformer vos expressions (comme ici pour faire apparaître la quantité $1+f(x)$ au dénominateur) et utiliser des changements de variable.

De plus :

$$\lim_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{f(x)} = 1 \quad \text{car} \ \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \text{ d'après le résultat de la question 5(b).}$$

Par conséquent :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+f(x))}{f(x)} = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{\frac{\ln(1+f(x))}{1+f(x)}}_{\to 0} \times \underbrace{\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)}_{\to 1} = 0.$$

En reportant dans le résultat de la question précédente, on obtient :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{f(x)} = \lim_{x\to+\infty} 1+\frac{\ln(1+f(x))}{f(x)} = 1.$$

Finalement, d'après la définition des équivalents, on en déduit que :

$$\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x}.$$

6. (a) *Justifier que f se prolonge par continuité en 0.*

▶ Par définition du prolongement par continuité, il suffit de montrer que $f(x)$ admet une limite finie quand $x \to 0^+$. Puisque f est croissante sur $]0,+\infty[$ d'après le résultat de la question 4(b) et que f est minorée par 0 d'après le résultat de la question 2, on en déduit que f tend vers une limite finie en 0^+ d'après le théorème de la limite monotone. Par conséquent, $\boxed{f \text{ se prolonge par continuité en } 0}$.

(b) *Montrer que la valeur de ce prolongement en 0 vaut $f(0) = 0$.*

▶ Par définition du prolongement par continuité, la valeur du prolongement de f en 0 vaut la limite de $f(x)$ quand $x \to 0^+$. On sait que cette limite existe d'après le résultat de la question précédente. On la note $\ell = \lim_{x\to 0^+} f(x)$. Puisque $f(x) > 0$ pour tout $x > 0$ d'après le résultat de la question 2, on en déduit en passant à la limite quand $x \to 0^+$ que $\ell \geqslant 0$.

Pensez à passer aux inégalités larges lorsque vous passez à la limite dans des inégalités !!

De plus, on a par définition de f :

$$\forall x > 0, \quad 0 = g_x(f(x)) = e^{x-f(x)} - f(x) - 1.$$

En passant à la limite quand $x \to 0^+$, on obtient :

$$0 = \lim_{x\to+\infty} 0 = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{e^{x-f(x)}}_{\to e^{-\ell}} \underbrace{-f(x)-1}_{\to -\ell-1} = e^{-\ell} - \ell - 1 \quad \text{donc} \quad \underbrace{e^{-\ell}}_{\leqslant 1} = \underbrace{\ell+1}_{\geqslant 1}.$$

Par l'absurde, on suppose que $\ell > 0$. Alors $e^{-\ell} < 1$ et $\ell + 1 > 1$ ce qui est absurde. Par conséquent, $\ell = 0$. Finalement, la valeur du prolongement de f en 0 vaut :

$$\boxed{f(0) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0}.$$

(c) *En utilisant le résultat de la question 5(c), montrer que $f(x)$ est équivalent à $x/2$ quand $x \to 0$.*

▶ On a :

$$\forall x > 0, \quad \frac{f(x)}{x/2} = \frac{2}{x/f(x)} = \frac{2}{1+\frac{\ln(1+f(x))}{f(x)}} \quad \text{d'après le résultat de la question 5(c).}$$

Puisque $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ d'après le résultat de la question précédente, on a d'après les équivalents usuels :
$$\frac{\ln(1+f(x))}{f(x)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{f(x)}{f(x)} = 1 \quad \text{donc} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+f(x))}{f(x)} = 1.$$
Par conséquent :
$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x/2} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{1+\underbrace{\frac{\ln(1+f(x))}{f(x)}}_{\to 1}} = \frac{2}{1+1} = 1.$$
Finalement, d'après la définition des équivalents, on en déduit que :
$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{2}}.$$

Exercice 2

On considère trois urnes contenant respectivement :

— *urne n° 1 : 1 boule rouge, 1 boule verte et 1 boule bleue ;*

— *urne n° 2 : 1 boule rouge, 2 boules vertes et 3 boules bleues ;*

— *urne n° 3 : 2 boules rouges, 3 boules vertes et 5 boules bleues.*

1. *On choisit au hasard une urne et une boule dans cette urne. Quelle est la probabilité que la boule tirée soit rouge ?*

▶

L'expérience aléatoire se déroule en deux étapes : choisir une urne puis tirer une boule. Il faut donc penser à la formule des probabilités totales en posant comme système complet d'événements les résultats possibles de la 1re étape.

On note U_k l'événement de choisir l'urne n° k pour tout $k \in \{1,2,3\}$. Puisque l'urne est choisie équiprobablement, on a d'après la probabilité uniforme : $\mathrm{P}(U_k) = \frac{1}{3}$ pour tout $k \in \{1,2,3\}$.
On note R l'événement de tirer une boule rouge. Puisque U_1, U_2 et U_3 forment un système complet d'événements (car ils sont deux à deux incompatibles et leur union est égale à l'univers), on a d'après la formule des probabilités totales :
$$\begin{aligned}\mathrm{P}(R) &= \underbrace{\mathrm{P}(U_1)}_{=1/3}\mathrm{P}_{U_1}(R) + \underbrace{\mathrm{P}(U_2)}_{=1/3}\mathrm{P}_{U_2}(R) + \underbrace{\mathrm{P}(U_3)}_{=1/3}\mathrm{P}_{U_3}(R)\\ &= \frac{1}{3}\Big(\mathrm{P}_{U_1}(R) + \mathrm{P}_{U_2}(R) + \mathrm{P}_{U_3}(R)\Big).\end{aligned}$$
Puisque la boule est choisie équiprobablement dans chaque urne, on a d'après la probabilité uniforme :
$$\mathrm{P}_{U_1}(R) = \frac{\mathrm{card}\{\text{boules rouges de l'urne n° 1}\}}{\mathrm{card}\{\text{boules de l'urne n° 1}\}} = \frac{1}{1+1+1} = \frac{1}{3}$$
$$\text{et de même} \quad \mathrm{P}_{U_2}(R) = \frac{1}{1+2+3} = \frac{1}{6}, \quad \mathrm{P}_{U_3}(R) = \frac{2}{2+3+5} = \frac{1}{5}.$$
Par conséquent :
$$\mathrm{P}(R) = \frac{1}{3}\Big(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{5}\Big) = \frac{1}{3}\times\frac{7}{10} = \boxed{\frac{7}{30} \approx 23,3\%}.$$

2. *Quelle est la probabilité d'avoir choisi l'urne n° 2 sachant que la boule tirée est verte ?*

▶

Il s'agit de la probabilité d'une cause sachant la conséquence. Il faut donc penser à la formule de Bayes.

On reprend les notations de la réponse précédente en posant également V l'événement de tirer une boule verte. On cherche donc à calculer $\mathrm{P}_V(U_2)$. Puisque U_1, U_2 et U_3 forment un système complet d'événements, on a d'après la formule de Bayes :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}_V(U_2) &= \frac{\overbrace{\mathrm{P}(U_2)}^{=1/3}\mathrm{P}_{U_2}(V)}{\underbrace{\mathrm{P}(U_1)}_{=1/3}\mathrm{P}_{U_1}(V)+\underbrace{\mathrm{P}(U_2)}_{=1/3}\mathrm{P}_{U_2}(V)+\underbrace{\mathrm{P}(U_3)}_{=1/3}\mathrm{P}_{U_3}(V)} \\
&= \frac{\frac{1}{3}\mathrm{P}_{U_2}(V)}{\frac{1}{3}\left(\mathrm{P}_{U_1}(V)+\mathrm{P}_{U_2}(V)+\mathrm{P}_{U_3}(V)\right)} = \frac{\mathrm{P}_{U_2}(V)}{\mathrm{P}_{U_1}(V)+\mathrm{P}_{U_2}(V)+\mathrm{P}_{U_3}(V)} \\
&= \frac{\frac{2}{1+2+3}}{\frac{1}{1+1+1}+\frac{2}{1+2+3}+\frac{3}{2+3+5}} \quad \text{en raisonnant comme à la question précédente} \\
&= \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{3}{10}} = \frac{1}{3}\times\frac{30}{29} = \boxed{\frac{10}{29}\approx 34,5\%}.
\end{aligned}$$

3. *On tire une deuxième boule de la même façon après avoir remis la première boule dans son urne. Quelle est la probabilité que les deux boules tirées soient de la même couleur ?*

► On reprend les notations des réponses précédentes en posant également B l'événement que la première boule tirée soit bleue. On note R' l'événement que la deuxième boule tirée soit rouge, V' qu'elle soit verte, et B' qu'elle soit bleue. On note E l'événement de tirer deux boules de la même couleur qui peut donc s'écrire :

$$E = \left(R\cap R'\right)\cup\left(V\cap V'\right)\cup\left(B\cap B'\right).$$

Puisque les événements $(R\cap R')$, $(V\cap V')$ et $(B\cap B')$ sont deux à deux incompatibles, on a :

$$\mathrm{P}(E) = \mathrm{P}\left(R\cap R'\right)+\mathrm{P}\left(V\cap V'\right)+\mathrm{P}\left(B\cap B'\right).$$

N'oubliez pas de vérifier que les événements d'une union sont deux à deux incompatibles pour pouvoir passer à la somme de leur probabilité.

Puisque les deux tirages sont indépendants (car on remet la première boule dans son urne), on a :

$$\mathrm{P}\left(R\cap R'\right) = \mathrm{P}(R)\underbrace{\mathrm{P}(R')}_{=\mathrm{P}(R)} = \mathrm{P}(R)^2 = \left(\frac{7}{30}\right)^2 = \frac{49}{900} \quad \text{d'après le résultat de la question 1.}$$

Et de même :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(V\cap V'\right) &= \mathrm{P}(V)^2 = \left(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+1+1}+\frac{2}{1+2+3}+\frac{3}{2+3+5}\right)\right)^2 = \left(\frac{29}{90}\right)^2 = \frac{841}{8100}, \\
\mathrm{P}\left(B\cap B'\right) &= \mathrm{P}(B)^2 = \left(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+1+1}+\frac{3}{1+2+3}+\frac{5}{2+3+5}\right)\right)^2 = \left(\frac{4}{9}\right)^2 = \frac{16}{81}.
\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\mathrm{P}(E) = \frac{49}{900}+\frac{841}{8100}+\frac{16}{81} = \frac{441+841+1600}{8100} = \frac{2882}{8100} = \boxed{\frac{1441}{4050}\approx 35,6\%}.$$

4. *Même question sans remettre la première boule dans son urne.*

▶ On raisonne comme à la question précédente sauf que $\mathrm{P}(R\cap R') \neq \mathrm{P}(R)\mathrm{P}(R')$ (car les deux tirages ne sont plus indépendants) et $\mathrm{P}(R') \neq \mathrm{P}(R)$.

L'expérience aléatoire se déroule toujours en deux étapes : choisir deux urnes (9 choix possibles) puis tirer une boule dans chaque urne choisie (sans remise). Il faut donc penser à la formule des probabilités totales, avec un système complet de 9 événements.

On reprend les notations de la question 1 en posant U_k l'événement de choisir l'urne n° k au premier tirage et U'_k celui de choisir l'urne n° k au deuxième tirage pour tout $k \in \{1, 2, 3\}$. Puisque $U_1 \cap U'_1$, $U_1 \cap U'_2$, ..., et $U_3 \cap U'_3$ forment un système complet d'événement, on a d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}(R\cap R')\\
=\;& \underbrace{\mathrm{P}(U_1\cap U'_1)}_{=1/9}\mathrm{P}_{U_1\cap U'_1}(R\cap R') + \underbrace{\mathrm{P}(U_1\cap U'_2)}_{=1/9}\mathrm{P}_{U_1\cap U'_2}(R\cap R') + \underbrace{\mathrm{P}(U_1\cap U'_3)}_{=1/9}\mathrm{P}_{U_1\cap U'_3}(R\cap R')\\
&+ \underbrace{\mathrm{P}(U_2\cap U'_1)}_{=1/9}\mathrm{P}_{U_2\cap U'_1}(R\cap R') + \underbrace{\mathrm{P}(U_2\cap U'_2)}_{=1/9}\mathrm{P}_{U_2\cap U'_2}(R\cap R') + \underbrace{\mathrm{P}(U_2\cap U'_3)}_{=1/9}\mathrm{P}_{U_2\cap U'_3}(R\cap R')\\
&+ \underbrace{\mathrm{P}(U_3\cap U'_1)}_{=1/9}\mathrm{P}_{U_3\cap U'_1}(R\cap R') + \underbrace{\mathrm{P}(U_3\cap U'_2)}_{=1/9}\mathrm{P}_{U_3\cap U'_2}(R\cap R') + \underbrace{\mathrm{P}(U_3\cap U'_3)}_{=1/9}\mathrm{P}_{U_3\cap U'_3}(R\cap R').
\end{aligned}$$

Puis on a d'après l'énoncé en utilisant la probabilité uniforme :

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}_{U_1\cap U'_1}(R\cap R') = \tfrac{1}{3}\times\tfrac{0}{3} = 0, \quad \mathrm{P}_{U_1\cap U'_2}(R\cap R') = \tfrac{1}{3}\times\tfrac{1}{6} = \tfrac{1}{18}, \quad \mathrm{P}_{U_1\cap U'_3}(R\cap R') = \tfrac{1}{3}\times\tfrac{2}{10} = \tfrac{1}{15},\\
&\mathrm{P}_{U_2\cap U'_1}(R\cap R') = \tfrac{1}{6}\times\tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{18}, \quad \mathrm{P}_{U_2\cap U'_2}(R\cap R') = \tfrac{1}{6}\times\tfrac{0}{6} = 0, \quad \mathrm{P}_{U_2\cap U'_3}(R\cap R') = \tfrac{1}{6}\times\tfrac{2}{10} = \tfrac{1}{30},\\
&\mathrm{P}_{U_3\cap U'_1}(R\cap R') = \tfrac{2}{10}\times\tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{15}, \mathrm{P}_{U_3\cap U'_2}(R\cap R') = \tfrac{2}{10}\times\tfrac{1}{6} = \tfrac{1}{30}, \mathrm{P}_{U_3\cap U'_3}(R\cap R') = \tfrac{2}{10}\times\tfrac{1}{10} = \tfrac{1}{50}.
\end{aligned}$$

Pour gagner du temps et éviter les erreurs, il faut absolument organiser méthodiquement sa présentation (par exemple comme ici en fixant l'urne du premier tirage sur chaque ligne et l'urne du deuxième tirage sur chaque colonne). On vérifie que $\mathrm{P}_{U_i\cap U'_j}(R\cap R') = \mathrm{P}_{U_j\cap U'_i}(R\cap R')$ puisque si les deux boules sont tirées dans des urnes différentes alors l'ordre des tirages n'a pas d'importance.

Par conséquent :

$$\mathrm{P}\big(R\cap R'\big) = \frac{1}{9}\left(0 + \frac{1}{18} + \frac{1}{15} + \frac{1}{18} + 0 + \frac{1}{30} + \frac{1}{15} + \frac{1}{30} + \frac{1}{50}\right) = \frac{1}{9}\times\frac{149}{450} = \frac{149}{4050}.$$

En raisonnant de même, on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\big(V\cap V'\big) &= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} \frac{1}{3}\times\frac{0}{3} & +\frac{1}{3}\times\frac{2}{6} & +\frac{1}{3}\times\frac{3}{10}\\ +\frac{2}{6}\times\frac{1}{3} & +\frac{2}{6}\times\frac{1}{6} & +\frac{2}{6}\times\frac{3}{10}\\ +\frac{3}{10}\times\frac{1}{3} & +\frac{3}{10}\times\frac{2}{6} & +\frac{3}{10}\times\frac{2}{10}\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{9}\left(0 + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{9} + \frac{1}{18} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{3}{50}\right) = \frac{1}{9}\times\frac{166}{225} = \frac{166}{2025},\\
\text{et}\quad \mathrm{P}\big(B\cap B'\big) &= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} \frac{1}{3}\times\frac{0}{3} & +\frac{1}{3}\times\frac{3}{6} & +\frac{1}{3}\times\frac{5}{10}\\ +\frac{3}{6}\times\frac{1}{3} & +\frac{3}{6}\times\frac{2}{6} & +\frac{3}{6}\times\frac{5}{10}\\ +\frac{5}{10}\times\frac{1}{3} & +\frac{5}{10}\times\frac{3}{6} & +\frac{5}{10}\times\frac{4}{10}\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{9}\left(0 + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{9}\times\frac{23}{15} = \frac{23}{135}.
\end{aligned}$$

Finalement :

$$\mathrm{P}(E) = \frac{149}{4050} + \frac{166}{2025} + \frac{23}{135} = \frac{149+332+690}{4050} = \boxed{\frac{1171}{4050} \approx 28,9\%}.$$

Problème 1

On fixe $n \in \mathbb{N}^*$ pour tout ce problème et on considère le polynôme :

$$P_n = 4 - \frac{(-1)^n}{4^{n-1}} X^{4n}(1-X)^{4n}.$$

1. *Calculer $(1-i)^4$.*

► On a :

$$(1-i)^4 = \left((1-i)^2\right)^2 = (1-2i-1)^2 = (-2i)^2 = \boxed{-4}.$$

2. *Justifier que P_n est factorisable par le polynôme X^2+1.*

► Puisque i et $-i$ sont les racines de X^2+1, on a $X^2+1 = (X-i)(X+i)$. Ainsi P_n est factorisable par X^2+1 si et seulement si i et $-i$ sont des racines de P_n. Or on a :

$$\begin{aligned}
P_n(i) &= 4 - \frac{(-1)^n}{4^{n-1}} i^{4n}(1-i)^{4n} \\
&= 4 - \frac{(-1)^n}{4^{n-1}} \left(i^4(1-i)^4\right)^n \\
&= 4 - \frac{(-1)^n}{4^{n-1}} (1 \times (-4))^n \quad \text{d'après le résultat de la question précédente} \\
&= 4 - \frac{((-1)\times(-4))^n}{4^{n-1}} \\
&= 4 - \frac{4^n}{4^{n-1}} \\
&= 4 - 4 = 0.
\end{aligned}$$

De plus :

$$P_n(-i) = P_n\left(\bar{i}\right) = 4 - \frac{(-1)^n}{4^{n-1}} \left(\bar{i}\right)^{4n} \left(1-\left(\bar{i}\right)\right)^{4n} = \overline{4 - \frac{(-1)^n}{4^{n-1}} i^{4n}(1-i)^{4n}} = \overline{P_n(i)} = \bar{0} = 0.$$

On peut détailler le calcul $P_n(-i)$ comme celui de $P_n(i)$, en calculant préalablement $(1+i)^4 = -4$ mais c'est plus long. Les propriétés de la conjugaison permettent parfois de raccourcir les calculs astucieusement.

