# Sujets et corrigés des DS de mathématiques et d'informatique

# BCPST1A lycée Hoche 2020-2021

# Sébastien Godillon

## Table des matières

# DS n° 1 de mathématiques

## durée : 3 heures

### Exercice 1

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2+7}{x+3}$. Déterminer les ensembles suivants :

$$\mathscr{E}_1 = \left\{ f(x) \mid x \in ]-11,-5[ \right\} \quad \text{et} \quad \mathscr{E}_2 = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in [4,6[ \right\}.$$

### Problème 1

On note $\theta$ l'unique réel appartenant à $[0,\pi]$ tel que $\cos(\theta) = 1/3$. Le but de ce problème est de prouver que $\theta$ n'est pas une «fraction de $\pi$», c'est-à-dire que $\theta/\pi \notin \mathbb{Q}$ (on dit alors que $\theta$ et $\pi$ sont incommensurables). Pour cela, on raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe deux entiers $p$ et $q$ tels que $\theta = p\pi/q$.

1. (a) Calculer $\sin(\theta)$ puis donner la forme algébrique de $e^{i\theta}$.
   (b) En déduire qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\left(1+i2\sqrt{2}\right)^n = 3^n$.
2. Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $(a_k, b_k) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $\left(1+i2\sqrt{2}\right)^k = a_k + ib_k\sqrt{2}$. On donnera les expressions de $a_{k+1}$ et $b_{k+1}$ en fonction de $a_k$ et $b_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que $a_{k+2} = 2a_{k+1} - 9a_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et déterminer une relation similaire pour $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$.
4. Que valent $a_0$, $b_0$, $a_1$, $b_1$, $a_n$ et $b_n$ ?
5. On rappelle que la somme de deux multiples de 3 est un multiple de 3 et que si un multiple de 3 est de la forme $2m$ où $m \in \mathbb{Z}$ alors $m$ est un multiple de 3. Prouver que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k$ n'est pas un multiple de 3.
6. Conclure.

### Exercice 2

Résoudre les inéquations suivantes d'inconnue $x$ réelle.

$(I_1)$ $|x^2+5x-2| \leqslant |2x+2|$

$(I_2)$ $x^{\left(x^2\right)} > (x^x)^2$

$(I_3)$ $\left\lfloor 2x+\sqrt{x-1} \right\rfloor = 3$

$(I_4)$ $\sin(7x)+\sin(3x) < 0$

$(I_5)$ $\dfrac{2x+m}{x-1} < 1$ où $m \in \mathbb{R}$ est un paramètre fixé.

## Problème 2

On considère l'ensemble suivant :

$$E = \left\{7k + 8\ell \mid (k,\ell) \in \mathbb{N}^2\right\}.$$

1. (a) Montrer que 8 et 37 appartiennent à $E$.

   (b) Montrer que 1 et 19 n'appartiennent pas à $E$.

   (c) Déterminer un autre exemple d'entier naturel appartenant à $E$ et un autre exemple d'entier naturel n'appartenant pas à $E$.

2. (a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n$, il existe deux entiers naturels $q$ et $r$ tels que $r \leqslant 6$ et $n = 7q + r$, c'est-à-dire :

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \exists (q,r) \in \mathbb{N} \times \{0,1,2,3,4,5,6\}, \quad n = 7q + r.$$

   (b) Dans cette question, on suppose qu'il existe quatre entiers naturels $q_1$, $r_1$, $q_2$ et $r_2$ tels que :

   $$(r_1, r_2) \in \{0,1,2,3,4,5,6\}^2 \quad \text{et} \quad 7q_1 + r_1 = 7q_2 + r_2.$$

   Montrer que $q_1 = q_2$ et $r_1 = r_2$. Que peut-on en déduire pour le résultat de la question 2(a) ?

3. (a) À l'aide du résultat de la question 2(a), montrer que tout entier naturel supérieur ou égal à 42 appartient à $E$. Indication : on pourra utiliser que $r = -7r + 8r$.

   (b) Déterminer les éléments de $E$ strictement inférieurs à 42 et montrer qu'il y en a 21.

   (c) En déduire tous les éléments de $E$.

4. On pose $A = \left\{p \in \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant p \implies n \in E\right\}$.

   (a) Dire, sans justifier, si chacune des assertions suivantes est vraie ou fausse.

      i. $\forall p \in A,\ p \in E$

      ii. $\exists p \in \mathbb{N},\ p \in A$

      iii. $\forall p \in A,\ \exists n \geqslant p,\ n \in E$

      iv. $\forall p \in A,\ \exists n > p,\ n \in E$

      v. $\forall p \in A,\ p + 1 \in A$

      vi. $\forall p \in A,\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant p \implies n \in A$

      vii. $\forall p \in \mathbb{N},\ (p \in E \text{ et } p+1 \in A) \implies p \in A$

      viii. $\forall p \in \mathbb{N},\ p \notin A \iff (\exists n \in \mathbb{N},\ n \geqslant p \text{ et } n \notin E)$

      ix. $\forall m \in \mathbb{N},\ m \notin E \implies (\forall p \in A,\ p > m)$

      x. $\exists m \in \mathbb{N},\ m \notin E \text{ et } (\forall p \in \mathbb{N},\ p > m \implies p \in A)$

   (b) À l'aide du résultat de la question 3(c), déterminer tous les éléments de $A$.

## Exercice 3

On considère la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ définie par

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 0,\ u_{n+2} = 7u_{n+1} - 12u_n.$$

Montrer qu'il existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_n = a.b^n + c^n$.

# Corrigé du DS n° 1 de mathématiques

## Exercice 1

*On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2+7}{x+3}$. Déterminer les ensembles suivants :*

$$\mathscr{E}_1 = \big\{ f(x) \mid x \in ]-11,-5[ \big\} \quad \text{et} \quad \mathscr{E}_2 = \big\{ x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in [4,6[ \big\}.$$

► La fonction $f$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ comme quotient de fonctions polynomiales dont le dénominateur ne s'annule pas. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}, \quad f'(x) = \frac{2x(x+3) - (x^2+7) \times 1}{(x+3)^2} = \frac{x^2+6x-7}{(x+3)^2}.$$

On reconnaît au numérateur un polynôme du second degré de discriminant $\Delta = 6^2 - 4 \times (-7) = 64 > 0$. Donc le numérateur s'annule en $(-6+\sqrt{64})/2 = 1$ et en $(-6-\sqrt{64})/2 = -7$. De plus, il est strictement négatif sur $]-7,1[$ et strictement positif sur $]-\infty,-7[\cup]1,+\infty[$. Puisque $(x+3)^2 > 0$ pour tout $x \neq -3$, on en déduit le tableau des variations de $f$.

| $x$ | $-\infty$ | $-11$ | | $-7$ | | $-5$ | | $-3$ | | $3-2\sqrt{5}$ | $-1$ | | $1$ | | $5$ | $3+2\sqrt{5}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | | $+$ | $0$ | $-$ | | | ‖ | | $-$ | | | $0$ | $+$ | | | |
| $f(x)$ | $-\infty$ ↗ | $-16$ | ↗ | $-14$ | ↘ | $-16$ | ↘ $-\infty$ | ‖ | $+\infty$ ↘ | $6$ | $4$ | ↘ | $2$ | ↗ | $4$ | $6$ | ↗ $+\infty$ |

car :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x+\frac{7}{x}}{1+\frac{3}{x}} = -\infty \qquad f(-7) = \frac{(-7)^2+7}{-7+3} = \frac{56}{-4} = -14 \qquad \lim_{x\to-3^-} f(x) = \lim_{x\to-3^-} \frac{x^2+7}{x+3} = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+\frac{7}{x}}{1+\frac{3}{x}} = +\infty \qquad f(1) = \frac{1^2+7}{1+3} = \frac{8}{4} = 2 \qquad \lim_{x\to-3^+} f(x) = \lim_{x\to-3^+} \frac{x^2+7}{x+3} = +\infty$$

On a $f(-11) = \dfrac{(-11)^2+7}{-11+3} = \frac{128}{-8} = -16$ et $f(-5) = \dfrac{(-5)^2+7}{-5+3} = \frac{32}{-2} = -16$. On déduit du tableau des variations de $f$ que :

$$\mathscr{E}_1 = \big\{ f(x) \mid x \in ]-11,-5[ \big\} = \boxed{]-16,-14]}.$$

*Soyez précis avec les bornes des intervalles : $-16$ est exclus car $]-11,-5[$ est un intervalle ouvert mais $-14$ est inclus car $-7 \in ]-11,-5[$.*

Pour déterminer $\mathscr{E}_2$, on résout les deux équations suivantes :

- $f(x) = 4 \iff \dfrac{x^2+7}{x+3} = 4 \iff x^2+7 = 4(x+3) \iff x^2-4x-5 = 0$
  On obtient une équation du second degré de discriminant $\Delta = (-4)^2 - 4 \times (-5) = 36 > 0$ qui admet pour solutions $x = (4+\sqrt{36})/2 = 5$ et $x = (4-6)/2 = -1$.

- $f(x)=6 \iff \dfrac{x^2+7}{x+3}=6 \iff x^2+7=6(x+3) \iff x^2-6x-11=0$
  On obtient une équation du second degré de discriminant $\Delta=(-6)^2-4\times(-11)=80>0$ qui admet pour solutions $x=(6+\sqrt{80})/2=(6+4\sqrt{5})/2=3+2\sqrt{5}$ et $x=3-2\sqrt{5}$.

On déduit du tableau des variations de $f$ que :

$$\mathscr{E}_2=\{x\in\mathbb{R}\mid f(x)\in[4,6[\}=\boxed{\left]3-2\sqrt{5},-1\right]\cup\left[5,3+2\sqrt{5}\right[}.$$

## Problème 1

*On note $\theta$ l'unique réel appartenant à $[0,\pi]$ tel que $\cos(\theta)=1/3$. Le but de ce problème est de prouver que $\theta$ n'est pas une «fraction de $\pi$», c'est-à-dire que $\theta/\pi\notin\mathbb{Q}$ (on dit alors que $\theta$ et $\pi$ sont incommensurables). Pour cela, on raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe deux entiers $p$ et $q$ tels que $\theta=p\pi/q$.*

1. (a) *Calculer $\sin(\theta)$ puis donner la forme algébrique de $e^{i\theta}$.*

▶ On a d'après le théorème de Pythagore :

$$\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)=1 \quad \text{donc} \quad \sin^2(\theta)=1-\cos^2(\theta)=1-\left(\frac{1}{3}\right)^2=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}.$$

En passant à la racine, on en déduit que :

$$|\sin(\theta)|=\sqrt{\frac{8}{9}}=\frac{\sqrt{4\times 2}}{\sqrt{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

*N'oubliez pas les valeurs absolues ! En toute généralité, $\sqrt{x^2}=|x|$ si $x\in\mathbb{R}$.*
*Il faut ensuite étudier le signe de $x$ pour se débarasser des valeurs absolues.*

Or $\theta\in[0,\pi]$ d'après l'énoncé, donc $\sin(\theta)\geqslant 0$ d'après le cercle trigonométrique. On en déduit que $|\sin(\theta)|=\sin(\theta)$ et donc que $\boxed{\sin(\theta)=2\sqrt{2}/3}$.

(b) *En déduire qu'il existe un entier $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $\left(1+i2\sqrt{2}\right)^n=3^n$.*

▶ On cherche un entier $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $\left(1+i2\sqrt{2}\right)^n=3^n$. On raisonne par analyse-synthèse.
Analyse. On a :

$$\begin{aligned}
\left(1+i2\sqrt{2}\right)^n=3^n &\iff \left(\frac{1+i2\sqrt{2}}{3}\right)^n=1\\
&\iff \Big(\underbrace{\tfrac{1}{3}}_{=\cos(\theta)}+i\underbrace{\tfrac{2\sqrt{2}}{3}}_{=\sin(\theta)}\Big)^n=1\\
&\iff \left(\cos(\theta)+i\sin(\theta)\right)^n=1 \quad \text{d'après le résultat de la question précédente}\\
&\iff \left(e^{i\theta}\right)^n=1 \quad \text{par définition de } e^{i\theta}\\
&\iff e^{in\theta}=1\\
&\iff e^{inp\pi/q}=1 \quad \text{car } \theta=p\pi/q \text{ d'après l'hypothèse de l'énoncé}\\
&\iff e^{i\frac{n}{q}p\pi}=1.
\end{aligned}$$

Il suffit donc de choisir $n$ tel que $n/q=2$.
Synthèse. On pose $\boxed{n=2q}$. Alors $n\in\mathbb{N}^*$ (car $q\in\mathbb{N}^*$ d'après l'énoncé) et :

$$e^{i\frac{n}{q}p\pi}=e^{i2p\pi}=1 \quad \text{d'après le cercle trigonométrique.}$$

En reprenant les calculs effectués dans l'analyse, on en déduit que $\left(1+i2\sqrt{2}\right)^n=3^n$. On a donc bien prouvé $\boxed{\text{l'existence d'un entier } n\in\mathbb{N}^* \text{ tel que } \left(1+i2\sqrt{2}\right)^n=3^n}$.

2. *Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $(a_k, b_k) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $\left(1+i2\sqrt{2}\right)^k = a_k + ib_k\sqrt{2}$. On donnera les expressions de $a_{k+1}$ et $b_{k+1}$ en fonction de $a_k$ et $b_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.*

► On raisonne par récurrence.

> *Il faut penser à la récurrence pour ce type de question. En effet, on connaît le résultat à démontrer pour tout $k \in \mathbb{N}$ et on a une relation de récurrence évidente entre le rang $k+1$ et le rang $k$ :*
>
> $$\left(1+i2\sqrt{2}\right)^{k+1} = \left(1+i2\sqrt{2}\right)^k \times \left(1+i2\sqrt{2}\right).$$
>
> *De plus, il faut comprendre qu'il n'y a pas besoin de déterminer explicitement toutes les valeurs de $a_k$ et $b_k$. Il suffit de les exprimer à l'aide des termes précédents, c'est-à-dire de construire les suites $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par récurrence, d'où la deuxième partie de la question de l'énoncé qui donne une indication supplémentaire sur la méthode à utiliser.*

Initialisation. Pour $k = 0$, on cherche $(a_0, b_0) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $\left(1+i2\sqrt{2}\right)^0 = a_0 + ib_0\sqrt{2}$. Or on a :

$$\left(1+i2\sqrt{2}\right)^0 = 1 = 1 + i0\sqrt{2}.$$

Il suffit donc de poser $\boxed{a_0 = 1}$ et $\boxed{b_0 = 0}$.

Hérédité. On fixe $k \in \mathbb{N}$ et on suppose qu'il existe $(a_k, b_k) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $\left(1+i2\sqrt{2}\right)^k = a_k + ib_k\sqrt{2}$. On cherche $(a_{k+1}, b_{k+1}) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $\left(1+i2\sqrt{2}\right)^{k+1} = a_{k+1} + ib_{k+1}\sqrt{2}$. On raisonne par analyse-synthèse.

*Analyse*. On a :

$$\begin{aligned}\left(1+i2\sqrt{2}\right)^{k+1} &= \left(1+i2\sqrt{2}\right)^k \times \left(1+i2\sqrt{2}\right)\\ &= \left(a_k + ib_k\sqrt{2}\right) \times \left(1+i2\sqrt{2}\right) \quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence}\\ &= a_k + i2a_k\sqrt{2} + ib_k\sqrt{2} - 2b_k 2\\ &= \underbrace{(a_k - 4b_k)}_{=a_{k+1}} + i\underbrace{(2a_k + b_k)}_{=b_{k+1}}\sqrt{2}.\end{aligned}$$

*Synthèse*. On pose $\boxed{a_{k+1} = a_k - 4b_k}$ et $\boxed{b_{k+1} = 2a_k + b_k}$. D'après les calculs effectués dans l'analyse, on obtient :

$$\left(1+i2\sqrt{2}\right)^{k+1} = a_{k+1} + ib_{k+1}\sqrt{2}.$$

Par conséquent, on a bien démontré que s'il existe $(a_k, b_k) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $\left(1+i2\sqrt{2}\right)^k = a_k + ib_k\sqrt{2}$ alors il existe $(a_{k+1}, b_{k+1}) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $\left(1+i2\sqrt{2}\right)^{k+1} = a_{k+1} + ib_{k+1}\sqrt{2}$, et cette implication est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Conclusion. D'après le principe de récurrence, on en déduit que :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ \exists (a_k, b_k) \in \mathbb{Z}^2,\ \left(1+i2\sqrt{2}\right)^k = a_k + ib_k\sqrt{2}}.$$

3. *Montrer que $a_{k+2} = 2a_{k+1} - 9a_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et déterminer une relation similaire pour $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$.*

► Soit $k \in \mathbb{N}$. On a d'après les résultats de la question précédente :

$$\underbrace{a_{k+1} = a_k - 4b_k}_{(1)} \quad \text{et} \quad \underbrace{b_{k+1} = 2a_k + b_k}_{(2)}.$$

Puisque ces relations sont vraies pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a aussi que :

$$\underbrace{a_{k+2} = a_{k+1} - 4b_{k+1}}_{(3)} \quad \text{et} \quad \underbrace{b_{k+2} = 2a_{k+1} + b_{k+1}}_{(4)}.$$

En injectant l'expression (2) dans la relation (3), on obtient :

$$a_{k+2} = a_{k+1} - 4\left(2a_k + b_k\right) = a_{k+1} - 8a_k - 4b_k.$$

Or on a $-4b_k = a_{k+1} - a_k$ d'après la relation (1), d'où :

$$a_{k+2} = a_{k+1} - 8a_k + a_{k+1} - a_k = 2a_{k+1} - 9a_k.$$

De même, en injectant l'expression (1) dans la relation (4), on obtient :

$$b_{k+2} = 2(a_k - 4b_k) + b_{k+1} = b_{k+1} - 8b_k + 2a_k.$$

Or on a $2a_k = b_{k+1} - b_k$ d'après la relation (2), d'où :

$$b_{k+2} = b_{k+1} - 8b_k + b_{k+1} - b_k = 2b_{k+1} - 9b_k.$$

Puisque ces relations sont vraies pour un $k \in \mathbb{N}$ fixé, elles sont vraies pour tous les $k \in \mathbb{N}$. On a donc montré :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \ \begin{cases} a_{k+2} = 2a_{k+1} - 9a_k \\ b_{k+2} = 2b_{k+1} - 9b_k \end{cases}}.$$

4. *Que valent $a_0$, $b_0$, $a_1$, $b_1$, $a_n$ et $b_n$ ?*

▶ D'après l'initialisation de la récurrence utilisée à la question 2, on a obtenu que :

$$\boxed{a_0 = 1} \quad \text{et} \quad \boxed{b_0 = 0}.$$

D'après les résultats de la question 2, on sait que $a_1 = a_0 - 4b_0 = 1 - 4 \times 0 = 1$ et $b_1 = 2a_0 + b_0 = 2 \times 1 + 0 = 2$, donc :

$$\boxed{a_1 = 1} \quad \text{et} \quad \boxed{b_1 = 2}.$$

*On peut bien sûr vérifier ce résultat à l'aide de :*

$$\left(1 + i2\sqrt{2}\right)^1 = \underbrace{1}_{=a_1} + i \underbrace{2}_{=b_1} \sqrt{2}.$$

D'après le résultat de la question 1(b), on a :

$$\left(1 + i2\sqrt{2}\right)^n = 3^n = \underbrace{3^n}_{=a_n} + i \underbrace{0}_{=b_n} \sqrt{2}.$$

Donc :

$$\boxed{a_n = 3^n} \quad \text{et} \quad \boxed{b_n = 0}.$$

5. *On rappelle que la somme de deux multiples de 3 est un multiple de 3 et que si un multiple de 3 est de la forme $2m$ où $m \in \mathbb{Z}$ alors $m$ est un multiple de 3. Prouver que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k$ n'est pas un multiple de 3.*

▶ On raisonne par récurrence double.

*Il faut penser à la récurrence double ici. En effet, on connaît le résultat à démontrer pour tout $k \in \mathbb{N}$ et on a obtenu une relation de récurrence double à la question 3.*

Initialisation. D'après les résultats de la question précédente, $a_0 = 1$ et $a_1 = 1$ ne sont pas des multiples de 3. Le résultat est donc vrai aux rangs $k = 0$ et $k = 1$.
Hérédité. On suppose que $a_k$ et $a_{k+1}$ ne sont pas des multiples de 3 pour un rang $k \in \mathbb{N}$ fixé. Montrons que $a_{k+2}$ n'est pas un multiple de 3. Par l'absurde, on suppose que $a_{k+2}$ est un multiple de 3. D'après le résultat de la question 3, on a :

$$a_{k+2} = 2a_{k+1} - 9a_k \quad \text{donc} \quad 2a_{k+1} = a_{k+2} + 9a_k.$$

Or $9a_k$ est un multiple de 3 (car $9a_k = 3 \times 3a_k$). On en déduit que $2a_{k+1}$ est un multiple de 3 comme somme de deux multiples de 3, et donc que $a_{k+1}$ est un multiple de 3 (d'après le rappel de l'énoncé). Ceci est absurde d'après l'hypothèse de récurrence. Par conséquent, $a_{k+2}$ n'est pas un multiple de 3. On a donc montré que le résultat est vrai au rang $k+2$ dès qu'il est vrai aux rangs $k$ et $k+1$. Et cette implication est vraie pour tout rang $k \in \mathbb{N}$.
Conclusion. D'après le principe de récurrence double, on en déduit que le résultat est vrai pour tout rang $k \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire que $\boxed{a_k \text{ n'est pas un multiple de 3 pour tout rang } k \in \mathbb{N}}$.

6. *Conclure.*

▶ D'après le résultat précédent, $a_k$ n'est pas un multiple de 3 pour tout $k \in \mathbb{N}$. En particulier, $a_n$ n'est pas un multiple de 3. Or $a_n = 3^n$ d'après le résultat de la question 4 et $3^n$ est bien un multiple de 3 (car $n \in \mathbb{N}^\star$). Donc l'hypothèse de l'énoncé est absurde : il n'existe pas d'entiers $p$ et $q$ tels que $\theta = p\pi/q$. Par conséquent, $\boxed{\text{l'unique réel } \theta \in [0,\pi] \text{ tel que } \cos(\theta) = 1/3 \text{ n'est pas une fraction de } \pi}$.

## Exercice 2

*Résoudre les inéquations suivantes d'inconnue $x$ réelle.*

$(I_1)$ $|x^2 + 5x - 2| \leqslant |2x + 2|$

▶ L'inéquation $(I_1)$ est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$. À gauche de l'inéquation, on reconnaît un polynôme du second degré de discriminant $\Delta = 5^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 33 > 0$ qui admet pour racines $x_1 = (-5 + \sqrt{33})/2$ et $x_2 = (-5 - \sqrt{33})/2$. À droite de l'inéquation, on reconnaît un polynôme du premier degré qui admet pour racine évidente $-1$. Puisque $\sqrt{33} > \sqrt{25} = 5$, on a $x_1 > 0 > -1$ et $x_2 < -5 < -1$. On obtient donc le tableau des signes suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $x_2$ | | $-1$ | | $x_1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2+5x-2$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $2x+2$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |

On raisonne par disjonction de cas.

- 1[er] cas : $x \in ]-\infty, x_2]$. Alors :

$$\begin{aligned} (I_1) &\iff x^2 + 5x - 2 \leqslant -(2x+2) \\ &\iff x^2 + 7x \leqslant 0 \\ &\iff x(x+7) \leqslant 0. \end{aligned}$$

De plus, $\sqrt{33} < \sqrt{36} = 6$ donc $x_2 > (-5-6)/2 = -11/2 > -7$. D'où le tableau des signes suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $-7$ | | $x_2$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x+7$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $x(x+7)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

On en déduit que dans le cas où $x \in ]-\infty, x_2]$ :

$$(I_1) \iff x \in [-7, x_2].$$

- $2^{\text{e}}$ cas : $x \in [x_2, -1]$. Alors :

$$\begin{aligned}(I_1) &\iff -(x^2+5x-2) \leqslant -(2x+2) \\ &\iff x^2+3x-4 \geqslant 0.\end{aligned}$$

On reconnaît un polynôme du second degré de discriminant $\Delta = 3^2 - 4 \times 1 \times (-4) = 25 > 0$ qui admet pour racines $(-3+\sqrt{25})/2 = 1$ et $(-3-\sqrt{5})/2 = -4$. Puisque $x_2 < -5 < -4$, on a le tableau des signes suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $x_2$ | | $-4$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_2+3x-4$ | | $+$ | $\vdots$ | $+$ | $0$ | $-$ | $\vdots$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

On en déduit que dans le cas où $x \in [x_2, -1]$ :

$$(I_1) \iff x \in [x_2, -4].$$

- $3^{\text{e}}$ cas : $x \in [-1, x_1]$. Alors :

$$\begin{aligned}(I_1) &\iff -(x^2+5x-2) \leqslant 2x+2 \\ &\iff x^2+7x \geqslant 0 \\ &\iff x(x+7) \geqslant 0.\end{aligned}$$

Puisque $x_1 > 0$, on a en reprenant le tableau des signes obtenu dans le $1^{\text{er}}$ cas :

| $x$ | $-\infty$ | | $-7$ | | $-1$ | | $0$ | | $x_1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x(x+7)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $\vdots$ | $-$ | $0$ | $+$ | $\vdots$ | $+$ | |

On en déduit que dans le cas où $x \in [-1, x_1]$ :

$$(I_1) \iff x \in [0, x_1].$$

- $4^{\text{e}}$ cas : $x \in [x_1, +\infty[$. Alors :

$$\begin{aligned}(I_1) &\iff x^2+5x-2 \leqslant 2x+2 \\ &\iff x^2+3x-4 \leqslant 0.\end{aligned}$$

De plus, $\sqrt{33} < \sqrt{33} = 6$ donc $x_1 < (-5+6)/2 = 1/2 < 1$. D'où en reprenant le tableau des signes obtenu dans le $2^{\text{e}}$ cas :

| $x$ | $-\infty$ | | $-4$ | | $x_1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_2+3x-4$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $\vdots$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

On en déduit que dans le cas où $x \in [x_1, +\infty[$ :

$$(I_1) \iff x \in [x_1, 1].$$

- Conclusion. Finalement, l'ensemble des solutions de $(I_1)$ est :

$$[-7, x_2] \cup [x_2, -4] \cup [0, x_1] \cup [x_1, 1] = \boxed{[-7, -4] \cup [0, 1]}.$$

*Il est également possible de résoudre $(I_1)$ en utilisant la croissance de la fonction carrée sur $[0,+\infty[$ pour se débarasser des valeurs absolues :*

$$\begin{aligned}(I_1) &\iff \left(x^2+5x-2\right)^2 \leqslant (2x+2)^2\\ &\iff \left(x^2+5x-2\right)^2-(2x+2)^2 \leqslant 0\\ &\iff \Big(\left(x^2+5x-2\right)+(2x+2)\Big)\Big(\left(x^2+5x-2\right)-(2x+2)\Big) \leqslant 0\\ &\iff \left(x^2+7x\right)\left(x^2+3x-4\right) \leqslant 0\\ &\iff x(x+7)\left(x^2+3x-4\right) \leqslant 0.\end{aligned}$$

*Puis il suffit d'étudier le signe de $f : x \mapsto x(x+7)\left(x^2+3x-4\right)$.*

$(I_2)$ $x^{\left(x^2\right)} > (x^x)^2$

► Puisque les exposants $x^2$ et $x$ sont des nombres réels, on a d'après la définition des puissances :

$$x^{\left(x^2\right)} = \exp\left(x^2\ln(x)\right) \quad \text{et} \quad (x^x)^2 = \Big(\exp\left(x\ln(x)\right)\Big)^2 = \exp\left(2x\ln(x)\right).$$

Ainsi l'inéquation $(I_2)$ est bien définie seulement pour $x>0$ et on a :

$$\begin{aligned}(I_2) &\iff \exp\left(x^2\ln(x)\right) > \exp\left(2x\ln(x)\right)\\ &\iff x^2\ln(x) > 2x\ln(x) \quad \text{car la fonction exp est strictement croissante}\\ &\iff \left(x^2-2x\right)\ln(x) > 0\\ &\iff x\left(x-2\right)\ln(x) > 0.\end{aligned}$$

On étudie le signe de la fonction $f : x \mapsto x(x-2)\ln(x)$ sur $]0,+\infty[$.

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $x-2$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $\ln(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $f(x)$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

On en déduit que l'ensemble des solutions de $(I_2)$ est $\boxed{]0,1[\cup]2,+\infty[}$.

$(I_3)$ $\left\lfloor 2x+\sqrt{x-1}\right\rfloor = 3$

► L'équation $(I_3)$ est bien définie seulement pour $x-1 \geqslant 0 \iff x \geqslant 1$. D'après la définition de la partie entière, on a :

$$(I_3) \iff 3 \leqslant 2x+\sqrt{x-1} < 4 \iff \Big(\underbrace{\sqrt{x-1} \geqslant 3-2x}_{1^{\text{re}}\text{ inéquation}} \text{ et } \underbrace{\sqrt{x-1} < 4-2x}_{2^{\text{e}}\text{ inéquation}}\Big).$$

*Attention avant d'élever au carré pour simplifier la racine : il faut d'abord isoler la racine d'un côté de l'inéquation (sinon elle ne se simplifie pas) puis vérifier que l'autre côté de l'inéquation est positif pour pouvoir utiliser la croissance de la fonction carrée sur $[0,+\infty[$.*

- 1re inéquation. On a : $3-2x \geqslant 0 \iff x \leqslant 3/2$. On raisonne par disjonction de cas.