Ainsi, i et $-i$ sont racines de P_n. On en déduit que $\boxed{P_n \text{ est factorisable par } X^2+1}$.

Dans la suite de l'énoncé, on note Q_n le polynôme tel que $P_n = (X^2+1)Q_n$.

3. *Montrer que :*

$$\int_0^1 Q_n(x)\mathrm{d}x = \pi - \frac{(-1)^n}{4^{n-1}} \int_0^1 \frac{x^{4n}(1-x)^{4n}}{x^2+1}\mathrm{d}x.$$

► Par définition de Q_n, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$P_n(x) = (x^2+1)Q_n(x) \quad \text{donc} \quad Q_n(x) = \frac{P_n(x)}{x^2+1} = \frac{4}{x^2+1} - \frac{(-1)^n}{4^{n-1}} \times \frac{x^{4n}(1-x)^{4n}}{x^2+1} \quad \text{car } x^2+1 \neq 0.$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}\int_0^1 Q_n(x)\mathrm{d}x &= \int_0^1 \left(\frac{4}{x^2+1} - \frac{(-1)^n}{4^{n-1}} \times \frac{x^{4n}(1-x)^{4n}}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x \\ &= 4\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} - \frac{(-1)^n}{4^{n-1}}\int_0^1 \frac{x^{4n}(1-x)^{4n}}{x^2+1}\mathrm{d}x \quad \text{par linéarité de l'intégrale.}\end{aligned}$$

Or :

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \left[\arctan(x)\right]_0^1 = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}.$$

On en déduit que :

$$\boxed{\int_0^1 Q_n(x)\mathrm{d}x = \pi - \frac{(-1)^n}{4^{n-1}}\int_0^1 \frac{x^{4n}(1-x)^{4n}}{x^2+1}\mathrm{d}x}.$$

4. *En déduire que :*

$$\left|\pi - \int_0^1 Q_n(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{1}{4^{n-1}}\int_0^1 x^{4n}(1-x)^{4n}\mathrm{d}x.$$

► D'après le résultat précédent, on a :

$$\pi - \int_0^1 Q_n(x)\mathrm{d}x = \frac{(-1)^n}{4^{n-1}}\int_0^1 \frac{x^{4n}(1-x)^{4n}}{x^2+1}\mathrm{d}x.$$

Donc :

$$\left|\pi - \int_0^1 Q_n(x)\mathrm{d}x\right| = \left|\frac{(-1)^n}{4^{n-1}}\int_0^1 \frac{x^{4n}(1-x)^{4n}}{x^2+1}\mathrm{d}x\right| = \frac{1}{4^{n-1}}\left|\int_0^1 \frac{x^{4n}(1-x)^{4n}}{x^2+1}\mathrm{d}x\right|.$$

Or on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$0 \leqslant \frac{x^{4n}(1-x)^{4n}}{x^2+1} \leqslant \frac{x^{4n}(1-x)^{4n}}{1} \quad \text{car } x^2+1 \geqslant 1 \text{ et } x^{4n}(1-x)^{4n} \geqslant 0.$$

Par croissance de l'intégrale, on en déduit que :

$$0 = \int_0^1 0\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \frac{x^{4n}(1-x)^{4n}}{x^2+1}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^{4n}(1-x)^{4n}\mathrm{d}x.$$

Vérifiez bien que les bornes de l'intégrale sont dans l'ordre croissant pour utiliser la croissance de l'intégrale. Pour rappel, si $f \leqslant g$ sur $[a,b]$ alors :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\mathrm{d}t \quad \textit{donc} \quad \underbrace{\int_b^a f(t)\mathrm{d}t}_{=-\int_a^b f(t)\mathrm{d}t} \geqslant \underbrace{\int_b^a g(t)\mathrm{d}t}_{=-\int_a^b g(t)\mathrm{d}t}.$$

Par conséquent :

$$\boxed{\left|\pi - \int_0^1 Q_n(x)\mathrm{d}x\right| = \frac{1}{4^{n-1}}\int_0^1 \frac{x^{4n}(1-x)^{4n}}{x^2+1}\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{4^{n-1}}\int_0^1 x^{4n}(1-x)^{4n}\mathrm{d}x} \quad \text{car} \quad \frac{1}{4^{n-1}} \geqslant 0.$$

5. *Dans cette question, on fixe $p \in \mathbb{N}^*$ et on souhaite calculer $I_p = \int_0^1 x^p(1-x)^p\mathrm{d}x$.*

(a) Montrer que :

$$I_p = \frac{p}{p+1}\int_0^1 x^{p+1}(1-x)^{p-1}\mathrm{d}x.$$

► On utilise une intégration par parties en posant :

$$\begin{cases} u' : x \mapsto x^p \\ v : x \mapsto (1-x)^p \end{cases} \quad \text{et donc} \quad \begin{cases} u : x \mapsto (x^{p+1})/(p+1) \\ v' : x \mapsto -p(1-x)^{p-1} \end{cases}.$$

Les fonctions u et v sont bien continues et dérivables sur $\mathbb{R}$ comme fonctions usuelles et leurs dérivées u' et v' sont continues pour les mêmes raisons. On peut donc appliquer le théorème d'intégration par parties.

Pensez à bien vérifier les hypothèses d'un théorème avant de l'appliquer.

On obtient :

$$\begin{aligned} I_p &= \int_0^1 x^p(1-x)^p\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{x^{p+1}}{p+1}(1-x)^p\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{p+1}}{p+1}\left(-p(1-x)^{p-1}\right)\mathrm{d}x \\ &= 0 + \frac{p}{p+1}\int_0^1 x^{p+1}(1-x)^{p-1}\mathrm{d}x \quad \text{par linéarité de l'intégrale} \\ &= \boxed{\frac{p}{p+1}\int_0^1 x^{p+1}(1-x)^{p-1}\mathrm{d}x}. \end{aligned}$$

(b) En itérant le raisonnement de la question précédente, prouver que :

$$I_p = \frac{p(p-1)(p-2)\cdots\times 2\times 1}{(p+1)(p+2)(p+3)\dots(2p-1)(2p)(2p+1)}.$$

► On utilise une deuxième intégration par parties en posant :

$$\begin{cases} u' : x \mapsto x^{p+1} \\ v : x \mapsto (1-x)^{p-1} \end{cases} \quad \text{et donc} \quad \begin{cases} u : x \mapsto (x^{p+2})/(p+2) \\ v' : x \mapsto -(p-1)(1-x)^{p-2} \end{cases}.$$

Puisqu'on reconnaît des fonctions usuelles, les hypothèses du théorème d'intégration par parties sont vérifiées. On obtient en l'appliquant :

$$\int_0^1 x^{p+1}(1-x)^{p-1}\mathrm{d}x = 0 + \frac{p-1}{p+2}\int_0^1 x^{p+2}(1-x)^{p-2}\mathrm{d}x.$$

Donc :

$$I_p = \frac{p(p-1)}{(p+1)(p+2)}\int_0^1 x^{p+2}(1-x)^{p-2}\mathrm{d}x.$$

En raisonnant de même, on obtient après p intégrations par parties :

$$\begin{aligned} I_p &= \frac{p(p-1)(p-2)\dots(p-(p-2))(p-(p-1))}{(p+1)(p+2)(p+3)\dots(p+(p-1))(p+p)}\int_0^1 x^{p+p}(1-x)^{p-p}\mathrm{d}x \\ &= \frac{p(p-1)(p-2)\cdots\times 2\times 1}{(p+1)(p+2)(p+3)\dots(2p-1)(2p)}\int_0^1 x^{2p}\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Or :

$$\int_0^1 x^{2p}\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{2p+1}}{2p+1}\right]_0^1 = \frac{1}{2p+1} - 0 = \frac{1}{2p+1}.$$

On en déduit que :

$$\boxed{I_p = \frac{p(p-1)(p-2)\cdots\times 2\times 1}{(p+1)(p+2)(p+3)\dots(2p-1)(2p)(2p+1)}}.$$

6. *Montrer que :*
$$\left|\pi - \int_0^1 Q_n(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{((4n)!)^2}{4^{n-1}(8n+1)!}.$$

► En appliquant le résultat de la question précédente à $p = 4n$, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^{4n}(1-x)^{4n}\mathrm{d}x &= I_{4n}\\ &= \frac{\overbrace{(4n)(4n-1)(4n-2)\cdots\times 2\times 1}^{=(4n)!}}{(4n+1)(4n+2)(4n+3)\dots(8n-1)(8n)(8n+1)}\\ &= \frac{\overbrace{1\times 2\times\dots(4n)}^{=(4n)!}\times(4n)!}{\underbrace{1\times 2\times\dots(4n)\times(4n+1)(4n+2)(4n+3)\dots(8n-1)(8n)(8n+1)}_{=(8n+1)!}}\\ &= \frac{((4n)!)^2}{(8n+1)!}.\end{aligned}$$

En réinjectant dans le résultat de la question 4, on obtient :

$$\boxed{\left|\pi - \int_0^1 Q_n(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{1}{4^{n-1}}\int_0^1 x^{4n}(1-x)^{4n}\mathrm{d}x = \frac{((4n)!)^2}{4^{n-1}(8n+1)!}}.$$

7. *Dans cette question, on suppose que $n = 1$.*

   (a) *Quel est le degré de Q_1 ?*

   ► Par définition de Q_1, on a :

$$(X^2+1)Q_1 = P_1 = 4 - \frac{(-1)^1}{4^{1-1}}X^4(1-X)^4 = 4 + X^4(1-X)^4.$$

   Or :

$$\deg\left((X^2+1)Q_1\right) = \deg(X^2+1) + \deg(Q_1) = 2 + \deg(Q_1) \quad \text{et} \quad \deg\left(4 + X^4(1-X)^4\right) = 8.$$

   On en déduit que $\boxed{\deg(Q_1) = 8 - 2 = 6}$.

   (b) *Déterminer Q_1.*

   ► D'après le résultat de la question précédente, Q_1 est un polynôme de degré 6. On pose :

$$Q_1 = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 + a_4X^4 + a_5X^5 + a_6X^6 \quad \text{où} \quad (a_0,a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6) \in \mathbb{R}^7.$$

   On a :

$$\begin{aligned}(X^2+1)Q_1 =& (X^2+1)\left(a_6X^6 + a_5X^5 + a_4X^4 + a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0\right)\\ =& a_6X^8 + a_5X^7 + (a_4+a_6)X^6 + (a_3+a_5)X^5 + (a_2+a_4)X^4\\ & + (a_1+a_3)X^3 + (a_0+a_2)X^2 + a_1X + a_0\\ \text{et} \quad 4 + X^4(1-X)^4 =& 4 + X^4(\underbrace{1 - 4X + 6X^2 - 4X^3 + X^4}_{\text{formule du binôme de Newton}})\\ =& X^8 - 4X^7 + 6X^6 - 4X^5 + X^4 + 4.\end{aligned}$$

Puisque $(X^2+1)Q_1 = P_1 = 4-X^4(1-X)^4$ par définition de Q_1, on en déduit par identification des coefficients de polynômes que :

$$\begin{cases} a_6 = 1 \\ a_5 = -4 \\ a_4 + a_6 = 6 \\ a_3 + a_5 = -4 \\ a_2 + a_4 = 1 \\ a_1 + a_3 = 0 \\ a_0 + a_2 = 0 \\ a_1 = 0 \\ a_0 = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} a_6 = 1 \\ a_5 = -4 \\ a_4 = 5 \\ a_3 = 0 \\ a_2 = -4 \\ a_1 = 0 \\ a_0 = 4 \end{cases}.$$

Finalement, $\boxed{Q_1 = 4 - 4X^2 + 5X^4 - 4X^5 + X^6}$.

(c) À l'aide du résultat de la question 6, déterminer une approximation de π par une fraction. Quelle est la précision de cette approximation .

▶ En appliquant le résultat de la question 6 à $n=1$, on obtient :

$$\left|\pi - \int_0^1 Q_1(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{(4!)^2}{4^{1-1}9!} = \frac{1\times2\times3\times4\times1\times2\times3\times4}{1\times2\times3\times4\times5\times6\times7\times8\times9} = \frac{1}{5\times7\times2\times9} = \frac{1}{630}.$$

De plus, on a d'après le résultat de la question précédente :

$$\begin{aligned} \int_0^1 Q_1(x)\mathrm{d}x &= \int_0^1 \left(4-4x^2+5x^4-4x^5+x^6\right)\mathrm{d}x \\ &= \left[4x - 4\frac{x^3}{3} + 5\frac{X^5}{5} - 4\frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7}\right]_0^1 \\ &= 4 - \frac{4}{3} + 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{7} - 0 = \frac{84-28+21-14+3}{21} = \frac{66}{21} = \frac{22}{7}. \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\left|\pi - \frac{22}{7}\right| \leqslant \frac{1}{630}.$$

On en déduit que $\boxed{\frac{22}{7} \text{ est une approximation de } \pi \text{ à } \frac{1}{630} \text{ près}}$.

Numériquement on a $\frac{1}{630} \approx 1,6\times10^{-3}$, ce qui fait de $\frac{22}{7}$ une assez bonne approximation pour une «vulgaire» fraction.

Exercice 3 (Informatique)

Chaque polynôme est représenté en Python par la liste de ses coefficients dans l'ordre croissant des puissances. Ainsi le polynôme $1-X^2+2X^3$ est représenté par la liste `[1,0,-1,2]` et la liste `[0,3,1,0-3]` représente le polynôme $3X+X^2-3X^4$. Le polynôme nul est représenté par la liste vide.

1. *Écrire une fonction `derive` qui prend en argument un polynôme P puis qui renvoie son polynôme dérivée P'.*

▶ Si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ alors sa dérivée est $P' = \sum_{k=1}^{n} a_k k X^{k-1} = \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1}(i+1)X^i$ (en posant $k=i+1$). En Python :

```
def derive(P):
    if P==[]:
        return []
    deg=len(P)-1
    Pprime=[]
    for i in range(deg):
        Pprime=Pprime+[P[i+1]*(i+1)]
    return Pprime
```

N'oubliez pas de distinguer le cas particulier du polynôme nul. Faîtes attention aux différentes bornes (nombre de coefficients, degré, `len`, `range`, etc.).

2. *Écrire une fonction `evalue` qui prend en argument un polynôme P et un réel a puis qui renvoie la valeur de $P(a)$.*

   ▶ Par exemple :

```
def evalue(P,a):
    if P==[]:
        return 0
    deg=len(P)-1
    valeur=0
    for i in range(deg+1):
        valeur=valeur+P[i]*(a**i)
    return valeur
```

On considère les fonctions écrites en page suivante.

3. (a) *Expliquer ce que renvoie la fonction `mystere1`.*

   ▶ On reconnaît un algorithme de dichotomie pour approcher une racine d'un polynôme P (représenté par la liste `P`) dans le segment compris entre `debut` et `fin`. La fonction `mystere1` renvoie alors une liste `[a,b]` qui correspond à un intervalle $[a, b]$ contenant une racine de P et de longueur plus petite que la précision `epsilon`.

   (b) *Dans quel cas la fonction `mystere1` renvoie une liste vide ? Pourquoi ce cas a-t-il été distingué ?*

   ▶ La fonction `mystere1` renvoie une liste vide lorsque les images par P de `debut` et `fin` sont de même signe. En effet, dans ce cas on ne peut pas appliquer la méthode de dichotomie dont les hypothèses sont :

   — P est continue entre `debut` et `fin` (ce qui est le cas puisque P est une fonction polynomiale),

   — les images par P de `debut` et `fin` sont de signes opposés.

   (c) *Donner un exemple explicite d'arguments de la fonction `mystere1` pour lesquels au moins une racine du polynôme P se situe entre `debut` et `fin` mais pas entre les valeurs renvoyées `a` et `b`.*

   ▶ Il suffit de prendre un polynôme ayant au moins deux racines entre `debut` et `fin` et une précision `epsilon` plus petite que la distance entre ces deux racines. Puisque la longueur entre les valeurs renvoyées `a` et `b` est inférieure à la précision `epsilon`, les deux racines ne pourront pas se situées ensemble entre `a` et `b`.

   Mais il faut aussi que les images par P de `debut` et `fin` soient de signes opposés (pour ne pas renvoyer de liste vide d'après le résultat de la question précédente). Ainsi, on ne peut donc pas choisir pour P un polynôme de degré 2 ayant 2 racines comprises entre `debut` et `fin` (à cause de l'allure d'une parabole).

   On cherche donc un polynôme de degré 3 (ou plus) ayant deux racines (ou plus). Par exemple :

$$P = X^2(X-1) = X^3 - X^2.$$

   P admet deux racines : 0 de multiplicité 2 et 1 de multiplicité 1. De plus $P(-1) = -2 < 0$ et $P(2) = 4 > 0$ sont de signes opposés. Finalement, l'exemple suivant convient :

```
mystere1([0,0,-1,1],-1,2,0.5)
```

Il existe bien sûr de nombreux exemples possibles. Pour ce genre de questions de recherche, essayez de dégager des conditions suffisantes puis essayer en prenant des exemples simples. Ici, la condition suffisante est qu'il existe deux racines distantes d'au moins `epsilon` entre `debut` et `fin`. Puis on essaie avec un polynôme simple de degré 2 (par exemple $X(X-1) = X^2 - X$) pour se rendre compte qu'on est dans le cas de la question précédente.

4. (a) *Que renvoie* `mystere2([1,9,-6,1],-0.5,4.5,1,0.1)` *?*

▶ On détaille le fonctionnement de l'algorithme :

— La fonction `mystere2` commence par initialiser une liste vide `L=[]`.

— Puis elle calcule la dérivée du polynôme représenté par la liste `[1,9,-6,1]`, c'est-à-dire de $P = 1 + 9X - 6X^2 + X^3$. Donc $P' = 9 - 12X + 3X^2$ et `Pprime=[9,-12,3]`.

— Ensuite elle initialise `a=-0.5` et `b=0.5` avant de commencer la première boucle `while`.

— La première boucle `while` se répète tant que `b` est plus petit que `4.5`, ce qui est bien le cas pour l'instant.

— La deuxième boucle `while` se répéte tant que P'(`a`) et P'(`b`) sont de même signe. On étudie donc le signe de P' :

$$P' = 9 - 12X + 3X^2 = 3(X^2 - 4X + 3) = 3(X-1)(X-3) \quad \text{car 1 est une racine évidente.}$$

D'où le tableau des signes de P' :

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$P'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

À la première itération, `a=-0.5` et `b=0.5` sont strictement inférieurs à 1, donc P'(`a`) et P'(`b`) sont positifs. La fonction `mystere2` ajoute donc `pas=1` à la valeur de `b`, qui devient `b=1.5`, avant de répéter la deuxième boucle `while`.