— *1^er^cas* : $x \in [1, 3/2]$. Alors :

$$\begin{aligned}\sqrt{x-1} \geqslant 3-2x &\iff x-1 \geqslant (3-2x)^2 \\ &\phantom{\iff} \text{car la fonction carrée est strictement croissante sur } [0,+\infty[ \\ &\iff x-1 \geqslant 9-12x+4x^2 \\ &\iff 4x^2-13x+10 \leqslant 0.\end{aligned}$$

On reconnaît un polynôme du second degré de discriminant $\Delta = (-13)^2 - 4\times4\times10 = 9 > 0$ qui admet pour racines $(13+\sqrt{9})/(2\times4) = 2$ et $(13-\sqrt{9})/(2\times4) = 5/4$. On a le tableau des signes suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $\frac{5}{4}$ | | $\frac{3}{2}$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $4x^2-13x+10$ | | $+$ | $\vdots$ | $+$ | $0$ | $-$ | $\vdots$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

On en déduit que dans le cas où $x \in [1, 3/2]$ :

$$\sqrt{x-1} \geqslant 3-2x \iff x \in \left[\tfrac{5}{4}, \tfrac{3}{2}\right].$$

— *2^e^ cas* : $x \in [3/2, +\infty[$. Alors la 1^re^ inéquation est toujours vérifiée car $\sqrt{x-1} \geqslant 0 \geqslant 3-2x$.

— *Conclusion de la 1^re^ inéquation.* On en déduit que :

$$\sqrt{x-1} \geqslant 3-2x \iff x \in \left[\tfrac{5}{4}, \tfrac{3}{2}\right] \cup \left[\tfrac{3}{2}, +\infty\right[ = \boxed{\left[\tfrac{5}{4}, +\infty\right[}.$$

- 2^e^ inéquation. On a : $4-2x \geqslant 0 \iff x \leqslant 2$. On raisonne par disjonction de cas.

— *1^er^cas* : $x \in [1, 2]$. Alors :

$$\begin{aligned}\sqrt{x-1} < 4-2x &\iff x-1 < (4-2x)^2 \\ &\phantom{\iff} \text{car la fonction carrée est strictement croissante sur } [0,+\infty[ \\ &\iff x-1 < 16-16x+4x^2 \\ &\iff 4x^2-17x+17 > 0.\end{aligned}$$

On reconnaît un polynôme du second degré de discriminant $\Delta = (-17)^2 - 4\times4\times17 = 17 > 0$ qui admet pour racines $x_1 = (17+\sqrt{17})/(2\times4) = (17+\sqrt{17})/8$ et $x_2 = (17-\sqrt{17})/8$. Puisque $\sqrt{17} > \sqrt{16} = 4$, on a $x_1 > (17+4)/8 = 21/8 > 2$ et $x_2 < (17-4)/8 = 13/8 < 2$. De plus, $\sqrt{17} < \sqrt{25} = 5$ donc $x_2 > (17-5)/8 = 3/2 > 1$. D'où le tableau des signes suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $x_2$ | | $2$ | | $x_1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $4x^2-17x+17$ | | $+$ | $\vdots$ | $+$ | $0$ | $-$ | $\vdots$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

On en déduit que dans le cas où $x \in [1, 2]$ :

$$\sqrt{x-1} < 4-2x \iff x \in [1, x_2[.$$

— *2^e^ cas* : $x \in [2, +\infty[$. Alors la 2^e^ inéquation n'est jamais vérifiée car $\sqrt{x-1} \geqslant 0 \geqslant 4-2x$.

— *Conclusion de la 2^e^ inéquation.* On en déduit que :

$$\sqrt{x-1} < 4-2x \iff x \in [1, x_2[ \cup \emptyset = \boxed{[1, x_2[}.$$

- Conclusion. Puisque $x_2 > 3/2 > 5/4 > 1$, on en déduit que l'ensemble des solutions $(I_3)$ est :

$$\left[\tfrac{5}{4}, +\infty\right[ \cap [1, x_2[ = \left[\tfrac{5}{4}, x_2\right[ = \boxed{\boxed{\left[\tfrac{5}{4}, \tfrac{17-\sqrt{17}}{8}\right[}}.$$

$(I_4)$ $\sin(7x)+\sin(3x)<0$

▶ L'inéquation $(I_4)$ est bien définie pour tout $x\in\mathbb{R}$. On a pour tout $x\in\mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned}
\sin(7x)+\sin(3x) &= \operatorname{Im}\left(e^{i7x}+e^{i3x}\right)\\
&= \operatorname{Im}\left(2\cos\left(\frac{7x-3x}{2}\right)e^{i\frac{7x+3x}{2}}\right) \quad \text{en factorisant par l'angle moitié}\\
&= \operatorname{Im}\left(2\cos(2x)\Big[\cos(5x)+i\sin(5x)\Big]\right)\\
&= 2\cos(2x)\sin(5x).
\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$(I_4) \iff \Big(\cos(2x)>0 \text{ et } \sin(5x)<0\Big) \text{ ou } \Big(\cos(2x)<0 \text{ et } \sin(5x)>0\Big).$$

Or on a d'après le cercle trigonométrique :

$$\begin{aligned}
\cos(2x)>0 &\iff 2x\in\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left]-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi\right[\\
&\iff \exists k\in\mathbb{Z},\ -\frac{\pi}{2}+2k\pi<2x<\frac{\pi}{2}+2k\pi\\
&\iff \exists k\in\mathbb{Z},\ -\frac{\pi}{4}+k\pi<x<\frac{\pi}{4}+k\pi\\
&\iff x\in\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left]-\frac{\pi}{4}+k\pi,\frac{\pi}{4}+k\pi\right[\\
\text{et}\quad \sin(5x)>0 &\iff 5x\in\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left]0+2k\pi,\pi+2k\pi\right[\\
&\iff \exists k\in\mathbb{Z},\ 2k\pi<5x<\pi+2k\pi\\
&\iff \exists k\in\mathbb{Z},\frac{2k\pi}{5}<x<\frac{\pi}{5}+\frac{2k\pi}{5}\\
&\iff x\in\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left]\frac{2k\pi}{5},\frac{\pi}{5}+\frac{2k\pi}{5}\right[.
\end{aligned}$$

On obtient donc le tableau des signes suivant entre 0 et $2\pi$ :

| $x$ | $0$ | | $\frac{\pi}{5}$ | | $\frac{\pi}{4}$ | | $\frac{2\pi}{5}$ | | $\frac{3\pi}{5}$ | | $\frac{3\pi}{4}$ | | $\frac{4\pi}{5}$ | | $\pi$ | | $\frac{6\pi}{5}$ | | $\frac{5\pi}{4}$ | | $\frac{7\pi}{5}$ | | $\frac{8\pi}{5}$ | | $\frac{7\pi}{4}$ | | $\frac{9\pi}{5}$ | | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\cos(2x)$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $\sin(5x)$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ |

On en déduit que l'ensemble des solutions de $(I_4)$ est :

$$\boxed{\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left(\begin{array}{c}\left]\frac{\pi}{5}+2k\pi,\frac{\pi}{4}+2k\pi\right[\cup\left]\frac{2\pi}{5}+2k\pi,\frac{3\pi}{5}+2k\pi\right[\\ \cup\left]\frac{3\pi}{5}+2k\pi,\frac{4\pi}{5}+2k\pi\right[\cup\left]\pi+2k\pi,\frac{6\pi}{5}+2k\pi\right[\cup\left]\frac{5\pi}{4}+2k\pi,\frac{7\pi}{5}+2k\pi\right[\\ \cup\left]\frac{8\pi}{5}+2k\pi,\frac{7\pi}{4}+2k\pi\right[\cup\left]\frac{9\pi}{5}+2k\pi,\pi+2k\pi\right[\end{array}\right)}$$

*Il faut savoir écrire ce type d'ensembles à l'aide d'une union infinie d'intervalles.*

$(I_5)$ $\dfrac{2x+m}{x-1} < 1$ *où* $m \in \mathbb{R}$ *est un paramètre fixé.*

► L'inéquation $(I_5)$ est bien définie seulement pour $x-1 \neq 0 \iff x \neq 1$. On a :

$$\begin{aligned}(I_5) &\iff \frac{2x+m}{x-1} - 1 < 0 \\ &\iff \frac{2x+m-(x-1)}{x-1} < 0 \\ &\iff \frac{x+(m+1)}{x-1} < 0.\end{aligned}$$

On étudie le signe de la fonction $f : x \mapsto \frac{x+(m+1)}{x-1}$ :

$$\begin{cases} x+(m+1) > 0 \iff x > -(m+1), \\ x-1 > 0 \iff x > 1. \end{cases}$$

On raisonne par disjonction de cas pour dresser le tableau des signes de la fonction $f$.

- 1^er^ cas : $-(m+1) < 1 \iff m > -2$. On obtient alors le tableau des signes suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $-(m+1)$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x+(m+1)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $x-1$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $\|\|$ | $+$ | |

  On en déduit que dans le cas où $m > -2$ :

$$(I_5) \iff \left]-(m+1), 1\right[.$$

- 2^e^ cas : $-(m+1) = 1 \iff m = -2$. Alors $(I_5)$ n'est jamais vérifiée car :

$$\frac{x+(m+1)}{x-1} = \frac{x+(-2+1)}{x-1} = \frac{x-1}{x-1} = 1.$$

- 3^e^ cas : $-(m+1) > 1 \iff m < -2$. On obtient alors le tableau des signes suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $-(m+1)$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x+(m+1)$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $x-1$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $f(x)$ | | $+$ | $\|\|$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

  On en déduit que dans le cas où $m < -2$ :

$$(I_5) \iff \left]1, -(m+1)\right[.$$

- Conclusion. Finalement, l'ensemble des solutions de $(I_5)$ est :

$$\boxed{\begin{cases} \left]-(m+1), 1\right[ & \text{si } m > -2 \\ \emptyset & \text{si } m = -2 \\ \left]1, -(m+1)\right[ & \text{si } m < -2 \end{cases}}.$$

## Problème 2

*On considère l'ensemble suivant :*

$$E = \{7k + 8\ell \,|\, (k, \ell) \in \mathbb{N}^2\}.$$

1. (a) *Montrer que 8 et 37 appartiennent à $E$.*

   ▶ On a $8 = 7 \times 0 + 8 \times 1$ donc $\boxed{8 \in E}$ pour les valeurs de paramètres $(k, \ell) = (0, 1)$. De même, $37 = 7 \times 3 + 8 \times 2$ donc $\boxed{37 \in E}$ pour les valeurs de paramètres $(k, \ell) = (3, 2)$

   (b) *Montrer que 1 et 19 n'appartiennent pas à $E$.*

   ▶ Par l'absurde, on suppose que $1 \in E$. Alors il existe des valeurs de paramètres $(k, \ell) \in \mathbb{N}^2$ telles que $1 = 7k + 8\ell$. Donc $7k = 1 - 8\ell \leqslant 1$ car $\ell \geqslant 0$. On en déduit que $k \leqslant 1/7$ donc que $k = 0$ car $k \in \mathbb{N}$. Ainsi $1 = 7 \times 0 + 8\ell$ donc $\ell = 1/8$ ce qui est absurde car $\ell \in \mathbb{N}$. Par conséquent, on a bien prouvé par l'absurde que $\boxed{1 \notin E}$. De même, on suppose qu'il existe des valeurs de paramètres $(k, \ell) \in \mathbb{N}^2$ telles que $19 = 7k + 8\ell$. Donc $7k = 19 - 8\ell \leqslant 19$. On en déduit que $k \leqslant 19/7$ donc que $k = 0$, $k = 1$ ou $k = 2$. Or $k = 0$ implique $\ell = (19 - 7 \times 0)/8 = 19/8$, $k = 1$ implique $\ell = (19 - 7 \times 1)/8 = 3/4$ et $k = 2$ implique $\ell = (19 - 7 \times 2)/8 = 5/8$. Tous les cas sont absurdes, par conséquent on a bien prouvé que $\boxed{19 \notin E}$.

   (c) *Déterminer un autre exemple d'entier naturel appartenant à $E$ et un autre exemple d'entier naturel n'appartenant pas à $E$.*

   ▶ Par exemple $\boxed{0 \in E}$ car $7 \times 0 + 8 \times 0 = 0$ et $\boxed{2 \notin E}$ car il n'existe pas $(k, \ell) \in \mathbb{N}^2$ tel que $7k + 8\ell = 2$ (sinon $k \leqslant 2/7$ donc $k = 0$ et $\ell = 2/8 = 1/4$ ce qui est absurde).

2. (a) *Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n$, il existe deux entiers naturels $q$ et $r$ tels que $r \leqslant 6$ et $n = 7q + r$, c'est-à-dire :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \exists (q, r) \in \mathbb{N} \times \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \quad n = 7q + r.$$

   ▶ <u>Initialisation</u>. Pour le rang $n = 0$, on cherche $(q, r) \in \mathbb{N} \times \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ tel que $n = 7q + r$. Or $0 = 7 \times 0 + 0$. Il suffit donc de poser $q = 0$ et $r = 0$. Ainsi, le résultat est vrai au rang $n = 0$.
   <u>Hérédité</u>. On suppose que le résultat est vrai pour un rang $n \in \mathbb{N}$ fixé. Donc on sait qu'il existe $(q, r) \in \mathbb{N} \times \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ tel que $n = 7q + r$. On veut montrer que le résultat est vrai au rang $n + 1$, donc on cherche $(q', r') \in \mathbb{N} \times \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ tel que $n + 1 = 7q' + r'$.

   > *Attention aux notations. Les deux entiers du rang $n$ ne sont pas forcément les mêmes que les deux entiers du rang $n + 1$. Il faut donc utiliser des notations différentes. Par exemple $(q, r)$ pour le rang $n$ et $(q', r')$ pour le rang $n + 1$, ou inversement, ou n'importe quelle autre notation du moment qu'elles sont différentes aux rangs $n$ et $n + 1$.*

   On raisonne par analyse-synthèse.
   *Analyse*. On a d'après l'hypothèse de récurrence :

$$n + 1 = (7q + r) + 1 = 7\underbrace{q}_{=q'} + \underbrace{r + 1}_{=r'}.$$

   On a bien $q' = q \in \mathbb{N}$ mais on veut que $r' = r + 1 \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Si $r \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ alors on peut poser $r' = r + 1$. Si $r = 6$ alors :

$$n + 1 = 7q + 6 + 1 = 7q + 7 = 7(q + 1) = 7\underbrace{(q + 1)}_{=q'} + \underbrace{0}_{=r'}.$$

   *Synthèse*. On pose $\boxed{(q', r') = (q, r + 1)}$ si $r \neq 6$ et $\boxed{(q', r') = (q + 1, 0)}$ si $r = 6$. D'après l'analyse, on a trouvé dans les deux cas $q' \in \mathbb{N}$ et $r' \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ tels que $n + 1 = 7q' + r'$. Par conséquent, on a prouvé que le résultat est vrai au rang $n + 1$ s'il est vrai au rang $n$. Et cette implication est vraie pour tout rang $n \in \mathbb{N}$.
   <u>Conclusion</u>. D'après le principe de récurrence, on en déduit que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \exists (q, r) \in \mathbb{N} \times \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \quad n = 7q + r}.$$

*(b) Dans cette question, on suppose qu'il existe quatre entiers naturels $q_1$, $r_1$, $q_2$ et $r_2$ tels que :*

$$(r_1, r_2) \in \{0,1,2,3,4,5,6\}^2 \quad \text{et} \quad 7q_1 + r_1 = 7q_2 + r_2.$$

*Montrer que $q_1 = q_2$ et $r_1 = r_2$. Que peut-on en déduire pour le résultat de la question 2(a) ?*

▶ On a :

$$7q_1 + r_1 = 7q_2 + r_2 \quad \text{donc} \quad 7(q_1 - q_2) = 7q_1 - 7q_2 = r_2 - r_1.$$

Puisque $(r_1, r_2) \in \{0,1,2,3,4,5,6\}^2$, on en déduit que

$$7(q_1 - q_2) = r_2 - r_1 \in \{-6,-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6\}.$$

*Attention aux manipulations d'inégalités. On ne peut pas soustraire directement les inégalités $0 \leqslant r_2 \leqslant 6$ et $0 \leqslant r_1 \leqslant 6$. En effet, si on multiplie la 2e inégalité par $-1$, on obtient $-6 \leqslant -r_1 \leqslant 0$. Puis en additionnant avec la 1re inégalité : $-6 = 0 - 6 \leqslant r_2 - r_1 \leqslant 6 + 0 = 6$. D'où le résultat.*

Puisque le seul multiple de 7 compris entre $-6$ et 6 est 0, on en déduit que $7(q_1 - q_2) = r_1 - r_2 = 0$. Donc $\boxed{q_1 = q_2}$ et $\boxed{r_1 = r_2}$. Ainsi, on vient de démontrer par l'absurde que, pour tout entier naturel $n$, $\boxed{\text{le couple d'entiers } (q,r) \text{ trouvé à la question précédente est unique}}$.

3. *(a) À l'aide du résultat de la question 2(a), montrer que tout entier naturel supérieur ou égal à 42 appartient à $E$. Indication : on pourra utiliser que $r = -7r + 8r$.*

▶ On fixe un entier naturel $n \geqslant 42$. Montrons que $n \in E$. On cherche donc des valeurs de paramètres $(k, \ell) \in \mathbb{N}^2$ telles que $n = 7k + 8\ell$. On raisonne par analyse-synthèse.
Analyse. D'après le résultat de la question 2(a), on sait qu'il existe $(q,r) \in \mathbb{N} \times \{0,1,2,3,4,5,6\}$ tel que $n = 7q + r$. On a donc :

$$n = 7q + r = 7q - 7r + 8r = 7\underbrace{(q-r)}_{=k} + 8\underbrace{r}_{=\ell}.$$

Synthèse. On pose $\boxed{(k,\ell) = (q-r, r)}$. On a bien $n = 7k + 8\ell$ d'après l'analyse et $\ell = r \in \mathbb{N}$. De plus, $k = q - r \in \mathbb{Z}$. Montrons que $q - r \geqslant 0$ donc que $k \in \mathbb{N}$.

*N'oubliez pas de justifier que $q - r \geqslant 0$. Il est nécessaire que le paramètre $k$ soit positif pour prouver que $n \in E$. Par exemple pour $(k, \ell) = (-1, 1)$, on obtient $1 = 7 \times (-1) + 8 \times 1$ mais $1 \notin E$.*

Par l'absurde, on suppose que $q - r \leqslant -1$. Puisque $r \in \{0,1,2,3,4,5,6\}$, on a :

$$n = 7\underbrace{(q-r)}_{\leqslant -1} + 8\underbrace{r}_{\leqslant 6} \leqslant -7 + 8 \times 6 = 41.$$

Ce qui est absurde car $n \geqslant 42$. On en déduit que $q - r \geqslant 0$ donc que $k = q - r \in \mathbb{N}$. Finalement, on a bien trouvé des valeurs de paramètres $(k,\ell) \in \mathbb{N}^2$ telles que $n = 7k + 8\ell$. Par conséquent, $n \in E$. Puisque ceci est vrai pour un entier naturel $n \geqslant 42$ quelconque, c'est vrai pour tout entier naturel $n \geqslant 42$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 42 \implies n \in E}.$$

*(b) Déterminer les éléments de $E$ strictement inférieurs à 42 et montrer qu'il y en a 21.*

▶ Il suffit de dresser la liste de toutes les valeurs de paramètres $(k,\ell) \in \mathbb{N}^2$ telles que $7k + 8\ell < 42$.

— Pour $k = 0$, on obtient pour les valeurs successives du paramètre $\ell$ :

$$7 \times 0 + 8 \times 0 = \boxed{0}, \quad 7 \times 0 + 8 \times 1 = \boxed{8}, \quad 7 \times 0 + 8 \times 2 = \boxed{16},$$
$$7 \times 0 + 8 \times 3 = \boxed{24}, \quad 7 \times 0 + 8 \times 4 = \boxed{32} \quad \text{et} \quad 7 \times 0 + 8 \times 5 = \boxed{40}.$$

Puis pour $\ell \geqslant 6$, on a : $7k + 8\ell \geqslant 7 \times 0 + 8 \times 6 = 48 > 42$.

— Pour $k=1$, on obtient pour les valeurs successives du paramètre $\ell$ :

$$7\times 1+8\times 0=\boxed{7},\quad 7\times 1+8\times 1=\boxed{15},\quad 7\times 1+8\times 2=\boxed{23},$$
$$7\times 1+8\times 3=\boxed{31},\quad \text{et}\quad 7\times 1+8\times 4=\boxed{39}.$$

Puis pour $\ell\geqslant 5$, on a : $7k+8\ell\geqslant 7\times 1+8\times 5=47>42$.

— Pour $k=2$, on obtient pour les valeurs successives du paramètre $\ell$ :

$$7\times 2+8\times 0=\boxed{14},\quad 7\times 2+8\times 1=\boxed{22},\quad 7\times 2+8\times 2=\boxed{30}$$
$$\text{et}\quad 7\times 2+8\times 3=\boxed{38}.$$

Puis pour $\ell\geqslant 4$, on a : $7k+8\ell\geqslant 7\times 2+8\times 4=46>42$.

— Pour $k=3$, on obtient pour les valeurs successives du paramètre $\ell$ :

$$7\times 3+8\times 0=\boxed{21},\quad 7\times 3+8\times 1=\boxed{29}\quad \text{et}\quad 7\times 3+8\times 2=\boxed{37}.$$

Puis pour $\ell\geqslant 3$, on a : $7k+8\ell\geqslant 7\times 3+8\times 3=45>42$.

— Pour $k=4$, on obtient pour les valeurs successives du paramètre $\ell$ :

$$7\times 4+8\times 0=\boxed{28}\quad \text{et}\quad 7\times 4+8\times 1=\boxed{36}.$$

Puis pour $\ell\geqslant 2$, on a : $7k+8\ell\geqslant 7\times 4+8\times 2=44>42$.

— Pour $k=5$, on obtient pour les valeurs successives du paramètre $\ell$ :

$$7\times 5+8\times 0=\boxed{35}.$$

Puis pour $\ell\geqslant 1$, on a : $7k+8\ell\geqslant 7\times 5+8\times 1=43>42$.

— Puis pour $k\geqslant 6$, on a : $7k+8\ell\geqslant 7\times 6+8\times 0=42$.

Finalement, on obtient $\boxed{21 \text{ éléments de } E \text{ strictement inférieurs à } 42}$ qui sont :

$$\begin{aligned}&\big\{0,8,16,24,32,40,7,15,23,31,39,14,22,30,38,21,29,37,28,36,35\big\}\\ =&\boxed{\big\{0,7,8,14,15,16,21,22,23,24,28,29,30,31,32,35,36,37,38,39,40\big\}}.\end{aligned}$$

*(c) En déduire tous les éléments de $E$.*

▶ D'après les résultats des deux questions précédentes, on en déduit que :

$$\begin{aligned}E&=\big\{n\in\mathbb{N}\mid n\geqslant 42\big\}\cup\big\{0,7,8,14,15,16,21,22,23,24,28,29,30,31,32,35,36,37,38,39,40\big\}\\ &=\boxed{\big\{0,7,8,14,15,16,21,22,23,24,28,29,30,31,32,35,36,37,38,39,40,42,43,44,45,46,\dots\big\}}.\end{aligned}$$

*4. On pose $A=\big\{p\in\mathbb{N}\mid \forall n\in\mathbb{N},\ n\geqslant p \implies n\in E\big\}$.*

*Il faut bien comprendre l'ensemble $A$ pour pouvoir répondre aux questions suivantes. Il s'agit de l'ensemble des entiers naturels $p$ tels que pour tout entier naturel $n$, si $n\geqslant p$ alors $n$ appartient à $E$. Ainsi, $A$ est l'ensemble des entiers naturels $p$ tels que tous les entiers supérieurs ou égaux à $p$ appartiennent à $E$. Par exemple $42\in A$ d'après le résultat de la question 3(a) alors que $21\notin A$ puisque par exemple $25\notin E$ d'après le résultat de la question 3(b).*

*(a) Dire, sans justifier, si chacune des assertions suivantes est vraie ou fausse.*

*i.* $\forall p \in A,\ p \in E$

▶ C'est $\boxed{\text{vrai}}$.

*En effet, si $p \in A$ alors tout entier supérieur ou égal à $p$ appartient à $E$, donc en particulier $p$ appartient à $E$.*

*ii.* $\exists p \in \mathbb{N},\ p \in A$

▶ C'est $\boxed{\text{vrai}}$.

*Cette assertion revient à dire que $A$ est non vide ce qui est le cas puisque $42 \in A$ d'après le résultat de la question 3(a).*

*iii.* $\forall p \in A,\ \exists n \geqslant p,\ n \in E$

▶ C'est $\boxed{\text{vrai}}$.

*En effet, si $p \in A$ alors il existe au moins un entier supérieur ou égal à $p$ qui appartient à $E$ puisque tout entier supérieur ou égal à $p$ appartient à $E$. Il suffit par exemple de poser $n = p$.*

*iv.* $\forall p \in A,\ \exists n > p,\ n \in E$

▶ C'est $\boxed{\text{vrai}}$.

*C'est la même justification que l'assertion précédente. Il suffit par exemple de poser $n = p + 1$.*

*v.* $\forall p \in A,\ p + 1 \in A$

▶ C'est $\boxed{\text{vrai}}$.

*En effet, si $p \in A$ alors tout entier supérieur ou égal à $p$ appartient à $E$, donc en particulier tout entier supérieur ou égal à $p + 1$ appartient à $E$, ce qui revient à dire que $p + 1 \in A$.*

*vi.* $\forall p \in A,\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant p \implies n \in A$

▶ C'est $\boxed{\text{vrai}}$.

*C'est la même justification que l'assertion précédente : si $p \in A$ et $n \geqslant p$ alors tout entier supérieur ou égal à $n$ appartient à $E$ puisque tout entier supérieur ou égal à $p$ appartient à $E$.*

*vii.* $\forall p \in \mathbb{N},\ (p \in E \text{ et } p + 1 \in A) \implies p \in A$

▶ C'est $\boxed{\text{vrai}}$.

*Si $p + 1 \in A$ alors tout entier supérieur ou égal à $p + 1$ appartient à $E$. Si, de plus, $p \in E$ alors tout entier supérieur ou égal à $p$ appartient à $E$, ce qui revient à dire que $p \in A$.*

*viii.* $\forall p \in \mathbb{N},\ p \notin A \iff (\exists n \in \mathbb{N},\ n \geqslant p \text{ et } n \notin E)$

▶ C'est $\boxed{\text{vrai}}$.

*Par définition de $A$, on a :*

$$p \in A \iff (\forall n \in \mathbb{N},\ \underbrace{n \geqslant p \implies n \in E}_{non(n \geqslant p)\ \ ou\ \ n \in E}).$$

*En passant à la négation, on en déduit que :*

$$\begin{aligned} p \notin A &\iff non(\forall n \in \mathbb{N},\ n < p \text{ ou } n \in E) \\ &\iff \exists n \in \mathbb{N},\ non(n < p \text{ ou } n \in E) \\ &\iff \exists n \in \mathbb{N},\ non(n < p) \text{ et } non(n \in E) \\ &\iff \exists n \in \mathbb{N},\ n \geqslant p \text{ et } n \notin E. \end{aligned}$$

*ix.* $\forall m \in \mathbb{N},\ m \notin E \implies (\forall p \in A,\ p > m)$

▶ C'est $\boxed{\text{vrai}}$.

*S'il existe $p \in A$ tel que $p \leqslant m$ alors $m \in E$ puisque tout entier supérieur ou égal à $p$ appartient à $E$. Autrement dit :*

$$\forall m \in \mathbb{N},\ (\exists p \in A,\ p \leqslant m) \implies m \in E.$$

*En passant à la contraposée, on en déduit que :*

$$\forall m \in \mathbb{N},\ non(m \in E) \implies non(\exists p \in A,\ p \leqslant m)$$
$$\iff \forall m \in \mathbb{N},\ m \notin E \implies (\forall p \in A,\ p > m).$$

*x.* $\exists m \in \mathbb{N},\ m \notin E$ *et* $(\forall p \in \mathbb{N},\ p > m \implies p \in A)$

▶ C'est $\boxed{\text{vrai}}$.

*Tout entier supérieur ou égal à 42 appartient à $E$ d'après le résultat de la question 3(a). Donc tout entier strictement supérieur à 41 appartient à $A$. De plus, $41 \notin E$ d'après le résultat de la question 3(b). L'assertion est donc vraie puisqu'il suffit de poser $m = 41$.*

*(b) À l'aide du résultat de la question 3(c), déterminer tous les éléments de $A$.*

▶ D'après le résultat de la question 3(a), on a :

$$\{n \in \mathbb{N} \mid n \geqslant 42\} \subset A.$$

De plus, puisque $41 \notin E$ d'après le résultat de la question 3(b), on a :

$$A \subset \{n \in \mathbb{N} \mid n \geqslant 42\}.$$

Par double inclusion, on en déduit que :

$$\boxed{A = \{42, 43, 44, 45, 46, \dots\}}.$$

## Exercice 3

*On considère la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ définie par*

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 0,\ u_{n+2} = 7u_{n+1} - 12u_n.$$

*Montrer qu'il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_n = a.b^n + c^n$.*

▶ On cherche $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\forall n \geqslant 0,\ u_n = a.b^n + c^n.$$

On raisonne par analyse-synthèse.

<u>Analyse</u>. On veut pour $n = 0$ :

$$0 = u_0 = a.b^0 + c^0 = a + 1 \quad \text{donc} \quad a = -1.$$

De même, on veut pour $n = 1$ :

$$1 = u_1 = a.b^1 + c^1 = -b + c \quad \text{donc} \quad c = b + 1.$$

De plus, la relation de récurrence donne pour $n = 0$ :

$$u_2 = 7u_1 - 12u_0 = 7 \times 1 - 12 \times 0 = 7.$$

On veut donc pour $n = 2$ :

$$7 = u_2 = a.b^2 + c^2 = -b^2 + (b+1)^2 = 2b + 1 \quad \text{donc} \quad b = 3.$$

Synthèse. On pose $\boxed{a = -1,\ b = 3 \text{ et } c = 4}$. Montrons que $u_n = a.b^n + c^n = -3^n + 4^n$ pour tout entier $n \geqslant 0$. On raisonne par récurrence double.
*Initialisation.* On a :

$$-3^0 + 4^0 = -1 + 1 = 0 = u_0 \quad \text{et} \quad -3^1 + 4^1 = -3 + 4 = 1 = u_1$$

donc le résultat est vrai aux rangs $n = 0$ et $n = 1$.
*Hérédité.* On suppose que $u_n = -3^n + 4^n$ et $u_{n+1} = -3^{n+1} + 4^{n+1}$ pour un rang $n \geqslant 0$ fixé. Alors :

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 7u_{n+1} - 12u_n \quad \text{d'après la relation de récurrence de l'énoncé} \\ &= 7\left(-3^{n+1} + 4^{n+1}\right) - 12\left(-3^n + 4^n\right) \quad \text{d'après les hypothèses de récurrence} \\ &= 7\left(-3 \times 3^n + 4 \times 4^n\right) + 12 \times 3^n - 12 \times 4^n \\ &= -21 \times 3^n + 28 \times 4^n + 12 \times 3^n - 12 \times 4^n \\ &= -9 \times 3^n + 16 \times 4^n \\ &= -3^2 \times 3^n + 4^2 \times 4^n \\ &= -3^{n+2} + 4^{n+2}. \end{aligned}$$

Par conséquent, si le résultat est vrai aux rangs $n$ et $n+1$ alors il est vrai au rang $n+2$. De plus, cette implication est vraie pour tout rang $n \geqslant 0$.
*Conclusion.* D'après le principe de récurrence double, on en déduit que

$$\boxed{\forall n \geqslant 0,\ u_n = -3^n + 4^n}.$$

Finalement, on a bien trouvé $\boxed{(a, b, c) = (-1, 3, 4)}$ tel que pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_n = a.b^n + c^n$.

# DS n° 2 de mathématiques et d'informatique

## durée : 3 heures

### Exercice 1

Le but de cet exercice est de démontrer que :

$$\forall x \in ]-1,1], \quad \arccos(x) = 2\arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right).$$

1. Étudier les variations de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ sur $]-1,1]$.
2. En déduire l'ensemble des valeurs de $2\arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)$ lorsque $x$ parcourt $]-1,1]$.
3. Soit $\theta \in [0,\pi[$. Exprimer $\cos(\theta)$ en fonction de $\tan(\theta/2)$.
4. Conclure.

### Exercice 2

Simplifier les sommes et les produits suivants en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{4}{2k+1}\right)$ en reconnaissant une somme télescopique.
2. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \exp\left(\binom{n}{k}\right)$ à l'aide de la formule du binôme de Newton.
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor^2$ en séparant les indices pairs et impairs.
4. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \tan\left(\frac{k\pi}{2(n+1)}\right)$ en inversant l'ordre du produit.

### Exercice 3

On fixe $n \in \mathbb{N}$ dans cet exercice et on pose : $R = \displaystyle\sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant n\\ 0\leqslant j\leqslant n}} 3^{i+j}$ et $T = \displaystyle\sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n} 3^{i+j}$.

1. **[Informatique]**
   (a) Écrire en Python une fonction `somme(x,k,p)` qui prend en arguments un réel $x$ et deux entiers naturels $k$ et $p$ puis qui renvoie la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{\ell=0}^{p} x^{k+\ell}$.
   (b) En utilisant la fonction `somme` de la question précédente, écrire deux fonctions `sommeR` et `sommeT` qui prennent en argument l'entier $n$ puis qui revoient la valeur des sommes $R$ et $T$ respectivement.
2. Calculer $R$.
3. Calculer $T$.

## Exercice 4

Le but de cet exercice est de calculer la limite de la suite $(p_n)_{n\geqslant 1}$ définie par :

$$\forall n \geqslant 1, \quad p_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n^2}\right).$$

1. Calculer $p_1$, $p_2$ et $p_3$.
2. **[Informatique]** Écrire en Python une fonction `produit` qui prend en argument un entier $n \geqslant 1$ puis qui renvoie la valeur de $p_n$.

Pour la suite de l'énoncé, on pose $s_n = \ln(p_n)$ pour tout $n \geqslant 1$.

3. Écrire les termes de la suite $(s_n)_{n\geqslant 1}$ à l'aide du symbole $\Sigma$.
4. Montrer que :
$$\forall x > 0, \quad x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x.$$
5. En déduire que :
$$\forall n \geqslant 1, \quad \frac{(n+1)(6n^2-2n-1)}{12n^3} \leqslant s_n \leqslant \frac{n+1}{2n}.$$
6. Conclure.

## Exercice 5

Résoudre l'équation suivante d'inconnue $\theta \in \mathbb{R}$ :

$$\cos(24\theta) + \cos(25\theta) + \cos(26\theta) + \cdots + \cos(41\theta) + \cos(42\theta) = 0.$$

## Exercice 6

On considère la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ définie par :

$$a_0 = a_1 = 3 \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 0,\ a_{n+2} = 2a_{n+1} - 9a_n + 16.$$

1. **[Informatique]** On considère la fonction ci-dessous.

```
def n1port3koua(n):
    a=3
    b=3
    for k in range(n):
        c=2*b-9*a+16
        b=c
        a=b
    return b
```

   (a) Que renvoie la commande `n1port3koua(0)` ?
   (b) Que renvoie la commande `n1port3koua(1)` ?
   (c) Que renvoie la commande `n1port3koua(2)` ?
   (d) Corriger la fonction `n1port3koua` pour écrire une fonction `suite` qui prend en argument un entier $n \geqslant 0$ puis qui renvoie la valeur de $a_n$.

2. Montrer qu'il existe un réel $\alpha$ tel que $(u_n = a_n + \alpha)_{n\geqslant 0}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
3. Exprimer $u_n$ en fonction de $n \geqslant 0$.
4. En déduire l'expression de $a_n$ en fonction de $n \geqslant 0$.

## Exercice 7

Une suite réelle $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est dite de Cauchy lorsque pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un rang $N \geqslant 1$ à partir duquel deux termes quelconques de la suite sont séparés d'au plus $\varepsilon$, autrement dit :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \geqslant 1, \quad \forall (n,p) \in \mathbb{N}^2, \quad (n \geqslant N \text{ et } p \geqslant N) \implies \left|u_n - u_p\right| \leqslant \varepsilon.$$

Montrer que la suite $\left(u_n = \frac{1}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ est de Cauchy.

# Corrigé du DS n° 2 de mathématiques et d'informatique

## Exercice 1

*Le but de cet exercice est de démontrer que :*

$$\forall x \in ]-1,1], \quad \arccos(x) = 2\arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right).$$

1. *Étudier les variations de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ sur $]-1,1]$.*

   ► La fonction $f : x \mapsto \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}$ est définie comme un quotient de racines. De plus la fonction racine $t \mapsto \sqrt{t}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$. Or :

   $$1-x>0 \iff x<1 \quad \text{et} \quad 1+x>0 \iff x>-1.$$

   Donc la fonction $f$ est dérivable sur $]-1,1[$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas.

   *Attention : la fonction $f$ n'est pas dérivable en 1 car la fonction racine $t \mapsto \sqrt{t}$ n'est pas dérivable en 0 ! ! Il faut toujours bien justifier qu'une fonction est dérivable avant de la dériver.*

   On a :

   $$\begin{aligned}\forall x \in ]-1,1[, \quad f'(x) &= \frac{\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}\sqrt{1+x} - \frac{1}{2\sqrt{1+x}}\sqrt{1-x}}{\left(\sqrt{1+x}\right)^2} \\ &= \frac{\frac{-\left(\sqrt{1+x}\right)^2 - \left(\sqrt{1-x}\right)^2}{2\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}}}{1+x} \\ &= \frac{-(1+x)-(1-x)}{2\sqrt{(1-x)(1+x)}(1+x)} \\ &= \frac{\overbrace{-1}^{<0}}{\underbrace{\sqrt{1-x^2}}_{>0}\underbrace{(1+x)}_{\substack{>0 \\ \text{car } x>-1}}} < 0.\end{aligned}$$

   On en déduit le tableau des variations de $f$ :

| $x$ | $-1$ | | $1$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $-$ | ‖ |
| $f(x)$ | ‖ | $+\infty$ ↘ | $0$ |

car :

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \frac{\overbrace{\sqrt{1-x}}^{\to\sqrt{2}>0}}{\underbrace{\sqrt{1+x}}_{\to 0^+}} = +\infty \quad \text{et} \quad f(1) = \frac{\sqrt{1-1}}{\sqrt{1+1}} = 0.$$

2. *En déduire l'ensemble des valeurs de* $2\arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)$ *lorsque* $x$ *parcourt* $]-1,1]$.

▶ D'après le résultat de la question précédente, on a :

$$\left\{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \;\middle|\; x\in]-1,1]\right\} = \{f(x) \mid x\in]-1,1]\} = [0,+\infty[.$$

De plus, la fonction arctan associe à chaque $t\in\mathbb{R}$ l'unique angle $\theta\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ tel que $\tan(\theta)=t$. On déduit du cercle trigonométrique que si $t$ parcourt $[0,+\infty[$ alors $\theta=\arctan(t)$ parcourt $[0,\frac{\pi}{2}[$. Par conséquent :

$$\begin{aligned}\left\{2\arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right) \;\middle|\; x\in]-1,1]\right\} &= \left\{2\arctan(t) \;\middle|\; t\in[0,+\infty[\right\} \\ &= \left\{2\theta \mid \theta\in[0,\tfrac{\pi}{2}[\right\} \\ &= \boxed{[0,\pi[}.\end{aligned}$$

3. *Soit* $\theta\in[0,\pi[$. *Exprimer* $\cos(\theta)$ *en fonction de* $\tan(\theta/2)$.

▶ On a :

$$\begin{aligned}\cos(\theta) &= \cos\left(2\times\tfrac{\theta}{2}\right) \\ &= \cos^2\left(\tfrac{\theta}{2}\right)-\sin^2\left(\tfrac{\theta}{2}\right) && \text{d'après la formule de duplication du cosinus} \\ &= \frac{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} && \text{d'après le théorème de Pythagore} \\ &= \frac{1-\dfrac{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}}{1+\dfrac{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}} && \text{car } \cos^2\left(\tfrac{\theta}{2}\right)\neq 0 \text{ puisque } \tfrac{\theta}{2}\in[0,\tfrac{\pi}{2}[ \\ &= \frac{1-\left(\dfrac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right)^2}{1+\left(\dfrac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right)^2} \\ &= \boxed{\frac{1-\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}} && \text{d'après le théorème de Thalès.}\end{aligned}$$

4. *Conclure.*

▶ Soit $x\in]-1,1]$. Par définition, $\arccos(x)$ est l'unique angle $\theta\in[0,\pi]$ tel que $\cos(\theta)=x$. On pose $\theta=2\arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)$. Vérifions que $\theta\in[0,\pi]$ et que $\cos(\theta)=x$. D'après le résultat de la question 2, on a $\theta = 2\arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right) \in [0, \pi[$ donc en particulier $\theta \in [0, \pi]$. De plus, on a d'après le résultat de la question précédente :

$$\begin{aligned}
\cos(\theta) &= \frac{1 - \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \\
&= \frac{1 - \tan^2\left(\frac{2\arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{2\arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)}{2}\right)} \quad \text{par définition de } \theta \\
&= \frac{1 - \left(\tan\left(\arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)\right)\right)^2}{1 + \left(\tan\left(\arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)\right)\right)^2} \\
&= \frac{1 - \left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)^2}{1 + \left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)^2} \quad \text{par définition de la fonction arctangente} \\
&= \frac{1 - \frac{1-x}{1+x}}{1 + \frac{1-x}{1+x}} = \frac{(1+x) - (1-x)}{(1+x) + (1-x)} = \frac{2x}{2} = x.
\end{aligned}$$

On en déduit bien que $\theta = \arccos(x)$ par définition de la fonction arccosinus. Puisque ceci est vrai pour tout $x \in ]-1, 1]$, on a bien montré que :

$$\boxed{\forall x \in ]-1, 1], \quad \arccos(x) = 2\arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)}.$$

## Exercice 2

*Simplifier les sommes et les produits suivants en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.*

1. $\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{4}{2k+1}\right)$ *en reconnaissant une somme télescopique.*

▶ On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{4}{2k+1}\right) &= \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{2k+1+4}{2k+1}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \big[\ln(2k+5) - \ln(2k+1)\big]
\end{aligned}$$

*Il faut comprendre les simplifications dans sa tête ou au brouillon pour déterminer les termes restants :*

$$= \big[\underbrace{\ln(7)}_{(*)} - \ln(3)\big] + \big[\underbrace{\ln(9)}_{(**)} - \ln(5)\big] + \big[\underbrace{\ln(11)} - \underbrace{\ln(7)}_{(*)}\big] + \big[\underbrace{\ln(13)} - \underbrace{\ln(9)}_{(**)}\big] + \dots$$

$$\dots + \big[\underbrace{\ln(2n+1)}_{(***)} - \underbrace{\ln(2n-3)}\big] + \big[\ln(2n+3) - \underbrace{\ln(2n-1)}\big] + \big[\ln(2n+5) - \underbrace{\ln(2n+1)}_{(***)}\big].$$

$$\begin{aligned}
&= -\ln(3) - \ln(5) + \ln(2n+3) + \ln(2n+5) \quad \text{après simplifications} \\
&= \boxed{\ln\left(\frac{(2n+3)(2n+5)}{15}\right)}.
\end{aligned}$$

2. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\exp\left(\binom{n}{k}\right)$ *à l'aide de la formule du binôme de Newton.*

▶ On a :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n}\exp\left(\binom{n}{k}\right) &= \exp\left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\right) && \text{par propriété de la fonction exponentielle}\\
&= \exp\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} - \underbrace{\binom{n}{0}}_{=1}\right) && \text{par associativité de la somme}\\
&= \exp\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k1^{n-k} - 1\right) && \text{car } 1^x = 1 \text{ pour tout } x\in\mathbb{R}\\
&= \exp\left((1+1)^n - 1\right) && \text{d'après la formule du binôme de Newton}\\
&= \boxed{\exp\left(2^n - 1\right)}.
\end{aligned}$$

*Attention : la somme de la formule du binôme de Newton commence à l'indice $k=0$ et non à $k=1$. Pensez à vérifier rapidement vos résultats pour des petits valeurs de $n$. Par exemple pour $n=1$ :*

$$\prod_{k=1}^{1}\exp\left(\binom{1}{k}\right) = \exp\Big(\underbrace{\binom{1}{1}}_{=1}\Big) = e = \exp\left(2^1-1\right) \quad \textit{alors que} \quad \exp\left(2^1\right) = e^2 \neq e.$$

3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left\lfloor\frac{k+1}{2}\right\rfloor^2$ *en séparant les indices pairs et impairs.*

▶ On a en séparant les indices pairs et impairs :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\left\lfloor\frac{k+1}{2}\right\rfloor^2 &= \sum_{\substack{k=1\\ k \text{ pair}}}^{n}\left\lfloor\frac{k+1}{2}\right\rfloor^2 + \sum_{\substack{k=1\\ k \text{ impair}}}^{n}\left\lfloor\frac{k+1}{2}\right\rfloor^2\\
&= \sum_{1\leqslant 2\ell\leqslant n}\left\lfloor\frac{2\ell+1}{2}\right\rfloor^2 + \sum_{1\leqslant 2\ell+1\leqslant n}\left\lfloor\frac{2\ell+1+1}{2}\right\rfloor^2\\
&= \sum_{\frac{1}{2}\leqslant\ell\leqslant\frac{n}{2}}\left\lfloor\ell+\tfrac{1}{2}\right\rfloor^2 + \sum_{0\leqslant\ell\leqslant\frac{n-1}{2}}\left\lfloor\ell+1\right\rfloor^2\\
&= \sum_{\ell=1}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\ell^2 + \sum_{\ell=0}^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor}(\ell+1)^2 \quad \text{par définition de la partie entière}\\
&= \frac{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor\left(\lfloor\frac{n}{2}\rfloor+1\right)\left(2\lfloor\frac{n}{2}\rfloor+1\right)}{6} + \sum_{j=1}^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor+1} j^2 \quad \text{en posant le décalage d'indice } j=\ell+1\\
&= \frac{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor\left(\lfloor\frac{n}{2}\rfloor+1\right)\left(2\lfloor\frac{n}{2}\rfloor+1\right)}{6} + \frac{\left(\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor+1\right)\left(\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor+1+1\right)\left(2\left(\lfloor\frac{n-1}{2}+1\right)\rfloor+1\right)}{6}\\
&= \frac{1}{6}\Big(\lfloor\tfrac{n}{2}\rfloor\left(\lfloor\tfrac{n}{2}\rfloor+1\right)\left(2\lfloor\tfrac{n}{2}\rfloor+1\right) + \left(\lfloor\tfrac{n-1}{2}\rfloor+1\right)\left(\lfloor\tfrac{n-1}{2}\rfloor+2\right)\left(2\lfloor\tfrac{n-1}{2}\rfloor+3\right)\Big).
\end{aligned}$$

On raisonne ensuite par disjonction de cas pour simplifier le résultat.

1er cas : $n$ est pair. Alors $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor = \frac{n}{2}$ et $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor = \frac{n}{2} - 1$ donc :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor^2 &= \frac{1}{6}\Big( \tfrac{n}{2}\left(\tfrac{n}{2}+1\right)\left(2\tfrac{n}{2}+1\right) + \tfrac{n}{2}\left(\tfrac{n}{2}+1\right)\left(2\tfrac{n}{2}+1\right) \Big) \\
&= \frac{2n(n+2)(n+1)}{6 \times 4} \\
&= \boxed{\frac{n(n+1)(n+2)}{12}}.
\end{aligned}$$

2e cas : $n$ est impair. Alors $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor = \frac{n-1}{2}$ et $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor = \frac{n-1}{2}$ donc :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor^2 &= \frac{1}{6}\Big( \tfrac{n-1}{2}\left(\tfrac{n-1}{2}+1\right)\left(2\tfrac{n-1}{2}+1\right) + \left(\tfrac{n-1}{2}+1\right)\left(\tfrac{n-1}{2}+2\right)\Big(2\tfrac{n-1}{2}+3\Big)\Big) \\
&= \frac{(n+1)}{6 \times 4}\Big((n-1)n + (n+3)(n+2)\Big) \\
&= \frac{(n+1)}{24}\Big(2n^2+4n+6\Big) \\
&= \boxed{\frac{(n+1)(n^2+2n+3)}{12}}.
\end{aligned}$$

*4.* $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \tan\left(\frac{k\pi}{2(n+1)}\right)$ *en inversant l'ordre du produit.*

▶ On a :

$$\begin{aligned}
P &= \prod_{k=1}^{n} \tan\left(\frac{k\pi}{2(n+1)}\right) \\
&= \prod_{\ell=1}^{n} \tan\left(\frac{(n+1-\ell)\pi}{2(n+1)}\right) && \text{en posant l'inversion de l'ordre du produit } \ell = n+1-k \iff k = n+1-\ell \\
&= \prod_{\ell=1}^{n} \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\ell\pi}{2(n+1)}\right) \\
&= \prod_{\ell=1}^{n} \frac{1}{\tan\left(\frac{\ell\pi}{2(n+1)}\right)} && \text{par propriété de la fonction tangente} \\
&= \frac{1}{\prod_{\ell=1}^{n} \tan\left(\frac{\ell\pi}{2(n+1)}\right)} && \text{par multiplicativité du produit} \\
&= \frac{1}{P} && \text{car l'indice du produit est une variable muette.}
\end{aligned}$$

On en déduit que $P^2 = 1$ donc que $P = -1$ ou $P = 1$. Or on a pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ :

$$0 < k < n+1 \quad \text{donc} \quad 0 < \frac{k\pi}{2(n+1)} < \frac{\pi}{2} \quad \text{donc} \quad \tan\left(\frac{k\pi}{2(n+1)}\right) > 0 \quad \text{d'après le cercle trigonométrique.}$$

Ainsi, $P$ est un produit de facteurs strictement positifs. On en déduit que $P = 1$, c'est-à-dire :

$$\boxed{\prod_{k=1}^{n} \tan\left(\frac{k\pi}{2(n+1)}\right) = 1}.$$

## Exercice 3

*On fixe $n \in \mathbb{N}$ dans cet exercice et on pose :* $R = \sum_{\substack{0 \leqslant i \leqslant n \\ 0 \leqslant j \leqslant n}} 3^{i+j}$ *et* $T = \sum_{0 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} 3^{i+j}$.

1. ***[Informatique]***

   (a) *Écrire en Python une fonction* `somme(x,k,p)` *qui prend en arguments un réel $x$ et deux entiers naturels $k$ et $p$ puis qui renvoie la valeur de la somme* $\sum_{\ell=0}^{p} x^{k+\ell}$.

   ▶ Par exemple :

```
def sommme(x,k,p):
    S=0
    for l in range(p+1):
        S=S+x**(k+l)
    return S
```

*Attention : la commande* `range(p)` *renvoie la liste des $p$ premiers entiers en commençant par 0, c'est-à-dire $0, 1, 2, \ldots, (p-1)$. Pour obtenir la liste des $p+1$ entiers de 0 à $p$, il faut donc utiliser la commande* `range(p+1)`.

*On peut également utiliser la formule de la somme des termes d'une suite géométrique de raison $x$ :*

$$\sum_{\ell=0}^{p} x^{k+\ell} = x^k \frac{1-x^{p+1}}{1-x}.$$

*Mais attention : cette formule est valable seulement pour $x \neq 1$ !! Si $x = 1$, la somme est égale à $p+1$. On peut donc écrire la fonction* `somme` *à l'aide des commandes* `if` *et* `else` *pour réaliser une disjonction de cas. Par exemple :*

```
def somme(x,k,p):
    if x==1:
        return p+1
    else:
        return (x**k)*(1-x**(p+1))/(1-x)
```

   (b) *En utilisant la fonction* `somme` *de la question précédente, écrire deux fonctions* `sommeR` *et* `sommeT` *qui prennent en argument l'entier $n$ puis qui revoient la valeur des sommes $R$ et $T$ respectivement.*

   ▶ On a :

$$R = \sum_{\substack{0 \leqslant i \leqslant n \\ 0 \leqslant j \leqslant n}} 3^{i+j} = \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{n} 3^{i+j} \quad \text{et} \quad T = \sum_{0 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} 3^{i+j} = \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{j} 3^{i+j}.$$

*On reconnaît des sommes doubles : sur un Rectangle d'indices pour $R$ et sur un Triangle d'indices pour $T$.*

Par exemple :

```
def sommeR(n):
    S=0
    for j in range(n+1):
        S=S+somme(3,j,n)
    return S
```

```
def sommeT(n):
    S=0
    for j in range(n+1):
        S=S+somme(3,j,j)
    return S
```

2. *Calculer $R$.*

▶ On a :

$$
\begin{aligned}
R &= \sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant n\\ 0\leqslant j\leqslant n}} 3^{i+j} = \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{n} 3^{i+j} \\
&= \sum_{j=0}^{n}\left(3^j\frac{3^{n+1}-1}{3-1}\right) \quad \begin{array}{c}\text{en reconnaissant la somme des termes}\\ \text{d'une suite géométrique de raison 3}\end{array} \\
&= \frac{3^{n+1}-1}{2}\sum_{j=0}^{n} 3^j \quad \text{par linéarité de la somme} \\
&= \frac{3^{n+1}-1}{2}3^0\frac{3^{n+1}-1}{3-1} \quad \begin{array}{c}\text{en reconnaissant la somme des termes}\\ \text{d'une suite géométrique de raison 3}\end{array} \\
&= \boxed{\frac{\left(3^{n+1}-1\right)^2}{4}}.
\end{aligned}
$$

3. *Calculer $T$.*

▶ On a :

$$
\begin{aligned}
T &= \sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n} 3^{i+j} = \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{j} 3^{i+j} \\
&= \sum_{j=0}^{n}\left(3^j\frac{3^{j+1}-1}{3-1}\right) \quad \begin{array}{c}\text{en reconnaissant la somme des termes}\\ \text{d'une suite géométrique de raison 3}\end{array} \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{j=0}^{n}3^{2j+1}-\sum_{j=0}^{n}3^j\right) \quad \text{par linéarité de la somme} \\
&= \frac{1}{2}\left(3\sum_{j=0}^{n}9^j-3^0\frac{3^{n+1}-1}{3-1}\right) \quad \begin{array}{c}\text{par linéarité et en reconnaissant la somme}\\ \text{des termes d'une suite géométrique de raison 3}\end{array} \\
&= \frac{1}{2}\left(3\times 9^0\frac{9^{n+1}-1}{9-1}-\frac{3^{n+1}-1}{2}\right) \quad \begin{array}{c}\text{en reconnaissant la somme des termes}\\ \text{d'une suite géométrique de raison 9}\end{array} \\
&= \frac{1}{16}\left(3.9^{n+1}-3-4.3^{n+1}+4\right) \\
&= \boxed{\frac{3\times 9^{n+1}-4\times 3^{n+1}+1}{16}}.
\end{aligned}
$$

## Exercice 4

*Le but de cet exercice est de calculer la limite de la suite $(p_n)_{n\geqslant 1}$ définie par :*

$$\forall n\geqslant 1,\quad p_n=\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right).$$

1. *Calculer $p_1$, $p_2$ et $p_3$.*

▶ On a :

$$\begin{aligned}
p_1 &= \prod_{k=1}^{1}\left(1+\frac{k}{1^2}\right) = \left(1+\frac{1}{1}\right) = \boxed{2},\\
p_2 &= \prod_{k=1}^{2}\left(1+\frac{k}{2^2}\right) = \left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{2}{4}\right) = \frac{5\times 3}{4\times 2} = \boxed{\frac{15}{8}},\\
\text{et}\quad p_3 &= \prod_{k=1}^{3}\left(1+\frac{k}{3^2}\right) = \left(1+\frac{1}{9}\right)\left(1+\frac{2}{9}\right)\left(1+\frac{3}{9}\right) = \frac{10\times 11\times 4}{9\times 9\times 3} = \boxed{\frac{440}{243}}.
\end{aligned}$$

2. ***[Informatique]** Écrire en Python une fonction* `produit` *qui prend en argument un entier $n \geqslant 1$ puis qui renvoie la valeur de $p_n$.*

▶ Par exemple :

```
def produit(n):
    P=1
    for k in range(1,n+1):
        P=P*(1+k/n**2)
    return P
```

*Pour la suite de l'énoncé, on pose $s_n = \ln(p_n)$ pour tout $n \geqslant 1$.*

3. *Écrire les termes de la suite $(s_n)_{n\geqslant 1}$ à l'aide du symbole $\Sigma$.*

▶ On a :

$$\forall n \geqslant 1, \quad s_n = \ln(p_n) = \ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)\right) = \boxed{\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)}$$

par propriété de la fonction logarithme.