— À la deuxième itération `a=-0.5` et `b=1.5`, donc P'(`a`) > 0 et P'(`b`) < 0 sont de signes opposés. Donc la deuxième boucle `while` s'arrête.

— Ensuite la fonction `mystere2` ajoute à la suite de la liste `L` (vide pour l'instant) ce qui est renvoyé par `mystere1([9,-12,3],-0.5,1.5,0.1)`. D'après le résultat de la question 3(a), `mystere1([9,-12,3],-0.5,1.5,0.1)` renvoie à l'aide de la méthode de dichotomie une liste `[a,b]` qui correspond à un intervalle $[a, b]$ de longueur plus petite que $0,1$ et contenant une racine de P' comprise entre $-0,5$ et $1,5$. Puisque la longueur de l'intervalle `[a,b]` est égale à $\frac{1{,}5-(-0{,}1)}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}$ d'après la méthode de dichotomie (où n est le nombre d'itérations de la méthode), la méthode s'arrête pour $n = 5$ car $\frac{1}{2^4} = \frac{1}{16} = 0,0625 < 0,1$ (alors que $\frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} = 0,125 > 0,1$). On vérifie alors que l'intervalle renvoyé est $[1 - \frac{1}{2^4}, 1]$. Donc `L=[[0.9375,1]]`.

— Ensuite la fonction `mystere2` change les valeurs de `a` et `b`, qui deviennent `a=1.5` et `b=2.5`, avant de répéter la première boucle `while`.

— Comme pour la première itération de la première boucle `while`, la deuxième boucle `while` se répète jusqu'à ce que `a=1.5` et `b=3.5` (d'après le tableau des signes de P').

— Ensuite la fonction `mystere2` ajoute à la suite de la liste `L=[[0.9375,1]]` ce qui est renvoyé par `mystere1([9,-12,3],1.5,3.5,0.1)`. Le même raisonnement que lors de la première itération de la première boucle `while`, on vérifie que l'intervalle renvoyé par la méthode de dichotomie est $[3 - \frac{1}{2^4}, 3]$. Donc `L=[[0.9375,1],[0.9375,1]]`.

— Ensuite la fonction `mystere2` change les valeurs de `a` et `b`, qui deviennent `a=3.5` et `b=4.5`. Mais la première boucle `while` s'arrête car `b=4.5` est égal à `fin=4`

— Finalement, `mystere2([1,9,-6,1],-0.5,4.5,1,0.1)` renvoie $\boxed{\texttt{L=[[0.9375,1],[0.9375,1]]}}$.

(b) *Expliquer ce que renvoie la fonction* `mystere2`.

▶ La fonction `mystere2` renvoie une liste d'intervalles compris entre `debut` et `fin` (classés de manière croissante), de longueur plus petite que la précision `epsilon` et telle que chaque intervalle contienne une racine de P', donc un extremum de P d'après le principe de Lagrange.

(c) *Donner un exemple explicite d'arguments de la fonction* `mystere2` *pour lesquels au moins un extremum du polynôme P se situe entre* `debut` *et* `fin` *mais n'est pas «détecté» par l'algorithme.*

► Il suffit de reprendre l'exemple de la question 3(c) comme dérivée du polynôme P, c'est-à-dire :

$$P' = X^3 - X^2 \quad \text{donc} \quad P = \frac{1}{4}X^4 - \frac{1}{3}X^3 \quad \text{(en choisissant } P(0) = 0 \text{ pour simplifier).}$$

Pour simplifier, on peut également multiplier P par une constante (ça ne change pas ses extrema ni les racines de P'). Ainsi on obtient en multipliant par 12 : $P = 3X^4 - 4X^3$. Finalement, l'exemple suivant convient :

```
mystere2([0,0,0,-4,3],-1,2,1,0.5)
```

```
def mystere1(P,debut,fin,epsilon):
    a=debut
    b=fin
    if evalue(P,a)*evalue(P,b)>0:
        return []
    while (b-a)>epsilon:
        if evalue(P,a)*evalue(P,(a+b)/2)<=0:
            b=(a+b)/2
        else:
            a=(a+b)/2
    return [a,b]

def mystere2(P,debut,fin,pas,epsilon):
    L=[]
    Pprime=derive(P)
    a=debut
    b=debut+pas
    while b<fin:
        while evalue(Pprime,a)*evalue(Pprime,b)>0:
            b=b+pas
        L=L+[mystere1(Pprime,a,b,epsilon)]
        a=b
        b=a+pas
    return L
```

DS n^o 7 de mathématiques et d'informatique

durée : 3 heures à distance

Exercice 1

On considère deux pièces : une pièce équilibrée et une pièce déséquilibrée qui donne «face» avec une probabilité de $\frac{2}{3}$. Malheureusement, on ne sait pas les discerner. On souhaite avoir le plus de chance d'obtenir «face» après un nombre suffisamment grand de lancers. Pour cela, on propose deux stratégies différentes.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note E_n l'événement de jouer avec la pièce équilibrée au n-ième lancer et F_n l'événement d'obtenir «face» au n-ième lancer.

Pour les questions d'informatique, les fonctions demandées sont à écrire en Python.

1. **[Info]** À l'aide de la fonction `random.random()`, écrire une fonction `piece` qui prend en argument un réel $p \in [0, 1]$ puis qui renvoie `"Face"` avec probabilité p et `"Pile"` sinon.

Stratégie n^o 1. Au premier lancer, on choisit une des deux pièces au hasard. Si elle donne «face», on continue de jouer avec cette pièce, sinon on joue avec l'autre. Dans les deux cas, on ne change plus de pièce par la suite.

2. **[Info]**
   (a) Écrire une fonction `strat1` qui prend en argument un entier $n \geqslant 1$, puis qui simule la stratégie n^o 1 et renvoie le résultat du n-ième lancer (`"Face"` ou `"Pile"`).
   (b) Écrire une fonction `freq1` qui prend en arguments deux entiers $n \geqslant 1$ et `nbSim` $\geqslant 1$, puis qui simule `nbSim` fois la stratégie n^o 1 et renvoie la fréquence statistique d'obtenir «face» au n-ième lancer.
3. Calculer $\mathrm{P}(F_1)$.
4. Calculer $\mathrm{P}(E_2)$ puis $\mathrm{P}(F_2)$.
5. En déduire que $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}(F_n) = \frac{43}{72}$.

Stratégie n^o 2. Au premier lancer, on choisit une des deux pièces au hasard. Si elle donne «face», on joue avec cette pièce au deuxième lancer, sinon on joue avec l'autre. On décide ainsi à chaque lancer la pièce qu'on jouera au lancer suivant.

6. **[Info]** Écrire des fonctions `strat2` et `freq2` similaires à celles de la question 2.
7. Soit $n \geqslant 1$. Montrer que $\mathrm{P}(E_{n+1}) = \frac{1}{6}\mathrm{P}(E_n) + \frac{1}{3}$.
8. En déduire une expression de $\mathrm{P}(E_n)$ en fonction de $n \geqslant 1$.
9. En déduire que : $\forall n \geqslant 1,\ \mathrm{P}(F_n) = \frac{3}{5} - \frac{1}{10\times 6^n}$.
10. Quelle stratégie permet d'avoir le plus de chance d'obtenir «face» à long terme ?

Exercice 2

On considère l'ensemble suivant :

$$\mathscr{E} = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ x - z + 2t = 0 \end{cases}\right\}.$$

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

A) Préliminaires

1. **[Info]** Écrire en Python une fonction `est_dans_E` qui prend en argument une liste `L` de longueur 4 puis qui renvoie `True` si le vecteur (`L[0]`, `L[1]`, `L[2]`, `L[3]`) appartient à $\mathscr{E}$ et `False` sinon.

2. Montrer que $\mathscr{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
3. Déterminer une famille génératrice de $\mathscr{E}$ contenant deux vecteurs.
4. La famille obtenue à la question précédente est-elle libre ?

B) Projection sur $\mathscr{E}$ parallèlement à un plan de $\mathbb{R}^4$

On pose $\overrightarrow{w_1} = (-1, 1, 1, 1)$, $\overrightarrow{w_2} = (0, 4, 2, 1)$, $\overrightarrow{w_3} = (1, 1, 1, -1)$, $\overrightarrow{w_4} = (4, 2, 1, 0)$ et $\mathscr{F} = \text{Vect}(\overrightarrow{w_3}, \overrightarrow{w_4})$.

5. Montrer que $(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2})$ est une famille génératrice de $\mathscr{E}$.
6. (a) Déterminer une représentation cartésienne de $\mathscr{F}$.
   (b) En déduire que $\mathscr{E} \cap \mathscr{F} = \{\overrightarrow{0}\}$.
7. Montrer que $(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}, \overrightarrow{w_3}, \overrightarrow{w_4})$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^4$.
8. Soit $\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^4$. Déduire des résultats précédents qu'il existe un unique vecteur $\overrightarrow{e} \in \mathscr{E}$ et un unique vecteur $\overrightarrow{\mathrm{f}} \in \mathscr{F}$ tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{e} + \overrightarrow{\mathrm{f}}$.

Pour tout vecteur $\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^4$, cet unique vecteur $\overrightarrow{e} \in \mathscr{E}$ est appelé le **projeté de $\overrightarrow{u}$ sur $\mathscr{E}$ parallèlement à $\mathscr{F}$**. On le note $p(\overrightarrow{u})$ pour les questions suivantes.

9. Soit $\overrightarrow{u} = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. Calculer les composantes de $p(\overrightarrow{u})$ en fonction de x, y, z et t.
10. Vérifier que :
    (a) $\forall \overrightarrow{u} \in \mathscr{E},\ p(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}$,
    (b) $\forall \overrightarrow{u} \in \mathscr{F},\ p(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}$.

Exercice 3

Dans cet exercice, on fixe un entier $n \geqslant 2$ et un réel $a > 1$. On propose de calculer numériquement des approximations de la racine n-ième de a.

Pour les questions d'informatique, les fonctions demandées sont à écrire en Python.

1. Justifier que $1 < \sqrt[n]{a} < a$.

Méthode de dichotomie.

2. **[Info]** Écrire une fonction `dichotomie` qui prend en arguments l'entier $n \geqslant 2$, le réel $a > 1$ et un réel $\varepsilon > 0$ puis qui renvoie une approximation de $\sqrt[n]{a}$ à ε près à l'aide d'un algorithme de dichotomie.

Méthode de Newton.

3. On pose $f : x \mapsto x^n - a$ et on fixe $u > 1$.
   (a) Déterminer le développement limité de f à l'ordre 1 en u.
   (b) Calculer l'abscisse du point d'intersection entre la tangente à la courbe représentative de f en u et l'axe des abscisses.
4. On définit par récurrence une suite $(u_k)_{k \geqslant 0}$ par $u_0 = a$ et $u_{k+1} = F(u_k)$ pour tout $k \geqslant 0$ où F est la fonction :
$$F : x \mapsto \frac{1}{n}\left((n-1)x + \frac{a}{x^{n-1}}\right).$$
   (a) Montrer que $F([\sqrt[n]{a}, a]) \subset [\sqrt[n]{a}, a]$ puis en déduire que la suite $(u_k)_{k \geqslant 0}$ est bien définie.
   (b) Montrer que : $\forall x \in [\sqrt[n]{a}, a],\ 0 \leqslant F'(x) \leqslant \frac{n-1}{n}\left(1 - \frac{1}{a^{n-1}}\right)$.
   (c) En déduire que :
$$\forall k \geqslant 0, \quad |u_k - \sqrt[n]{a}| \leqslant (a-1)\left(\frac{n-1}{n}\left(1 - \frac{1}{a^{n-1}}\right)\right)^k.$$
   (d) Justifier que la suite $(u_k)_{k \geqslant 0}$ converge et préciser sa limite.
5. **[Info]** Écrire une fonction `newton` similaire à celle de la question 2 à l'aide de la méthode de Newton.

Corrigé du DS n° 7 de mathématiques et d'informatique

Exercice 1

On considère deux pièces : une pièce équilibrée et une pièce déséquilibrée qui donne «face» avec une probabilité de $\frac{2}{3}$. Malheureusement, on ne sait pas les discerner. On souhaite avoir le plus de chance d'obtenir «face» après un nombre suffisamment grand de lancers. Pour cela, on propose deux stratégies différentes.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note E_n l'événement de jouer avec la pièce équilibrée au n-ième lancer et F_n l'événement d'obtenir «face» au n-ième lancer.

Pour les questions d'informatique, les fonctions demandées sont à écrire en Python.

1. ***[Info]*** *À l'aide de la fonction* `random.random()`, *écrire une fonction* `piece` *qui prend en argument un réel $p \in [0, 1]$ puis qui renvoie* `"Face"` *avec probabilité p et* `"Pile"` *sinon.*

   ▶ Par exemple :

```
import random
def piece(p):
    x=random.random()
    if x<p:
        return "Face"
    else:
        return "Pile"
```

N'oubliez d'importer la bibliothèque `random`.

Stratégie n° 1. *Au premier lancer, on choisit une des deux pièces au hasard. Si elle donne «face», on continue de jouer avec cette pièce, sinon on joue avec l'autre. Dans les deux cas, on ne change plus de pièce par la suite.*

2. ***[Info]***

   (a) *Écrire une fonction* `strat1` *qui prend en argument un entier $n \geqslant 1$, puis qui simule la stratégie n° 1 et renvoie le résultat du n-ième lancer (*`"Face"` *ou* `"Pile"`*).*

   ▶ Par exemple :

```
def strat1(n):
    # choix d'une pièce au hasard pour le premier lancer
    if piece(1/2)=="Face":
        p=1/2
    else:
        p=2/3
    # premier lancer et choix de la piece pour les lancers suivants
    resultat=piece(p)
    if resultat=="Pile":
        if p==1/2:
            p=2/3
        else:
            p=1/2
    # lancers suivants
    for i in range(2,n+1):
        resultat=piece(p)
    return resultat
```

Pensez à commenter vos fonctions longues pour ne pas vous perdre.

(b) *Écrire une fonction* `freq1` *qui prend en arguments deux entiers* $n \geqslant 1$ *et* `nbSim` $\geqslant 1$, *puis qui simule* `nbSim` *fois la stratégie nº 1 et renvoie la fréquence statistique d'obtenir «face» au* n*-ième lancer.*

▶ Par exemple :

```
def freq1(n,nbSim):
    nbFaces=0
    for i in range(nbSim):
        if strat1(n)=="Face":
            nbFaces=nbFaces+1
    return nbFaces/nbSim
```

3. *Calculer* $\mathrm{P}(F_1)$.

▶

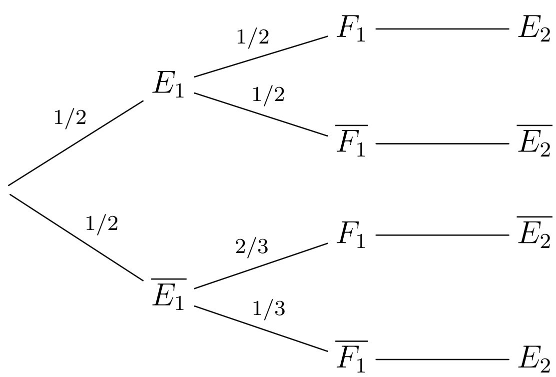
On reconnaît une expérience aléatoire en deux étapes : on choisit une pièce au hasard puis on la lance. On pense donc à utiliser la formule des probabilités totales en utilisant comme système complet d'événements les résultats possibles de la première étape.

E_1 est l'événement de jouer avec la pièce équilibrée au premier lancer et $\overline{E_1}$ est celui de jouer avec la pièce déséquilibrée au premier lancer. Ainsi, E_1 et $\overline{E_1}$ forment un système complet d'événements (car $E_1 \cup \overline{E_1} = \Omega$ et $E_1 \cap \overline{E_1} = \emptyset$). On en déduit que :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(F_1) &= \mathrm{P}(E_1)\mathrm{P}_{E_1}(F_1) + \mathrm{P}(\overline{E_1})\mathrm{P}_{\overline{E_1}}(F_1) \quad \text{d'après la formule des probabilités totales}\\
&= \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{3} \quad \text{d'après l'énoncé}\\
&= \boxed{\frac{7}{12}}.
\end{aligned}$$

4. *Calculer* $\mathrm{P}(E_2)$ *puis* $\mathrm{P}(F_2)$.

▶ On utilise un arbre de probabilités.



Ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(E_2) &= \mathrm{P}\big((E_1 \cap F_1) \cup (\overline{E_1} \cap \overline{F_1})\big) \quad \text{d'après l'énoncé}\\
&= \mathrm{P}\big(E_1 \cap F_1\big) + \mathrm{P}\big(\overline{E_1} \cap \overline{F_1}\big) \quad \text{car les événements } E_1 \cap F_1 \text{ et } \overline{E_1} \cap \overline{F_1} \text{ sont incompatibles}\\
&= \mathrm{P}(E_1)\mathrm{P}_{E_1}(F_1) + \mathrm{P}(\overline{E_1})\mathrm{P}_{\overline{E_1}}(\overline{F_1}) \quad \text{d'après la formule des probabilités composées}\\
&= \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3} \quad \text{d'après l'énoncé}\\
&= \boxed{\frac{5}{12}}.
\end{aligned}$$

Pour calculer $\mathrm{P}(F_2)$, on raisonne comme à la question 3 en utilisant le système complet d'événements $(E_2, \overline{E_2})$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(F_2) &= \mathrm{P}(E_2)\mathrm{P}_{E_2}(F_2) + \mathrm{P}(\overline{E_2})\mathrm{P}_{\overline{E_2}}(F_2) \quad \text{d'après la formule des probabilités totales} \\
&= \mathrm{P}(E_2) \times \frac{1}{2} + \big(1 - \mathrm{P}(E_2)\big) \times \frac{2}{3} \quad \text{d'après l'énoncé} \\
&= \frac{5}{12} \times \frac{1}{2} + \frac{7}{12} \times \frac{2}{3} \quad \text{d'après le résultat précédent} \\
&= \boxed{\frac{43}{72}}.
\end{aligned}$$

5. *En déduire que* $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}(F_n) = \frac{43}{72}$.