4. *Montrer que :*

$$\forall x > 0, \quad x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x.$$

▶ On pose les fonctions $f : x \mapsto \ln(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2}\right)$ et $g : x \mapsto x - \ln(1+x)$. Les fonctions $f$ et $g$ sont dérivables sur $]0,+\infty[$ comme sommes et composées de fonctions usuelles. De plus :

$$\forall x > 0, \quad \begin{cases} f'(x) = \dfrac{1}{1+x} - \left(1 - \dfrac{2x}{2}\right) = \dfrac{1}{1+x} - 1 + x = \dfrac{1+(-1+x)(1+x)}{1+x} = \dfrac{\overbrace{x^2}^{>0}}{\underbrace{1+x}_{\substack{>0\\ \text{car } x>0}}} > 0 \\[2em] g'(x) = 1 - \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{1+x-1}{1+x} = \dfrac{\overbrace{x}^{>0}}{\underbrace{1+x}_{\substack{>0\\ \text{car } x>0}}} > 0. \end{cases}$$

On en déduit les tableaux de variations de $f$ et $g$ :

| $x$ | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | |
| $g(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | |

car :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \underbrace{\ln(1+x)}_{\to \ln(1)=0} - \underbrace{\left(x-\frac{x^2}{2}\right)}_{\to 0} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} \underbrace{x}_{\to \ln(1)=0} - \underbrace{\ln(1+x)}_{\to 0} = 0.$$

*Les limites en $+\infty$ sont inutiles, mais on peut montrer qu'elles sont égales à $+\infty$ d'après le théorème des croissances comparées.*

On en déduit que $f$ et $g$ sont minorées par 0, c'est-à-dire que $f(x)\ln(1+x) - \left(x-\frac{x^2}{2}\right) \geqslant 0$ et $g(x) = x - \ln(1+x) \geqslant 0$ pour tout $x > 0$. Par conséquent, on a bien montré que :

$$\boxed{\forall x > 0, \quad x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x}.$$

5. *En déduire que :*

$$\forall n \geqslant 1, \quad \frac{(n+1)(6n^2-2n-1)}{6n^3} \leqslant s_n \leqslant \frac{n+1}{2n}.$$

► Soient $n \geqslant 1$ et $k \in [\![1,n]\!]$. En appliquant le résultat de la question précédent à $x = \frac{k}{n^2} > 0$, on obtient :

$$\underbrace{\frac{k}{n^2} - \frac{\left(\frac{k}{n^2}\right)^2}{2}}_{=\frac{k}{n^2}-\frac{k^2}{2n^4}} \leqslant \ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right) \leqslant \frac{k}{n^2}.$$

En sommant toutes ces inégalités pour $k$ allant de 1 à $n$, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n^2} - \frac{k^2}{2n^4}\right) \leqslant \underbrace{\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)}_{=s_n} \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}.$$

On reconnaît un encadrement de $s_n$ d'après le résultat de la question 3. On simplifie le majorant et le minorant à l'aide de calculs de sommes :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2} &= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k && \text{par linéarité de la somme}\\
&= \frac{1}{n^2}\times\frac{n(n+1)}{2} && \text{en reconnaissant la somme des premiers entiers}\\
&= \frac{n+1}{2n}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{et} \quad \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n^2}-\frac{k^2}{2n^4}\right) &= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k - \frac{1}{2n^4}\sum_{k=1}^{n}k^2 && \text{par linéarité de la somme}\\
&= \frac{n+1}{2n} - \frac{1}{2n^4}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} && \text{d'après le calcul précédent et en reconnaissant la somme des premiers carrés}\\
&= \frac{n+1}{2n} - \frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3}\\
&= \frac{(n+1)}{12n^3}\Big(6n^2-(2n+1)\Big)\\
&= \frac{(n+1)(6n^2-2n-1)}{12n^3}.
\end{aligned}$$

On remplaçant ces expressions dans l'encadrement de $s_n$, on obtient bien :

$$\boxed{\forall n \geqslant 1, \quad \frac{(n+1)(6n^2-2n-1)}{12n^3} \leqslant s_n \leqslant \frac{n+1}{2n}}.$$

6. *Conclure.*

▶ On a :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{2n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1+\overbrace{\frac{1}{n}}^{\to 0}}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)(6n^2-2n-1)}{12n^3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(1+\overbrace{\frac{1}{n}}^{\to 0}\right)\left(6-\overbrace{\frac{2}{n}}^{\to 0}-\overbrace{\frac{1}{n^2}}^{\to 0}\right)}{12} = \frac{1\times 6}{12} = \frac{1}{2}.$$

D'après le théorème de limite par encadrement et le résultat de la question précédente, on en déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \frac{1}{2}.$$

Or on a posé $s_n = \ln(p_n)$ pour tout $n \geqslant 1$, donc :

$$\lim_{n\to+\infty} p_n = \lim_{n\to+\infty} \exp\big(\ln(p_n)\big) = \lim_{n\to+\infty} \exp(s_n) = \exp\left(\tfrac{1}{2}\right) = \boxed{\sqrt{e}}.$$

## Exercice 5

*Résoudre l'équation suivante d'inconnue $\theta \in \mathbb{R}$ :*

$$\cos(24\theta) + \cos(25\theta) + \cos(26\theta) + \cdots + \cos(41\theta) + \cos(42\theta) = 0.$$

▶ On a pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned}
&\cos(24\theta) + \cos(25\theta) + \cos(26\theta) + \cdots + \cos(41\theta) + \cos(42\theta)\\
=&\sum_{k=24}^{42} \cos(k\theta)\\
=&\sum_{k=24}^{42} \operatorname{Re}\left(e^{k\theta}\right) \quad \text{par définition de la fonction cosinus}\\
=&\operatorname{Re}\left(\sum_{k=24}^{42} \left(e^{i\theta}\right)^k\right) \quad \text{par propriétés de la partie réelle et de la puissance.}
\end{aligned}$$

On reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique de raison $e^{i\theta}$. De plus, si $e^{i\theta} = 1$ alors :

$$\cos(24\theta) + \cos(25\theta) + \cos(26\theta) + \cdots + \cos(41\theta) + \cos(42\theta) = \operatorname{Re}\left(\sum_{k=24}^{42} \left(e^{i\theta}\right)^k\right) = \operatorname{Re}\left(\sum_{k=24}^{42} 1\right) = 19 \neq 0.$$

Autrement dit, les valeurs de $\theta$ telles que $e^{i\theta} = 1$ ne sont pas solutions de l'équation. On peut donc supposer que $e^{i\theta} \neq 1$ et alors :

*N'oubliez pas de distinguer deux cas pour une somme des termes d'une suite géométrique : lorsque la raison est égale à 1 (dans ce cas la suite est constante) et lorsque la raison est différente de 1 (dans ce cas on peut appliquer la formule).*

$$\begin{aligned}
&\cos(24\theta)+\cos(25\theta)+\cos(26\theta)+\cdots+\cos(41\theta)+\cos(42\theta)\\
=&\mathrm{Re}\left(\sum_{k=24}^{42}\left(e^{i\theta}\right)^k\right)\\
=&\mathrm{Re}\left(\left(e^{i\theta}\right)^{24}\frac{1-\left(e^{i\theta}\right)^{19}}{1-e^{i\theta}}\right)=\mathrm{Re}\left(e^{i24\theta}\frac{e^{i0}-e^{i19\theta}}{e^{i0}-e^{i\theta}}\right)\\
=&\mathrm{Re}\left(e^{i24\theta}\frac{2i\sin\left(\frac{0-19\theta}{2}\right)e^{i\frac{0+19\theta}{2}}}{2i\sin\left(\frac{0-\theta}{2}\right)e^{i\frac{0+\theta}{2}}}\right) \quad \text{d'après une factorisation par l'angle moitié}\\
=&\mathrm{Re}\left(e^{i24\theta}\frac{\sin(19\theta/2)\,e^{i19\theta/2}}{\sin(\theta/2)\,e^{i\theta/2}}\right) \quad \text{car la fonction sinus est impaire}\\
=&\mathrm{Re}\left(\frac{\sin(19\theta/2)}{\sin(\theta/2)}e^{i\overbrace{\left(24+\frac{19}{2}-\frac{1}{2}\right)}^{=33}\theta}\right)=\mathrm{Re}\left(\frac{\sin(19\theta/2)}{\sin(\theta/2)}\left(\cos(33\theta)+i\sin(33\theta)\right)\right)\\
=&\frac{\sin(19\theta/2)}{\sin(\theta/2)}\cos(33\theta).
\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}
&\cos(24\theta)+\cos(25\theta)+\cos(26\theta)+\cdots+\cos(41\theta)+\cos(42\theta)=0\\
\Longleftrightarrow\ &\frac{\sin(19\theta/2)}{\sin(\theta/2)}\cos(33\theta)=0\\
\Longleftrightarrow\ &\sin(19\theta/2)=0 \quad \text{ou} \quad \cos(33\theta)=0 \quad \text{par intégrité du produit}\\
\Longleftrightarrow\ &\frac{19\theta}{2}\equiv 0\ [\pi] \quad \text{ou} \quad 33\theta\equiv\frac{\pi}{2}\ [\pi] \quad \text{d'après le cercle trigonométrique}\\
\Longleftrightarrow\ &\theta\equiv 0\ \left[\tfrac{2\pi}{19}\right] \quad \text{ou} \quad \theta\equiv\frac{\pi}{66}\ \left[\tfrac{\pi}{33}\right].
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc :

$$\boxed{\left\{\tfrac{2k\pi}{19}\mid k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\tfrac{\pi}{66}+\tfrac{k\pi}{33}\mid k\in\mathbb{Z}\right\}}.$$

*Ce qui donne un total de $19+66=85$ solutions principales dans l'intervalle $[0,2\pi[$.*

## Exercice 6

*On considère la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ définie par :*

$$a_0=a_1=3 \quad \textit{et} \quad \forall n\geqslant 0,\ a_{n+2}=2a_{n+1}-9a_n+16.$$

1. ***[Informatique]*** *On considère la fonction ci-dessous.*

```
def n1port3koua(n):
    a=3
    b=3
    for k in range(n):
        c=2*b-9*a+16
        b=c
        a=b
    return b
```

   (a) *Que renvoie la commande* `n1port3koua(0)` *?*

   ▶ Dans l'ordre, la fonction exécute les opérations suivantes :

— les variables `a` et `b` prennent la valeur 3,
— la boucle `for` est itérée 0 fois,
— la fonction renvoie la valeur de `b`, c'est-à-dire $\boxed{3}$.

*(b) Que renvoie la commande* `n1port3koua(1)` *?*

▶ Dans l'ordre, la fonction exécute les opérations suivantes :

— les variables `a` et `b` prennent la valeur 3,
— la boucle `for` est itérée 1 fois,
— la variable `c` prend la valeur $2 \times 3 - 9 \times 3 + 16 = -5$,
— la variable `b` prend la valeur $-5$,
— la variable `a` prend la valeur $-5$,
— la fonction renvoie la valeur de `b`, c'est-à-dire $\boxed{-5}$.

*(c) Que renvoie la commande* `n1port3koua(2)` *?*

▶ Dans l'ordre, la fonction exécute les opérations suivantes :

— les variables `a` et `b` prennent la valeur 3,
— la boucle `for` est itérée 2 fois,
— la variable `c` prend la valeur $2 \times 3 - 9 \times 3 + 16 = -5$,
— la variable `b` prend la valeur $-5$,
— la variable `a` prend la valeur $-5$,
— la variable `c` prend la valeur $2 \times (-5) - 9 \times (-5) + 16 = 51$,
— la variable `b` prend la valeur 51,
— la variable `a` prend la valeur 51,
— la fonction renvoie la valeur de `b`, c'est-à-dire $\boxed{51}$.

*(d) Corriger la fonction* `n1port3koua` *pour écrire une fonction* `suite` *qui prend en argument un entier $n \geqslant 0$ puis qui renvoie la valeur de $a_n$.*

▶

*On constate deux problèmes en répondant aux questions précédentes :*

— *La commande* `n1port3koua(1)` *renvoie $a_2$ au lieu de $a_1$. Au début du programme, les variables* `a` *et* `b` *prennent les valeurs de $a_0$ et $a_1$ respectivement. Ainsi, après $n$ itérations de la boucle* `for`*, les variables* `a` *et* `b` *auront pour valeur $a_n$ et $a_{n+1}$. Pour obtenir la valeur de $a_n$, la fonction doit donc renvoyer la valeur de la variable* `a` *et non de la variable* `b`*.*

— *La commande* `n1port3koua(2)` *renvoie $2a_2 - 9a_2 + 16$ au lieu de $a_2 - 9a_1 + 16$. Au début de la $k$-ième itération de la boucle* `for`*, si les variables* `a` *et* `b` *ont pour valeur $a_k$ et $a_{k+1}$ respectivement alors elles prendront la même valeur de $a_{k+2} = 2a_{k+1} - 9a_k + 16$. Pour corriger le calcul de la prochaine itération, les variables* `a` *et* `b` *doivent prendre les valeurs $a_{k+1}$ et $a_{k+2}$.*

Par exemple :

```
def suite(n):
    a=3
    b=3
    for k in range(n):
        c=2*b-9*a+16
        a=b
        b=c
    return a
```

2. *Montrer qu'il existe un réel $\alpha$ tel que $(u_n = a_n + \alpha)_{n\geqslant 0}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.*

▶ On raisonne par analyse-synthèse.

Analyse. On cherche un réel $\alpha$ tel que $(u_n = a_n + \alpha)_{n\geqslant 0}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2. On a pour tout $n \geqslant 0$ :

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= a_{n+2} + \alpha \quad \text{par définition de la suite } (u_n)_{n\geqslant 0} \\ &= 2a_{n+1} - 9a_n + 16 + \alpha \quad \text{par définition de la suite } (a_n)_{n\geqslant 0} \\ &= 2(u_{n+1} - \alpha) - 9(u_n - \alpha) + 16 + \alpha \quad \text{par définition de la suite } (u_n)_{n\geqslant 0} \\ &= 2u_{n+1} - 9u_n + 16 + 8\alpha. \end{aligned}$$

Ainsi, il suffit que $16 + 8\alpha = 0 \iff \alpha = -2$.

Synthèse. On pose $\boxed{\alpha = -2}$. Vérifions que $(u_n = a_n + \alpha = a_n - 2)_{n\geqslant 0}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2. D'après le calcul effectué dans l'analyse, on a :

$$\forall n \geqslant 0, \quad u_{n+2} = 2u_{n+1} - 9u_n.$$

On reconnaît bien une suite récurrente linéaire d'ordre 2. On a donc bien trouvé un réel $\boxed{\alpha = -2}$ tel que $(u_n = a_n + \alpha = a_n - 2)_{n\geqslant 0}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

3. *Exprimer $u_n$ en fonction de $n \geqslant 0$.*

▶ D'après ce qu'on a trouvé à la question précédente, l'équation caractéristique associée à la suite récurrente linéaire d'ordre 2 $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est :

$$q^2 = 2q - 9 \iff q^2 - 2q + 9 = 0.$$

Son discriminant vaut $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 9 = -32 < 0$. Elle admet donc deux racines complexes conjuguées : $\frac{2+i\sqrt{32}}{2} = 1 + i2\sqrt{2}$ et $1 - i2\sqrt{2}$. Écrivons ces racines complexe sous forme exponentielle. On a :

$$\left|1 + i2\sqrt{2}\right| = \sqrt{1^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{1+8} = 3.$$

Puisque la partie imaginaire de $1 + i2\sqrt{2} = 3\left(\frac{1}{3} + i\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$ est positive, on en déduit que son argument est congru à $\arccos\left(\frac{1}{3}\right)$ modulo $2\pi$. Ainsi :

$$1 + i2\sqrt{2} = 3e^{i\arccos(1/3)} \quad \text{et} \quad 1 - i2\sqrt{2} = 3e^{-i\arccos(1/3)}.$$

*Puisque la partie réelle est positive, on aurait aussi pu choisir comme argument $\arcsin\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$. En fait, $\arccos\left(\frac{1}{3}\right) = \arcsin\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$ comme on peut le constater sur un cercle trigonométrique.*

Ainsi, d'après le théorème des suites récurrentes linéaires d'ordre 2, on sait qu'il existe deux constantes $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ telles que :

$$\forall n \geqslant 0, \quad u_n = 3^n \left(A\cos\left(n\arccos\left(\frac{1}{3}\right)\right) + B\sin\left(n\arccos\left(\frac{1}{3}\right)\right)\right).$$

Pour déterminer les constantes $A$ et $B$, on utilise les premiers termes de la suite. Pour $n = 0$, on a $u_0 = a_0 + \alpha = 3 - 2 = 1$ donc :

$$1 = \underbrace{3^0}_{=1}\left(A\underbrace{\cos\left(0\arccos\left(\frac{1}{3}\right)\right)}_{=\cos(0)=1} + B\underbrace{\sin\left(0\arccos\left(\frac{1}{3}\right)\right)}_{=\sin(0)=0}\right) = A.$$

On en déduit que $A = 1$. De même, pour $n = 1$ on a $u_1 = a_1 + \alpha = 3 - 2 = 1$ donc :

$$1 = \underbrace{3^1}_{=3}\left(\underbrace{A}_{=1}\underbrace{\cos\left(1\arccos\left(\frac{1}{3}\right)\right)}_{=\cos(\arccos(1/3))=1/3} + B\underbrace{\sin\left(1\arccos\left(\frac{1}{3}\right)\right)}_{=\sin(\arccos(1/3))=2\sqrt{2}/3}\right) = 1 + \frac{2\sqrt{2}}{3}B.$$

On en déduit que $B = 0$. Finalement, on obtient :

$$\boxed{\forall n \geqslant 0, \quad u_n = 3^n \cos\left(n \arccos\left(\frac{1}{3}\right)\right)}.$$

*4. En déduire l'expression de $a_n$ en fonction de $n \geqslant 0$.*

▶ Puisque $(u_n = a_n + \alpha = a_n - 2)_{n\geqslant 0}$ d'après le résultat de la question 2, on a d'après le résultat de la question précédente :

$$\boxed{\forall n \geqslant 0, \quad a_n = u_n + 2 = 3^n \cos\left(n \arccos\left(\frac{1}{3}\right)\right) + 2}.$$

## Exercice 7

*Une suite réelle $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est dite de Cauchy lorsque pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un rang $N \geqslant 1$ à partir duquel deux termes quelconques de la suite sont séparés d'au plus $\varepsilon$, autrement dit :*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \geqslant 1, \quad \forall (n,p) \in \mathbb{N}^2, \quad (n \geqslant N \text{ et } p \geqslant N) \implies |u_n - u_p| \leqslant \varepsilon.$$

*Montrer que la suite $\left(u_n = \frac{1}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ est de Cauchy.*

▶ Soit $\varepsilon > 0$. On raisonne par analyse-synthèse.

Analyse. On cherche un rang $N \geqslant 1$ tel que :

$$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2, \quad (n \geqslant N \text{ et } p \geqslant N) \implies |u_n - u_p| \leqslant \varepsilon.$$

Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$. On suppose que $n \geqslant N$ et $p \geqslant N$. Alors :

$$|u_n - u_p| = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{p}\right| = \left|\frac{p-n}{np}\right| = \frac{|p-n|}{np}.$$

Si $p \leqslant n$, on obtient :

$$|u_n - u_p| = \frac{p-n}{np} \leqslant \frac{p}{np} = \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{N}.$$

De même, si $n \leqslant p$ :

$$|u_n - u_p| = \frac{n-p}{np} \leqslant \frac{n}{np} = \frac{1}{p} \leqslant \frac{1}{N}.$$

Ainsi $|u_n - u_p| \leqslant 1/N$ dans tous les cas. Il suffit donc de choisir un rang $N \geqslant 1$ tel que $1/N \leqslant \varepsilon$ afin que $|u_n - u_p| \leqslant \varepsilon$ par transitivité. Or :

$$\frac{1}{N} \leqslant \varepsilon \iff N \geqslant \frac{1}{\varepsilon}.$$

*On ne peut pas poser $N = 1/\varepsilon$ car on cherche un rang entier. Mais il suffit de prendre un entier supérieur à $1/\varepsilon$, par exemple en utilisant la partie entière.*

Synthèse. On pose $\boxed{N = \lfloor 1/\varepsilon \rfloor + 1}$. Alors $N$ est bien un entier supérieur ou égal à 1. Vérifions que :

$$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2, \quad (n \geqslant N \text{ et } p \geqslant N) \implies |u_n - u_p| \leqslant \varepsilon.$$

Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$. On suppose que $n \geqslant N$ et $p \geqslant N$. On a en reprenant les calculs effectués dans l'analyse :

$$|u_n - u_p| \leqslant \frac{1}{N}.$$

Or on a par définition de la partie entière :

$$\left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor \leqslant \frac{1}{\varepsilon} < \underbrace{\left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1}_{=N} \quad \text{donc} \quad \varepsilon > \frac{1}{N}.$$

Par transitivité, on en déduit que $|u_n - u_p| \leqslant \varepsilon$. On a donc bien trouvé un rang $N \geqslant 1$ tel que :

$$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2, \quad (n \geqslant N \text{ et } p \geqslant N) \implies \left|u_n - u_p\right| \leqslant \varepsilon.$$

Puisque ceci est vrai pour un $\varepsilon > 0$ quelconque, c'est vrai pour tout $\varepsilon > 0$. Finalement, on a bien montré que $\boxed{\text{la suite } \left(u_n = \frac{1}{n}\right)_{n \geqslant 1} \text{ est de Cauchy}}$.

# DS n$^{\text{o}}$ 3 de mathématiques et d'informatique

## durée : 3 heures

### Exercice 1

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 3}$ définie par :

$$\forall n \geqslant 3, \quad u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}}.$$

Le but de cet exercice est de montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 3}$ converge et de déterminer sa limite.

1. **[Informatique]** Chaque fonction demandée est à écrire en Python et peut faire appel aux fonctions écrites dans les questions précédentes, même si celles-ci n'ont pas été répondues.
   (a) Écrire une fonction `fact` qui prend en argument un entier $m \in \mathbb{N}$ puis qui renvoie la valeur de sa factorielle $m!$.
   (b) Écrire une fonction `coeffbi` qui prend en arguments deux entiers $p \in \mathbb{Z}$ et $m \in \mathbb{N}$ puis qui renvoie la valeur du coefficient binomial $\binom{m}{p}$.
   (c) Écrire une fonction `suite` qui prend en argument un entier $n \geqslant 3$ puis qui renvoie la valeur de $u_n$.
2. Calculer $u_3$, $u_4$, et $u_5$.
3. Dans cette question, on fixe un entier $n \geqslant 3$.
   (a) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{2} \frac{1}{\binom{n}{k}} \geqslant \sum_{k=0}^{3} \frac{1}{\binom{n+1}{k}}$.
   (b) Justifier que $\displaystyle\frac{1}{\binom{n}{k}} \geqslant \frac{1}{\binom{n+1}{k+1}}$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ puis en déduire que $\displaystyle\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}} \geqslant \sum_{k=4}^{n+1} \frac{1}{\binom{n+1}{k}}$.
4. Prouver que la suite $(u_n)_{n\geqslant 3}$ est décroissante puis en déduire qu'elle converge.
5. Dans cette question, on fixe un entier $n \geqslant 3$.
   (a) Montrer que
   $$\forall k \in [\![0, n-1]\!], \quad \frac{n+2}{\binom{n}{k}} - \frac{2n+2}{\binom{n+1}{k}} = \frac{n-k}{\binom{n}{k+1}} - \frac{n-k+1}{\binom{n}{k}}.$$
   (b) En déduire que $(n+2)(u_n - 1) - (2n+2)\left(u_{n+1} - \frac{1}{n+1} - 1\right) = -n$ puis que $u_{n+1} = 1 + \frac{n+2}{2n+2} u_n$.
6. On pose $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. À l'aide du résultat de la question précédente, prouver que $\ell = 2$.

## Exercice 2

Cet exercice propose d'étudier le comportement asymptotique de trois modèles de dynamique de population. On note $P_n$ le nombre d'individus à la génération $n \in \mathbb{N}$. Ainsi $P_0 > 0$ désigne l'effectif initial de la population. Un premier modèle d'évolution consiste à supposer que la production de nouveaux individus est proportionnelle au nombre d'individus présents, c'est-à-dire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P_{n+1} - P_n = kP_n \tag{M1}$$

où $k > 0$ est un taux d'accroissement.

1. (a) Dans l'hypothèse du modèle (M1), exprimer $P_n$ en fonction de $k$, $n$ et $P_0$.
   (b) En déduire la limite de $P_n$ quand $n \to +\infty$.

Afin de prendre en compte le fait que la population évolue dans un biotope fermé, c'est-à-dire un milieu ne pouvant pas contenir plus de $M > 0$ individus, on considère un deuxième modèle qui freine la croissance du modèle (M1) d'autant plus que l'effectif de la population est proche de la capacité d'accueil $M$ :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P_{n+1} - P_n = kP_n(M - P_{n+1}) \tag{M2}$$

2. Dans cette question, on considère l'hypothèse du modèle (M2).
   (a) Montrer que $P_n > 0$ à toute génération $n \in \mathbb{N}$.
   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = 1/P_n$. Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique.
   (c) Exprimer $P_n$ en fonction de $k$, $M$, $n$ et $P_0$.
   (d) En déduire la limite de $P_n$ quand $n \to +\infty$.

On suppose désormais que les effets d'évolution du modèle (M2) se produisent avec une génération de retard sur la population, c'est-à-dire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P_{n+2} - P_n = kP_n(M - P_{n+2}) \tag{M3}$$

3. (a) En vous inspirant de la preuve de la question 2(a) et sans justifier, donner une condition suffisante pour que $P_n > 0$ à toute génération $n \in \mathbb{N}$.
   (b) Trouver un réel $\alpha$, qu'on exprimera en fonction de $M$, tel que la suite $(v_n = 1/P_n - \alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+2} = \frac{v_n}{kM+1}.$$
   (c) Exprimer $v_n$ en fonction de $k$, $M$, $n$, $v_0$ et $v_1$ puis en déduire que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |v_n| \leqslant \frac{|v_0| + |v_1|}{(kM+1)^{(n-1)/2}}.$$
   (d) En déduire la limite de $P_n$ quand $n \to +\infty$.

**Problème** (Étude de l'ensemble des compositions d'un entier)

## 1) Définitions et notations

**Définition 1.** Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, soit $C = [c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}]$ une liste non vide d'entiers naturels qui sont tous différents de 0. On dit que $C$ est une **composition** de l'entier $n$ si :

$$\sum_{i=0}^{k-1} c_i = n.$$

L'entier $k$ est appelé **longueur** de $C$. L'ensemble des compositions de l'entier $n$ est noté $\mathscr{C}_n$. On rappelle que $\operatorname{card}(\mathscr{C}_n)$ désigne le nombre d'éléments de l'ensemble $\mathscr{C}_n$.

Par exemple, $[1,3,2,2]$ est une composition de l'entier 8. On a $\mathscr{C}_1 = \{[1]\}, \mathscr{C}_2 = \{[1,1], [2]\}, \mathscr{C}_3 = \{[1,1,1], [1,2$ et $\operatorname{card}(\mathscr{C}_1) = 1, \operatorname{card}(\mathscr{C}_2) = 2, \operatorname{card}(\mathscr{C}_3) = 4$.

Pour simplifier les notations, étant donnée une composition $C$, $c_i$ désigne l'élément de $C$ au rang $i$, l'indexation des éléments commençant par 0. Par exemple, pour $C = [3,1,4,2,2]$ $c_3$ est égal à 2.

**Définition 2.** Soient $C$ et $D$ deux compositions d'un même entier $n$. On dit que $C$ et $D$ sont **semblables** si tout entier $k$ apparaît le même nombre de fois dans $C$ et $D$.

Par exemple, $[3,2,3,2,1]$ et $[3,3,1,2,2]$ sont semblables. Par contre, $[3,2,3,2,1]$ et $[3,3,2,1,1,1]$ ne sont pas semblables : le nombre 1 apparaît une seule fois dans la première composition mais trois fois dans la seconde.

**Définition 3.** Soient $C = [c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}]$ et $D = [d_0, \ldots, d_{l-1}]$ deux compositions d'un même entier $n$. On dit que $C$ est **moins fine** que $D$ (ou que $D$ est plus fine que $C$) si :

$$\forall r \in [\![0, k-1]\!], \exists s \in [\![0, l-1]\!], \sum_{i=0}^{r} c_i = \sum_{j=0}^{s} d_j.$$

Par exemple, $C = [5,4,2,5,3]$ est moins fine que $D = [3,1,1,2,2,1,1,5,2,1]$. En effet, on a :

$$\begin{array}{ll} 5 & = 3+1+1 \\ 5+4 & = 3+1+1+2+2 \\ 5+4+2 & = 3+1+1+2+2+1+1 \\ 5+4+2+5 & = 3+1+1+2+2+1+1+5 \\ 5+4+2+5+3 & = 3+1+1+2+2+1+1+5+2+1 \end{array}.$$

Dans la suite, on s'intéresse à différents problèmes d'énumération en lien avec les nouveaux objets introduits précédemment.

## 2) Exemples

1. Déterminer sans justifier toutes les compositions de l'entier 4.
2. Déterminer sans justifier toutes les compositions de longueur égale à 3 de l'entier 5.
3. Déterminer sans justifier toutes les compositions semblables à $[4,2,2,3]$.
4. Déterminer sans justifier toutes les compositions moins fines que $[3,2,4,5]$.
5. Combien de compositions sont semblables à $[3,1,1,2,4,5,3,4,3]$ ? Justifier votre réponse.

## 3) Une approche informatique

On représentera une composition $C$ à l'aide d'une liste Python. Par exemple, la composition $C = [3,1,1]$ est représentée en Python par la liste `C=[3,1,1]`.

6. Quelle fonction Python permet d'obtenir la longueur d'une liste $L$ ?
7. Écrire une fonction `somme(L)` qui prend en argument une liste d'entiers `L` et qui renvoit la somme de ces éléments.
8. Écrire une fonction `occurrence(L,x)` qui prend en arguments une liste $L$ et un nombre $x$ et qui renvoit le nombre de fois que $x$ apparaît dans la liste $L$.
9. En déduire une fonction `semblables(C,D)` qui prend en arguments deux listes représentant des compositions et qui renvoit `True` si les deux compositions sont semblables et `False` sinon.

10. On considère les fonctions suivantes :

```
def mystere1(C) :
    L = []
    for i in range(len(C)) :
        S = 0
        for j in range(i+1) :
            S = S+C[j]
        L.append(S)
    return L
```

```
def mystere2(C,D) :
    L = mystere1(C)
    M = mystere1(D)
    for x in L :
        if occurrence(M,x) == 0 :
            return False
    return L[len(L)-1] == M[len(M)-1]
```

   (a) Dans cette question uniquement, $C = [3, 2, 2, 1, 4]$ et $D = [2, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1]$. Expliciter les listes `mystere1(C)` et `mystere1(D)` puis donner la valeur de `mystere2(C,D)`.

   (b) Soient $C$ et $D$ deux listes d'entiers représentant des compositions. Expliciter une condition nécessaire et suffisante sur $C$ et $D$ pour que `mystere2(C,D)` soit égale à `True`.

## 4) Dénombrement de différents ensembles

Désormais, la longueur d'une composition $C$ est notée $\ell(C)$.

11. On cherche à déterminer une expression de $\operatorname{card}(\mathscr{C}_n)$ pour tout $n \geq 1$. Pour cela, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on définit les ensembles $\mathscr{A}_n = \{C \in \mathscr{C}_n \mid c_0 = 1\}$ et $\mathscr{B}_n = \{C \in \mathscr{C}_n \mid c_0 > 1\}$.
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Montrer par double inclusion que : $\mathscr{C}_n = \mathscr{A}_n \cup \mathscr{B}_n$.
   (b) Soit $n \geq 2$. Montrer que $\mathscr{A}_n = \left\{\left[1, d_0, d_1, \ldots, d_{\ell(D)-1}\right], D \text{ décrit } \mathscr{C}_{n-1}\right\}$ et $\mathscr{B}_n = \left\{\left[d_0+1, d_1, \ldots, d_{\ell(D)-1}\right], D \text{ décrit } \mathscr{C}_{n-1}\right\}$.
   (c) Soit $n \geq 2$. Montrer que $\operatorname{card}(\mathscr{A}_n) = \operatorname{card}(\mathscr{B}_n) = \operatorname{card}(\mathscr{C}_{n-1})$.
   (d) Soit $n \geq 2$. Trouver une relation entre $\operatorname{card}(\mathscr{C}_n)$ et $\operatorname{card}(\mathscr{C}_{n-1})$.
   (e) En déduire pour tout entier $n \in \mathbb{N}^\star$ le cardinal de $\mathscr{C}_n$.
12. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Déterminer le nombre de compositions semblables à la composition $C = [1^2, 2^2, \ldots, n^2]$. Expliciter l'entier dont $C$ est la composition. On en donnera une écriture simplifiée.
13. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Décrire l'ensemble des compositions de longueur exactement 2 de l'entier $n$. Quel est le cardinal de cet ensemble ? Justifier vos réponses.
14. Soit $C = [c_0, c_1, c_2]$ une composition. Décrire l'ensemble des compositions moins fines que $C$ et en déduire son cardinal.