   ▶ Puisqu'on ne change plus de pièce à partir du deuxième lancer, on en déduit que :

   $$\forall n \geqslant 2, \quad \mathrm{P}(F_n) = \mathrm{P}(F_2) = \frac{43}{72} \quad \text{d'après le résultat de la question précédente.}$$

   On reconnaît une suite constante à partir d'un certain rang, par conséquent :

   $$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}(F_n) = \frac{43}{72}}.$$

   On peut vérifier ce résultat à l'aide de la fonction `freq1`. *On a par exemple :*

```
>>> freq1(5,1000)
0.602
>>> freq1(5,1000000)
0.596991
>>> freq1(5,1000000)
0.597657
>>> 43/72
0.5972222222222222
```

Stratégie n° 2. *Au premier lancer, on choisit une des deux pièces au hasard. Si elle donne «face», on joue avec cette pièce au deuxième lancer, sinon on joue avec l'autre. On décide ainsi à chaque lancer la pièce qu'on jouera au lancer suivant.*

6. ***[Info]*** *Écrire des fonctions* `strat2` *et* `freq2` *similaires à celles de la question 2.*

   ▶ Par exemple :

```
def strat2(n):
    # choix d'une pièce au hasard pour le premier lancer
    if piece(1/2)=="Face":
        p=1/2
    else:
        p=2/3
    # lancers et choix de la piece pour les lancers suivants
    for i in range(n):
        resultat=piece(p) #lancer
        # choix de la pièce pour le lancer suivant
        if resultat=="Pile":
            if p==1/2:
                p=2/3
            else:
                p=1/2
    return resultat
```

```python
def freq2(n,nbSim):
    nbFaces=0
    for i in range(nbSim):
        if strat2(n)=="Face":
            nbFaces=nbFaces+1
    return nbFaces/nbSim
```

7. *Soit $n \geqslant 1$. Montrer que $\mathrm{P}(E_{n+1}) = \frac{1}{6}\mathrm{P}(E_n) + \frac{1}{3}$.*

▶ On a en raisonnant comme à la question 4 : Ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(E_{n+1}) &= \mathrm{P}\big((E_n \cap F_n) \cup (\overline{E_n} \cap \overline{F_n})\big) \quad \text{d'après l'énoncé} \\
&= \mathrm{P}\big(E_n \cap F_n\big) + \mathrm{P}\big(\overline{E_n} \cap \overline{F_n}\big) \quad \text{car } E_n \cap F_n \text{ et } \overline{E_n} \cap \overline{F_n} \text{ sont incompatibles} \\
&= \mathrm{P}(E_n)\mathrm{P}_{E_n}(F_n) + \mathrm{P}(\overline{E_n})\mathrm{P}_{\overline{E_n}}(\overline{F_n}) \quad \text{d'après la formule des probabilités composées} \\
&= \mathrm{P}(E_n) \times \frac{1}{2} + \big(1 - \mathrm{P}(E_n)\big) \times \frac{1}{3} \quad \text{d'après l'énoncé} \\
&= \boxed{\frac{1}{6}\mathrm{P}(E_n) + \frac{1}{3}}.
\end{aligned}$$

8. *En déduire une expression de $\mathrm{P}(E_n)$ en fonction de $n \geqslant 1$.*

▶ On reconnaît une suite arithmético-géométrique. On a :

$$\alpha = \frac{1}{6}\alpha + \frac{1}{3} \iff \alpha = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{6}} = \frac{2}{5}.$$

On en déduit que :

$$\forall n \geqslant 1, \quad \mathrm{P}(E_{n+1}) - \alpha = \left(\frac{1}{6}\mathrm{P}(E_n) + \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{6}\alpha + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6}\big(\mathrm{P}(E_n) - \alpha\big).$$

On reconnaît une suite géométrique, par conséquent :

$$\forall n \geqslant 1, \quad \mathrm{P}(E_n) - \alpha = \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} \big(\mathrm{P}(E_1) - \alpha\big).$$

Or $\mathrm{P}(E_1) = \frac{1}{2}$ d'après l'énoncé et $\alpha = \frac{2}{5}$. Finalement :

$$\forall n \geqslant 1, \quad \mathrm{P}(E_n) = \frac{2}{5} + \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} \big(\frac{1}{2} - \frac{2}{5}\big) = \boxed{\frac{2}{5} + \frac{1}{10 \times 6^{n-1}}}.$$

9. *En déduire que : $\forall n \geqslant 1,\ \mathrm{P}(F_n) = \frac{3}{5} - \frac{1}{10 \times 6^n}$.*

▶ Soit $n \geqslant 1$. On raisonne comme à la question 3 en utilisant le système complet d'événements $(E_n, \overline{E_n})$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(F_n) &= \mathrm{P}(E_n)\mathrm{P}_{E_n}(F_n) + \mathrm{P}(\overline{E_n})\mathrm{P}_{\overline{E_n}}(F_n) \quad \text{d'après la formule des probabilités totales} \\
&= \mathrm{P}(E_n) \times \frac{1}{2} + \big(1 - \mathrm{P}(E_n)\big) \times \frac{2}{3} \quad \text{d'après l'énoncé} \\
&= \frac{2}{3} - \frac{1}{6}\mathrm{P}(E_n) \\
&= \frac{2}{3} - \frac{1}{6}\left(\frac{2}{5} + \frac{1}{10 \times 6^{n-1}}\right) \quad \text{d'après le résultat de la question précédente} \\
&= \boxed{\frac{3}{5} - \frac{1}{10 \times 6^n}}.
\end{aligned}$$

10. Quelle stratégie permet d'avoir le plus de chance d'obtenir «face» à long terme ?

▶ D'après le résultat de la question précédente, on a pour la stratégie n° 2 :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}(F_n) = \frac{3}{5} \quad \text{car} \quad \lim_{n\to+\infty} 6^n = +\infty \text{ puisque } 6 > 1.$$

On peut vérifier ce résultat à l'aide de la fonction `freq2`. *On a par exemple :*

```
>>> freq1(10,1000)
0.597
>>> freq1(5,1000000)
0.600021
>>> freq1(5,1000000)
0.599662
>>> 3/5
0.6
```

Or :

$$5 \times 43 = 215 < 216 = 3 \times 72 \quad \text{donc} \quad \frac{43}{72} < \frac{3}{5}.$$

D'après le résultat de la question 5, on en déduit que $\boxed{\text{la stratégie n° 2 est meilleure que la stratégie n° 1 pour obtenir «face» à long terme}}$.

Exercice 2

On considère l'ensemble suivant :

$$\mathscr{E} = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ x - z + 2t = 0 \end{cases}\right\}.$$

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

A) *Préliminaires*

1. ***[Info]*** *Écrire en Python une fonction* `est_dans_E` *qui prend en argument une liste* `L` *de longueur 4 puis qui renvoie* `True` *si le vecteur* (`L[0]`,`L[1]`,`L[2]`,`L[3]`) *appartient à* $\mathscr{E}$ *et* `False` *sinon.*

   ▶ Par exemple :

```
def est_dans_E(L):
    return ((L[0]-L[1]+2*L[2]==0) and (L[0]-L[2]+2*L[3]==0))
```

2. *Montrer que* $\mathscr{E}$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^4$.

   ▶ Le vecteur $\overrightarrow{0} = (0,0,0,0)$ appartient à $\mathscr{E}$ car $0 - 0 + 2 \times 0 = 0$. On fixe un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$, et deux vecteurs $\overrightarrow{u_1} = (x_1,y_1,z_1,t_1) \in \mathscr{E}$ et $\overrightarrow{u_2} = (x_2,y_2,z_2,t_2) \in \mathscr{E}$. On a :

$$\lambda\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2} = \lambda(x_1,y_1,z_1,t_1) + (x_2,y_2,z_2,t_2) = \big(\underbrace{\lambda x_1 + x_2}_{=x}, \underbrace{\lambda y_1 + y_2}_{=y}, \underbrace{\lambda z_1 + z_2}_{=z}, \underbrace{\lambda t_1 + t_2}_{=t}\big).$$

   Donc :

$$\begin{aligned} x - y + 2z &= (\lambda x_1 + x_2) - (\lambda y_1 + y_2) + 2(\lambda z_1 + z_2) \\ &= \lambda\big(\underbrace{x_1 - y_1 + 2z_1}_{=0 \text{ car } \overrightarrow{u_1} \in \mathscr{E}}\big) + \big(\underbrace{x_2 - y_2 + 2z_2}_{=0 \text{ car } \overrightarrow{u_2} \in \mathscr{E}}\big) \\ &= \lambda 0 + 0 = 0 \\ \text{et} \quad x - z + 2t &= (\lambda x_1 + x_2) - (\lambda z_1 + z_2) + 2(\lambda t_1 + t_2) \\ &= \lambda\big(\underbrace{x_1 - z_1 + 2t_1}_{=0 \text{ car } \overrightarrow{u_1} \in \mathscr{E}}\big) + \big(\underbrace{x_2 - z_2 + 2t_2}_{=0 \text{ car } \overrightarrow{u_2} \in \mathscr{E}}\big) \\ &= \lambda 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

On en déduit que $\lambda\overrightarrow{u_1}+\overrightarrow{u_2} \in \mathscr{E}$. Finalement, on a bien montré que $\boxed{\mathscr{E} \text{ est un sous-espace vectoriel}}$ $\boxed{\text{de } \mathbb{R}^4}$.

3. *Déterminer une famille génératrice de $\mathscr{E}$ contenant deux vecteurs.*

▶ On cherche une représentation paramétrique de $\mathscr{E}$ en résolvant le système linéaire formé par les équations cartésiennes de $\mathscr{E}$. Pour cela, on utilise la méthode du pivot de Gauss.

$$\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ x - z + 2t = 0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$

$$\iff \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 2 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On obtient un système linéaire homogène échelonné de rang 2 sans équation auxiliaire et avec deux inconnues auxiliaires. Il admet donc une infinité de solutions.

$$\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ x - z + 2t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y - 2z = z - 2t \\ y = 3z - 2t \\ z = z \\ t = t \end{cases}, (z, t) \in \mathbb{R}^2.$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} \mathscr{E} &= \left\{(z - 2t, 3z - 2t, z, t) \mid (z, t) \in \mathbb{R}^2\right\} \\ &= \Big\{z\underbrace{(1, 3, 1, 0)}_{=\overrightarrow{u_1}} + t\underbrace{(-2, -2, 0, 1)}_{=\overrightarrow{u_2}} \mid (z, t) \in \mathbb{R}^2\Big\} \\ &= \mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right). \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\overrightarrow{u_1} = (1, 3, 1, 0) \text{ et } \overrightarrow{u_2} = (-2, -2, 0, 1) \text{ forment une famille génératrice de } \mathscr{E}}$.

4. *La famille obtenue à la question précédente est-elle libre ?*

▶ On résout le système linéaire suivant d'inconnues $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$:

$$\lambda_1\overrightarrow{u_1} + \lambda_2\overrightarrow{u_2} = \overrightarrow{0} \iff \begin{cases} \lambda_1 - 2\lambda_2 = 0 \\ 3\lambda_1 - 2\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 \\ 3 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

$$\iff \begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 \\ 0 & 4 \\ 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftrightarrow L_4 \\ \\ \\ L_4 \leftrightarrow L_2 \end{array}$$

$$\iff \begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 \\ 0 & \boxed{1} \\ 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 4L_1 \end{array}$$

$$\iff \begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 \\ 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On obtient un système linéaire homogène échelonné de rang 2 avec deux équation auxiliaires compatibles et sans inconnue auxiliaire. Il admet donc une unique solution : $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. On en déduit que $\boxed{\text{la famille } (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}) \text{ est libre}}$.

B) *Projection sur $\mathscr{E}$ parallèlement à un plan de $\mathbb{R}^4$*

On pose $\overrightarrow{w_1} = (-1, 1, 1, 1)$, $\overrightarrow{w_2} = (0, 4, 2, 1)$, $\overrightarrow{w_3} = (1, 1, 1, -1)$, $\overrightarrow{w_4} = (4, 2, 1, 0)$ et $\mathscr{F} = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{w_3}, \overrightarrow{w_4})$.

5. *Montrer que $(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2})$ est une famille génératrice de $\mathscr{E}$.*

▶ Le vecteur $\overrightarrow{w_1}$ appartient à $\mathscr{E}$ car $-1 - 1 + 2 \times 1 = 0$. De même le vecteur $\overrightarrow{w_2}$ appartient à $\mathscr{E}$ car $0 - 4 + 2 \times 2 = 0$ et $0 - 2 + 2 \times 1 = 0$. On fixe un vecteur $\overrightarrow{u} = (x, y, z, t) \in \mathscr{E}$ et on cherche deux scalaires $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\overrightarrow{u} = \lambda_1 \overrightarrow{w_1} + \lambda_2 \overrightarrow{w_2}$. On résout donc le système linéaire suivant :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{u} = \lambda_1 \overrightarrow{w_1} + \lambda_2 \overrightarrow{w_2} &\iff \begin{cases} -\lambda_1 = x \\ \lambda_1 + 4\lambda_2 = y \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = z \\ \lambda_1 + \lambda_2 = t \end{cases} \\
&\iff \begin{pmatrix} \boxed{-1} & 0 \\ 1 & 4 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_1 \end{matrix} \\
&\iff \begin{pmatrix} \boxed{-1} & 0 \\ 0 & 4 \\ 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x+y \\ x+z \\ x+t \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftrightarrow L_4 \\ \\ L_4 \leftrightarrow L_2 \end{matrix} \\
&\iff \begin{pmatrix} \boxed{-1} & 0 \\ 0 & \boxed{1} \\ 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x+t \\ x+z \\ x+y \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 4L_2 \end{matrix} \\
&\iff \begin{pmatrix} \boxed{-1} & 0 \\ 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x+t \\ -x+z-2t \\ -3x+y-4t \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

On obtient un système linéaire échelonné de rang 2 avec deux équations auxiliaires et sans inconnue auxiliaire. Or on a d'après les équations cartésiennes de $\mathscr{E}$:

$$-x + z - 2t = -\big(\underbrace{x - z + 2t}_{=0 \text{ car } \overrightarrow{u} \in \mathscr{E}}\big) = 0,$$

$$\text{et} \quad -3x + y - 4t = -\big(\underbrace{x - y + 2z}_{=0 \text{ car } \overrightarrow{u} \in \mathscr{E}}\big) - 2x + 2z - 4t = -2\big(\underbrace{x - z + 2t}_{=0 \text{ car } \overrightarrow{u} \in \mathscr{E}}\big) = 0.$$

Ainsi, les deux équations auxiliaires sont compatibles. Le système linéaire admet donc une unique solution. On en déduit que $\boxed{\text{la famille } (\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}) \text{ est génératrice de } \mathscr{E}}$.

6. (a) *Déterminer une représentation cartésienne de $\mathscr{F}$.*

▶ On a par définition du sous-espace vectoriel engendré :

$$\begin{aligned}
\mathscr{F} &= \mathrm{Vect}\big(\overrightarrow{w_3}, \overrightarrow{w_4}\big) \\
&= \big\{\lambda_3 \underbrace{(1, 1, 1, -1)}_{=\overrightarrow{w_3}} + \lambda_4 \underbrace{(4, 2, 1, 0)}_{=\overrightarrow{w_4}} \mid (\lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^2\big\} \\
&= \big\{(\lambda_3 + 4\lambda_4, \lambda_3 + 2\lambda_4, \lambda_3 + \lambda_4, -\lambda_3) \mid (\lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^2\big\}.
\end{aligned}$$

D'où une représentation paramétrique de $\mathscr{F}$:

$$\mathscr{F} : \begin{cases} x = \lambda_3 + 4\lambda_4 \\ y = \lambda_3 + 2\lambda_4 \\ z = \lambda_3 + \lambda_4 \\ t = -\lambda_3 \end{cases}, (\lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^2.$$

Pour obtenir une représentation cartésienne, il suffit d'exprimer les paramètres λ_3 et λ_4 en fonction des composantes x, y, z et t à l'aide de deux équations de la représentation paramétrique puis de reporter ces expressions dans les deux équations restantes. On a par exemple avec les deux dernières équations de la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} z = \lambda_3 + \lambda_4 \\ t = -\lambda_3 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_3 = -t \\ \lambda_4 = z - \lambda_3 = z + t \end{cases}$$

ce qui donne en reportant dans les deux premières équations de la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = \lambda_3 + 4\lambda_4 = 4z + 3t \\ y = \lambda_3 + 2\lambda_4 = 2z + t \end{cases} \iff \boxed{\mathscr{F} : \begin{cases} x - 4z - 3t = 0 \\ y - 2z - t = 0 \end{cases}}.$$

(b) *En déduire que $\mathscr{E} \cap \mathscr{F} = \{\overrightarrow{0}\}$.*

► D'après la représentation cartésienne de $\mathscr{E}$ et celle de $\mathscr{F}$ obtenue à la question précédente, on a :

$$\mathscr{E} \cap \mathscr{F} : \begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ x - z + 2t = 0 \\ x - 4z - 3t = 0 \\ y - 2z - t = 0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ \\ \end{array}$$

$$\iff \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 2 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -6 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_2 \end{array}$$

$$\iff \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 2 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftrightarrow L_4 \\ L_4 \leftrightarrow L_3 \end{array}$$

$$\iff \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 2 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -3 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -3 \\ 0 & 0 & -3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ L_4 \leftarrow L_4 + 3L_3 \end{array}$$

$$\iff \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 2 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -3 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-14} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On obtient un système linéaire homogène échelonné de rang maximal. Il admet donc une unique solution : $x = y = z = t = 0$. On en déduit que $\boxed{\mathscr{E} \cap \mathscr{F} = \{\overrightarrow{0}\}}$.

7. *Montrer que $(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}, \overrightarrow{w_3}, \overrightarrow{w_4})$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^4$.*

► Les vecteurs $\overrightarrow{w_1}$, $\overrightarrow{w_2}$, $\overrightarrow{w_3}$ et $\overrightarrow{w_4}$ appartiennent évidemment à $\mathbb{R}^4$. On fixe un vecteur $\overrightarrow{u} = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ et on cherche quatre scalaires $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$ tels que $\overrightarrow{u} = \lambda_1\overrightarrow{w_1} + \lambda_2\overrightarrow{w_2} +$

$\lambda_3\overrightarrow{w_3} + \lambda_4\overrightarrow{w_4}$. On résout donc le système linéaire suivant :

$$\overrightarrow{u} = \lambda_1\overrightarrow{w_1} + \lambda_2\overrightarrow{w_2} + \lambda_3\overrightarrow{w_3} + \lambda_4\overrightarrow{w_4} \iff \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{=M} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}.$$

Or :

$$\begin{aligned}
\operatorname{rang}(M) &= \operatorname{rang}\begin{pmatrix} \boxed{-1} & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_1 \end{matrix} \\
&= \operatorname{rang}\begin{pmatrix} \boxed{-1} & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftrightarrow L_4 \\ \\ L_4 \leftrightarrow L_2 \end{matrix} \\
&= \operatorname{rang}\begin{pmatrix} \boxed{-1} & 0 & 1 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 4L_2 \end{matrix} \\
&= \operatorname{rang}\begin{pmatrix} \boxed{-1} & 0 & 1 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 4 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -10 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_3 \end{matrix} \\
&= \operatorname{rang}\begin{pmatrix} \boxed{-1} & 0 & 1 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 4 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & -3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-7} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

On obtient un système linéaire échelonné de rang maximal. Il admet donc une unique solution. On en déduit que $\boxed{\text{la famille } (\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}, \overrightarrow{w_3}, \overrightarrow{w_4}) \text{ est génératrice de } \mathbb{R}^4}$.