## 5) Une approche bijective

Pout tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on rappelle que $\mathscr{P}(\llbracket 1, n-1 \rrbracket)$ désigne l'ensemble des parties de $\{1, 2, \ldots, n-1\}$. Pour tout entier $n \geq 1$, on définit les applications $f_n : \mathscr{C}_n \to \mathscr{P}(\llbracket 1, n-1 \rrbracket)$ et $g_n : \mathscr{P}(\llbracket 1, n-1 \rrbracket) \to \mathscr{C}_n$ par :

$$\forall C \in \mathscr{C}_n \backslash \{[n]\}, f_n(C) = \left\{\sum_{j=0}^{k} c_j, k \text{ décrit } \llbracket 0, \ell(C) - 2 \rrbracket\right\} \text{ et } f_n([n]) = \emptyset,$$

et pour toute partie non vide $A$ de $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$, en notant $a_0 < a_1 < \ldots < a_{k-1}$ les éléments de $A$ rangés l'ordre croissant on définit

$$g_n(A) = [a_0, a_1 - a_0, \ldots, a_{k-1} - a_{k-2}, n - a_{k-1}] \text{ et } g_n(\emptyset) = [n].$$

Par exemple, on a $f_{18}([4, 3, 3, 7, 1]) = \{4, 7, 10, 17\}$ et $g_{15}(\{1, 6, 9, 12\}) = [1, 5, 3, 3, 3]$.

15. Pour tout $C \in \mathscr{C}_3$, calculer $f_3(C)$.
16. Calculer $g_{12}(\{3, 7, 8, 10\})$ et $g_9(\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\})$.

Dorénavant, on fixe $n \in \mathbb{N}^\star$ et on pose $f = f_n$ et $g = g_n$.

17. (a) Montrer que $f$ et $g$ sont des applications réciproques l'une de l'autre.
    (b) En déduire le cardinal de $\mathscr{C}_n$ à l'aide d'une nouvelle preuve.
18. Soit $k \in \mathbb{N}^\star$.
    (a) Soit $C \in \mathscr{C}_n$. Montrer que la longueur de $C$ est égale à $k$ si et seulement si $f(C)$ est de cardinal égal à $k-1$.
    (b) En déduire le nombre de compositions de $n$ de longueur exactement $k$.
19. (a) Soient $C$ et $D$ deux compositions de $n$. Montrer que $C$ est moins fine que $D$ si et seulement si $f(C) \subset f(D)$.
    (b) Soit $C \in \mathscr{C}_n$. Déterminer le nombre de compositions de $n$ moins fines que $C$.
    (c) Soit $C \in \mathscr{C}_n$. Déterminer le nombre de compositions de $n$ plus fines que $C$.

# Corrigé du DS n° 3 de mathématiques et d'informatique

## Exercice 1

*On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 3}$ définie par :*

$$\forall n \geqslant 3, \quad u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}}.$$

*Le but de cet exercice est de montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 3}$ converge et de déterminer sa limite.*

1. ***[Informatique]** Les fonctions demandées sont à écrire en Python.*
   (a) *Écrire une fonction* `fact` *qui prend en argument un entier $m \in \mathbb{N}$ puis qui renvoie la valeur de sa factorielle $m!$.*

   ▶ Par exemple :

```
def fact(m):
    P=1
    for i in range(1,m+1):
        P=P*i
    return P
```

   (b) *Écrire une fonction* `coeffbi` *qui prend en arguments deux entiers $p \in \mathbb{Z}$ et $m \in \mathbb{N}$ puis qui renvoie la valeur du coefficient binomial $\binom{m}{p}$.*

   ▶ Par exemple :

```
def coeffbi(p,m):
    if p<0 or p>m:
        return 0
    else:
        return fact(m)/(fact(p)*fact(m-p))
```

   (c) *Écrire une fonction* `suite` *qui prend en argument un entier $n \geqslant 3$ puis qui renvoie la valeur de $u_n$.*

   ▶ Par exemple :

```
def suite(n):
    S=0
    for k in range(n+1):
        S=S+1/coeffbi(k,n)
    return S
```

2. *Calculer $u_3$, $u_4$, et $u_5$.*

   ▶ On obtient à l'aide du triangle de Pascal :

$$u_3 = \sum_{k=0}^{3} \frac{1}{\binom{3}{k}} = \frac{1}{\binom{3}{0}} + \frac{1}{\binom{3}{1}} + \frac{1}{\binom{3}{2}} + \frac{1}{\binom{3}{3}} = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{1} = \boxed{\frac{8}{3}},$$

$$u_4 = \sum_{k=0}^{4} \frac{1}{\binom{4}{k}} = \frac{1}{\binom{4}{0}} + \frac{1}{\binom{4}{1}} + \frac{1}{\binom{4}{2}} + \frac{1}{\binom{4}{3}} + \frac{1}{\binom{4}{4}} = \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{1} = \boxed{\frac{8}{3}}$$

$$\text{et} \quad u_5 = \sum_{k=0}^{5} \frac{1}{\binom{5}{k}} = \frac{1}{\binom{5}{0}} + \frac{1}{\binom{5}{1}} + \frac{1}{\binom{5}{2}} + \frac{1}{\binom{5}{3}} + \frac{1}{\binom{5}{4}} + \frac{1}{\binom{5}{5}} = \frac{1}{1} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{5} + \frac{1}{1} = \boxed{\frac{13}{5}}.$$

3. *Dans cette question, on fixe un entier $n \geqslant 3$.*

(a) *Montrer que* $\displaystyle\sum_{k=0}^{2} \frac{1}{\binom{n}{k}} \geqslant \sum_{k=0}^{3} \frac{1}{\binom{n+1}{k}}$.

▶ On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{2} \frac{1}{\binom{n}{k}} - \sum_{k=0}^{3} \frac{1}{\binom{n+1}{k}} &= \frac{1}{\binom{n}{0}} + \frac{1}{\binom{n}{1}} + \frac{1}{\binom{n}{2}} - \left( \frac{1}{\binom{n+1}{0}} + \frac{1}{\binom{n+1}{1}} + \frac{1}{\binom{n+1}{2}} + \frac{1}{\binom{n+1}{3}} \right) \\
&= \frac{1}{1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{\frac{n(n-1)}{2}} - \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{\frac{(n+1)n}{2}} - \frac{1}{\frac{(n+1)n(n-1)}{6}} \\
&= \frac{1}{n} + \frac{2}{n(n-1)} - \frac{1}{n+1} - \frac{2}{(n+1)n} - \frac{6}{(n+1)n(n-1)} \\
&= \frac{(n+1)(n-1) + 2(n+1) - n(n-1) - 2(n-1) - 6}{(n+1)n(n-1)} \\
&= \frac{n^2 - 1 + 2n + 2 - n^2 + n - 2n + 2 - 6}{(n+1)n(n-1)} \\
&= \frac{n-3}{(n+1)n(n-1)}.
\end{aligned}$$

Or $n \geqslant 3$ donc chacun des facteurs apparaissant dans le résultat ci-dessus est positif. On en déduit que ce résultat est positif et donc que :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{2} \frac{1}{\binom{n}{k}} \geqslant \sum_{k=0}^{3} \frac{1}{\binom{n+1}{k}}}.$$

(b) *Justifier que* $\dfrac{1}{\binom{n}{k}} \geqslant \dfrac{1}{\binom{n+1}{k+1}}$ *pour tout* $k \in [\![0, n]\!]$ *puis en déduire que* $\displaystyle\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}} \geqslant \sum_{k=4}^{n+1} \frac{1}{\binom{n+1}{k}}$.

▶ Soit $k \in [\![0, n]\!]$. On a par définition des coefficients binomiaux :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\binom{n}{k}} - \frac{1}{\binom{n+1}{k+1}} &= \frac{1}{\frac{n!}{k!(n-k)!}} - \frac{1}{\frac{(n+1)!}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!}} \\
&= \frac{k!(n-k)!}{n!} - \frac{(k+1)!(n-k)!}{(n+1)!} \\
&= \frac{k!(n-k)!(n+1)}{n!(n+1)} - \frac{k!(k+1)(n-k)!}{(n+1)!} \\
&= \frac{k!(n-k)!\big((n+1)-(k+1)\big)}{(n+1)!} \\
&= \frac{k!(n-k)!(n-k)}{(n+1)!}.
\end{aligned}$$

Or les factorielles sont positives (par définition) et $n \geqslant k$. On en déduit que le résultat ci-dessus est positif et donc que :

$$\boxed{\frac{1}{\binom{n}{k}} \geqslant \frac{1}{\binom{n+1}{k+1}}} \quad \text{pour tout } k \in [\![0, n]\!].$$

*On peut aussi utiliser la formule du triangle de Pascal :* $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$. *Puisque* $\binom{n}{k+1} \geqslant 0$*, on en déduit que* $\binom{n}{k} \leqslant \binom{n+1}{k+1}$ *d'où le résultat en passant à l'inverse (car la fonction* $x \mapsto 1/x$ *est strictement décroissante sur* $]0, +\infty[$*).*

En sommant ces inégalités pour $k$ allant de 3 à $n$, on obtient :

$$\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}} \geqslant \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{\binom{n+1}{k+1}} = \sum_{\ell=4}^{n+1} \frac{1}{\binom{n+1}{\ell}} \quad \text{en posant le décalage d'indice } \ell = k+1.$$

Puisque $k$ et $\ell$ sont des variables muettes, on a bien montré que :

$$\boxed{\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}} \geqslant \sum_{k=4}^{n+1} \frac{1}{\binom{n+1}{k}}}.$$

4. *Prouver que la suite $(u_n)_{n\geqslant 3}$ est décroissante puis en déduire qu'elle converge.*

▶ Soit $n \geqslant 3$. On a :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{\binom{n+1}{k}} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}} \\
&= \sum_{k=0}^{3} \frac{1}{\binom{n+1}{k}} + \sum_{k=4}^{n+1} \frac{1}{\binom{n+1}{k}} - \left( \sum_{k=0}^{2} \frac{1}{\binom{n}{k}} + \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}} \right) \quad \text{par associativité} \\
&= \underbrace{\left( \sum_{k=0}^{3} \frac{1}{\binom{n+1}{k}} - \sum_{k=0}^{2} \frac{1}{\binom{n}{k}} \right)}_{\substack{\leqslant 0 \\ \text{d'après la question 3(a)}}} + \underbrace{\left( \sum_{k=4}^{n+1} \frac{1}{\binom{n+1}{k}} - \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}} \right)}_{\substack{\leqslant 0 \\ \text{d'après la question 3(b)}}} \quad \text{par commutativité} \\
&\leqslant 0.
\end{aligned}$$

On en déduit que $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\geqslant 3} \text{ est décroissante}}$. De plus, la suite $(u_n)_{n\geqslant 3}$ est minorée par 0 puisque chaque terme est la somme des inverses de coefficients binomiaux qui sont positifs (par définition). Par conséquent, $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\geqslant 3} \text{ est convergente}}$.

5. *Dans cette question, on fixe un entier $n \geqslant 3$.*

   (a) *Montrer que*

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!], \quad \frac{n+2}{\binom{n}{k}} - \frac{2n+2}{\binom{n+1}{k}} = \frac{n-k}{\binom{n}{k+1}} - \frac{n-k+1}{\binom{n}{k}}.$$

▶ Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. On a par définition des coefficients binomiaux :

$$\begin{aligned}
&\frac{n+2}{\binom{n}{k}} - \frac{2n+2}{\binom{n+1}{k}} - \left( \frac{n-k}{\binom{n}{k+1}} - \frac{n-k+1}{\binom{n}{k}} \right) \\
=& \frac{n+2}{\frac{n!}{k!(n-k)!}} - \frac{2n+2}{\frac{(n+1)!}{k!((n+1)-k)!}} - \frac{n-k}{\frac{n!}{(k+1)!(n-(k+1))!}} + \frac{n-k+1}{\frac{n!}{k!(n-k)!}} \\
=& \frac{(n+2)k!(n-k)!}{n!} - \frac{(2n+2)k!(n+1-k)!}{(n+1)!} \\
&\quad - \frac{(n-k)(k+1)!(n-k-1)!}{n!} + \frac{(n-k+1)k!(n-k)!}{n!} \\
=& \frac{(n+2)k!(n-k)!(n+1)}{n!(n+1)} - \frac{(2n+2)k!(n-k)!(n+1-k)}{(n-k+1)!} \\
&\quad - \frac{k!(k+1)(n-k)!(n+1)}{n!(n+1)} + \frac{(n-k+1)k!(n-k)!(n+1)}{n!(n+1)}
\end{aligned}$$

$$=\frac{k!(n-k)!\big((n+2)(n+1)-(2n+2)(n+1-k)-(k+1)(n+1)+(n-k+1)(n+1)\big)}{(n+1)!}$$
$$=\frac{k!(n-k)!\big(n^2+3n+2-2n^2-4n-2+2nk+2k-nk-k-n-1+n^2+2n+1-nk-k\big)}{(n+1)!}$$
$$=\frac{k!(n-k)!\times 0}{(n+1)!}=0.$$

On en déduit bien que :

$$\forall k\in[\![0,n-1]\!],\quad \boxed{\frac{n+2}{\binom{n}{k}}-\frac{2n+2}{\binom{n+1}{k}}=\frac{n-k}{\binom{n}{k+1}}-\frac{n-k+1}{\binom{n}{k}}}.$$

*On peut aussi simplifier pour tout mettre au même dénominateur $\binom{n}{k}$ :*

$$\frac{2n+2}{\binom{n+1}{k}}=\frac{2n+2}{\frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}}=\frac{2(n+1)}{\frac{n!(n+1)}{k!(n-k)!(n+1-k)}}=\frac{2(n+1-k)}{\binom{n}{k}}$$

$$\text{donc}\quad \frac{n+2}{\binom{n+1}{k}}-\frac{2n+2}{\binom{n+1}{k}}=\frac{n+2-2(n+1-k)}{\binom{n}{k}}=\frac{2k-n}{\binom{n}{k}}$$

*et de même :*

$$\frac{n-k}{\binom{n}{k+1}}=\frac{n-k}{\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}}=\frac{n-k}{\frac{n!(n-k)}{k!(k+1)(n-k)!}}=\frac{k+1}{\binom{n}{k}}$$

$$\text{donc}\quad \frac{n-k}{\binom{n}{k+1}}-\frac{n-k+1}{\binom{n}{k}}=\frac{k+1-(n-k+1)}{\binom{n}{k}}=\frac{2k-n}{\binom{n}{k}}.$$

(b) *En déduire que $(n+2)(u_n-1)-(2n+2)\left(u_{n+1}-\frac{1}{n+1}-1\right)=-n$ puis que $u_{n+1}=1+\frac{n+2}{2n+2}u_n$.*

▶ En sommant les résultats de la question précédente pour $k$ allant de 0 à $n-1$, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{n+2}{\binom{n}{k}}-\frac{2n+2}{\binom{n+1}{k}}\right)=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{n-k}{\binom{n}{k+1}}-\frac{n-k+1}{\binom{n}{k}}\right).$$

Or :

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{n+2}{\binom{n}{k}}-\frac{2n+2}{\binom{n+1}{k}}\right)$$
$$=(n+2)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\binom{n}{k}}-(2n+2)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\binom{n+1}{k}}\qquad\text{par linéarité}$$
$$=(n+2)\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\binom{n}{k}}-\frac{1}{\binom{n}{n}}\right)-(2n+2)\left(\sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{\binom{n+1}{k}}-\frac{1}{\binom{n+1}{n}}-\frac{1}{\binom{n+1}{n+1}}\right)\qquad\text{par associativité}$$
$$=(n+2)(u_n-1)-(2n+2)\left(u_{n+1}-\tfrac{1}{n+1}-1\right)\quad\text{car }\binom{n}{n}=\binom{n+1}{n+1}=1\text{ et }\binom{n+1}{n}=\binom{n+1}{1}=\tfrac{1}{n+1}$$

et :

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{n-k}{\binom{n}{k+1}}-\frac{n-k+1}{\binom{n}{k}}\right)\\
=&\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{n-(k+1)+1}{\binom{n}{k+1}}-\frac{n-k+1}{\binom{n}{k}}\right)\\
=&\frac{n-((n-1)+1)+1}{\binom{n}{(n-1)+1}}-\frac{n-0+1}{\binom{n}{0}} \quad \text{en reconnaissant une somme télescopique}\\
=&\frac{1}{\binom{n}{n}}-\frac{n+1}{1}=1-(n+1)=-n \quad \text{car } \binom{n}{n}=\binom{n}{0}=1.
\end{aligned}$$

On en déduit bien que :

$$\boxed{(n+2)(u_n-1)-(2n+2)\left(u_{n+1}-\tfrac{1}{n+1}-1\right)=-n}.$$

Puis on obtient en isolant $u_{n+1}$ :

$$\begin{aligned}
u_{n+1}&=\frac{-n-\big((n+2)(u_n-1)\big)}{-(2n+2)}+\frac{1}{n+1}+1\\
&=1+\frac{n+(n+2)u_n-n-2}{2n+2}+\frac{2}{2(n+1)}\\
&=1+\frac{(n+2)u_n-2}{2n+2}+\frac{2}{2n+2}\\
&=\boxed{1+\frac{n+2}{2n+2}u_n}.
\end{aligned}$$

6. *On pose $\ell=\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$. À l'aide du résultat de la question précédente, prouver que $\ell=2$.*

► On a :

$$\lim_{n\to+\infty}u_{n+1}=\lim_{n\to+\infty}u_n=\ell \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty}\frac{n+2}{2n+2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1+\frac{2}{n}}{2+\frac{2}{n}}=\frac{1}{2}.$$

Par conséquent, on obtient en passant à la limite dans le résultat de la question précédente :

$$\ell=\lim_{n\to+\infty}u_{n+1}=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{n+2}{2n+2}u_n\right)=1+\frac{1}{2}\ell.$$

On reconnaît une équation du premier degré d'inconnue $\ell$ qu'on résout :

$$\ell=1+\frac{1}{2}\ell \iff \left(1-\frac{1}{2}\right)\ell=1 \iff \boxed{\ell=\frac{1}{1/2}=2}.$$

## Exercice 2

*Cet exercice propose d'étudier le comportement asymptotique de trois modèles de dynamique de population. On note $P_n$ le nombre d'individus à la génération $n\in\mathbb{N}$. Ainsi $P_0>0$ désigne l'effectif initial de la population. Un premier modèle d'évolution consiste à supposer que la production de nouveaux individus est proportionnelle au nombre d'individus présents, c'est-à-dire que :*

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad P_{n+1}-P_n=kP_n \tag{M1}$$

*où $k>0$ est un taux d'accroissement.*

1. (a) *Dans l'hypothèse du modèle (M1), exprimer $P_n$ en fonction de $k$, $n$ et $P_0$.*

▶ On a d'après (M1) :

$$P_{n+1} = kP_n + P_n = (k+1)P_n.$$

On reconnaît une suite géométrique de raison $k+1$. Donc :

$$\boxed{P_n = (k+1)^n P_0}.$$

(b) *En déduire la limite de $P_n$ quand $n \to +\infty$.*

▶ Puisque $k > 0$, on a $k+1 > 1$ et donc $\lim_{n\to+\infty}(k+1)^n = +\infty$. Puisque $P_0 > 0$, on déduit du résultat de la question précédente que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} P_n = +\infty}.$$

*Le résultat est cohérent avec le modèle : si on prend seulement en compte la production d'individus alors la population croît indéfiniment. Ce qui n'est bien sûr pas un modèle réaliste.*

*Afin de prendre en compte le fait que la population évolue dans un biotope fermé, c'est-à-dire un milieu ne pouvant pas contenir plus de $M > 0$ individus, on considère un deuxième modèle qui freine la croissance du modèle (M1) d'autant plus que l'effectif de la population est proche de la capacité d'accueil $M$ :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P_{n+1} - P_n = kP_n(M - P_{n+1}) \tag{M2}$$

2. *Dans cette question, on considère l'hypothèse du modèle (M2).*

(a) *Montrer que $P_n > 0$ à toute génération $n \in \mathbb{N}$.*

▶ On raisonne par récurrence.
Initialisation. Pour $n = 0$, on a $P_0 > 0$ d'après l'énoncé.
Hérédité. On suppose que $P_n > 0$ pour une génération $n \in \mathbb{N}$ fixé. On a d'après (M2) :

$$P_{n+1} + kP_nP_{n+1} = kP_nM + P_n \quad \text{donc} \quad P_{n+1} = \frac{(kM+1)P_n}{1+kP_n}.$$

Or $k > 0$ et $M > 0$ d'après l'énoncé et $P_n > 0$ d'après l'hypothèse de récurrence. On en déduit que chacun des facteurs apparaissant dans le résultat ci-dessus est strictement positif et donc que $P_{n+1} > 0$. Ainsi, pour toute génération $n \in \mathbb{N}$, si $P_n > 0$ alors $P_{n+1} > 0$.
Conclusion. D'après le principe de récurrence, on en déduit que : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ P_n > 0}$.

(b) *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = 1/P_n$. Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique.*

▶ Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= \frac{1}{P_{n+1}} \quad \text{par définition de la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \\
&= \frac{1}{\frac{(kM+1)P_n}{1+kP_n}} \quad \text{en reprenant les calculs de la question précédente} \\
&= \frac{1+kP_n}{(kM+1)P_n} \\
&= \frac{1+\frac{k}{u_n}}{(kM+1)\frac{1}{u_n}} \quad \text{car } u_n = 1/P_n \text{ donc } P_n = 1/u_n \\
&= \frac{u_n+k}{kM+1} = \boxed{\frac{1}{kM+1}u_n + \frac{k}{kM+1}}.
\end{aligned}$$

On reconnaît bien $\boxed{\text{une suite arithmético-géométrique}}$.

(c) *Exprimer $P_n$ en fonction de $k$, $M$, $n$ et $P_0$.*

▶ On cherche $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\alpha = \frac{1}{kM+1}\alpha + \frac{k}{kM+1} \iff \left(1 - \frac{1}{kM+1}\right)\alpha = \frac{k}{kM+1} \iff \alpha = \frac{k}{kM+1-1} = \boxed{\frac{1}{M}}.$$

On a donc d'après le résultat de la question précédente :

$$u_{n+1} - \alpha = \left(\frac{1}{kM+1}u_n + \frac{k}{kM+1}\right) - \left(\frac{1}{kM+1}\alpha + \frac{k}{kM+1}\right) = \frac{1}{kM+1}(u_n - \alpha).$$

On reconnaît une suite géométrique de raison $\frac{1}{kM+1}$. Donc :

$$u_n - \alpha = \left(\frac{1}{kM+1}\right)^n (u_0 - \alpha) = \frac{\frac{1}{P_0} - \frac{1}{M}}{(kM+1)^n}.$$

Et par conséquent :

$$P_n = \frac{1}{u_n} = \frac{1}{\frac{\frac{1}{P_0}-\frac{1}{M}}{(kM+1)^n} + \alpha} = \frac{1}{\frac{\frac{1}{P_0}-\frac{1}{M}}{(kM+1)^n} + \frac{1}{M}} = \boxed{\frac{MP_0}{\frac{M-P_0}{(kM+1)^n} + P_0}}.$$

(d) *En déduire la limite de $P_n$ quand $n \to +\infty$.*

▶ Puisque $k > 0$ et $M > 0$, on a $kM + 1 > 1$ et donc $\lim_{n\to+\infty}(kM+1)^n = +\infty$. On déduit du résultat de la question précédente que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} P_n = \frac{MP_0}{0+P_0} = M}.$$

*Le résultat est cohérent avec le modèle : l'effectif de la population tend vers le maximum d'individus que peut accueillir le milieu dans lequel elle évolue.*

*On suppose désormais que les effets d'évolution du modèle (M2) se produisent avec une génération de retard sur la population, c'est-à-dire que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P_{n+2} - P_n = kP_n(M - P_{n+2}) \qquad \text{(M3)}$$

3. (a) *En vous inspirant de la preuve de la question 2(a) et sans justifier, donner une condition suffisante pour que $P_n > 0$ à toute génération $n \in \mathbb{N}$.*

▶ Il suffit que $\boxed{P_1 > 0}$.

*En effet, en s'inspirant des calculs de la question 2(a), on déduit du modèle (M3) la relation de récurrence suivante :*

$$P_{n+2} = \frac{(kM+1)P_n}{1+kP_n}.$$

*Puisqu'il s'agit d'une relation de récurrence d'ordre 2, on démontre que $P_n > 0$ à toute génération $n \in \mathbb{N}$ en raisonnant par récurrence double. L'hérédité est similaire à celle de la question 2(a). Par contre, pour l'initialisation, on a $P_0 > 0$ d'après l'énoncé mais il faudrait aussi vérifier que $P_1 > 0$.*

(b) *Trouver un réel $\alpha$, qu'on exprimera en fonction de $M$, tel que la suite $(v_n = 1/P_n - \alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+2} = \frac{v_n}{kM+1}.$$

▶ On raisonne par analyse-synthèse.
Analyse. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}
v_{n+2} &= \frac{1}{P_{n+2}} - \alpha \quad \text{par définition de la suite } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \\
&= \frac{1}{\frac{(kM+1)P_n}{1+kP_n}} - \alpha \quad \text{en reprenant les calculs de la question 2(a) pour (M3)} \\
&= \frac{1+kP_n}{(kM+1)P_n} - \alpha \\
&= \frac{1+\frac{k}{v_n+\alpha}}{(kM+1)\frac{1}{v_n+\alpha}} - \alpha \quad \text{car } v_n = 1/P_n - \alpha \text{ donc } P_n = 1/(v_n+\alpha) \\
&= \frac{v_n+\alpha+k}{kM+1} - \alpha = \frac{v_n}{kM+1} + \frac{\alpha+k-\alpha(kM+1)}{kM+1} = \frac{v_n}{kM+1} + \frac{k(1-\alpha M)}{kM+1}.
\end{aligned}$$

Il suffit donc que :

$$\frac{k(1-\alpha M)}{kM+1} = 0 \iff 1-\alpha M = 0 \iff \alpha = \frac{1}{M}.$$

Synthèse. On pose $\boxed{\alpha = 1/M}$. Alors on a bien d'après les calculs de l'analyse :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+2} = \frac{v_n}{kM+1}.$$

*(c) Exprimer $v_n$ en fonction de $k$, $M$, $n$, $v_0$ et $v_1$ puis en déduire que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |v_n| \leqslant \frac{|v_0|+|v_1|}{(kM+1)^{(n-1)/2}}.$$

▶ D'après le résultat de la question précédente, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre deux d'équation caractéristique :

$$q^2 = \frac{1}{kM+1}.$$

Puisque $k > 0$ et $M > 0$, on a $1/(kM+1) > 0$ et donc l'équation caractéristique admet deux solutions : $q_1 = 1/\sqrt{kM+1}$ et $q_2 = -1/\sqrt{kM+1}$. Par conséquent, il existe deux constantes $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \lambda_1 q_1^n + \lambda_2 q_2^n = \lambda_1 \left(\frac{1}{\sqrt{kM+1}}\right)^n + \lambda_2 \left(\frac{-1}{\sqrt{kM+1}}\right)^n = \frac{\lambda_1 + \lambda_2(-1)^n}{(kM+1)^{n/2}}.$$

En particulier, on a pour $n = 0$ et pour $n = 1$ :

$$v_0 = \lambda_1 + \lambda_2 \quad \text{et} \quad v_1 = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{(kM+1)^{1/2}}.$$

Ainsi, $(\lambda_1, \lambda_2)$ est solution du système linéaire suivant :

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = v_0 & (L_1) \\ \lambda_1 - \lambda_2 = v_1\,(kM+1)^{1/2} & (L_2) \end{cases} \\
\iff &\begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{2}\left(v_0 + v_1\,(kM+1)^{1/2}\right) & ((L_1)+(L_2))/2 \\ \lambda_2 = \frac{1}{2}\left(v_0 - v_1\,(kM+1)^{1/2}\right) & ((L_1)-(L_2))/2 \end{cases}
\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\boxed{v_n = \frac{\left(v_0 + v_1 (kM+1)^{1/2}\right) + \left(v_0 - v_1 (kM+1)^{1/2}\right)(-1)^n}{2(kM+1)^{n/2}}}.$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}, \quad |v_n| &= \frac{\left|\left(v_0 + v_1 (kM+1)^{1/2}\right) + \left(v_0 - v_1 (kM+1)^{1/2}\right)(-1)^n\right|}{2(kM+1)^{n/2}} && \text{car } kM+1>0 \\
&\leqslant \frac{\left|v_0 + v_1 (kM+1)^{1/2}\right| + \left|v_0 - v_1 (kM+1)^{1/2}\right| \overbrace{|(-1)^n|}^{=1}}{2(kM+1)^{n/2}} && \text{d'après l'inégalité triangulaire} \\
&\leqslant \frac{|v_0| + |v_1|\,|kM+1|^{1/2} + |v_0| + |v_1|\,|kM+1|^{1/2}}{2(kM+1)^{n/2}} && \text{d'après l'inégalité triangulaire} \\
&= \frac{2\left(|v_0| + |v_1|(kM+1)^{1/2}\right)}{2(kM+1)^{n/2}} \\
&= \frac{\frac{|v_0|}{(kM+1)^{1/2}} + |v_1|}{(kM+1)^{(n-1)/2}}.
\end{aligned}$$

Puisque $kM+1>1$, on a $(kM+1)^{1/2} = \sqrt{kM+1} > 1$ par stricte croissance de la fonction racine et donc $|v_0|/(kM+1)^{1/2} < |v_0|$. Par conséquent :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \boxed{|v_n| \leqslant \frac{|v_0| + |v_1|}{(kM+1)^{(n-1)/2}}}.$$

*(d) En déduire la limite de $P_n$ quand $n \to +\infty$.*

► Puisque $kM+1>1$, on a $\lim_{n\to+\infty}(kM+1)^{(n-1)/2} = +\infty$. D'après le théorème de limite par encadrement, on déduit du résultat de la question précédente que $\lim_{n\to+\infty}|v_n| = 0$ et donc que $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a d'après le résultat de la question 3(b) $v_n = 1/P_n - 1/M$, donc $P_n = 1/(v_n + 1/M)$. Par conséquent :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} P_n = \frac{1}{0+\frac{1}{M}} = M}.$$

## Problème 1
## Énoncé et corrigé de V. Vong

1. On a :

$$\boxed{\mathscr{C}_4 = \{[1,1,1,1],[2,1,1],[1,2,1],[1,1,2],[2,2],[3,1],[1,3],[4]\}}$$

2. Les compositions de longueur 3 de l'entier 5 sont exactement :

$$\boxed{[1,1,3],[1,3,1],[3,1,1],[1,2,2],[2,1,2],[2,2,1]}.$$

3. Les compositions semblables de la composition $[4,2,2,3]$ sont exactement

$$\boxed{\begin{array}{c}[4,2,2,3],[4,2,3,2],[4,3,2,2],[3,4,2,2],[3,2,4,2],[3,2,2,4],\\ [2,2,3,4],[2,2,4,3],[2,4,2,3],[2,3,2,4],[2,3,4,2],[2,4,3,2]\end{array}}$$

4. Les compositions moins fines que $[3,2,4,5]$ sont exactement :

$$\boxed{[3,2,4,5],[5,4,5],[3,6,5],[3,2,9],[9,5],[5,9],[3,11],[14]}.$$

5. Compter le nombre de compositions semblables à $[3,1,1,2,4,5,3,4,3]$ revient à compter le nombre d'anagrammes de cette liste. Il suffit de compter le nombre de façons de placer les 1 puis les 2, puis les 3, puis les 4 et enfin le 5. Ce qui donne :

$$\binom{9}{2}\binom{7}{1}\binom{6}{3}\binom{3}{2}\binom{1}{1}.$$

Après simplification, on obtient : $\boxed{\dfrac{9!}{2!3!2!}}$.