8. *Soit $\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^4$. Déduire des résultats précédents qu'il existe un unique vecteur $\overrightarrow{e} \in \mathscr{E}$ et un unique vecteur $\overrightarrow{f} \in \mathscr{F}$ tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{e} + \overrightarrow{f}$.*

► Unicité. Montrons l'unicité en raisonnant par l'absurde. On suppose qu'il existe deux vecteurs $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}) \in \mathscr{E}^2$ et deux vecteurs $(\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}) \in \mathscr{F}^2$ tels que $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{f_1}) \neq (\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{f_2})$ et :

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{f_1} = \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{f_2}.$$

En particulier, on a $\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{f_2} - \overrightarrow{f_1}$. Or $\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2} = 1\overrightarrow{e_1} + (-1)\overrightarrow{e_2} \in \mathscr{E}$ comme combinaison linéaire de deux vecteurs du sous-espace vectoriel $\mathscr{E}$. De même, $\overrightarrow{f_2} - \overrightarrow{f_1} = 1\overrightarrow{f_2} + (-1)\overrightarrow{f_1} \in \mathscr{F}$. Par conséquent, le vecteur $\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{f_2} - \overrightarrow{f_1}$ appartient à $\mathscr{E} \cap \mathscr{F}$. D'après le résultat de la question 6, on en déduit que :

$$\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{f_2} - \overrightarrow{f_1} = \overrightarrow{0} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} \overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{e_2} \\ \overrightarrow{f_1} = \overrightarrow{f_2} \end{cases} \quad \text{ce qui est absurde.}$$

On a donc bien démontré l'unicité.
Existence. On cherche un vecteur $\overrightarrow{e} \in \mathscr{E}$ et un vecteur $\overrightarrow{f} \in \mathscr{F}$ tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{e} + \overrightarrow{f}$. On raisonne par analyse-synthèse.

— *Analyse.* D'après le résultat de la question précédente, on sait que $\mathbb{R}^4 = \text{Vect}\,(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}, \overrightarrow{w_3}, \overrightarrow{w_4})$. Donc $\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^4$ s'écrit comme une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{w_1}$, $\overrightarrow{w_2}$, $\overrightarrow{w_3}$ et $\overrightarrow{w_4}$. Autrement dit, il existe quatre scalaires $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$ tels que :

$$\overrightarrow{u} = \underbrace{\lambda_1\overrightarrow{w_1} + \lambda_2\overrightarrow{w_2}}_{\in \text{Vect}\left(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}\right) = \mathscr{E}} + \underbrace{\lambda_3\overrightarrow{w_3} + \lambda_4\overrightarrow{w_4}}_{\in \text{Vect}\left(\overrightarrow{w_3}, \overrightarrow{w_4}\right) = \mathscr{F}}.$$

— *Synthèse.* On pose $\boxed{\overrightarrow{e} = \lambda_1\overrightarrow{w_1} + \lambda_2\overrightarrow{w_2}}$ et $\boxed{\overrightarrow{\mathrm{f}} = \lambda_3\overrightarrow{w_3} + \lambda_4\overrightarrow{w_4}}$. Alors $\overrightarrow{e} \in \text{Vect}\,(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}) = \mathscr{E}$ d'après le résultat de la question 5 et $\overrightarrow{\mathrm{f}} \in \text{Vect}\,(\overrightarrow{w_3}, \overrightarrow{w_4}) = \mathscr{F}$ par définition de $\mathscr{F}$. De plus, on a :

$$\overrightarrow{e} + \overrightarrow{\mathrm{f}} = \lambda_1\overrightarrow{w_1} + \lambda_2\overrightarrow{w_2} + \lambda_3\overrightarrow{w_3} + \lambda_4\overrightarrow{w_4} = \overrightarrow{u}.$$

Ainsi, on a bien trouvé un vecteur $\overrightarrow{e} \in \mathscr{E}$ et un vecteur $\overrightarrow{\mathrm{f}} \in \mathscr{F}$ tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{e} + \overrightarrow{\mathrm{f}}$.

Conclusion. Finalement, on a bien montré qu'$\boxed{\text{il existe un unique vecteur } \overrightarrow{e} \in \mathscr{E} \text{ et un unique vecteur } \overrightarrow{\mathrm{f}} \in \mathscr{F} \text{ tels que } \overrightarrow{u} = \overrightarrow{e} + \overrightarrow{\mathrm{f}}}$.

Pour tout vecteur $\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^4$, cet unique vecteur $\overrightarrow{e} \in \mathscr{E}$ est appelé le ***projeté de $\overrightarrow{u}$ sur $\mathscr{E}$ parallèlement à $\mathscr{F}$****. On le note $p(\overrightarrow{u})$ pour les questions suivantes.*

9. *Soit $\overrightarrow{u} = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. Calculer les composantes de $p(\overrightarrow{u})$ en fonction de x, y, z et t.*

▶ On a vu dans la question précédente que $p(\overrightarrow{u}) = \lambda_1\overrightarrow{w_1} + \lambda_2\overrightarrow{w_2}$ où les scalaires $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ sont tels que $\overrightarrow{u} = \lambda_1\overrightarrow{w_1} + \lambda_2\overrightarrow{w_2} + \lambda_3\overrightarrow{w_3} + \lambda_4\overrightarrow{w_4}$. Il suffit donc de calculer les scalaires $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$. Autrement, il suffit de résoudre le système linéaire suivant :

$$\overrightarrow{u} = \lambda_1\overrightarrow{w_1} + \lambda_2\overrightarrow{w_2} + \lambda_3\overrightarrow{w_3} + \lambda_4\overrightarrow{w_4} \iff \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{=M} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}.$$

On retrouve le même système linéaire qu'à la question 7. Puisqu'on a montré que la matrice M est de rang maximal, il admet une unique solution. Pour calculer cette solution, on reprend les opérations élémentaires de la méthode du pivot de Gauss utilisée à la question 7 :

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{u} = \lambda_1\overrightarrow{w_1} + \lambda_2\overrightarrow{w_2} + \lambda_3\overrightarrow{w_3} + \lambda_4\overrightarrow{w_4} \\
\iff & \begin{pmatrix} \boxed{-1} & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_1 \end{matrix} \\
\iff & \begin{pmatrix} \boxed{-1} & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x+y \\ x+z \\ x+t \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftrightarrow L_4 \\ \\ L_4 \leftrightarrow L_2 \end{matrix} \\
\iff & \begin{pmatrix} \boxed{-1} & 0 & 1 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x+t \\ x+z \\ x+y \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 4L_2 \end{matrix} \\
\iff & \begin{pmatrix} \boxed{-1} & 0 & 1 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 4 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x+t \\ -x+z-2t \\ -3x+y-4t \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_3 \end{matrix}
\end{aligned}$$

$$\iff \begin{pmatrix} \boxed{-1} & 0 & 1 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 4 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & -3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x+t \\ -x+z-2t \\ -2x+y-z-2t \end{pmatrix}.$$

On en déduit que :

$$\begin{cases} \lambda_4 = \frac{-2x+y-z-2t}{-7} = \frac{2}{7}x - \frac{1}{7}y + \frac{1}{7}z + \frac{2}{7}t \\ \lambda_3 = \frac{-x+z-2t+3\lambda_4}{2} = -\frac{1}{14}x - \frac{3}{14}y + \frac{5}{7}z - \frac{4}{7}t \\ \lambda_2 = x + t - 4\lambda_4 = -\frac{1}{7}x + \frac{4}{7}y - \frac{4}{7}z - \frac{1}{7}t \\ \lambda_1 = \frac{x-\lambda_3-4\lambda_4}{-1} = \frac{1}{14}x - \frac{11}{14}y + \frac{9}{7}z + \frac{4}{7}t \end{cases}.$$

Finalement :

$$\begin{aligned} & p(\overrightarrow{u}) \\ =& \lambda_1\overrightarrow{w_1} + \lambda_2\overrightarrow{w_2} \\ =& \left(\tfrac{1}{14}x - \tfrac{11}{14}y + \tfrac{9}{7}z + \tfrac{4}{7}t\right)(-1,1,1,1) + \left(-\tfrac{1}{7}x + \tfrac{4}{7}y - \tfrac{4}{7}z - \tfrac{1}{7}t\right)(0,4,2,1) \\ =& \left(-\tfrac{1}{14}x + \tfrac{11}{14}y - \tfrac{9}{7}z - \tfrac{4}{7}t, -\tfrac{1}{2}x + \tfrac{3}{2}y - z, -\tfrac{3}{14}x + \tfrac{5}{14}y + \tfrac{1}{7}z + \tfrac{2}{7}t, -\tfrac{1}{14}x - \tfrac{3}{14}y + \tfrac{5}{7}z + \tfrac{3}{7}t\right) \\ =& \boxed{\tfrac{1}{14}(-x+11y-18z-8t, -7x+21y-14z, -3x+5y+2z+4t, -x-3y+10z+6t)}. \end{aligned}$$

10. *Vérifier que :*

(a) $\forall \overrightarrow{u} \in \mathscr{E},\ p(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}$,

▶ Soit $\overrightarrow{u} = (x,y,z,t) \in \mathscr{E}$. On a d'après les équations cartésiennes de $\mathscr{E}$:

$$\begin{aligned} -x+11y-18z-8t &= -11(\underbrace{x-y+2z}_{=0 \text{ car } \overrightarrow{u}\in\mathscr{E}}) + 10x + 4z - 8t \\ &= 0 - 4(\underbrace{x-z+2t}_{=0 \text{ car } \overrightarrow{u}\in\mathscr{E}}) + 14x = 14x, \\ -7x+21y-14z &= -7(\underbrace{x-y+2z}_{=0 \text{ car } \overrightarrow{u}\in\mathscr{E}}) + 14y = 14y, \\ -3x+5y+2z+4t &= -5(\underbrace{x-y+2z}_{=0 \text{ car } \overrightarrow{u}\in\mathscr{E}}) + 2x + 12z + 4t \\ &= 0 + 2(\underbrace{x-z+2t}_{=0 \text{ car } \overrightarrow{u}\in\mathscr{E}}) + 14z = 14z, \\ \text{et} \quad -x-3y+10z+6t &= 3(\underbrace{x-y+2z}_{=0 \text{ car } \overrightarrow{u}\in\mathscr{E}}) - 4x + 4z + 6t \\ &= 0 - 4(\underbrace{x-z+2t}_{=0 \text{ car } \overrightarrow{u}\in\mathscr{E}}) + 14t = 14t. \end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient en reportant dans le résultat de la question précédente :

$$\begin{aligned} p(\overrightarrow{u}) &= \tfrac{1}{14}(-x+11y-18z-8t, -7x+21y-14z, -3x+5y+2z+4t, -x-3y+10z+6t) \\ &= \tfrac{1}{14}(14x, 14y, 14z, 14t) \\ &= (x,y,z,t) = \boxed{\overrightarrow{u}}. \end{aligned}$$

(b) $\forall \overrightarrow{u} \in \mathscr{F},\ p(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}$.

▶ Soit $\overrightarrow{u} = (x, y, z, t) \in \mathscr{F}$. On a d'après les équations cartésiennes de $\mathscr{F}$ obtenues à la question 6(a) :

$$\begin{aligned}
-x + 11y - 18z - 8t &= -\big(\underbrace{x - 4z - 3t}_{=0 \text{ car } \overrightarrow{u} \in \mathscr{F}}\big) + 11y - 22z - 11t \\
&= 0 + 11\big(\underbrace{y - 2z - t}_{=0 \text{ car } \overrightarrow{u} \in \mathscr{F}}\big) = 0, \\
-7x + 21y - 14z &= -7\big(\underbrace{x - 4z - 3t}_{=0 \text{ car } \overrightarrow{u} \in \mathscr{F}}\big) + 21y - 42z - 21t \\
&= 0 + 21\big(\underbrace{y - 2z - t}_{=0 \text{ car } \overrightarrow{u} \in \mathscr{F}}\big) = 0, \\
-3x + 5y + 2z + 4t &= -3\big(\underbrace{x - 4z - 3t}_{=0 \text{ car } \overrightarrow{u} \in \mathscr{F}}\big) + 5y - 10z - 5t \\
&= 0 + 5\big(\underbrace{y - 2z - t}_{=0 \text{ car } \overrightarrow{u} \in \mathscr{F}}\big) = 0, \\
\text{et} \quad -x - 3y + 10z + 6t &= -\big(\underbrace{x - 4z - 3t}_{=0 \text{ car } \overrightarrow{u} \in \mathscr{F}}\big) - 3y + 6z + 3t \\
&= 0 - 3\big(\underbrace{y - 2z - t}_{=0 \text{ car } \overrightarrow{u} \in \mathscr{E}}\big) = 0.
\end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient en reportant dans le résultat de la question 9 :

$$\begin{aligned}
p(\overrightarrow{u}) &= \tfrac{1}{14}\left(-x + 11y - 18z - 8t, -7x + 21y - 14z, -3x + 5y + 2z + 4t, -x - 3y + 10z + 6t\right) \\
&= \tfrac{1}{14}(0, 0, 0, 0) \\
&= (0, 0, 0, 0) = \boxed{\overrightarrow{0}}.
\end{aligned}$$

Exercice 3

Dans cet exercice, on fixe un entier $n \geqslant 2$ et un réel $a > 1$. On propose de calculer numériquement des approximations de la racine n-ième de a.

Pour les questions d'informatique, les fonctions demandées sont à écrire en Python.

1. *Justifier que $1 < \sqrt[n]{a} < a$.*

▶ Puisque $a > 1$, on a $a^{n-1} > 1$ (car la fonction $x \mapsto x^{n-1}$ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$) et donc :

$$a^n - a = \underbrace{a}_{>0}\big(\underbrace{a^{n-1} - 1}_{>0}\big) > 0.$$

On en déduit que :

$$1 < a < a^n.$$

En appliquant la fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ qui est strictement croissante sur $[0, +\infty[$, on obtient :

$$\boxed{1 < \sqrt[n]{a} < a}.$$

Méthode de dichotomie.

2. ***[Info]*** *Écrire une fonction* `dichotomie` *qui prend en arguments l'entier $n \geqslant 2$, le réel $a > 1$ et un réel $\varepsilon > 0$ puis qui renvoie une approximation de $\sqrt[n]{a}$ à ε près à l'aide d'un algorithme de dichotomie.*

▶ Par exemple :

```
def dichotomie(n,a,epsilon):
    borneInf=1
    borneSup=a
    while (borneSup-borneInf)>epsilon:
        c=(borneInf+borneSup)/2
        if (c**n)-a>0:
            borneSup=c
        else:
            borneInf=c
    return (borneInf+borneSup)/2
```

Méthode de Newton.

3. *On pose $f : x \mapsto x^n - a$ et on fixe $u > 1$.*

   (a) *Déterminer le développement limité de f à l'ordre 1 en u.*

   ▶ La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynomiale. Donc elle admet un unique développement limité à l'ordre 1 en $u$qui est de la forme :

$$f(u+h) = f(u) + f'(u)h + \underset{h\to 0}{\mathrm{o}}(h).$$

   Or $f(u) = u^n - a$ et $f'(u) = nu^{n-1}$, d'où :

$$\boxed{f(u+h) = u^n - a + nu^{n-1}h + \underset{h\to 0}{\mathrm{o}}(h)}.$$

   (b) *Calculer l'abscisse du point d'intersection entre la tangente à la courbe représentative de f en u et l'axe des abscisses.*

   ▶ D'après le résultat de la question précédente (en posant $x = u + h \iff h = x - u$), la tangente à la courbe représentative de f en u admet pour équation :

$$y = u^n - a + nu^{n-1}(x-u).$$

   L'abscisse de l'intersection de cette tangente avec l'axe $y = 0$ est donc solution de l'équation suivante :

$$0 = u^n - a + nu^{n-1}(x-u) \iff x = u - \frac{u^n - a}{nu^{n-1}} = \frac{nu^n - u^n + a}{nu^{n-1}} = \boxed{\frac{1}{n}\left((n-1)u + \frac{a}{u^{n-1}}\right)}.$$

4. *On définit par récurrence une suite $(u_k)_{k\geqslant 0}$ par $u_0 = a$ et $u_{k+1} = F(u_k)$ pour tout $k \geqslant 0$ où F est la fonction :*

$$F : x \mapsto \frac{1}{n}\left((n-1)x + \frac{a}{x^{n-1}}\right).$$

   (a) *Montrer que $F([\sqrt[n]{a}, a]) \subset [\sqrt[n]{a}, a]$ puis en déduire que la suite $(u_k)_{k\geqslant 0}$ est bien définie.*

   ▶ La fonction F est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ comme somme et produit de fonctions usuelles. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad F'(x) = \frac{1}{n}\left((n-1) - \frac{(n-1)a}{x^n}\right) = \underbrace{\frac{n-1}{n}}_{>0} \times \frac{x^n - a}{x^n}.$$

   De plus :

$$\lim_{x\to 0^+} F(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{n}\left(\underbrace{(n-1)x}_{\to 0} + \underbrace{\frac{a}{x^{n-1}}}_{\to +\infty}\right) = +\infty,$$

$$\text{et} \quad \lim_{x\to +\infty} F(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{n}\left(\underbrace{(n-1)x}_{\to +\infty} + \underbrace{\frac{a}{x^{n-1}}}_{\to 0}\right) = +\infty.$$

D'où le tableau des variations de la fonction F sur $]0,+\infty[$:

x	0		$\sqrt[n]{a}$		a		$+\infty$
$F'(x)$	‖	$-$	0	$+$			
$F(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	$F\left(\sqrt[n]{a}\right)$	$\nearrow$	$F(a)$	$\nearrow$	$+\infty$

En particulier, on a $F([\sqrt[n]{a},a]) \subset [F(\sqrt[n]{a}),F(a)]$ car F est strictement croissante sur $[\sqrt[n]{a},a]$. Or :

$$F\left(\sqrt[n]{a}\right) = \frac{1}{n}\left((n-1)\sqrt[n]{a} + \frac{a}{\big(\underbrace{\sqrt[n]{a}}_{=a^{1/n}}\big)^{n-1}}\right) = \frac{1}{n}\left((n-1)\sqrt[n]{a} + \underbrace{a^{1-\frac{n-1}{n}}}_{\substack{=a^{1/n}\\ =\sqrt[n]{a}}}\right) = \sqrt[n]{a},$$

$$\text{et} \quad F(a) = \frac{1}{n}\left((n-1)a + \frac{a}{a^{n-1}}\right) = a\left(\frac{(n-1)a^{n-1} + \overbrace{1}^{<a^{n-1}}}{na^{n-1}}\right) < a\left(\frac{(n-1)a^{n-1} + a^{n-1}}{na^{n-1}}\right) = a.$$

On en déduit bien que $\boxed{F([\sqrt[n]{a},a]) \subset [\sqrt[n]{a},a]}$. Pour jsutifier que la suite $(u_k)_{k\geqslant 0}$ est bien définie, il suffit de montrer que chacun de ses termes appartient à l'ensemble de définition de F, c'est-à-dire que $u_k \neq 0$ pour tout $k \geqslant 0$. En particulier, il suffit de montrer que $u_k \in [\sqrt[n]{a},a]$ pour tout $k \geqslant 0$ puisque $0 \notin [\sqrt[n]{a},a]$. On raisonne par récurrence.
Initialisation. Au rang $k=0$, on a $u_0 = a \in [\sqrt[n]{a},a]$.
Hérédité. On suppose que $u_k \in [\sqrt[n]{a},a]$ pour un rang $k \geqslant 0$ fixé. Alors :

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= F(u_k) \quad \text{par définition de la suite } (u_k)_{k\geqslant 0} \\ &\in F\left([\sqrt[n]{a},a]\right) \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &\subset [\sqrt[n]{a},a] \quad \text{d'après le résultat précédent.} \end{aligned}$$

Ainsi $u_{k+1} \in [\sqrt[n]{a},a]$ si $u_k \in [\sqrt[n]{a},a]$ pour tout $k \geqslant 0$.
Conclusion. D'après le principe de récurrence, on en déduit que $u_k \in [\sqrt[n]{a},a]$ pour tout $k \geqslant 0$. En particulier, $\boxed{\text{la suite } (u_k)_{k\geqslant 0} \text{ est bien définie}}$ puisque ses termes ne s'annulent pas.

(b) *Montrer que :* $\forall x \in [\sqrt[n]{a},a],\ 0 \leqslant F'(x) \leqslant \frac{n-1}{n}\left(1 - \frac{1}{a^{n-1}}\right)$.

▶ Soit $x \in [\sqrt[n]{a},a]$. On a :

$$\begin{aligned} &\sqrt[n]{a} \leqslant x \leqslant a, \\ \text{donc} \quad & \frac{1}{a^n} \leqslant \frac{1}{x^n} \leqslant \frac{1}{a} \quad \text{car } x \mapsto \frac{1}{x^n} \text{ est strictement décroissante sur }]0,+\infty[, \\ \text{donc} \quad & -(n-1) \leqslant -\frac{(n-1)a}{x^n} \leqslant -\frac{(n-1)a}{a^n} \quad \text{car } -(n-1)a < 0, \\ \text{donc} \quad & 0 \leqslant (n-1) - \frac{(n-1)a}{x^n} \leqslant (n-1) - \frac{(n-1)}{a^{n-1}}, \\ \text{donc} \quad & 0 \leqslant \frac{1}{n}\left((n-1) - \frac{(n-1)a}{x^n}\right) \leqslant \frac{n-1}{n}\left(1 - \frac{1}{a^{n-1}}\right) \quad \text{car } \frac{1}{n} > 0. \end{aligned}$$

D'après l'expression de F' obtenue à la question précédente, on en déduit bien que :

$$\forall x \in [\sqrt[n]{a},a], \quad \boxed{0 \leqslant F'(x) \leqslant \frac{n-1}{n}\left(1 - \frac{1}{a^{n-1}}\right)}.$$

(c) En déduire que :

$$\forall k \geqslant 0, \quad |u_k - \sqrt[n]{a}| \leqslant (a-1)\left(\frac{n-1}{n}\left(1-\frac{1}{a^{n-1}}\right)\right)^k.$$

► On raisonne par récurrence.
Initialisation. Au rang $k=0$, on a :

$$\begin{aligned} |u_0 - \sqrt[n]{a}| &= |a - \sqrt[n]{a}| \quad \text{par définition de la suite } (u_k)_{k\geqslant 0} \\ &= a - \sqrt[n]{a} \quad \text{car } \sqrt[n]{a} < a \text{ d'après le résultat de la question 1} \\ &< a-1 \quad \text{car } 1 < \sqrt[n]{a} \text{ d'après le résultat de la question 1} \\ &= (a-1)\left(\frac{n-1}{n}\left(1-\frac{1}{a^{n-1}}\right)\right)^0. \end{aligned}$$

On en déduit bien que le résultat est vrai au rang $k=0$.
Hérédité. On suppose que le résultat est vrai pour un rang $k \geqslant 0$ fixé. On a :

$$\left|u_{k+1} - \sqrt[n]{a}\right| = \left|F(u_k) - F\left(\sqrt[n]{a}\right)\right| \quad \text{par définition de la suite } (u_k)_{k\geqslant 0}.$$

Or la fonction F est continue sur $[\sqrt[n]{a}, u_k]$ et dérivable sur $]\sqrt[n]{a}, u_k[$ d'après ce qu'on a vu à la question 4(a). On peut donc appliquer le théorème des accroissements finis :

$$\exists c \in]\sqrt[n]{a}, u_k[, \quad F(u_k) - F\left(\sqrt[n]{a}\right) = F'(c)\big(u_k - \sqrt[n]{a}\big).$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \left|u_{k+1} - \sqrt[n]{a}\right| &= \left|F'(c)\big(u_k - \sqrt[n]{a}\big)\right| \\ &= \left|F'(c)\right| \times \left|u_k - \sqrt[n]{a}\right| \\ &\leqslant \left|F'(c)\right| \times (a-1)\left(\frac{n-1}{n}\left(1-\frac{1}{a^{n-1}}\right)\right)^k \quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence.} \end{aligned}$$

Puisque $c \in]\sqrt[n]{a}, u_k[$, on a d'après le résultat de la question précédente :

$$0 \leqslant F'(c) \leqslant \frac{n-1}{n}\left(1-\frac{1}{a^{n-1}}\right) \quad \text{donc} \quad \left|F'(c)\right| = F'(c)) \leqslant \frac{n-1}{n}\left(1-\frac{1}{a^{n-1}}\right).$$

Finalement, on a :

$$\left|u_{k+1} - \sqrt[n]{a}\right| \leqslant \tfrac{n-1}{n}\left(1-\tfrac{1}{a^{n-1}}\right) \times (a-1)\left(\tfrac{n-1}{n}\left(1-\tfrac{1}{a^{n-1}}\right)\right)^k = (a-1)\left(\tfrac{n-1}{n}\left(1-\tfrac{1}{a^{n-1}}\right)\right)^{k+1}.$$

Ainsi, le résultat est vrai au rang $k+1$ dès qu'il est vrai au rang k. Et cette implication est vrai pour tout rang $k \geqslant 0$.
Conclusion. D'après le principe de récurrence, on a bien montré que :

$$\forall k \geqslant 0, \quad \boxed{|u_k - \sqrt[n]{a}| \leqslant (a-1)\left(\frac{n-1}{n}\left(1-\frac{1}{a^{n-1}}\right)\right)^k}.$$

(d) Justifier que la suite $(u_k)_{k\geqslant 0}$ converge et préciser sa limite.

► On a :

$$1 - \frac{1}{a^{n-1}} \in]0,1[\quad (\text{car } a > 1) \quad \text{et} \quad \frac{n-1}{n} \in]0,1[\quad (\text{car } n \geqslant 2).$$

Donc :

$$\lim_{k\to+\infty} (a-1)\left(\frac{n-1}{n}\left(1-\frac{1}{a^{n-1}}\right)\right)^k = 0 \quad \text{car } \tfrac{n-1}{n}\left(1-\tfrac{1}{a^{n-1}}\right) \in]0,1[.$$

D'après le théorème de limite par encadrement, on déduit du résultat de la question précédente que :

$$\lim_{k\to+\infty} \left|u_k - \sqrt[n]{a}\right| = 0 \quad \text{donc} \quad \lim_{k\to+\infty} u_k = \sqrt[n]{a}.$$

Par conséquent, $\boxed{\text{la suite } (u_k)_{k\geqslant 0} \text{ converge vers } \sqrt[n]{a}}$.

5. ***[Info]*** *Écrire une fonction* `newton` *similaire à celle de la question 2 à l'aide de la méthode de Newton.*

▶ Par exemple :

```
def newton(n,a,epsilon):
    u=a
    k=0
    while (a-1)*((((n-1)/n)*(1-1/(a**(n-1))))**k)>epsilon:
        k=k+1
        u=(1/n)*((n-1)*u+a/(u**(n-1)))
    return u
```

DS n$^{\text{o}}$ 8 de mathématiques et d'informatique

durée : 3 heures à distance

Problème 1

On note $S(p,n)$ le nombre de façons de partitionner un ensemble à p éléments en n parties (non vides). Par exemple $S(3,2)=3$ car : $\{1,2,3\}=\{1\}\cup\{2,3\}=\{2\}\cup\{1,3\}=\{3\}\cup\{1,2\}$. Ce problème propose de déterminer $S(p,n)$ lorsque $1\leqslant p\leqslant n+2$ à l'aide de développements limités.

1. (a) En vous inspirant de l'exemple de l'énoncé, justifier que $S(4,2)=7$ et déterminer $S(4,3)$.

   (b) Sans justifier, déterminer $S(p,1)$ et $S(p,p)$ pour tout entier $p\geqslant 1$.

   (c) Sans justifier, déterminer $S(p,n)$ lorsque $1\leqslant p<n$.

2. Dans cette question, on fixe deux entiers tels que $1\leqslant n\leqslant p$. Sans calculs, expliquer pourquoi on a la relation :
$$S(p+1,n+1)=S(p,n)+(n+1)S(p,n+1).$$
Indication : on pourra distinguer le cas où l'élément $p+1$ de l'ensemble $\{1,2,3,\dots,p,p+1\}$ se retrouve tout seul dans une partie du cas où il appartient à une partie contenant d'autres éléments.

3. Pour tout $p\geqslant 1$, on pose :
$$\mathrm{H}(p):\quad \text{«}\forall n\geqslant 1,\ S(p,n)=\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k^p\text{»}.$$
Montrer que $\mathrm{H}(p)$ est vraie pour tout $p\geqslant 1$.

Pour la suite de l'énoncé, on fixe $n\geqslant 1$ et on considère la fonction $f:t\mapsto(e^t-1)^n$.

4. À l'aide de la formule du binôme de Newton, montrer que $f^{(p)}(0)=n!S(p,n)$ pour tout entier $p\geqslant 1$.

5. (a) Déterminer le $\mathrm{DL}_2(0)$ de la fonction $g:t\mapsto\left(\frac{e^t-1}{t}\right)^n$.

   (b) En déduire que le $\mathrm{DL}_{n+2}(0)$ de f est de la forme :
$$f(t)=t^n+\frac{n}{a}t^{n+1}+\frac{n(bn+c)}{d}t^{n+2}+\underset{t\to 0}{\mathrm{o}}\left(t^{n+2}\right)$$
   où (a,b,c,d) sont quatre entiers à déterminer.

6. Déduire des résultats précédents la valeur de $S(p,n)$ pour tout entier $p\in[\![1,n+2]\!]$.

Exercice 1

On considère l'application suivante :
$$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3,(x,y,z)\mapsto(5x+3y-3z,-3x-y+3z,3x+3y-z).$$
Pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$, on pose $F_\lambda=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid f(x,y,z)=\lambda(x,y,z)\}$.

1. Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. Justifier que F_λ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer les valeurs de $\lambda\in\mathbb{R}$ pour lesquelles $F_\lambda\neq\{\overrightarrow{0}\}$.
3. Déterminer une base et la dimension de F_λ pour chaque valeur de λ obtenue à la question précédente.

Problème 2

Un prof de maths souhaite estimer la proportion $\pi \in [0,1]$ d'étudiants de sa classe confinée qui ont une autre activité pendant son cours à distance. Comme il se doute que la plupart des indisciplinés n'oseront pas avouer directement leur faute, il propose l'expérience suivante : il fixe un réel $p \in]0,1[$ qu'il envoie par mail à toute la classe puis il choisit au hasard n étudiants à qui il envoie la fonction ci-contre écrite en Python.

```
import random
def test(p):
    x=random.random()
    if x<p:
        return "Je fais autre chose
pendant le cours de maths."
    else:
        return "Je suis attentif
pendant le cours de maths."
```

Chaque étudiant choisi doit alors appeler la fonction `test` avec la valeur de l'argument p reçu. Puis il doit répondre par mail, sans mentir, si ce que renvoie la fonction est vrai ou faux, sans préciser ce qui est renvoyé. On fera l'hypothèse qu'aucun étudiant n'ose mentir à son prof de maths (évidemment). On note X le nombre d'étudiants qui répondent «Ce que renvoie la fonction est vrai.».

1. On considère les événements suivants : A qu'un étudiant fasse autre chose pendant le cours de maths, B que la fonction renvoie «Je fais autre chose pendant le cours de maths.» et C que l'étudiant réponde «Ce que renvoie la fonction est vrai.». Justifier que $\mathrm{P}(C) = 1 - p + (2p-1)\pi$.
2. Déterminer la loi de probabilité de X puis rappeler son espérance et sa variance.

Pour la suite de l'énoncé, on suppose que $p \neq 1/2$ et on pose :

$$Y = \frac{X - n(1-p)}{n(2p-1)}.$$

3. Montrer que :

$$\mathrm{E}(Y) = \pi \quad \text{et} \quad \mathrm{V}(Y) = \frac{(1-p+(2p-1)\pi)(p-(2p-1)\pi)}{n(2p-1)^2}.$$

4. Étudier la fonction $f : t \mapsto t(1-t)$ et en déduire que $\mathrm{V}(Y) \leqslant 1/(4n(2p-1)^2)$.
5. Soit $\varepsilon \in]0,1[$. Montrer que :

$$\mathrm{P}\left(\pi \in \left]Y - \frac{1}{2\sqrt{n\varepsilon}|2p-1|}, Y + \frac{1}{2\sqrt{n\varepsilon}|2p-1|}\right[\right) \geqslant 1 - \varepsilon.$$

6. (a) Le prof de maths a-t-il intérêt que la longueur de l'intervalle obtenu à la question précédente soit grande ou petite ? Par conséquent, a-t-il intérêt de fixer p proche de $1/2$ ou proche d'une des bornes 0 ou 1 ?
   (b) Pourquoi le prof de maths ne peut-il pas fixer p trop proche de 0 ou de 1 ? *Indication* : la réponse attendue relève plus de la psychologie que des mathématiques.
   (c) Puisque le prof de maths ne peut pas vraiment jouer sur le paramètre p pour améliorer l'intervalle, que peut-il faire d'autre ?
7. Le prof de maths enregistre les n réponses reçues dans une liste `L` en Python dont chaque élément est égal à `1` si l'étudiant correspondant répond «Ce que renvoie la fonction est vrai.» et à `0` sinon.
   (a) Écrire en Python une fonction `calculY` qui prend en arguments la liste `L` et le paramètre `p` puis qui renvoie la valeur de Y.
   (b) Écrire en Python une fonction `estimationPi` qui prend en arguments la liste `L` et le paramètre `p` puis qui renvoie une liste `[a,b]` correspondant à un intervalle contenant la proportion d'étudiants inattentifs avec une probabilité supérieure à 90%.

Exercice 2

On considère la fonction suivante :

$$f : t \mapsto \frac{1 + \ln(1 + \sin(2t))}{\cos(2t)}.$$

1. Justifier que f admet un $\mathrm{DL}_3(0)$ et calculer le.
2. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0 et sa position relative au voisinage de 0.

Corrigé du DS n° 8 de mathématiques et d'informatique

Problème 1

On note $S(p,n)$ le nombre de façons de partitionner un ensemble à p éléments en n parties (non vides). Par exemple $S(3,2) = 3$ car : $\{1,2,3\} = \{1\} \cup \{2,3\} = \{2\} \cup \{1,3\} = \{3\} \cup \{1,2\}$. Ce problème propose de déterminer $S(p,n)$ lorsque $1 \leqslant p \leqslant n+2$ à l'aide de développements limités.

1. (a) *En vous inspirant de l'exemple de l'énoncé, justifier que $S(4,2) = 7$ et déterminer $S(4,3)$.*

   ▶ Les façons différentes de partitionner l'ensemble $\{1,2,3,4\}$ en deux parties sont :

$$\begin{aligned}\{1,2,3,4\} &= \{1\} \cup \{2,3,4\} = \{2\} \cup \{1,3,4\} = \{3\} \cup \{1,2,4\} = \{4\} \cup \{1,2,3\}\\ &= \{1,2\} \cup \{3,4\} = \{1,3\} \cup \{2,4\} = \{1,4\} \cup \{2,3\}.\end{aligned}$$

   Donc $\boxed{S(4,2) = 7}$. De même, les façons différentes de partitionner l'ensemble $\{1,2,3,4\}$ en trois parties sont :

$$\begin{aligned}\{1,2,3,4\} &= \{1\} \cup \{2\} \cup \{3,4\} = \{1\} \cup \{3\} \cup \{2,4\} = \{1\} \cup \{4\} \cup \{2,3\}\\ &= \{2\} \cup \{3\} \cup \{1,4\} = \{2\} \cup \{4\} \cup \{1,3\} = \{3\} \cup \{4\} \cup \{1,2\}.\end{aligned}$$

   Donc $\boxed{S(4,2) = 6}$.

   (b) *Sans justifier, déterminer $S(p,1)$ et $S(p,p)$ pour tout entier $p \geqslant 1$.*

   ▶ Soit $p \geqslant 1$. Il n'y a qu'une seule façons de partitionner l'ensemble $\{1,2,\dots,p\}$ en une partie ou en p parties :

$$\{1,2,\dots,p\} = \{1\} \cup \{2\} \cup \dots \cup \{p\}.$$

   Donc $\boxed{S(p,1) = S(p,p) = 1}$.