6. La fonction `len` permet de connaître la longueur d'une liste.

7. Voici la fonction demandée

```
def somme(L) :
    S = 0
    for i in range(len(L)) :
        S = S + L[i]
    return S
```

8. Voici la fonction demandée

```
def occurrence(L,x) :
    S = 0
    for i in range(len(L)) :
        if x == L[i] :
            S = S + 1
    return S
```

9. Voici la fonction demandée

```
def semblables(C,D) :
    if somme(C) != somme(D) :
        return False
    else :
        for x in C :
            if occurrence(C,x) != occurrence(D,x) :
                return False
        return True
```

10. (a) On obtient : `mystere1(C)=[3,5,7,8,12]` et `mystere1(D)=[2,3,4,5,7,8,11,12]` et `mystere2(C,D)=True`.

    (b) Soient $C$ et $D$ deux listes d'entiers représentant des compositions. `mystere2(C,D)` est égal à `True` si et seulement si $C$ est moins fine que $D$.

11. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Montrons par double inclusion que $\mathscr{C}_n = \mathscr{A}_n \cup \mathscr{B}_n$.

    — $\mathscr{C}_n \subset \mathscr{A}_n \cup \mathscr{B}_n$

    Soit $C \in \mathscr{C}_n$.

    — Cas 1 : $c_0 = 1$. Dans ce cas, $C \in \mathscr{A}_n$. Donc $C \in \mathscr{A}_n \cup \mathscr{B}_n$

— Cas 2 : $c_0 > 1$. Dans ce cas, $C$ est un élément de $\mathscr{B}_n$. Donc $C \in \mathscr{A}_n \cup \mathscr{B}_n$.
Par disjonction de cas, on en déduit que $\mathscr{C}_n \subset \mathscr{A}_n \cup \mathscr{B}_n$.

— $\mathscr{A}_n \cup \mathscr{B}_n \subset \mathscr{C}_n$
$\mathscr{A}_n$ et $\mathscr{B}_n$ étant des sous-ensembles de $\mathscr{C}_n$ leur réunion est donc un sous-sensemble de $\mathscr{C}_n$.

On a bien $\boxed{\mathscr{A}_n \cup \mathscr{B}_n = \mathscr{C}_n}$.

(b) Soit $n \geq 2$. Montrons que $\mathscr{A}_n = \left\{\left[1, d_0, d_1, \ldots, d_{\ell(D)-1}\right], D \text{ décrit } \mathscr{C}_{n-1}\right\}$ et $\mathscr{B}_n = \left\{\left[d_0+1, d_1, \ldots, d_{\ell(D)-1}\right], D \text{ décrit } \mathscr{C}_{n-1}\right\}$.

— Montrons que $\mathscr{A}_n = \left\{\left[1, d_0, d_1, \ldots, d_{\ell(D)-1}\right], D \text{ décrit } \mathscr{C}_{n-1}\right\}$.
Soit $D \in \mathscr{C}_{n-1}$. La composition $[1, d_0, \ldots, d_{\ell(D)-1}]$ est alors une composition de $\mathscr{C}_n$ commençant par 1. Donc $[1, d_0, \ldots, d_{\ell(D)-1}]$ est un élément de $\mathscr{A}_n$. On en déduit que $\left\{\left[1, d_0, d_1, \ldots, d_{\ell(D)-1}\right], D \text{ décrit } \mathscr{C}_{n-1}\right\} \subset \mathscr{A}_n$
Soit $C \in \mathscr{A}_n$. $C$ commence alors par un 1. $[c_1, \ldots, c_{\ell(C)-1}]$ est donc une composition de $n-1$. On a bien $C \in \left\{\left[1, d_0, d_1, \ldots, d_{\ell(D)-1}\right], D \text{ décrit } \mathscr{C}_{n-1}\right\}$. On en déduit que $\mathscr{A}_n \subset \left\{\left[1, d_0, d_1, \ldots, d_{\ell(D)-1}\right], D \text{ décrit } \mathscr{C}_{n-1}\right\}$
On a bien $\underline{\mathscr{A}_n = \left\{\left[1, d_0, d_1, \ldots, d_{\ell(D)-1}\right], D \text{ décrit } \mathscr{C}_{n-1}\right\}}$.

— Montrons que $\mathscr{B}_n = \left\{\left[d_0+1, d_1, \ldots, d_{\ell(D)-1}\right], D \text{ décrit } \mathscr{C}_{n-1}\right\}$.
Soit $D \in \mathscr{C}_{n-1}$. Alors $[d_0+1, \ldots, d_{\ell(D)-1}]$ est une composition de l'entier $n$ dont le premier terme strictement plus grand que 1. Donc cette composition est un élément de $\mathscr{B}_n$. On a bien $\left\{\left[d_0+1, d_1, \ldots, d_{\ell(D)-1}\right], D \text{ décrit } \mathscr{C}_{n-1}\right\} \subset \mathscr{B}_n$.
Soit $C$ un élément de $\mathscr{B}_n$. Par définition de $C$, $c_0 > 1$. $[c_0 - 1, c_1, \ldots, c_{\ell(C)-1}]$ est donc ue composition de $n-1$. On en déduit que $C$ est un élément de $\left\{\left[d_0+1, d_1, \ldots, d_{\ell(D)-1}\right], D \text{ décrit } \mathscr{C}_{n-1}\right\} \subset \mathscr{B}_n$.
Par double inclusion, on en déduit que $\underline{\left\{\left[d_0+1, d_1, \ldots, d_{\ell(D)-1}\right], D \text{ décrit } \mathscr{C}_{n-1}\right\} = \mathscr{B}_n}$.

(c) Soit $n \geq 2$. Constatons que si $C$ et $D$ sont deux compositions différentes de $n-1$ alors $[1, c_0, \ldots, c_{\ell(C)-1}]$, $[1, d_0, \ldots, d_{\ell(D)-1}]$, $[c_0+1, c_1, \ldots, c_{\ell(C)-1}]$ et $[d_0+1, d_1, \ldots, d_{\ell(D)-1}]$ sont des compositions différentes deux à deux. On en déduit d'après la question 11.c que
$\boxed{\mathrm{card}\,(\mathscr{A}_n) = \mathrm{card}\,(\mathscr{B}_n) = \mathrm{card}\,(\mathscr{C}_{n-1})\,.}$

(d) Soit $n \geq 2$. D'après la question 11.a, on a $\mathscr{C}_n = \mathscr{A}_n \cup \mathscr{B}_n$. Cette réunion étant disjointe, on en déduit que

$$\mathrm{card}\,(\mathscr{C}_n) = \mathrm{card}\,(\mathscr{A}_n) + \mathrm{card}\,(\mathscr{B}_n)\,.$$

Or d'après la question 11.c, on a $\mathrm{card}\,(\mathscr{C}_{n-1}) = \mathrm{card}\,(\mathscr{A}_n) = \mathrm{card}\,(\mathscr{B}_n)$. Donc

$$\boxed{\mathrm{card}\,(\mathscr{C}_n) = 2\mathrm{card}\,(\mathscr{C}_{n-1})}.$$

$\mathrm{card}\,(\mathscr{C}_n)$ et $\mathrm{card}\,(\mathscr{C}_{n-1})$.

(e) On en déduit que la suite $(\mathrm{card}\,(\mathscr{C}_n))_{n \geq 1}$ est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme 1. Donc

$$\boxed{\forall n \geq 1, \mathrm{card}\,(\mathscr{C}_n) = 2^{n-1}}.$$

12. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Cela revient à déterminer le nombre de permutations de l'ensemble $\{1^2, \ldots, n^2\}$. Il y a donc $\boxed{n!}$ éléments. Par définition, $C$ est la composition de l'entier $\sum_{k=1}^n k^2$. C'est-à-dire de l'entier $\boxed{\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$.

13. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Les compositions de longueur 2 de l'entier $n$ sont exactement de la forme $[k, n-k]$ où $k \in [\![1, n-1]\!]$. En effet : soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. $[k, n-k]$ est alors une composition de $n$ de longueur 2. Réciproquement, soit $[c_0, c_1]$ une composition de $n$ de longueur 2. Nécessairement, $c_0 \in [\![1, n-1]\!]$. De plus, $c_0 + c_1 = n$. Donc $c_1 = n - c_0$. D'où : $[c_0, c_1] = [c_0, n - c_0]$.

De plus, si $[k, n-k]$ et $[l, n-l]$ sont deux compositions de $n$ de longueur 2. On a $[k, n-k]=[l, n-l]$ si et seulement si $k=l$.

Il en résulte que dans l'ensemble $\{[k, n-k], k \in [\![1, n-1]\!]\}$ chaque composition de longueur 2 de $n$ apparaît une et une seule fois.

Donc le nombre de compositions de longueur 2 de $n$ est égal à $\boxed{n-1}$.

14. Soit $C=[c_0, c_1, c_2]$ une composition. L'ensemble des compositions moins fines que $C$ est donné par

$$\{[c_0, c_1, c_2],[c_0+c_1, c_2],[c_0, c_1+c_2],[c_0+c_1+c_2]\}.$$

Cet ensemble a donc 4 éléments.

15. On a

$$\text{(a)}\underline{f([3])=\emptyset}, \quad \text{(b)}\underline{f([1,2])=\{1\}} \quad \text{(c)}\underline{f([2,1])=\{2\}} \quad \text{(d)}\underline{f([1,1,1])=\{1,2\}}.$$

16. On a $\boxed{g_{12}(\{3,7,8,10\})=[3,4,1,2,2]}$ et $\boxed{g_9(\{1,2,3,4,5,6,7,8\})=[1,1,1,1,1,1,1,1,1]}$.

Dorénavant, on fixe $n \in \mathbb{N}^\star$ et on pose $f=f_n$ et $g=g_n$.

17. (a) Calculons $f \circ g$ et $g \circ f$

— Calcul de $f \circ g$. On a $f \circ g: \mathscr{P}([\![1, n-1]\!]) \rightarrow \mathscr{P}([\![1, n-1]\!])$

Soit $A=\{a_0<a_1<\ldots<a_{k-1}\}$ un sous-ensemble non vide de $[\![1, n-1]\!]$. On a alors :

$$(f \circ g)(A)=f([a_0, a_1-a_0, \ldots, n-a_{k-1}]).$$

La longueur de la liste étant égale à $k+1$, on a donc

$$(f \circ g)(A)=\{a_0+\sum_{i=1}^j(a_i-a_{i-1}), j \text{ décrit } [\![0, k-1]\!]\}.$$

On reconnaît alors une somme télescopique d'où

$$(f \circ g)(A)=\{a_0+a_j-a_0, j \text{ décrit } [\![0, k-1]\!]\}.$$

D'où $(f \circ g)(A)=A$

De plus, $(f \circ g)(\emptyset)=f([n])=\emptyset$. On en déduit que $\underline{f \circ g=Id_{\mathscr{P}([\![1, n-1]\!])}}$.

— Calculons $g \circ f$.

Soit $C \in \mathscr{C}_n$ différent de $[n]$. On a

$$(g \circ f)(C)=g\left(\left\{\sum_{j=0}^k c_j, k \text{ décrit } [\![0, \ell(C)-2]\!]\right\}\right).$$

Cet ensemble contient exactement $\ell(C)-1$ éléments. Posons

$$D=g\left(\left\{\sum_{j=0}^k c_j, k \text{ décrit } [\![0, \ell(C)-2]\!]\right\}\right).$$

Vérifions que $D=C$. Par construction, on a $d_0=c_0$. Soit $1 \leq j \leq \ell(C)-2$. On a

$$d_j=\sum_{k=0}^j c_k-\sum_{k=0}^{j-1} c_k=c_j.$$

Pour $j=\ell(C)-1$, on a $d_j=n-\sum_{k=0}^{j-1} c_k=\sum_{k=0}^j c_k-\sum_{k=0}^{j-1} c_k=c_j$.

On en déduit que $C=D$.

Il en résulte que $\underline{g \circ f=Id_{\mathscr{C}_n}}$.

$f$ et $g$ sont bien réciproques l'une de l'autre.

(b) $f$ est donc une bijection. On en déduit que $\mathscr{C}_n$ et $\mathscr{P}(\llbracket 1, n-1 \rrbracket)$ ont le même cardinal. Or ce dernier contient exactement $2^{n-1}$ éléments. Donc

$$\boxed{\operatorname{card}(\mathscr{C}_n) = 2^{n-1}}.$$

18. Soit $k \in \mathbb{N}^\star$.

(a) Soit $C \in \mathscr{C}_n$.

— Supposons que $\ell(C) = k$. Par construction, $f(C)$ contient exactement $\operatorname{card}(\llbracket 0, \ell(C) - 2 \rrbracket)$ éléments. Donc le cardinal de $f(C)$ est égal à $k-1$.

— Supposons que $\operatorname{card}(f(C)) = k-1$. Montrons que $\ell(C) = k$. Notons $A = f(C)$. $g$ étant la réciproque de $f$, on a $g(A) = C$. $A$ contenant exactement $k-1$ éléments $g(A)$ est une composition de longueur $k-1+1$. Donc de longueur $k$.

Donc la longueur de $C$ est égale à $k$ si et seulement si $f(C)$ est de cardinal égal à $k-1$.

(b) D'après la question 18.b, on en déduit que le nombre de compositions de l'entier de longueur $k$ est égale au nombre de $k-1$-combinaisons de $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$. Il y en a donc $\binom{n-1}{k-1}$.

19. (a) Soient $C$ et $D$ deux compositions de $n$.

— Supposons que $C$ est moins fine $D$. Montrons que $f(C) \subset f(D)$. Soit $x \in f(C)$. Il existe $k \in \llbracket 0, \ell(C) - 2 \rrbracket$ vérifiant

$$x = \sum_{j=0}^{k} c_j.$$

Or $C$ est moins fine que $D$ et $x < n$. Donc il existe $l \in \llbracket 0, \ell(D) - 2 \rrbracket$ vérifiant

$$x = \sum_{j=0}^{l} d_j.$$

Il en résulte que $x \in f(D)$.

— Suppsosons que $f(C) \subset f(D)$. Montrons que $C$ est moins fine que $D$. Pour $r = \ell(C) - 1$, on a $\sum_{k=0}^{r} c_k = n = \sum_{k=0}^{\ell(D)-1} d_k$.
Soit $0 \leq r \leq \ell(C) - 2$.

$$\sum_{i=0}^{r} c_i \in f(C).$$

Or $f(C)$ est inclus dans $f(D)$. Donc il existe $0 \leq s \leq \ell(D) - 2$ vérifiant $\sum_{i=0}^{r} c_i = \sum_{i=0}^{s} d_i$.
Par disjonction de cas, on en déduit que $C$ est moins fine que $D$.

On en déduit que $C$ est moins fine que $D$ si et seulement si $f(C) \subset f(D)$.

(b) Soit $C \in \mathscr{C}_n$.D'après la question 19.a, on en déduit que le nombre de compositions moins fines que $C$ est égal au nombre de parties incluses dans $f(C)$. On en déduit que le cardinal demandé est égal à $2^{\operatorname{card}(f(C))}$. Or d'après la question 18, on a $\operatorname{card}(f(C)) = \ell(C) - 1$. Ainsi, le nombre de compositions moins fines que $C$ est égal à

$$\boxed{2^{\ell(C)-1}}.$$

(c) Soit $C \in \mathscr{C}_n$. En raison de façon similaire, on constate que le nombre de compositions plus fine que $C$ est égal au nombre de parties contenant $f(C)$ et incluses dans $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$. En considérant les complémentaires, cela revient à compter le nombre de parties de $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$ incluses dans $\overline{f(C)}$. Or cet ensemble est de cardinal $n - 1 - (\ell(C) - 1) = n - \ell(C)$. On en déduit que le nombre de compositions plus fines que $C$ est égal à

$$\boxed{2^{n-\ell(C)}}.$$

# DS n° 4 de mathématiques et d'informatique

## durée : 3 heures

### Exercice 1

On note respectivement $0_2$ et $I_2$ la matrice nulle et la matrice identité de l'ensemble $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels. Pour tout cet exercice, on fixe une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ telle que $\delta = ad - bc < 0$. De plus, on pose $\tau = a + d$ et $P : x \mapsto x^2 - \tau x + \delta$.

1. Montrer que $P(M) = 0_2$.
2. Justifier l'existence de deux réels distincts $\lambda$ et $\mu$ tels que $\lambda + \mu = \tau$ et $\lambda\mu = \delta$. Les expressions de $\lambda$ et $\mu$ ne sont pas demandées.

Pour la suite de l'exercice, on pose $A = M - \lambda I_2$ et $B = M - \mu I_2$.

3. Montrer que $AB = 0_2$. Les matrices $A$ et $B$ sont-elles inversibles ?
4. Prouver que $A^n = (\mu - \lambda)^{n-1} A$ pour tout entier $n \geqslant 1$. Déterminer une expression similaire pour les puissances de $B$.
5. Trouver deux réels $\alpha$ et $\beta$ tels que $\alpha + \beta \neq 0$ et $M = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} A + \frac{\beta}{\alpha+\beta} B$. Donner une expression de $\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$ et $\frac{\beta}{\alpha+\beta}$ en fonction de $\lambda$ et $\mu$.
6. À l'aide de la formule du binôme de Newton, montrer que $\forall n \geqslant 1,\ M^n = \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta} A\right)^n + \left(\frac{\beta}{\alpha+\beta} B\right)^n$.
7. Déduire des résultats précédents que $M^n$ est de la forme $x_n M + y_n I_2$ pour tout entier $n \geqslant 1$, où $x_n$ et $y_n$ sont deux réels à exprimer en fonction de $\lambda$, $\mu$ et $n$.

### Exercice 2

Pour tout couple d'entiers $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, on pose $I_{p,q} = \displaystyle\int_0^1 x^p (1 - x)^q \mathrm{d}x$.

1. Soit $(p, q) \in \mathbb{N}^2$. Montrer que $I_{p,q} = I_{q,p}$ à l'aide du changement de variable $t = 1 - x$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $I_{n,0}$ et $I_{0,n}$.
3. Soit $(p, q) \in \mathbb{N}^2$. Montrer que $I_{p,q+1} = \frac{q+1}{p+1} I_{p+1,q}$.
4. Par récurrence, démontrer que la proposition suivante est vraie pour tout $q \in \mathbb{N}$ :

$$\mathscr{P}(q) : \text{«}\forall p \in \mathbb{N},\ I_{p,q} = \frac{p!q!}{(p + q + 1)!}\text{»}.$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Le but de cette question est de simplifier la somme $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{n + k + 1}$.
   (a) Montrer que $I_{n,n} = S_n$.
   (b) En déduire que $S_n = \dfrac{1}{\binom{2n}{n}(2n + 1)}$.

## **Exercice 3** (Informatique)

On utilisera seulement le langage Python et on pourra faire appel aux fonctions des questions précédentes sans avoir besoin de les réécrire. La question 3 peut être traitée sans avoir répondu aux questions 1 et 2.

1. On considère la fonction `mystere` ci-dessous.

```
def mystere(L,n):
    if n>len(L):
        return 'erreur'
    M=[]
    for i in range(n):
        M.append(L[n-1-i])
    for i in range(n,len(L)):
        M.append(L[i])
    return M
```

   (a) Que renvoie `mystere([5,7,1,8,3],6)` ?

   (b) Que renvoie `mystere([5,7,1,8,3],2)` ?

   (c) Que renvoie `mystere([5,7,1,8,3],4)` ?

   (d) On fixe une liste `L` quelconque pour cette question. Expliquer ce que renvoient `mystere(L,1)` et `mystere(L,len(L))`.

2. À l'aide de la fonction `mystere`, on cherche un algorithme permettant de trier les éléments d'une liste dans l'ordre croissant. Par exemple, on peut trier les éléments de la liste `L=[4,2,5,1,3]` en utilisant la suite d'instructions suivante.

```
L=mystere(L,3)
L=mystere(L,5)
L=mystere(L,3)
L=mystere(L,4)
L=mystere(L,2)
L=mystere(L,3)
```

   (a) Qu'affiche la commande `print(L)` après l'exécution de chacune des six lignes ci-contre ?

   (b) En vous inspirant de l'exemple ci-contre, déterminer une suite d'instructions permettant de trier les éléments de la liste `L=[3,2,4,1]`.

   (c) Même question pour la liste `L=[1,6,4,7,4,2]`.

3. Écrire une fonction `max` qui prend en argument une liste `L` et un entier `n` puis qui renvoie le plus petit indice du maximum des `n` premiers éléments de `L` (ou la chaîne de caractères `'erreur'` si `L` contient moins de `n` éléments). Par exemple, `max([3,5,2,5,9,2],4)` renvoie l'entier `1`.

4. À l'aide des fonctions `mystere` et `max` (et sans utiliser la méthode `.sort()`), écrire une fonction `trier` qui prend en argument une liste `L` puis qui renvoie la liste de ses éléments triés dans l'ordre croissant.

## **Exercice 4**

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ et une matrice colonne d'inconnues $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{4,1}(\mathbb{R})$.

1. Discuter du nombre de solutions du système $AX = \lambda X$ en fonction des valeurs du paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. Résoudre le système $AX = \lambda X$ pour $\lambda = 0$, $\lambda = 1$, $\lambda = 2$ et $\lambda = 3$.

## **Exercice 5**

Le but de cet exercice est de déterminer toutes les fonctions $x$ dérivable sur $\mathbb{R}$ telles que pour tout $t \in \mathbb{R}$ :

$$x(t) > 0 \quad \text{et} \quad x'(t) + e^t f(t) x(t)^2 + x(t) = 0 \quad \text{où} \quad f(t) = \frac{t+1}{t^2+1}.$$

1. (a) Justifier que la fonction $f$ admet des primitives sur $\mathbb{R}$ et déterminer l'unique primitive qui s'annule en 0 qu'on notera $F_0$.

   (b) Montrer que $F_0$ admet un minimum et calculer sa valeur qu'on notera $m$.

2. Pour cette question, on fixe une fonction $x$ solution du problème et on pose $y = 1/x$.

   (a) Montrer que $y$ est solution d'une équation différentielle linéaire à déterminer.

   (b) Résoudre l'équation différentielle obtenue à la question précédente. On pourra chercher une solution particulière de la forme $t \mapsto \lambda(t)e^t$ où $\lambda$ est une fonction à déterminer.

3. En déduire que toutes les solutions du problème sont de la forme :

$$x : t \mapsto \frac{e^{-t}}{C + \frac{1}{2}\ln(t^2+1) + \arctan(t)}$$

   où $C$ est une constante telle que $C > -m$.

# Corrigé du DS n° 4 de mathématiques et d'informatique

## Exercice 1

*On note respectivement $0_2$ et $I_2$ la matrice nulle et la matrice identité de l'ensemble $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels. Pour tout cet exercice, on fixe une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ telle que $\delta = ad - bc < 0$. De plus, on pose $\tau = a + d$ et $P : x \mapsto x^2 - \tau x + \delta$.*

1. *Montrer que $P(M) = 0_2$.*

► On a :

$$\begin{aligned} P(M) &= M^2 - \tau M + \delta I_2 \\ &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2 - (a+d)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + (ad-bc)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a^2-ad+ad-bc & -ab-bd \\ -ac-cd & -ad-d^2+ad-bc \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{0_2}. \end{aligned}$$

*N'oubliez pas la matrice identité pour le coefficient constant lorsque vous évaluez un polynôme en une matrice.*

2. *Justifier l'existence de deux réels distincts $\lambda$ et $\mu$ tels que $\lambda + \mu = \tau$ et $\lambda\mu = \delta$. Les expressions de $\lambda$ et $\mu$ ne sont pas demandées.*

►

*On peut trouver $\lambda$ et $\mu$ par analyse-synthèse en résolvant un système (non linéaire) par substitution. Mais, pour ce genre de question, il est beaucoup plus rapide de pensez aux relations coefficients-racines d'un polynôme de degré 2 : $\lambda$ et $\mu$ sont les racines du polynôme*

$$x \mapsto (x-\lambda)(x-\mu) = x^2 - (\lambda+\mu)x + \lambda\mu = x^2 - \tau x + \delta = P(x).$$

*Il suffit donc de montrer que $P$ admet deux racines réelles distinctes.*

Le polynôme $P : x \mapsto x^2 - \tau x + \delta$ est de degré 2 et admet pour discriminant :

$$\Delta = (-\tau)^2 - 4\delta = \underbrace{\tau^2}_{\geqslant 0} + 4\underbrace{(-\delta)}_{>0} > 0 \quad \text{car } \delta < 0 \text{ par hypothèse de l'énoncé.}$$

Par conséquent, $P$ admet deux racines réelles distinctes. On pose $\lambda$ et $\mu$ la valeur de ces deux racines $\boxed{\text{réelles distinctes}}$. Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 - \tau x + \delta = P(x) = (x-\lambda)(x-\mu) = x^2 - (\lambda+\mu)x + \lambda\mu.$$

Par identification des coefficients de polynômes, on en déduit bien que $\boxed{\lambda + \mu = \tau}$ et $\boxed{\lambda\mu = \delta}$.

*Pour la suite de l'exercice, on pose $A = M - \lambda I_2$ et $B = M - \mu I_2$.*

3. *Montrer que $AB = 0_2$. Les matrices $A$ et $B$ sont-elles inversibles ?*

▶ On a :

$$\begin{aligned}
AB &= (M-\lambda I_2)(M-\mu I_2)\\
&= M^2 - \lambda I_2 M - \mu M I_2 + \lambda\mu I_2^2\\
&= M^2 - \lambda M - \mu M + \lambda\mu I_2 \quad \text{car } I_2 \text{ est la matrice identité}\\
&= M^2 - (\lambda+\mu)M + \lambda\mu I_2\\
&= M^2 - \tau M + \delta I_2 \quad \text{d'après le résultat de la question précédente}\\
&= P(M) = \boxed{0_2} \quad \text{d'après le résultat de la question 1.}
\end{aligned}$$

Par l'absurde, si la matrice $A$ est inversible alors :

$$\begin{aligned}
0_2 &= A^{-1}0_2 \quad \text{car } 0_2 \text{ est la matrice nulle}\\
&= A^{-1}(AB) \quad \text{d'après le résultat précédent}\\
&= (A^{-1}A)B \quad \text{par associativité}\\
&= I_2 B \quad \text{par définition de la matrice inverse } A^{-1}\\
&= B \quad \text{car } I_2 \text{ est la matrice identité}\\
&= M - \mu I_2 \quad \text{par définition de la matrice } B.
\end{aligned}$$

On en déduit que $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = M = \mu I_2 = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ et donc $\delta = ad - bc = \mu\times\mu - 0\times 0 = \mu^2 \geqslant 0$ ce qui est absurde car $\delta < 0$ par hypothèse de l'énoncé. Par conséquent, on a montré par l'absurce que $\boxed{\text{la matrice } A \text{ n'est pas inversible}}$. De même, on peut montrer que $\boxed{\text{la matrice } B \text{ n'est pas inversible}}$ (sinon $M = \lambda I_2$ donc $\delta = \lambda^2 \geqslant 0$ ce qui est absurde).