   (c) *Sans justifier, déterminer $S(p,n)$ lorsque $1 \leqslant p < n$.*

   ▶ On suppose que $1 \leqslant p < n$. Il n'est pas possible de partitionner l'ensemble $\{1,2,\dots,p\}$ en plus de parties qu'il n'a d'éléments, donc $\boxed{S(p,n) = 0}$.

2. *Dans cette question, on fixe deux entiers tels que $1 \leqslant n \leqslant p$. Sans calculs, expliquer pourquoi on a la relation :*

$$S(p+1, n+1) = S(p,n) + (n+1)S(p,n+1).$$

   Indication : on pourra distinguer le cas où l'élément $p+1$ de l'ensemble $\{1,2,3,\dots,p,p+1\}$ se retrouve tout seul dans une partie du cas où il appartient à une partie contenant d'autres éléments.

   ▶ On compte le nombre de façons différentes de partitionner l'ensemble $\{1,2,3,\dots,p,p+1\}$ en $n+1$ parties. On raisonne par disjonction de cas.

   1^er^ cas : l'élément $p+1$ se retrouve tout seul dans une partie. Alors les p autres éléments appartiennent aux n autres parties. Autrement dit, il y a autant de façons différentes de partitionner l'ensemble $\{1,2,3,\dots,p,p+1\}$ dans ce cas que de façons différentes de partitionner l'ensemble $\{1,2,\dots,p\}$ en n parties, c'est-à-dire $S(p,n)$.

   2^e^ cas : l'élément $p+1$ appartient à une partie contenant d'autres éléments. Si on le retire, on obtient donc une partition de l'ensemble $\{1,2,\dots,p\}$ en $n+1$ parties. Il y a $S(p,n+1)$ façons différentes de le faire. Et puis, on ajoute l'élément $p+1$ dans une des $n+1$ parties. Il y a $\binom{n+1}{1} = n+1$ choix possibles. Ainsi, il y a $(n+1)S(p,n+1)$ façons différentes de partitionner l'ensemble $\{1,2,3,\dots,p,p+1\}$ dans ce cas.

   Conclusion. Puisque les deux cas sont disjoints, on en déduit que :

$$\boxed{S(p+1,n+1) = S(p,n) + (n+1)S(p,n+1)}.$$

3. Pour tout $p \geqslant 1$, on pose :

$$\mathrm{H}(p) : \quad \text{«}\forall n \geqslant 1,\ S(p,n) = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k^p\text{»}.$$

Montrer que $\mathrm{H}(p)$ est vraie pour tout $p \geqslant 1$.

► On raisonne par récurrence.

Initialisation. Soit $n \geqslant 1$. On a :

$$S(1,n) = \begin{cases} 1 \text{ si } n = 1 \text{ d'après le résultat de la question 1(b)} \\ 0 \text{ si } n > 1 \text{ d'après le résultat de la question 1(c).} \end{cases}$$

De plus :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k^1 &= \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k + \frac{1}{n!}(-1)^n\binom{n}{0}0 \\
&= \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n-1}{k-1}\frac{n}{k}k \quad \text{d'après la formule du pion} \\
&= \frac{n}{n!}\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}(-1)^{n-k} \quad \text{par linéarité} \\
&= \frac{1}{(n-1)!}\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}(-1)^{n-(i+1)} \quad \text{en posant } i = k-1 \\
&= \frac{1}{(n-1)!}\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}1^i(-1)^{n-1-i} \\
&= \frac{1}{(n-1)!}(1-1)^{n-1} \quad \text{d'après la formule du binôme de Newton} \\
&= \begin{cases} 1 \text{ si } n = 1 \text{ car } \frac{1}{0!}\binom{0}{0}1^0(-1)^0 = 1 \\ 0 \text{ si } n > 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

> *Pensez à l'astuce de la formule du pion pour retrouver la formule du binôme de Newton dans les sommes avec des termes du type $k\binom{n}{k}$. Mais attention : cette formule est vraie seulement pour $k \geqslant 1$, il faut donc isoler le cas $k = 0$ de la somme.*

Par conséquent, $\mathrm{H}(1)$ est vraie.

Hérédité. On fixe $p \geqslant 1$ et on suppose que $\mathrm{H}(p)$ est vraie. Montrons que $\mathrm{H}(p+1)$ est vraie. Soit $n \geqslant 1$. Calculons $S(p+1,n)$.

> *On souhaite bien sûr utiliser la relation de récurrence obtenue à la question précédente. Puisqu'elle exprime $S(p+1,n+1)$ au lieu de $S(p+1,n)$, il suffit de remplacer $n+1 \geqslant 2$ par $n \geqslant 2$. Il faut donc isole le cas $n = 1$.*

1er cas : $n = 1$. Alors :

$$S(p+1,1) = 1 \quad \text{d'après le résultat de la question 1(b)}$$

et :

$$\frac{1}{1!}\sum_{k=0}^{1}(-1)^{1-k}\binom{1}{k}k^{p+1} = (-1)^1\binom{1}{0}0^{p+1} + (-1)^0\binom{1}{1}1^{p+1} = 0 + 1 = 1.$$

2e cas : $n \geqslant 2$. Alors on a d'après le résultat de la question précédente :

$$\begin{aligned}
S(p+1,n) &= S(p,n-1)+nS(p,n)\\
&= \frac{1}{(n-1)!}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-1-k}\binom{n-1}{k}k^p + \frac{n}{n!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k^p \quad \text{par hypothèse de récurrence}\\
&= \frac{1}{(n-1)!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-1-k}\binom{n-1}{k}k^p - \frac{1}{(n-1)!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-1-k}\binom{n}{k}k^p \quad \text{car } \tbinom{n-1}{n}=0\\
&= \frac{1}{(n-1)!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-1-k}\left[\binom{n-1}{k}-\binom{n}{k}\right]k^p \quad \text{par linéarité}\\
&= \frac{1}{(n-1)!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-1-k}\left[-\binom{n-1}{k-1}\right]k^p \quad \text{d'après la formule de Pascal}\\
&= \frac{1}{(n-1)!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\frac{k}{n}k^p \quad \text{d'après la formule du pion}\\
&= \frac{1}{n\times(n-1)!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k^{p+1} \quad \text{par linéarité}\\
&= \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k^{p+1}.
\end{aligned}$$

Pour ce type de calcul de somme compliqué, écrivez au brouillon le résultat final afin de l'avoir sous les yeux puis manipulez vos expressions petit à petit pour vous approchez de plus en en plus de ce que vous souhaitez.

Conclusion de la disjonction de cas. Dans les deux cas, on a bien montré que :

$$S(p+1,n)=\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k^{p+1}.$$

Par conséquent, $\mathrm{H}(p+1)$ est vraie lorsque $\mathrm{H}(p)$ est vraie.
Conclusion de la récurrence. D'après le principe de récurrence, on a bien montré que :

$$\boxed{\forall p\geqslant 1, \forall n\geqslant 1, \quad S(p,n)=\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k^p}.$$

Pour la suite de l'énoncé, on fixe $n\geqslant 1$ et on considère la fonction $f : t\mapsto (e^t-1)^n$.

4. *À l'aide de la formule du binôme de Newton, montrer que $f^{(p)}(0)=n!S(p,n)$ pour tout entier $p\geqslant 1$.*

▶ Soit $p\geqslant 1$. On a d'après la formule du binôme de Newton :

$$\forall t\in\mathbb{R},\quad f(t)=\left(e^t-1\right)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(e^t\right)^k(-1)^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}e^{kt}.$$

Or on a en dérivant p fois :

$$\forall t\in\mathbb{R},\quad \frac{\mathrm{d}^p e^{kt}}{\mathrm{d}t^p}=k^p e^{kt}.$$

On en déduit par linéarité que :

$$f^{(p)}(0)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k^p\underbrace{e^{k0}}_{=1}=n!\times\underbrace{\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k^p}_{=S(p,n)}=\boxed{n!S(p,n)}$$

d'après le résultat de la question précédente.

5. (a) *Déterminer le* $\mathrm{DL}_2(0)$ *de la fonction* $g : t \mapsto \left(\frac{e^t-1}{t}\right)^n$.

► On a d'après le développement limité de la fonction exponentielle :

$$e^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + \underset{t\to 0}{\mathrm{o}}\left(t^3\right).$$

Pensez à utiliser tout de suite le $\mathrm{DL}_3(0)$ *au lieu du* $\mathrm{DL}_2(0)$ *pour ne pas perdre de temps car le dénominateur de* g *va faire perdre un ordre.*

Donc :

$$\frac{e^t-1}{t} = 1 + \underbrace{\frac{1}{2}t + \frac{1}{6}t^2 + \underset{t\to 0}{\mathrm{o}}\left(t^2\right)}_{=h\to 0}.$$

De plus, on a d'après les développements limités usuels :

$$(1+h)^n = 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2}h^2 + \underset{h\to 0}{\mathrm{o}}\left(h^2\right).$$

Par conséquent, on a :

$$\begin{aligned} g(t) &= \left(\frac{e^t-1}{t}\right)^n \\ &= 1 + n\left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{6}t^2 + \underset{t\to 0}{\mathrm{o}}\left(t^2\right)\right) + \frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{6}t^2 + \underset{t\to 0}{\mathrm{o}}\left(t^2\right)\right)^2 \\ &\qquad + \underset{t\to 0}{\mathrm{o}}\left(\left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{6}t^2 + \underset{t\to 0}{\mathrm{o}}\left(t^2\right)\right)^2\right) \\ &= 1 + \frac{n}{2}t + \underbrace{\frac{n}{6}t^2 + \frac{n(n-1)}{8}t^2}_{\frac{1}{6}+\frac{n-1}{8}=\frac{4+3(n-1)}{24}} + \underset{t\to 0}{\mathrm{o}}\left(t^2\right) \\ &= \boxed{1 + \frac{n}{2}t + \frac{n(3n+1)}{24}t^2 + \underset{t\to 0}{\mathrm{o}}\left(t^2\right)}. \end{aligned}$$

(b) *En déduire que le* $\mathrm{DL}_{n+2}(0)$ *de* f *est de la forme :*

$$f(t) = t^n + \frac{n}{a}t^{n+1} + \frac{n(bn+c)}{d}t^{n+2} + \underset{t\to 0}{\mathrm{o}}\left(t^{n+2}\right)$$

où (a,b,c,d) *sont quatre entiers à déterminer.*

► On a :

$$\begin{aligned} f(t) &= \left(e^t-1\right)^n \\ &= t^n \times \underbrace{\left(\frac{e^t-1}{t}\right)^n}_{=g(t)} \\ &= t^n\left(1 + \frac{n}{2}t + \frac{n(3n+1)}{24}t^2 + \underset{t\to 0}{\mathrm{o}}\left(t^2\right)\right) \quad \text{d'après le résultat de la question précédente} \\ &= \boxed{t^n + \frac{n}{2}t^{n+1} + \frac{n(3n+1)}{24}t^{n+2} + \underset{t\to 0}{\mathrm{o}}\left(t^{n+2}\right)}. \end{aligned}$$

D'où le résultat en posant $\boxed{(a,b,c,d) = (2,3,1,24)}$.

6. *Déduire des résultats précédents la valeur de $S(p,n)$ pour tout entier $p \in [\![1, n+2]\!]$.*

▶ La fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions usuelles. En particulier, elle est de classe $\mathscr{C}^{n+2}$ au voisinage de 0. D'après la formule de Taylor-Young, on en déduit que f admet un $\mathrm{DL}_{n+2}(0)$ qui est de la forme :

$$f(t) = \sum_{p=0}^{n+2} \frac{f^{(p)}(0)}{p!} t^p + \underset{t\to 0}{\mathrm{o}}\left(t^{n+2}\right).$$

Par unicité des développements limités, on peut identifier les coefficients de ce $\mathrm{DL}_{n+2}(0)$ de f avec celui obtenu à la question précédente. Par conséquent, on a :

$$\forall p \in [\![0, n+2]\!], \quad \frac{f^{(p)}(0)}{p!} = \begin{cases} 0 & \text{si } p < n \\ 1 & \text{si } p = n \\ \dfrac{n}{2} & \text{si } p = n+1 \\ \dfrac{n(3n+1)}{24} & \text{si } p = n+2 \end{cases}.$$

Or on a d'après le résultat de la question 4 :

$$\forall p \geqslant 1, \quad f^{(p)}(0) = n!S(p,n) \quad \text{donc} \quad S(p,n) = \frac{p!}{n!} \times \frac{f^p(0)}{p!}.$$

Finalement, on obtient :

$$\boxed{\forall p \in [\![0, n+2]\!], \quad S(p,n) = \begin{cases} 0 & \text{si } p < n \\ 1 & \text{si } p = n \\ \dfrac{n(n+1)}{2} & \text{si } p = n+1 \\ \dfrac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{24} & \text{si } p = n+2 \end{cases}}.$$

On peut vérifier ces résultats à l'aide de ceux de la question 1. En particulier, on retrouve que :

$$S(3,2) = \tfrac{2(2+1)}{2} = 3, \ \ S(4,2) = \tfrac{2(2+1)(2+2)(3\times 2+1)}{24} = 7 \ \text{et} \ S(4,3) = \tfrac{3(3+1)}{2} = 6.$$

Exercice 1

On considère l'application suivante :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x,y,z) \mapsto (5x+3y-3z, -3x-y+3z, 3x+3y-z).$$

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose $F_\lambda = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z) = \lambda(x,y,z)\}$.

1. *Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Justifier que F_λ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.*

▶ On a $f(0,0,0) = (0,0,0) = \lambda(0,0,0)$ donc $\overrightarrow{0} \in F_\lambda$. On fixe un scalaire $\mu \in \mathbb{R}$ et deux vecteurs $(x_1,y_1,z_1) \in F_\lambda$ et $(x_2,y_2,z_2) \in F_\lambda$. Montrons que $\mu(x_1,y_1,z_1) + (x_2,y_2,z_2) \in F_\lambda$. On pose :

$$(x,y,z) = \mu(x_1,y_1,z_1) + (x_2,y_2,z_2) = \big(\underbrace{\mu x_1 + x_2}_{=x}, \underbrace{\mu y_1 + y_2}_{=y}, \underbrace{\mu z_1 + z_2}_{=z}\big).$$

Alors :

$$\begin{aligned}
f(x,y,z) =& \big(5x+3y-3z, -3x-y+3z, 3x+3y-z\big)\\
=& \big(5(\mu x_1+x_2)+3(\mu y_1+y_2)-3(\mu z_1+z_2),\\
& \qquad -3(\mu x_1+x_2)-(\mu y_1+y_2)+3(\mu z_1+z_2),\\
& \qquad\qquad 3(\mu x_1+x_2)+3(\mu y_1+y_2)-(\mu z_1+z_2)\big)\\
=& \mu\big(5x_1+3y_1-3z_1, -3x_1-y_1+3z_1, 3x_1+3y_1-z_1\big)\\
& \qquad\qquad + \big(5x_2+3y_2-3z_2, -3x_2-y_2+3z_2, 3x_2+3y_2-z_2\big)\\
=& \mu f(x_1,y_1,z_1)+f(x_2,y_2,z_2)\\
=& \mu\big(\lambda(x_1,y_1,z_1)\big)+\lambda(x_2,y_2,z_2) \quad \text{car } (x_1,y_1,z_1)\in F_\lambda \text{ et } (x_2,y_2,z_2)\in F_\lambda\\
=& \lambda\big(\mu(x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)\big)\\
=& \lambda(x,y,z).
\end{aligned}$$

On en déduit que $\mu(x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)\in F_\lambda$ pour tout scalaire $\mu\in\mathbb{R}$ et tous vecteurs $(x_1,y_1,z_1)\in F_\lambda$ et $(x_2,y_2,z_2)\in F_\lambda$. Par conséquent, $\boxed{F_\lambda \text{ est bien un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^3}$.

2. *Déterminer les valeurs de $\lambda\in\mathbb{R}$ pour lesquelles $F_\lambda \neq \{\overrightarrow{0}\}$.*

▶ On a :

$$f(x,y,z)=\lambda(x,y,z) \iff \begin{cases} 5x+3y-3z=\lambda x\\ -3x-y+3z=\lambda y\\ 3x+3y-z=\lambda z\end{cases} \iff \begin{pmatrix} 5-\lambda & 3 & -3\\ -3 & -1-\lambda & 3\\ 3 & 3 & -1-\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

On reconnaît un système linéaire homogène de trois équations à trois inconnues. On cherche les valeurs de $\lambda\in\mathbb{R}$ pour lesquelles $\overrightarrow{0}=(0,0,0)$ n'est pas l'unique solution, donc pour lesquelles le rang n'est pas maximal. On a :

$$\begin{aligned}
&\operatorname{rang}\begin{pmatrix} 5-\lambda & 3 & -3\\ -3 & -1-\lambda & 3\\ 3 & 3 & -1-\lambda\end{pmatrix} \begin{matrix} L_1\leftrightarrow L_3\\ \\ L_3\leftrightarrow L_1\end{matrix}\\
=&\operatorname{rang}\begin{pmatrix} 3 & 3 & -1-\lambda\\ -3 & -1-\lambda & 3\\ 5-\lambda & 3 & -3\end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L_2\leftarrow L_2+L_1\\ L_3\leftarrow 3L_3-(5-\lambda)L_1\end{matrix}\\
=&\operatorname{rang}\begin{pmatrix} 3 & 3 & -1-\lambda\\ 0 & 2-\lambda & 2-\lambda\\ 0 & a & b\end{pmatrix} \quad \begin{aligned} &\text{où} \quad a=9-3(5-\lambda)=-6+3\lambda=-3(2-\lambda)\\ &\text{et} \quad b=-9-(5-\lambda)(-1-\lambda)\\ &\qquad\quad =-9-(-5-4\lambda+\lambda^2)=-4+4\lambda-\lambda^2\end{aligned}\\
=&\operatorname{rang}\begin{pmatrix} 3 & 3 & -1-\lambda\\ 0 & 2-\lambda & 2-\lambda\\ 0 & -3(2-\lambda) & -4+4\lambda-\lambda^2\end{pmatrix} \; L_3\leftarrow L_3+3L_2\\
=&\operatorname{rang}\begin{pmatrix} 3 & 3 & -1-\lambda\\ 0 & 2-\lambda & 2-\lambda\\ 0 & 0 & 2+\lambda-\lambda^2\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

De plus :

$$2-\lambda=0 \iff \lambda=2 \quad \text{et} \quad 2+\lambda-\lambda^2=0 \iff \lambda\in\{-1,2\}.$$

On en déduit que le rang du système est égal à 1 si $\lambda=2$, à 2 si $\lambda=1$ et à 3 sinon. Par conséquent, $F_\lambda\neq\{\overrightarrow{0}\}$ si et seulement si $\boxed{\lambda\in\{-1,2\}}$.