4. *Prouver que $A^n = (\mu-\lambda)^{n-1}A$ pour tout entier $n \geqslant 1$. Déterminer une expression similaire pour les puissances de $B$.*

▶ On raisonne par récurrence.

Initialisation. Pour $n = 1$, on a :

$$A^n = A^1 = A \quad \text{et} \quad (\mu-\lambda)^{n-1} = (\mu-\lambda)^{1-1}A = (\mu-\lambda)^0 A = 1A = A.$$

Donc $A^n = (\mu-\lambda)^{n-1}A$ pour $n = 1$.

Hérédité. On suppose que $A^n = (\mu-\lambda)^{n-1}A$ pour un entier $n \geqslant 1$ fixé. On a :

$$\begin{aligned}
A^{n+1} &= A^n A \quad \text{par propriété de la puissance}\\
&= (\mu-\lambda)^{n-1}AA \quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence}\\
&= (\mu-\lambda)^{n-1}A^2.
\end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned}
A^2 &= (M-\lambda I_2)^2 \quad \text{par définition de la matrice } A\\
&= M^2 - \lambda M I_2 - \lambda I_2 M + \lambda^2 I_2^2\\
&= M^2 - 2\lambda M + \lambda^2 I_2 \quad \text{car } I_2 \text{ est la matrice identité.}
\end{aligned}$$

De plus, on a d'après les résultats des questions 1 et 2 :

$$0_2 = P(M) = M^2 - \tau M + \delta I_2 = M^2 - (\lambda+\mu)M + \lambda\mu I_2 \quad \text{donc} \quad M^2 = (\lambda+\mu)M - \lambda\mu I_2.$$

En reportant dans l'expression de $A^2$, on obtient :

$$\begin{aligned}
A^2 &= (\lambda+\mu)M - \lambda\mu I_2 - 2\lambda M + \lambda^2 I_2\\
&= (\mu-\lambda)M + \lambda\underbrace{(\lambda-\mu)}_{=-(\mu-\lambda)} I_2\\
&= (\mu-\lambda)(M-\lambda I_2)\\
&= (\mu-\lambda)A.
\end{aligned}$$

En reportant dans l'expression de $A^{n+1}$, on obtient :

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= (\mu-\lambda)^{n-1}(\mu-\lambda)A \\ &= (\mu-\lambda)^{n}A \\ &= (\mu-\lambda)^{(n+1)-1}A. \end{aligned}$$

Ainsi, si le résultat est vrai au rang $n$ alors il est vrai au rang $n+1$. Et cette implication est vraie pour tout entier $n \geqslant 1$.
Conclusion. D'après le principe de récurrence, on en déduit que :

$$\boxed{\forall n \geqslant 1, \quad A^n = (\mu-\lambda)^{n-1}A}.$$

De même, en inversant le rôle de $A$ et $B$ (et donc de $\lambda$ et $\mu$), on peut montrer par récurrence que :

$$\boxed{\forall n \geqslant 1, \quad B^n = (\lambda-\mu)^{n-1}B}.$$

5. *Trouver deux réels $\alpha$ et $\beta$ tels que $\alpha+\beta \neq 0$ et $M = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}A + \frac{\beta}{\alpha+\beta}B$. Donner une expression de $\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$ et $\frac{\beta}{\alpha+\beta}$ en fonction de $\lambda$ et $\mu$.*
► On raisonne par analyse-synthèse.
Analyse. On cherche $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\alpha \neq \beta$ et $M = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}A + \frac{\beta}{\alpha+\beta}B$. On a :

$$\begin{aligned} \tfrac{\alpha}{\alpha+\beta}A + \tfrac{\beta}{\alpha+\beta}B &= \tfrac{\alpha}{\alpha+\beta}(M-\lambda I_2) + \tfrac{\beta}{\alpha+\beta}(M-\mu I_2) \quad \text{par définition des matrices } A \text{ et } B \\ &= \underbrace{\tfrac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta}}_{=1} M - \tfrac{\alpha\lambda+\beta\mu}{\alpha+\beta} I_2. \end{aligned}$$

Il suffit donc que $\alpha\lambda + \beta\mu = 0$ pour que $\frac{\alpha}{\alpha+\beta}A + \frac{\beta}{\alpha+\beta}B = M$. Ceci fournit une équation à deux inconnues. De plus, on veut que $\alpha+\beta \neq 0$. Il suffit par exemple que $\alpha+\beta = 1$ ce qui donne une deuxième équation. Il suffit donc de résoudre le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} \alpha\lambda + \beta\mu = 0 \\ \alpha + \beta = 1 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Or :

$$\det \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \lambda \times 1 - \mu \times 1 = \lambda - \mu \neq 0 \quad \text{car } \lambda \text{ et } \mu \text{ sont deux réels distincts d'après le résultat de la question 2.}$$

Donc la matrice $\begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et le système linéaire admet une unique solution :

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\det \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & -\mu \\ -1 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda-\mu} \begin{pmatrix} -\mu \\ \lambda \end{pmatrix}.$$

*Passez par les matrices pour résoudre les systèmes linéaires, c'est beaucoup plus rapide. Surtout pour les systèmes linéaires carrés d'ordre 2 à l'aide du déterminant.*

Synthèse. On pose $\boxed{\alpha = \frac{-\mu}{\lambda-\mu}}$ et $\boxed{\beta = \frac{\lambda}{\lambda-\mu}}$. Alors on a d'après les calculs effectués en analyse :

$$\alpha+\beta = 1 \neq 0 \quad \text{et} \quad \tfrac{\alpha}{\alpha+\beta}A + \tfrac{\beta}{\alpha+\beta}B = M - \overbrace{\tfrac{\alpha\lambda+\beta\mu}{\alpha+\beta}}^{=0} I_2 = M.$$

De plus :

$$\boxed{\tfrac{\alpha}{\alpha+\beta} = \alpha = \tfrac{-\mu}{\lambda-\mu}} \quad \text{et} \quad \boxed{\tfrac{\beta}{\alpha+\beta} = \beta = \tfrac{\lambda}{\lambda-\mu}}.$$

6. *À l'aide de la formule du binôme de Newton, montrer que* $\forall n \geqslant 1,\ M^n = \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}A\right)^n + \left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}B\right)^n$.

▶ En reprenant le calcul de la question 3, en inversant le rôle de $A$ et $B$ (et donc de $\lambda$ et $\mu$), on a :

$$BA = M^2 - (\mu+\lambda)M + \mu\lambda I_2 = M^2 - (\lambda+\mu)M + \lambda\mu I_2 = AB.$$

Donc les matrices $A$ et $B$ commutent.

*N'oubliez pas de vérifier que les matrices commutent avant d'appliquer la formule du binôme de Newton.*

Par conséquent, on a pour tout entier $n \geqslant 1$ :

$$\begin{aligned}
M^n &= \left(\tfrac{\alpha}{\alpha+\beta}A + \tfrac{\beta}{\alpha+\beta}B\right)^n \quad \text{d'après le résultat de la question précédente}\\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\tfrac{\alpha}{\alpha+\beta}A\right)^k \left(\tfrac{\beta}{\alpha+\beta}B\right)^{n-k} \quad \begin{array}{c}\text{d'après la formule du binôme de Newton car}\\ \left(\tfrac{\alpha}{\alpha+\beta}A\right)\left(\tfrac{\beta}{\alpha+\beta}B\right)=\tfrac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2}AB=\tfrac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2}BA=\left(\tfrac{\beta}{\alpha+\beta}B\right)\left(\tfrac{\alpha}{\alpha+\beta}A\right)\end{array}\\
&= \underbrace{\binom{n}{0}}_{=1} \underbrace{\left(\tfrac{\alpha}{\alpha+\beta}A\right)^0}_{=I_2} \left(\tfrac{\beta}{\alpha+\beta}B\right)^{n-0} + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \left(\tfrac{\alpha}{\alpha+\beta}A\right)^k \left(\tfrac{\beta}{\alpha+\beta}B\right)^{n-k} + \underbrace{\binom{n}{n}}_{=1} \left(\tfrac{\alpha}{\alpha+\beta}A\right)^n \underbrace{\left(\tfrac{\beta}{\alpha+\beta}B\right)^{n-n}}_{=I_2}\\
&= \left(\tfrac{\beta}{\alpha+\beta}B\right)^n + \underbrace{\tfrac{1}{(\alpha+\beta)^n} \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \alpha^k \beta^{n-k} A^{k-1} \underbrace{AB}_{=0_2} B^{n-k-1}}_{=0_2} + \left(\tfrac{\alpha}{\alpha+\beta}A\right)^n\\
&= \boxed{\left(\tfrac{\alpha}{\alpha+\beta}A\right)^n + \left(\tfrac{\beta}{\alpha+\beta}B\right)^n} \quad \text{car } AB = 0_2 \text{ d'après le résultat de la question 3.}
\end{aligned}$$

*Il faut sortir les cas $k=0$ et $k=n$ de la somme pour faire apparaître la simplification $AB = 0_2$. En effet, sinon on fait apparaitre $A^{k-1} = A^{-1}$ pour $k=0$ et $B^{n-k-1} = B^{-1}$ pour $k=n$ alors que les matrices $A$ et $B$ ne sont pas inversibles (d'après le résultat de la question 3). On peut aussi se rendre compte de ces simplifications en écrivant la somme sans le symbole $\sum$ :*

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \left(\tfrac{\alpha}{\alpha+\beta}A\right)^k \left(\tfrac{\beta}{\alpha+\beta}B\right)^{n-k}\\
&= \tfrac{\beta^n}{(\alpha+\beta)^n}B^n + n\tfrac{\alpha\beta^{n-1}}{(\alpha+\beta)^n}\underbrace{AB^{n-1}}_{=0_2} + \binom{n}{2}\tfrac{\alpha^2\beta^{n-2}}{(\alpha+\beta)^n}\underbrace{A^2B^{n-2}}_{=0_2} + \binom{n}{3}\tfrac{\alpha^3\beta^{n-3}}{(\alpha+\beta)^n}\underbrace{A^3B^{n-3}}_{=0_2} + \dots\\
&\quad \dots + \binom{n}{3}\tfrac{\alpha^{n-3}\beta^3}{(\alpha+\beta)^n}\underbrace{A^{n-3}B^3}_{=0_2} + \binom{n}{2}\tfrac{\alpha^{n-2}\beta^2}{(\alpha+\beta)^n}\underbrace{A^{n-2}B^2}_{=0_2} + n\tfrac{\alpha^{n-1}\beta}{(\alpha+\beta)^n}\underbrace{A^{n-1}B}_{=0_2} + \tfrac{\alpha^n}{(\alpha+\beta)^n}A^n.
\end{aligned}$$

7. *Déduire des résultats précédents que $M^n$ est de la forme $x_nM + y_nI_2$ pour tout entier $n \geqslant 1$, où $x_n$ et $y_n$ sont deux réels à exprimer en fonction de $\lambda$, $\mu$ et $n$.*

▶ Soit $n \geqslant 1$. On a :

$$\begin{aligned}
M^n &= \left(\tfrac{\alpha}{\alpha+\beta}A\right)^n + \left(\tfrac{\beta}{\alpha+\beta}B\right)^n \quad \text{d'après le résultat de la question précédente}\\
&= \left(\tfrac{-\mu}{\lambda-\mu}\right)^n A^n + \left(\tfrac{\lambda}{\lambda-\mu}\right)^n B^n \quad \text{d'après le résultat de la question 5}\\
&= \left(\tfrac{\mu}{\mu-\lambda}\right)^n (\mu-\lambda)^{n-1}A + \left(\tfrac{\lambda}{\lambda-\mu}\right)^n (\lambda-\mu)^{n-1}B \quad \text{d'après le résultat de la question 4}\\
&= \tfrac{\mu^n}{\mu-\lambda}(M-\lambda I_2) + \tfrac{\lambda^n}{\lambda-\mu}(M-\mu I_2) \quad \text{par définition des matrices } A \text{ et } B\\
&= \underbrace{\tfrac{\lambda^n-\mu^n}{\lambda-\mu}}_{=x_n} M + \underbrace{\tfrac{\lambda\mu^n-\mu\lambda^n}{\lambda-\mu}}_{=y_n} I_2.
\end{aligned}$$

D'où le résultat en posant :

$$\boxed{x_n = \frac{\lambda^n - \mu^n}{\lambda - \mu}} \quad \text{et} \quad \boxed{y_n = \frac{\lambda\mu^n - \mu\lambda^n}{\lambda - \mu}}.$$

## Exercice 2

*Pour tout couple d'entiers $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, on pose $I_{p,q} = \int_0^1 x^p(1-x)^q \mathrm{d}x$.*

1. *Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^2$. Montrer que $I_{p,q} = I_{q,p}$ à l'aide du changement de variable $t = 1-x$.*

   ▶ On pose $t = 1-x \iff x = 1-t$. La fonction $\varphi : t \mapsto \varphi(t) = 1-t$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction affine et sa dérivée $\varphi' : t \mapsto -1$ est continue comme fonction constante. On peut donc utiliser le théorème de changement de variable dans une intégrale.

   *N'oubliez pas de vérifier les hypothèses des théorèmes que vous appliquez.*

   On a :
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\varphi(t)}{\mathrm{d}t} = \varphi'(t) = -1 \quad \text{donc} \quad \mathrm{d}x = -\mathrm{d}t.$$
   De plus, si $x = 0$ alors $t = 1-x = 1$, et si $x = 1$ alors $t = 1-x = 0$. Donc :
$$\begin{aligned}
I_{p,q} &= \int_0^1 x^p(1-x)^q \mathrm{d}x \\
&= \int_1^0 (1-t)^p\big(1-(1-t)\big)^q(-\mathrm{d}t) \quad \text{d'après la formule de changement de variable} \\
&= -\int_1^0 (1-t)^p t^q \mathrm{d}t \quad \text{par linéarité} \\
&= \int_0^1 t^q(1-t)^p \mathrm{d}t \quad \text{en inversant les bornes de l'intégrale} \\
&= \boxed{I_{p,q}}.
\end{aligned}$$

2. *Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $I_{n,0}$ et $I_{0,n}$.*

   ▶ On a :
$$I_{n,0} = \int_0^1 x^n \underbrace{(1-x)^0}_{=1} \mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1} - 0 = \boxed{\frac{1}{n+1}}.$$
   Et $\boxed{I_{0,n} = I_{n,0} = \frac{1}{n+1}}$ d'après le résultat de la question précédente.

3. *Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^2$. Montrer que $I_{p,q+1} = \frac{q+1}{p+1} I_{p+1,q}$.*

   ▶ On a :
$$\begin{aligned}
I_{p,q+1} &= \int_0^1 x^p(1-x)^{q+1}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 u'(x)v(x)\mathrm{d}x \quad \text{en posant} \quad \begin{cases} u'(x) = x^p \\ v(x) = (1-x)^{q+1} \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} u(x) = \frac{x^{p+1}}{p+1} \\ v'(x) = -(q+1)(1-x)^q \end{cases}.
\end{aligned}$$
   Les fonctions $u$ et $v$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ comme composées de fonctions polynomiales et leurs dérivées $u'$ et $v'$ sont continues sur $\mathbb{R}$ comme composées de fonctions polynomiales. On peut donc

appliquer le théorème d'intégration par parties :

$$\begin{aligned}
I_{p,q+1} &= \int_0^1 u'(x)v(x)\mathrm{d}x \\
&= \big[u(x)v(x)\big]_0^1 - \int_0^1 u(x)v'(x)\mathrm{d}x \quad \text{d'après la formule d'intégration par parties} \\
&= \left[\tfrac{x^{p+1}}{p+1}(1-x)^{q+1}\right]_0^1 - \int_0^1 \tfrac{x^{p+1}}{p+1}\big(-(q+1)(1-x)^q\big)\mathrm{d}x \\
&= \tfrac{1}{p+1}\times 0 - 0\times 1 + \tfrac{q+1}{p+1}\int_0^1 x^{p+1}(1-x)^q\mathrm{d}x \quad \text{par linéarité} \\
&= \boxed{\tfrac{q+1}{p+1}I_{p+1,q}}.
\end{aligned}$$

4. *Par récurrence, démontrer que la proposition suivante est vraie pour tout $q \in \mathbb{N}$ :*

$$\mathscr{P}(q) : \text{«}\forall p \in \mathbb{N},\ I_{p,q} = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}\text{»}.$$

▶ Initialisation. Pour $q = 0$, on a pour tout $p \in \mathbb{N}$ :

$$I_{p,0} = \frac{1}{p+1} \quad \text{d'après le résultat de la question 2 et} \quad \frac{p!0!}{(p+0+1)!} = \frac{p!}{(p+1)!} = \frac{1}{p+1}.$$

Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
Hérédité. On suppose que $\mathscr{P}(q)$ est vraie pour un rang $q \in \mathbb{N}$ fixé. Soit $p \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}
I_{p,q+1} &= \tfrac{q+1}{p+1}I_{p+1,q} \quad \text{d'après le résultat de la question précédente} \\
&= \tfrac{q+1}{p+1} \times \frac{(p+1)!q!}{\big((p+1)+q+1\big)!} \quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\
&= \frac{\frac{(p+1)!}{p+1}\times q!(q+1)}{(p+q+2)!} \\
&= \frac{p!(q+1)!}{\big(p+(q+1)+1\big)!}.
\end{aligned}$$

Puisque cette égalité est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}$, on en déduit que $\mathscr{P}(q) \implies \mathscr{P}(q+1)$. Et cette implication est vraie pour tout $q \in \mathbb{N}$.
Conclusion. D'après le principe de récurrence, on a montré que $\boxed{\mathscr{P}(q) \text{ est vraie pour tout } q \in \mathbb{N}}$, c'est-à-dire :

$$\boxed{\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, \quad I_{p,q} = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}}.$$

5. *Soit $n \in \mathbb{N}$. Le but de cette question est de simplifier la somme $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{n+k+1}$.*

   (a) *Montrer que $I_{n,n} = S_n$.*

▶ On a :

$$\begin{aligned}
I_{n,n} &= \int_0^1 x^n(1-x)^n \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 x^n \Big( \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-x)^k \underbrace{1^{n-k}}_{=1} \Big) \mathrm{d}x \quad \text{d'après la formule du binôme de Newton} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \int_0^1 x^{n+k} \mathrm{d}x \quad \text{par linéarité} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \left[ \frac{x^{n+k+1}}{n+k+1} \right]_0^1 \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \left( \frac{1}{n+k+1} - 0 \right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{n+k+1} = \boxed{S_n}.
\end{aligned}$$

(b) *En déduire que* $S_n = \dfrac{1}{\binom{2n}{n}(2n+1)}$.

▶ On a :

$$\begin{aligned}
S_n &= I_{n,n} \quad \text{d'après le résultat de la question précédente} \\
&= \frac{n!n!}{(n+n+1)!} \quad \text{d'après le résultat de la question 4} \\
&= \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}.
\end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\binom{2n}{n}(2n+1)} &= \frac{1}{\frac{(2n!)}{n!(2n-n)!}(2n+1)} \quad \text{par définition des coefficients binomiaux} \\
&= \frac{n!n!}{(2n)!(2n+1)} \\
&= \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}.
\end{aligned}$$

On en déduit bien que $\boxed{S_n = \dfrac{1}{\binom{2n}{n}(2n+1)}}$.

## **Exercice 3** (Informatique)

*On utilisera seulement le langage Python et on pourra faire appel aux fonctions des questions précédentes sans avoir besoin de les réécrire. La question 3 peut être traitée sans avoir répondu aux questions 1 et 2.*

1. *On considère la fonction* `mystere` *ci-dessous.*

```
def mystere(L,n):
    if n>len(L):
        return 'erreur'
    M=[]
    for i in range(n):
        M.append(L[n-1-i])
    for i in range(n,len(L)):
        M.append(L[i])
    return M
```

(a) *Que renvoie* `mystere([5,7,1,8,3],6)` *?*

▶ L'instruction `mystere([5,7,1,8,3],6)` renvoie $\boxed{\texttt{'erreur'}}$ car `n=6` est strictement supérieur à `len(L)=len([5,7,1,8,3])=5`.

(b) *Que renvoie* `mystere([5,7,1,8,3],2)` *?*

▶ L'instruction `mystere([5,7,1,8,3],2)` ne renvoie par `'erreur'` car `n=2` est inférieur à `len(L)=len([5,7,1,8,3])=5`. La liste `M` est initialisée à la liste vide `[]`. La première boucle `for` s'exécute `n=2` fois, donc pour `i=0` et `i=1`.

— Pour `i=0`, l'élément `L[n-1-i]=L[1]=7` est ajouté à la liste `M` qui devient `M=[7]`.

— Pour `i=1`, l'élément `L[n-1-i]=L[0]=5` est ajouté à la liste `M` qui devient `M=[7,5]`.

La deuxième boucle `for` s'exécute pour `i` allant de `n=2` à `len(L)-1=4`.

— Pour `i=2`, l'élément `L[i]=L[2]=1` est ajouté à la liste `M` qui devient `M=[7,5,1]`.

— Pour `i=3`, l'élément `L[i]=L[3]=8` est ajouté à la liste `M` qui devient `M=[7,5,1,8]`.

— Pour `i=4`, l'élément `L[i]=L[4]=3` est ajouté à la liste `M` qui devient `M=[7,5,1,8,3]`.

Finalement, l'instruction `mystere([5,7,1,8,3],2)` renvoie la liste $\boxed{\texttt{[7,5,1,8,3]}}$.

(c) *Que renvoie* `mystere([5,7,1,8,3],4)` *?*

▶ L'instruction `mystere([5,7,1,8,3],4)` ne renvoie par `'erreur'` car `n=4` est inférieur à `len(L)=len([5,7,1,8,3])=5`. La liste `M` est initialisée à la liste vide `[]`. La première boucle `for` s'exécute `n=4` fois, donc pour `i=0`, `i=1`, `i=2` et `i=3`.

— Pour `i=0`, l'élément `L[n-1-i]=L[3]=8` est ajouté à la liste `M` qui devient `M=[8]`.

— Pour `i=1`, l'élément `L[n-1-i]=L[2]=1` est ajouté à la liste `M` qui devient `M=[8,1]`.

— Pour `i=2`, l'élément `L[n-1-i]=L[1]=7` est ajouté à la liste `M` qui devient `M=[8,1,7]`.

— Pour `i=3`, l'élément `L[n-1-i]=L[1]=5` est ajouté à la liste `M` qui devient `M=[8,1,7,5]`.

La deuxième boucle `for` s'exécute pour `i` allant de `n=4` à `len(L)-1=4`, donc seulement pour `i=4`.

— Pour `i=4`, l'élément `L[i]=L[4]=3` est ajouté à la liste `M` qui devient `M=[8,1,7,5,3]`.

Finalement, l'instruction `mystere([5,7,1,8,3],4)` renvoie la liste $\boxed{\texttt{[8,1,7,5,3]}}$.

(d) *On fixe une liste* `L` *quelconque pour cette question. Expliquer ce que renvoient* `mystere(L,1)` *et* `mystere(L,len(L))`*.*

▶ En reprenant les résultats des questions précédentes, on remarque que l'instruction `mystere(L,n)` renvoie la liste des éléments de `L` dont l'ordre des `n` premiers a été inversé. En particulier, `mystere(L,1)` renvoie $\boxed{\text{la liste L}}$ et `mystere(L,len(L))` renvoie $\boxed{\text{la liste des éléments de L dans l'ordre inverse}}$.

2. *À l'aide de la fonction* `mystere`*, on cherche un algorithme permettant de trier les éléments d'une liste dans l'ordre croissant. Par exemple, on peut trier les éléments de la liste* `L=[4,2,5,1,3]` *en utilisant la suite d'instructions suivante.*

```
L=mystere(L,3)
L=mystere(L,5)
L=mystere(L,3)
L=mystere(L,4)
L=mystere(L,2)
L=mystere(L,3)
```

(a) *Qu'affiche la commande* `print(L)` *après l'exécution de chacune des six lignes ci-contre ?*

▶ Chaque ligne permet d'inverser l'ordre des premiers éléments de la liste `L`. On a :

| commande | print(L) |
|---|---|
| L=[4,2,5,1,3] | [4,2,5,1,3] |
| L=mystere(L,3) | [5,2,4,1,3] |
| L=mystere(L,5) | [3,1,4,2,5] |
| L=mystere(L,3) | [4,1,3,2,5] |
| L=mystere(L,4) | [2,3,1,4,5] |
| L=mystere(L,2) | [3,2,1,4,5] |
| L=mystere(L,3) | [1,2,3,4,5] |

(b) *En vous inspirant de l'exemple ci-contre, déterminer une suite d'instructions permettant de trier les éléments de la liste* `L=[3,2,4,1]`*.*

▶ Il suffit de trier les éléments de la droite vers la gauche : on utilise la fonction `mystere` deux fois pour passer le plus grand élément en 1re position puis en dernière position, ensuite on recommence avec l'élément suivant dans l'ordre décroissant, etc.

| commande | print(L) |
|---|---|
| L=[3,2,4,1] | [3,2,4,1] |
| L=mystere(L,3) | [4,2,3,1] |
| L=mystere(L,4) | [1,3,2,4] |
| L=mystere(L,2) | [3,1,2,4] |
| L=mystere(L,3) | [2,1,3,4] |
| L=mystere(L,2) | [1,2,3,4] |

(c) *Même question pour la liste* `L=[1,6,4,7,4,2]`*.*

▶ On utilise le même principe qu'à la question précédente.

| commande | print(L) |
|---|---|
| L=[1,6,4,7,4,2] | [1,6,4,7,4,2] |
| L=mystere(L,4) | [7,4,6,1,4,2] |
| L=mystere(L,6) | [2,4,1,6,4,7] |
| L=mystere(L,4) | [6,1,4,2,4,7] |
| L=mystere(L,5) | [4,2,4,1,6,7] |
| L=mystere(L,4) | [1,4,2,4,6,7] |
| L=mystere(L,2) | [4,1,2,4,6,7] |
| L=mystere(L,3) | [2,1,4,4,6,7] |
| L=mystere(L,2) | [1,2,4,4,6,7] |

3. *Écrire une fonction* `max` *qui prend en argument une liste* `L` *et un entier* `n` *puis qui renvoie le plus petit indice du maximum des* `n` *premiers éléments de* `L` *(ou la chaîne de caractères* `'erreur'` *si* `L` *contient moins de* `n` *éléments). Par exemple,* `max([3,5,2,5,9,2],4)` *renvoie l'entier* `1`*.*

▶ Par exemple :

```
def max(L,n):
    if n>len(L):
        return 'erreur'
    indice=0
    for i in range(1,n):
        if L[i]>L[indice]:
            indice=i
    return indice
```

4. *À l'aide des fonctions* `mystere` *et* `max` *(et sans utiliser la méthode* `.sort()`*), écrire une fonction* `trier` *qui prend en argument une liste* `L` *puis qui renvoie la liste de ses éléments triés dans l'ordre croissant.*

▶ Par exemple :

```
def trier(L):
    for n in range(len(L),1,-1):
        indice=max(L,n)
        L=mystere(L,indice+1)
        L=mystere(L,n)
    return L
```

## Exercice 4

*On considère la matrice* $A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ *et une matrice colonne d'inconnues* $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{4,1}(\mathbb{R})$.

1. *Discuter du nombre de solutions du système* $AX = \lambda X$ *en fonction des valeurs du paramètre* $\lambda \in \mathbb{R}$.

▶ On a :

$$AX = \lambda X \iff \begin{pmatrix} -2 & -3 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} -2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + x_4 - \lambda x_1 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 4x_3 - \lambda x_2 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_4 - \lambda x_3 = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 - \lambda x_4 = 0 \end{cases}$$

On reconnaît un système linéaire homogène qu'on échelonne à l'aide de la méthode du pivot de Gauss.

$$AX = \lambda X \iff \begin{pmatrix} -2-\lambda & -3 & 3 & 1 \\ 2 & 4-\lambda & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -1-\lambda & 1 \\ -2 & -2 & 2 & 2-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_1 \leftrightarrow L_4 \\ \\ \\ L_4 \leftrightarrow L_1 \end{matrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} \boxed{-2} & -2 & 2 & 2-\lambda \\ 2 & 4-\lambda & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -1-\lambda & 1 \\ -2-\lambda & -3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ \\ L_4 \leftarrow 2L_4 + (-2-\lambda)L_1 \end{matrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} \boxed{-2} & -2 & 2 & 2-\lambda \\ 0 & 2-\lambda & -2 & 2-\lambda \\ 0 & 1 & -1-\lambda & 1 \\ 0 & -2+2\lambda & 2-2\lambda & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \\ L_2 \leftrightarrow L_3 \\ L_3 \leftrightarrow L_2 \\ \\ \end{matrix}$$

où $A = 2 + (-2-\lambda)(2-\lambda) = 2 + (-4+\lambda^2) = \lambda^2 - 2$

$$\iff \begin{pmatrix} \boxed{-2} & -2 & 2 & 2-\lambda \\ 0 & \boxed{1} & -1-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda & -2 & 2-\lambda \\ 0 & -2+2\lambda & 2-2\lambda & \lambda^2-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - (2-\lambda)L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - (-2+2\lambda)L_2 \end{matrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} \boxed{-2} & -2 & 2 & 2-\lambda \\ 0 & \boxed{1} & -1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C & \lambda^2-2\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

où $\begin{cases} B = -2 - (2-\lambda)(-1-\lambda) = -2 - (-2-\lambda+\lambda^2) = -\lambda^2 + \lambda \\ C = 2 - 2\lambda - (-2+2\lambda)(-1-\lambda) = 2 - 2\lambda - (2 - 2\lambda^2) = 2\lambda^2 - 2\lambda \end{cases}$

$$\iff \begin{pmatrix} \boxed{-2} & -2 & 2 & 2-\lambda \\ 0 & \boxed{1} & -1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda(\lambda-1) & 0 \\ 0 & 0 & 2\lambda(\lambda-1) & \lambda(\lambda-2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad L_4 \leftarrow L_4 + 2L_3$$

$$\iff \begin{pmatrix} \boxed{-2} & -2 & 2 & 2-\lambda \\ 0 & \boxed{1} & -1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda(\lambda-1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda(\lambda-2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On a :

$$-\lambda(\lambda-1)=0 \iff (\lambda=0 \text{ ou } \lambda=1) \quad \text{et} \quad \lambda(\lambda-2)=0 \iff (\lambda=0 \text{ ou } \lambda=2)\,.$$

On a donc trois cas en fonction des valeurs du paramètre $\lambda$.