En cette fin d'année, il faut savoir faire ce type de calcul de rang avec un paramètre vite et bien. N'hésitez pas à poser vos calculs intermédiaires comme ceux pour a et b (les calculs de tête sont chronophages et sources d'erreurs) et pensez à utiliser ce que nous avons appris sur les polynômes pour aller plus vite (racine évidente, factorisation, etc.).

3. *Déterminer une base et la dimension de F_λ pour chaque valeur de λ obtenue à la question précédente.*

▶ Puisque le système linéaire est homogène, on a en reprenant les calculs de la question précédente :

$$f(x,y,z)=\lambda(x,y,z) \iff \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1-\lambda \\ 0 & 2-\lambda & 2-\lambda \\ 0 & 0 & 2+\lambda-\lambda^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

•Si $\lambda=-1$. Alors on obtient la représentation paramétrique suivante de F_{-1} :

$$f(x,y,z)=-(x,y,z) \iff \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x=z \\ y=-z \\ z=z \end{cases},\ z\in\mathbb{R}.$$

On en déduit que $F_{-1}=\mathrm{Vect}((1,-1,1))$. Or $(1,-1,1)\neq\overrightarrow{0}$, par conséquent $\boxed{\text{le vecteur } (1,-1,1) \text{ forme une base de } F_{-1} \text{ qui est donc de dimension } 1}$.

•Si $\lambda=2$. Alors on obtient la représentation paramétrique suivante de F_2 :

$$f(x,y,z)=2(x,y,z) \iff \begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x=-y+z \\ y=y \\ z=z \end{cases},\ (y,z)\in\mathbb{R}^2.$$

On en déduit que $F_2=\mathrm{Vect}((-1,1,0),(1,0,1))$. Or $(-1,1,0)$ et $(1,0,1)$ ne sont pas colinéaires, par conséquent $\boxed{\text{les vecteurs } (-1,1,0) \text{ et } (1,0,1) \text{ forment une base de } F_2 \text{ qui est donc de dimension } 2}$.

Problème 2

Un prof de maths souhaite estimer la proportion $\pi\in[0,1]$ d'étudiants de sa classe confinée qui ont une autre activité pendant son cours à distance. Comme il se doute que la plupart des indisciplinés n'oseront pas avouer directement leur faute, il propose l'expérience suivante : il fixe un réel $p\in]0,1[$ qu'il envoie par mail à toute la classe puis il choisit au hasard n étudiants à qui il envoie la fonction ci-contre écrite en Python.

```
import random
def test(p):
    x=random.random()
    if x<p:
        return "Je fais autre chose
pendant le cours de maths."
    else:
        return "Je suis attentif
pendant le cours de maths."
```

Chaque étudiant choisi doit alors appeler la fonction `test` *avec la valeur de l'argument p reçu. Puis il doit répondre par mail, sans mentir, si ce que renvoie la fonction est vrai ou faux, sans préciser ce qui est renvoyé. On fera l'hypothèse qu'aucun étudiant n'ose mentir à son prof de maths (évidemment). On note X le nombre d'étudiants qui répondent «Ce que renvoie la fonction est vrai.».*

1. *On considère les événements suivants : A qu'un étudiant fasse autre chose pendant le cours de maths, B que la fonction renvoie «Je fais autre chose pendant le cours de maths.» et C que l'étudiant réponde «Ce que renvoie la fonction est vrai.». Justifier que $\mathrm{P}(C)=1-p+(2p-1)\pi$.*

▶ On a d'après l'énoncé :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(C) &= \mathrm{P}\left((A\cap B)\cup(\overline{A}\cap\overline{B})\right) \\
&= \mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(\overline{A}\cap\overline{B}) && \text{car les deux événements sont incompatibles} \\
&= \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(\overline{A})\mathrm{P}(\overline{B}) && \text{car ce que renvoie la fonction en Python est indépendante du comportement de l'étudiant} \\
&= \pi\times p+(1-\pi)\times(1-p) \\
&= p\pi+1-p-\pi+p\pi \\
&= \boxed{1-p+(2p-1)\pi}.
\end{aligned}$$

2. *Déterminer la loi de probabilité de X puis rappeler son espérance et sa variance.*

► La variable aléatoire X compte le nombre de succès d'une suite de résultats binaires : chaque étudiant répond «Ce que renvoie la fonction est vrai.» ou bien «Ce que renvoie la fonction est faux.». On peut donc modéliser la réponse de chaque étudiant par une loi de Bernoulli de paramètre $1-p+(2p-1)\pi$ d'après le résultat de la question précédente. Par conséquent, on reconnaît pour X une $\boxed{\text{loi binomiale de paramètres } n \text{ et } 1-p+(2p-1)\pi}$. Ainsi :

$$X \hookrightarrow \mathscr{B}(n, 1-p+(2p-1)\pi) \quad \text{donc} \quad \boxed{\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &= n\big(1-p+(2p-1)\pi\big) \\ \mathrm{V}(X) &= n\big(1-p+(2p-1)\pi\big)\big(1-(1-p+(2p-1)\pi)\big) \\ &= n\big(1-p+(2p-1)\pi\big)\big(p-(2p-1)\pi\big) \end{aligned}}$$

Pour la suite de l'énoncé, on suppose que $p \neq 1/2$ et on pose :

$$Y = \frac{X - n(1-p)}{n(2p-1)}.$$

3. *Montrer que :*

$$\mathrm{E}(Y) = \pi \quad \textit{et} \quad \mathrm{V}(Y) = \frac{(1-p+(2p-1)\pi)(p-(2p-1)\pi)}{n(2p-1)^2}.$$

► On a :

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(Y) &= \mathrm{E}\left(\frac{X-n(1-p)}{n(2p-1)}\right) && \text{par définition de } Y \\ &= \frac{\mathrm{E}(X)-n(1-p)}{n(2p-1)} && \text{par linéarité de l'espérance} \\ &= \frac{n\big(1-p+(2p-1)\pi\big)-n(1-p)}{n(2p-1)} && \text{d'après le résultat de la question précédente} \\ &= \frac{n(2p-1)\pi}{n(2p-1)} = \boxed{\pi}. \end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned} \mathrm{V}(Y) &= \mathrm{V}\left(\frac{X-n(1-p)}{n(2p-1)}\right) && \text{par définition de } Y \\ &= \frac{\mathrm{V}(X)}{\big(n(2p-1)\big)^2} && \text{par propriété de la variance} \\ &= \frac{n\big(1-p+(2p-1)\pi\big)\big(p-(2p-1)\pi\big)}{n^2(2p-1)^2} && \text{d'après le résultat de la question précédente} \\ &= \boxed{\frac{\big(1-p+(2p-1)\pi\big)\big(p-(2p-1)\pi\big)}{n(2p-1)^2}}. \end{aligned}$$

4. *Étudier la fonction $f : t \mapsto t(1-t)$ et en déduire que $\mathrm{V}(Y) \leqslant 1/(4n(2p-1)^2)$.*

► La fonction $f : t \mapsto t(1-t) = t - t^2$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynomiale. On a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f'(t) = 1-2t \quad \text{donc} \quad f'(t) > 0 \iff t < \frac{1}{2}.$$

On en déduit le tableau des variations de f.

t	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$	$\searrow$	$-\infty$

Par conséquent :

$$\big(1-p+(2p-1)\pi\big)\big(p-(2p-1)\pi\big) = f\big(p-(2p-1)\pi\big) \leqslant \frac{1}{4}.$$

En injectant dans le résultat de la question précédente, on obtient que :

$$\mathrm{V}(Y) = \frac{\big(1-p+(2p-1)\pi\big)\big(p-(2p-1)\pi\big)}{n(2p-1)^2} \leqslant \boxed{\frac{1}{4n(2p-1)^2}}.$$

5. *Soit $\varepsilon \in]0,1[$. Montrer que :*

$$\mathrm{P}\left(\pi \in \left]Y - \frac{1}{2\sqrt{n\varepsilon}|2p-1|}, Y + \frac{1}{2\sqrt{n\varepsilon}|2p-1|}\right[\right) \geqslant 1-\varepsilon.$$

► On a d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$\forall \alpha > 0, \quad \mathrm{P}\Big(|Y - \mathrm{E}(Y)| \geqslant \alpha\Big) \leqslant \frac{\mathrm{V}(Y)}{\alpha^2}.$$

D'après les résultats des questions précédentes, on en déduit que :

$$\forall \alpha > 0, \quad \mathrm{P}\Big(|Y - \pi| \geqslant \alpha\Big) \leqslant \frac{1}{4n(2p-1)^2\alpha^2}.$$

Or : $|Y-\pi| \geqslant \alpha \iff \pi \in]-\infty, Y-\alpha] \cup [Y+\alpha, +\infty[$. Par conséquent, on obtient en passant au complémentaire :

$$\forall \alpha > 0, \quad \mathrm{P}\Big(\pi \in]Y-\alpha, Y+\alpha[\Big) \geqslant 1 - \frac{1}{4n(2p-1)^2\alpha^2}.$$

En particulier, on obtient en posant $\alpha = 1/(2\sqrt{n\varepsilon}|2p-1|) > 0$:

$$\boxed{\mathrm{P}\left(\pi \in \left]Y - \frac{1}{2\sqrt{n\varepsilon}|2p-1|}, Y + \frac{1}{2\sqrt{n\varepsilon}|2p-1|}\right[\right) \geqslant 1 - \frac{1}{4n(2p-1)^2\frac{1}{4n\varepsilon(2p-1)^2}} = 1-\varepsilon}.$$

6. (a) *Le prof de maths a-t-il intérêt que la longueur de l'intervalle obtenu à la question précédente soit grande ou petite ? Par conséquent, a-t-il intérêt de fixer p proche de $1/2$ ou proche d'une des bornes 0 ou 1 ?*

► Afin d'avoir la meilleure estimation de la proportion π d'étudiants inattentifs, le prof de maths a intérêt que $\boxed{\text{la longueur de l'intervalle soit la plus petite possible}}$. On a :

$$\lim_{p\to\frac{1}{2}} \frac{1}{2\sqrt{n\varepsilon}|2p-1|} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{p\to 0} \frac{1}{2\sqrt{n\varepsilon}|2p-1|} = \lim_{p\to 1} \frac{1}{2\sqrt{n\varepsilon}|2p-1|} = \frac{1}{2\sqrt{n\varepsilon}}.$$

Donc le prof de maths a intérêt à $\boxed{\text{fixer } p \text{ proche d'une des bornes } 0 \text{ ou } 1}$.

(b) *Pourquoi le prof de maths ne peut-il pas fixer p trop proche de 0 ou de 1 ? Indication : la réponse attendue relève plus de la psychologie que des mathématiques.*

▶ Si le prof de maths fixe p trop proche de 0 alors la fonction `test` renvoie «Je suis attentif pendant le cours de maths.» avec une très forte probabilité. Sachant cela, l'étudiant indiscipliné n'osera pas répondre «Ce que renvoie la fonction est faux.» de peur d'être démasqué. L'hypothèse qu'aucun étudiant ne mentira à son prof de maths a donc de fortes chances de ne plus être vérifiée. De même si p est trop proche de 1 : la fonction `test` renvoie «Je fais autre chose pendant le cours de maths.» avec une très forte probabilité et l'étudiant indiscipliné n'osera pas répondre «Ce que renvoie la fonction est faux.» de peur d'être démasqué.

(c) *Puisque le prof de maths ne peut pas vraiment jouer sur le paramètre p pour améliorer l'intervalle, que peut-il faire d'autre ?*

▶ Le prof de maths peut également jouer sur le paramètre n du nombre d'étudiants choisis. On a :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2\sqrt{n\varepsilon}|2p-1|} = 0.$$

Donc le prof de maths a intérêt que $\boxed{\text{le nombre d'étudiants choisis soit le plus grand possible}}$.

Par contre, il n'a pas intérêt à augmenter la valeur du paramètre $\varepsilon \in]0,1[$: la longueur de l'intervalle serait bien plus petite mais il serait moins probable qu'il contienne π, ce qui est donc moins intéressant.

7. *Le prof de maths enregistre les n réponses reçues dans une liste `L` en Python dont chaque élément est égal à `1` si l'étudiant correspondant répond «Ce que renvoie la fonction est vrai.» et à `0` sinon.*

(a) *Écrire en Python une fonction `calculY` qui prend en arguments la liste `L` et le paramètre `p` puis qui renvoie la valeur de Y.*

▶ Par exemple :

```
def calculY(L,p):
    # On calcule le nombre n d'étudiants choisis
    n=len(L)
    # On calcule le nombre X d'étudiants qui répondent
    # «Ce que renvoie la fonction est vrai.»
    X=0
    for i in range(n):
        X=X+L[i]
    # On calcule Y
    Y=(X-n*(1-p))/(n*(2*p-1))
    return Y
```

(b) *Écrire en Python une fonction `estimationPi` qui prend en arguments la liste `L` et le paramètre `p` puis qui renvoie une liste `[a,b]` correspondant à un intervalle contenant la proportion d'étudiants inattentifs avec une probabilité supérieure à 90%.*

▶ Par exemple :

```
def estimationPi(L,p):
    # On calcule le nombre n d'étudiants choisis
    n=len(L)
    # On calcule Y
    Y=calculY(L,p)
    # On fixe epsilon tel que 1-epsilon=90/100
    epsilon=0.1
    # On calcule a et b
    a=Y-1/(2*((n*epsilon)**(0.5))*abs(2*p-1))
    b=Y+1/(2*((n*epsilon)**(0.5))*abs(2*p-1))
    return [a,b]
```

Exercice 2

On considère la fonction suivante :

$$f : t \mapsto \frac{1+\ln(1+\sin(2t))}{\cos(2t)}.$$

1. *Justifier que f admet un $\mathrm{DL}_3(0)$ et calculer le.*

▶ La fonction f est de classe $\mathscr{C}^3$ au voisinage de 0 comme composées et quotient dont le dénominateur ne s'annule pas de fonctions usuelles de classe $\mathscr{C}^\infty$. D'après la formule de Taylor-Young, on en déduit que $\boxed{f \text{ admet un } \mathrm{DL}_3(0)}$. On a d'après les équivalents usuels :

$$\begin{aligned}
\cos(2t) &= 1 - \frac{1}{2}(2t)^2 + \underset{t\to 0}{\mathrm{o}}\left((2t)^3\right) \\
&= 1 - \underbrace{2t^2 + \underset{t\to 0}{\mathrm{o}}\left(t^3\right)}_{=h\to 0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{et} \quad \frac{1}{1-h} &= 1 + h + h^2 + h^3 + \underset{h\to 0}{\mathrm{o}}\left(h^3\right) \\
\text{donc} \quad \frac{1}{\cos(2t)} &= 1 + \left(2t^2 + \underset{t\to 0}{\mathrm{o}}\left(t^3\right)\right) + \left(2t^2 + \underset{t\to 0}{\mathrm{o}}\left(t^3\right)\right)^2 \\
&\qquad + \left(2t^2 + \underset{t\to 0}{\mathrm{o}}\left(t^3\right)\right)^3 + \underset{t\to 0}{\mathrm{o}}\left(\left(2t^2 + \underset{t\to 0}{\mathrm{o}}\left(t^3\right)\right)^3\right) \\
&= 1 + 2t^2 + \underset{t\to 0}{\mathrm{o}}\left(t^3\right).
\end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned}
1+\sin(2t) &= 1 + (2t) - \frac{1}{6}(2t)^3 + \underset{t\to 0}{\mathrm{o}}\left((2t)^3\right) \\
&= 1 + \underbrace{2t - \frac{4}{3}t^3 + \underset{t\to 0}{\mathrm{o}}\left(t^3\right)}_{=h\to 0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{et} \quad \ln(1+h) &= h - \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{3}h^3 + \underset{h\to 0}{\mathrm{o}}\left(h^3\right) \\
\text{donc} \quad 1 + \ln\left(1+\sin(2t)\right) &= 1 + \left(2t - \frac{4}{3}t^3 + \underset{t\to 0}{\mathrm{o}}\left(t^3\right)\right) - \frac{1}{2}\left(2t - \frac{4}{3}t^3 + \underset{t\to 0}{\mathrm{o}}\left(t^3\right)\right)^2 \\
&\qquad + \frac{1}{3}\left(2t - \frac{4}{3}t^3 + \underset{t\to 0}{\mathrm{o}}\left(t^3\right)\right)^3 + \underset{t\to 0}{\mathrm{o}}\left(\left(2t - \frac{4}{3}t^3 + \underset{t\to 0}{\mathrm{o}}\left(t^3\right)\right)^3\right) \\
&= 1 + 2t - \frac{4}{3}t^3 - \frac{1}{2}(2t)^2 + \frac{1}{3}(2t)^3 + \underset{t\to 0}{\mathrm{o}}\left(t^3\right) \\
&= 1 + 2t - 2t^2 + \frac{4}{3}t^3 + \underset{t\to 0}{\mathrm{o}}\left(t^3\right).
\end{aligned}$$

Par conséquent, on a par produit de développements limités :

$$\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1+\ln(1+\sin(2t))}{\cos(2t)} \\
&= \frac{1}{\cos(2t)} \times \left(1 + \ln\left(1+\sin(2t)\right)\right) \\
&= \left(1 + 2t^2 + \underset{t\to 0}{\mathrm{o}}\left(t^3\right)\right)\left(1 + 2t - 2t^2 + \frac{4}{3}t^3 + \underset{t\to 0}{\mathrm{o}}\left(t^3\right)\right) \\
&= 1 + 2t - 2t^2 + \frac{4}{3}t^3 + 2t^2 + 4t^3 + \underset{t\to 0}{\mathrm{o}}\left(t^3\right) \\
&= \boxed{1 + 2t + \frac{4}{3}t^3 + \underset{t\to 0}{\mathrm{o}}\left(t^3\right)}.
\end{aligned}$$

2. *Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0 et sa position relative au voisinage de 0.*

▶ D'après le résultat de la question précédente, la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0 admet pour équation $\boxed{y = 1 + 2x}$. De plus, on a :

$$f(t) - \big(1 + 2t\big) \underset{t \to 0}{\sim} \frac{4}{3} t^3.$$

On en déduit que $\boxed{\text{la courbe représentative de } f \text{ est en-dessous de sa tangente au point d'abscisse } 0}$ $\boxed{\text{dans un voisinage à gauche de } 0 \text{ et au-dessus dans un voisinage à droite de } 0}$.