— Si $\boxed{\lambda=0}$ alors on obtient un système linéaire échelonné de $\boxed{\text{rang } 2}$ avec deux équations auxiliaires compatibles et deux inconnues auxiliaires. Le système $AX = \lambda X$ admet donc $\boxed{\text{une infinité de solutions}}$.

— Si $\boxed{\lambda=1 \text{ ou } \lambda=2}$ alors on obtient un système linéaire échelonné de $\boxed{\text{rang } 3}$ avec une équation auxiliaire compatibles et une inconnue auxiliaire. Le système $AX = \lambda X$ admet donc $\boxed{\text{une infinité de solutions}}$.

— Si $\boxed{\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0,1,2\}}$ alors on obtient un système linéaire échelonné de $\boxed{\text{rang 4 maximal}}$. Le système $AX = \lambda X$ admet donc $\boxed{\text{une seule solution}}$.

2. *Résoudre le système $AX = \lambda X$ pour $\lambda = 0$, $\lambda = 1$, $\lambda = 2$ et $\lambda = 3$.*

▶ On reprend le système échelonné obtenu à la question précédente.

— Si $\boxed{\lambda=0}$ alors :

$$\begin{aligned} AX=\lambda X &\iff \begin{pmatrix} \boxed{-2} & -2 & 2 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} -2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x_2 = x_3 - x_4 \\ x_1 = -x_2 + x_3 + x_4 = 2x_4. \end{cases} \end{aligned}$$

On obtient donc une infinité de solutions de la forme :

$$\boxed{(x_1,x_2,x_3,x_4) = (2x_4, x_3 - x_4, x_3, x_4) \quad \text{où } (x_3,x_4) \in \mathbb{R}^2}.$$

— Si $\boxed{\lambda=1}$ alors :

$$\begin{aligned} AX=\lambda X &\iff \begin{pmatrix} \boxed{-2} & -2 & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} -2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ -x_4 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x_4 = 0 \\ x_2 = 2x_3 - x_4 = 2x_3 \\ x_1 = -x_2 + x_3 + \frac{1}{2}x_4 = -x_3. \end{cases} \end{aligned}$$

On obtient donc une infinité de solutions de la forme :

$$\boxed{(x_1,x_2,x_3,x_4)=(-x_3,2x_3,x_3,0)\quad \text{où } x_3\in\mathbb{R}}.$$

— Si $\boxed{\lambda=2}$ alors :

$$\begin{aligned}
AX=\lambda X &\iff \begin{pmatrix} \boxed{-2} & -2 & 2 & 0\\ 0 & \boxed{1} & -3 & 1\\ 0 & 0 & \boxed{-2} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\\
&\iff \left\{\begin{aligned} -2x_1-2x_2+2x_3&=0\\ x_2-3x_3+x_4&=0\\ -2x_3&=0\end{aligned}\right.\\
&\iff \left\{\begin{array}{l} x_3=0\\ x_2=3x_3-x_4=-x_4\\ x_1=-x_2+x_3=x_4.\end{array}\right.
\end{aligned}$$

On obtient donc une infinité de solutions de la forme :

$$\boxed{(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_4,-x_4,0,x_4)\quad \text{où } x_4\in\mathbb{R}}.$$

— Si $\boxed{\lambda=3}$ alors on a un système linéaire homogène de rang maximal d'après le résultat de la question précédente. On obtient donc une seule solution :

$$\boxed{(x_1,x_2,x_3,x_4)=(0,0,0,0)}.$$

## Exercice 5

*Le but de cet exercice est de déterminer toutes les fonctions $x$ dérivable sur $\mathbb{R}$ telles que pour tout $t\in\mathbb{R}$ :*

$$x(t)>0 \quad \textit{et} \quad x'(t)+e^t f(t)x(t)^2+x(t)=0 \quad \textit{où} \quad f(t)=\frac{t+1}{t^2+1}.$$

1. (a) *Justifier que la fonction $f$ admet des primitives sur $\mathbb{R}$ et déterminer l'unique primitive qui s'annule en $0$ qu'on notera $F_0$.*

   ► On a $t^2+1\geqslant 0+1>0$ donc $t^2+1\neq 0$ pour tout $t\in\mathbb{R}$. Par conséquent, la fonction $f$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions polynomiales dont le dénominateur ne s'annule pas. D'après le théorème fondamental de l'analyse, on en déduit que $\boxed{\text{la fonction } f \text{ admet une infinité de primitives sur l'intervalle } \mathbb{R}}$. On note $F_0$ l'unique primitive qui s'annule en 0. On a :

$$\begin{aligned}
\forall t\in\mathbb{R},\quad F_0(t)&=\int_0^t f(x)\mathrm{d}x\\
&=\int_0^t \frac{x+1}{x^2+1}\mathrm{d}x\\
&=\frac12\int_0^t\frac{2x}{x^2+1}\mathrm{d}x+\int_0^t\frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x \quad \text{par linéarité}\\
&=\frac12\big[\ln\left(x^2+1\right)\big]_0^t+\big[\arctan(x)\big]_0^t \quad \text{en reconnaissant des dérivées usuelles}\\
&=\frac12\Big(\ln\left(t^2+1\right)-\underbrace{\ln(1)}_{=0}\Big)+\Big(\arctan(t)-\underbrace{\arctan(0)}_{=0}\Big)\\
&=\boxed{\frac12\ln\left(t^2+1\right)+\arctan(t)}.
\end{aligned}$$

(b) *Montrer que $F_0$ admet un minimum et calculer sa valeur qu'on notera $m$.*

▶ Puisque $F_0$ est une primitive de $f$, $F_0$ est dérivable et $F_0' = f$. Or :

$$f(t) > 0 \iff \frac{t+1}{\underbrace{t^2+1}_{>0}} > 0 \iff t+1 > 0 \iff t > -1.$$

D'après le principe de Lagrange, on en déduit le tableau des variations de $F_0$.

| $t$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(t)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $F_0(t)$ | | $\searrow$ | $F_0(-1)$ | $\nearrow$ | |

Par conséquent, $\boxed{F_0 \text{ admet un minimum en } -1}$ qui vaut d'après le résultat de la question précédente :

$$m = F_0(-1) = \frac{1}{2}\ln\left((-1)^2+1\right) + \arctan(-1) = \boxed{\frac{1}{2}\ln(2) - \frac{\pi}{4}}.$$

2. *Pour cette question, on fixe une fonction $x$ solution du problème et on pose $y = 1/x$.*

(a) *Montrer que $y$ est solution d'une équation différentielle linéaire à déterminer.*

▶ La fonction $y$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme inverse de la fonction $x$ supposée dérivable et qui ne s'annule pas (car $x(t) > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$). On sait que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x'(t) + e^t f(t) x(t)^2 + x(t) = 0.$$

Or, $y = 1/x \iff x = 1/y$ donc :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x(t) = \frac{1}{y(t)} \quad \text{et} \quad x'(t) = \frac{-y'(t)}{y(t)^2}.$$

En reportant ces expressions dans la relation précédente, on obtient pour tout $t \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} & \frac{-y'(t)}{y(t)^2} + e^t f(t)\left(\frac{1}{y(t)}\right)^2 + \frac{1}{y(t)} = 0 \\ \text{donc} \quad & \frac{-y'(t) + e^t f(t) + y(t)}{y(t)^2} = 0 \\ \text{donc} \quad & -y'(t) + e^t f(t) + y(t) = 0 \\ \text{donc} \quad & \boxed{y'(t) - y(t) = e^t f(t)}. \end{aligned}$$

On reconnaît une $\boxed{\text{équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants}}$.

(b) *Résoudre l'équation différentielle obtenue à la question précédente. On pourra chercher une solution particulière de la forme $t \mapsto \lambda(t)e^t$ où $\lambda$ est une fonction à déterminer.*

▶ On commence par résoudre l'équation différentielle linéaire homogène associée :

$$y_H' - y_H = 0 \iff \exists \lambda \in \mathbb{R},\ y_H : t \mapsto \lambda e^{-t}.$$

Puis on cherche une solution particulière de la forme $y_P : t \mapsto \lambda(t)e^t$. On raisonne par analyse-synthèse.

Analyse. On cherche une fonction $\lambda$ telle que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y_P'(t) - y_P(t) = e^t f(t).$$

Il suffit que la fonction $\lambda$ soit dérivable sur $\mathbb{R}$ afin que $y_{\mathrm{P}} : t \mapsto \lambda(t)e^t$ soit dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables. Dans ce cas :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y_{\mathrm{P}}'(t) = \lambda'(t)e^t + \lambda(t)e^t.$$

En reportant les expressions de $y_{\mathrm{P}}'$ et $y_{\mathrm{P}}$ dans l'équation différentielle, on obtient pour tout $t \in \mathbb{R}$ :

$$\lambda'(t)e^t + \lambda(t)e^t - \lambda(t)e^t = e^t f(t) \iff \lambda'(t)e^t = e^t f(t) \iff \lambda'(t) = f(t).$$

Ainsi, $\lambda$ est une primitive de $f$.
Synthèse. On pose $\boxed{\lambda = F_0}$. On vérifie que $y_{\mathrm{P}} : t \mapsto F_0(t)e^t$ est bien une solution particulière de l'équation différentielle obtenue à la question précédente d'après les calculs effectués en analyse.
D'après le principe de superposition, on en déduit que toutes les solutions sont de la forme :

$$\boxed{y : t \mapsto y_{\mathrm{H}}(t) + y_{\mathrm{P}}(t) = \lambda e^t + F_0(t)e^t \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{R}}.$$

3. *En déduire que toutes les solutions du problème sont de la forme :*

$$x : t \mapsto \frac{e^{-t}}{C + \frac{1}{2}\ln(t^2+1) + \arctan(t)}$$

*où $C$ est une constante telle que $C > -m$.*

▶ On sait que $y = 1/x \iff x = 1/y$. Or on a d'après le résultat de la question précédente :

$$y(t) = 0 \iff \big(\lambda + F_0(t)\big)e^t = 0 \iff F_0(t) = -\lambda.$$

D'après le tableau des variations de $F_0$ obtenu à la question 1(b), on en déduit que $y$ ne s'annule pas si et seulement si $-\lambda$ n'est pas une valeur image de $F_0$, donc si et seulement si $-\lambda < m$. Dans ce cas, on obtient :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x(t) = \frac{1}{y(t)} = \frac{1}{\big(\lambda + F_0(t)\big)e^t} = \frac{e^{-t}}{\lambda + F_0(t)}.$$

Réciproquement si $x$ est une fonction de cette forme où $-\lambda < m \iff \lambda > -m$, on vérifie bien que $x$ est solution du problème d'après les calculs effectués dans les questions précédentes.

*N'oubliez pas de vérifier la réciproque. La question 2 démontre seulement une implication : si $x$ est solution du problème alors $x$ est de cette forme. D'autre part, il est nécessaire que $\lambda > -m$ pour que le dénominateur des fonctions $x$ de cette forme soit strictement positif afin de vérifier que $x(t) > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.*

Finalement, on a bien montré que toutes les solutions du problème sont de la forme :

$$\boxed{x : t \mapsto \frac{e^{-t}}{C + \frac{1}{2}\ln(t^2+1) + \arctan(t)}}$$

où $C$ est une constante telle que $\boxed{C > -m}$.

# DS n° 5 de mathématiques et d'informatique

## durée : 3 heures

## Problème A

Les deux parties de ce problème sont indépendantes.

### Partie I

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose :

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

On utilisera seulement le langage Python pour les questions d'informatique et on pourra faire appel aux fonctions des questions précédentes sans avoir besoin de les réécrire.

1. **[Informatique]** Écrire une fonction `suite` qui prend en argument un entier $n \geqslant 1$ et qui renvoie la valeur de $a_n$.
2. (a) Étudier la monotonie de la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$.
   (b) Montrer que $\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ pour tout entier $k \geqslant 2$.
   (c) En déduire que la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ converge.

Dans la suite de l'énoncé, on note $\alpha$ la limite de la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$.

3. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $b_n = a_n + \frac{1}{n}$.
   (a) Montrer que les suites $(a_n)_{n\geqslant 1}$ et $(b_n)_{n\geqslant 1}$ sont adjacentes.
   (b) À l'aide du résultat précédent, justifier brièvement que :
   $$\forall n \geqslant 1, \quad 0 < \alpha - a_n < \frac{1}{n}.$$
   (c) **[Informatique]** Écrire une fonction `approx` qui prend en argument un réel `epsilon` $> 0$ et qui renvoie une approximation de $\alpha$ à `epsilon` près. Par exemple, si `epsilon` $= 10^{-6}$ alors `approx(epsilon)` renvoie une valeur approchée de $\alpha$ dont au moins les six premières décimales sont exactes.
4. (a) En vous inspirant de la méthode utilisée à la question précédente, montrer que :
   $$\forall n \geqslant 1, \quad \frac{1}{n+1} < \alpha - a_n < \frac{1}{n}.$$
   (b) En déduire un équivalent simple de l'erreur d'approximation $\alpha - a_n$ quand $n \to +\infty$.
   (c) **[Informatique]** On suppose que `epsilon` $= 10^{-6}$. Combien de termes au minimum la fonction `approx(epsilon)` doit-elle calculer dans la somme définissant la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ avant de renvoyer une valeur approchée de $\alpha$ à $10^{-6}$ près ?

## Partie II

Pour tout couple d'entiers $(n,p)$ tels que $n \geqslant 1$ et $p \geqslant 1$, on pose :

$$S_{n,p} = \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{n} u_{i,j} \quad \text{où} \quad u_{i,j} = \begin{cases} \frac{1}{i^2-j^2} & \text{si } i \neq j \\ 0 & \text{si } i = j. \end{cases}$$

Le but de cette partie est de montrer que :

$$\lim_{p\to+\infty} \left( \lim_{n\to+\infty} S_{n,p} \right) \neq \lim_{n\to+\infty} \left( \lim_{p\to+\infty} S_{n,p} \right).$$

On admet que la suite $\left(a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right)_{n\geqslant 1}$ converge et on note $\alpha$ sa limite.

5. En utilisant un encadrement, montrer que :

$$\forall j \geqslant 1, \quad \lim_{n\to+\infty} \left( \sum_{k=n-j+1}^{n+j} \frac{1}{k} \right) = 0.$$

6. Dans cette question, on fixe un entier $j \geqslant 1$.
   (a) Montrer que $2ju_{i,j} = \frac{1}{i-j} - \frac{1}{i+j}$ pour tout $i \neq j$.
   (b) En déduire que pour tout entier $n > 2j$ :

$$2j \sum_{i=1}^{n} u_{i,j} = \frac{3}{2j} - \sum_{k=n-j+1}^{n+j} \frac{1}{k}.$$

7. À l'aide des résultats précédents, exprimer la limite de $S_{n,p}$ quand $n \to +\infty$ en fonction de $a_p$ pour tout entier $p \geqslant 1$, puis en déduire que :

$$\lim_{p\to+\infty} \left( \lim_{n\to+\infty} S_{n,p} \right) = \frac{3}{4}\alpha.$$

8. En remarquant que $u_{i,j} = -u_{j,i}$ pour tout couple $(i,j) \in \mathbb{N}^2$ et en utilisant le résultat précédent, exprimer $\lim_{n\to+\infty} \left(\lim_{p\to+\infty} S_{n,p}\right)$ en fonction de $\alpha$ puis conclure.
9. Que vaut $\lim_{n\to+\infty} S_{n,n}$ ?

## Exercice

1. Déterminer la limite de $a_n = \dfrac{\arctan(n+1)\sqrt{n+2}}{\exp(n+3)}$ quand $n \to +\infty$.
2. Déterminer un équivalent simple et la limite de $b_n = \dfrac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)}$ quand $n \to +\infty$.

# Problème B

Dans tout le problème, on note $\mathscr{E}$ l'espace affine qu'on munit d'un repère orthonormé $\mathscr{R} = \left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$. Étant donnés deux parties non vides $\mathsf{A}$ et $\mathsf{B}$ de $\mathscr{E}$, on appelle distance entre $\mathsf{A}$ et $\mathsf{B}$ la borne inférieure des $\left\|\overrightarrow{MN}\right\|$ pour $M$ décrivant l'ensemble $\mathsf{A}$ et $N$ décrivant l'ensemble $\mathsf{B}$. Elle est notée $\Delta(\mathsf{A}, \mathsf{B})$. Ainsi, on a

$$\Delta(\mathsf{A}, \mathsf{B}) = \inf_{M \in \mathsf{A}, N \in \mathsf{B}} \left\|\overrightarrow{MN}\right\|.$$

Dans la suite, on s'intéresse à différents problèmes de distance d'un point de vue informatique et mathématique. Les différentes parties peuvent être traitées de manière indépendante.

## Informatique : distance entre deux parties finies et non vides

Dans cette partie, un point $M$ de $\mathscr{E}$ est représentée par la liste de ses coordonnées dans $\mathscr{R}$.

Par exemple, si $M$ a pour coordonnées $(2, 1, 3)$ la liste `M` Python correspondante est donnée par `[2,1,3]`.

Une partie finie et non vide $\mathscr{E}$ est représentée par la liste de ses points, donc par la liste des listes de leurs coordonnées dans $\mathscr{R}$.

Par exemple, si on a $M_1(1, -1, 2), M_2(3, 0, 2), M_3(3, 2, 8)$, l'ensemble $\{M_1, M_2, M_3\}$ est représenté par la liste

`[[1,-1,2],[3,0,2],[3,2,8]]`.

1. Écrire une fonction `norme(M,N)` qui prend en arguments deux listes `M` et `N` représentant deux points $M$ et $N$ de $\mathscr{E}$ et qui renvoie la norme du vecteur $\left\|\overrightarrow{MN}\right\|$.
2. Écrire une fonction `mini(M,B)` qui prend en arguments une liste `M` et une liste de triplets `B` représentant respectivement un point $M$ et un ensemble fini non vide $\mathsf{B}$ et qui renvoie le minimum des $\left\|\overrightarrow{MN}\right\|$ pour $N$ décrivant l'ensemble $B$.
3. Écrire une fonction `distance(A,B)` qui prend en arguments deux listes de triplets `A` et `B` représentant deux ensembles finis et non vides $\mathsf{A}$ et $\mathsf{B}$ et qui renvoie le réel $\Delta(\mathsf{A}, \mathsf{B})$.

## Distance d'un point à une droite dans $\mathscr{E}$

Dans cette partie, on note $M$ le point de coordonnées $(1, -1, 1)$ et $\mathcal{D}$ la droite passant par le point $A$ de coordonnées $(1, 0, 1)$ et dirigé par le vecteur $\overrightarrow{v}$ de coordonnées $(-2, 1, 1)$. L'objectif est de calculer $\Delta(\{M\}, \mathcal{D})$.

4. Donner une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$.
5. On définit la fonction $f$ par :
$$f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto 6t^2 + 2t + 1 \end{array}.$$
Justifier que $f$ admet un minimum global et expliciter cette valeur. Dans la suite, on la note $\alpha$.
6. Montrer que pour tout $N \in \mathcal{D}$, il existe $t_N \in \mathbb{R}$ vérifiant $f(t_N) = \left\|\overrightarrow{MN}\right\|^2$.
7. En déduire que pour tout $N \in \mathcal{D}$, $\left\|\overrightarrow{MN}\right\| \geq \sqrt{\alpha}$.
8. Montrer qu'il existe $H \in \mathcal{D}$ vérifiant $\left\|\overrightarrow{MH}\right\| = \sqrt{\alpha}$. En déduire la valeur de $\Delta(\{M\}, \mathcal{D})$.

## Distance d'un point à un plan dans $\mathscr{E}$

Dans cette partie, on note $M$ le point de coordonnées $(0, 2, 1)$ et $\mathcal{P}$ le plan ayant comme représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 + t + 2s \\ y = 0 - t + s \\ z = 2 - t - s \end{cases}$$

où $t$ et $s$ sont des réels.

9. Donner une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$.
10. Déterminer les coordonnées de l'unique point $H$ de $\mathcal{P}$ tel que $\overrightarrow{MH}$ est orthogonal à $\mathcal{P}$.
11. Montrer que pour tout point $N$ de $\mathcal{P}$, on a
$$\left\|\overrightarrow{MN}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{MH}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{HN}\right\|^2.$$
12. En déduire la valeur de $\Delta\left(\{M\}, \mathcal{P}\right)$.

## Distance entre deux droites dans $\mathscr{E}$

Dans cette partie, on note $\mathcal{D}_1$ la droite passant par les points $A\,(2,1,2)$ et $B\,(1,0,1)$, et $\mathcal{D}_2$ la droite qui est l'intersection des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ d'équations cartésiennes respectives :

$$\begin{array}{l} \mathcal{P}_1 : x+2y+z+1=0 \\ \mathcal{P}_2 : x-y-z-1\ \ =0 \end{array}.$$

13. (a) Donner une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}_1$.
    (b) Faire de même pour la droite $\mathcal{D}_2$.
14. Déterminer les coordonnées d'un vecteur non nul $\overrightarrow{n}$ orthogonal à la fois à $\mathcal{D}_1$ et à $\mathcal{D}_2$.
15. Déterminer les coordonnées du point $H$ appartenant à $\mathcal{D}_1$ et du point $K$ appartenant à $\mathcal{D}_2$ tels que $\overrightarrow{HK}$ et $\overrightarrow{n}$ soient liés (c'est-à-dire colinéaires).
16. Justifier brièvement que $\left\|\overrightarrow{HK}\right\| \geq \Delta\left(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2\right)$.
17. Montrer que pour tout point $M$ de $\mathcal{D}_1$ et tout point $N$ de $\mathcal{D}_2$, on a
$$\left\|\overrightarrow{MN}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{KN}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{HK}\right\|^2.$$
18. En déduire la valeur de $\Delta\left(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2\right)$.

## Un autre problème de minimisation

Soient $n \in \mathbb{N}^\star$ et $M_1, M_2, \ldots, M_n$ des points de $\mathscr{E}$. Pour tout point $N$ de $\mathscr{E}$, on pose :

$$d\,(N) = \sum_{k=1}^{n} \left\|\overrightarrow{NM_k}\right\|^2.$$

On note $G$ l'isobarycentre de la famille de points $M_1, M_2, \ldots, M_n$.

19. Rappeler la définition de l'isobarycentre d'une famille de points $M_1, M_2, \ldots, M_n$.
20. Montrer que $d(N) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\left\|\overrightarrow{NG}\right\|^2 + 2\overrightarrow{NG}\cdot\overrightarrow{GM_k} + \left\|\overrightarrow{GM_k}\right\|^2\right)$.
21. En conclure que pour tout $N \in \mathscr{E}, d\,(N) \geq d\,(G)$.

# Corrigé du DS n° 5 de mathématiques et d'informatique

## Problème A

*Les deux parties de ce problème sont indépendantes.*

### Partie I

*Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose :*

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

*On utilisera seulement le langage Python pour les questions d'informatique et on pourra faire appel aux fonctions des questions précédentes sans avoir besoin de les réécrire.*

1. ***[Informatique]** Écrire une fonction `suite` qui prend en argument un entier $n \geqslant 1$ et qui renvoie la valeur de $a_n$.*

   ▶ Par exemple :

```
def suite(n):
    S=0
    for k in range(1,n+1):
        S=S+(1/k**2)
    return S
```

2. (a) *Étudier la monotonie de la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$.*

   ▶ On a :

$$\forall n \geqslant 1, \quad a_{n+1} - a_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} > 0.$$

   Donc $\boxed{(a_n)_{n\geqslant 1} \text{ est strictement croissante}}$.

   (b) *Montrer que $\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ pour tout entier $k \geqslant 2$.*

   ▶ Soit $k \geqslant 2$. On a :

$$\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) - \frac{1}{k^2} = \frac{k^2 - k(k-1) - (k-1)}{k^2(k-1)} = \frac{1}{k^2(k-1)} > 0.$$

   Donc $\boxed{\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}}$ pour tout $k \geqslant 2$.

   (c) *En déduire que la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ converge.*

▶ On a :

$$\begin{aligned}
\forall n \geqslant 1, \quad a_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \quad \text{par définition de } a_n \\
&= \frac{1}{1^2} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \quad \text{par associativité} \\
&\leqslant 1 + \sum_{k=1}^{n} \left( \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) \quad \text{d'après le résultat de la question 2(b)} \\
&= 1 + \left( \frac{1}{2-1} - \frac{1}{n} \right) \quad \text{en reconnaissant une somme télescopique} \\
&= 2 - \frac{1}{n} < 2 \quad \text{car } \frac{1}{n} > 0.
\end{aligned}$$

*Attention : $2 - \frac{1}{n}$ n'est pas un majorant de la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ ! Pour rappel, un majorant est une constante (qui ne dépend donc pas de $n$) supérieure à tous les termes de la suite.*

Donc $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est majorée par 2. De plus, $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante d'après le résultat de la question 2(a). D'après le théorème de la limite monotone, on en déduit que $\boxed{(a_n)_{n\geqslant 1} \text{ converge}}$.

*Dans la suite de l'énoncé, on note $\alpha$ la limite de la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$.*

3. *Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $b_n = a_n + \frac{1}{n}$.*

(a) *Montrer que les suites $(a_n)_{n\geqslant 1}$ et $(b_n)_{n\geqslant 1}$ sont adjacentes.*

▶ On a déjà montré dans la question 2(a) que $\boxed{(a_n)_{n\geqslant 1} \text{ est strictement croissante}}$. On a :

$$\begin{aligned}
\forall n \geqslant 1, \quad b_{n+1} - b_n &= \left( a_{n+1} + \frac{1}{n+1} \right) - \left( a_n + \frac{1}{n} \right) \\
&= \underbrace{a_{n+1} - a_n}_{= \frac{1}{(n+1)^2}} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \\
&= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \\
&= \frac{n + n(n+1) - (n+1^2)}{n(n+1)^2} \\
&= \frac{-1}{n(n+1)^2} < 0.
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{(b_n)_{n\geqslant 1} \text{ est strictement décroissante}}$. De plus :

$$\lim_{n\to+\infty} b_n - a_n = \lim_{n\to+\infty} \left( a_n + \frac{1}{n} \right) - a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = \boxed{0}.$$

On a bien montré que $\boxed{(a_n)_{n\geqslant 1} \text{ et } (b_n)_{n\geqslant 1} \text{ sont adjacentes}}$.

(b) *À l'aide du résultat précédent, justifier brièvement que :*

$$\forall n \geqslant 1, \quad 0 < \alpha - a_n < \frac{1}{n}.$$

▶ D'après le théorème des suites adjacentes, on en déduit que $(a_n)_{n\geqslant 1}$ et $(b_n)_{n\geqslant 1}$ convergent vers la même limite, qu'on a noté $\alpha = \lim_{n\to+\infty} a_n$. Puisque $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est strictement croissante et $(b_n)_{n\geqslant 1}$ est strictement décroissante, on a d'après le théorème des suites adjacentes :

$$\forall n \geqslant 1, \quad a_n < \alpha < b_n = a_n + \frac{1}{n}.$$

En soustrayant $a_n$, on obtient :

$$\boxed{\forall n \geqslant 1, \quad 0 < \alpha - a_n < \frac{1}{n}}.$$

(c) ***[Informatique]*** *Écrire une fonction* `approx` *qui prend en argument un réel* `epsilon` $> 0$ *et qui renvoie une approximation de* $\alpha$ *à* `epsilon` *près. Par exemple, si* `epsilon` $= 10^{-6}$ *alors* `approx(epsilon)` *renvoie une valeur approchée de* $\alpha$ *dont au moins les six premières décimales sont exactes.*

▶

*D'après le résultat de la question précédente, il suffit de calculer* $a_n$ *pour un rang* $n$ *tel que* $\frac{1}{n} <$ `epsilon`. *On peut donc choisir* $n = \left\lfloor \frac{1}{\texttt{epsilon}} \right\rfloor + 1$ *ou tout simplement utiliser une boucle* `while`.

Par exemple :

```
def suite(epsilon):
    n=1
    while 1/n>=epsilon:
        n=n+1
    return suite(n)
```

4. (a) *En vous inspirant de la méthode utilisée à la question précédente, montrer que :*

$$\forall n \geqslant 1, \quad \frac{1}{n+1} < \alpha - a_n < \frac{1}{n}.$$

▶

*Pour obtenir l'inégalité de la question précédente, on a utilisé que :*

$$\forall n \geqslant 1, \quad a_n < \alpha < a_n + \frac{1}{n} = b_n$$

*où* $(a_n)_{n\geqslant 1}$ *et* $(b_n)_{n\geqslant 1}$ *sont adjacentes. Pour obtenir l'inégalité de cette question, il suffit donc d'utiliser que :*

$$\forall n \geqslant 1, \quad c_n = a_n + \frac{1}{n+1} < \alpha < a_n + \frac{1}{n} = b_n$$

*où* $(c_n)_{n\geqslant 1}$ *et* $(b_n)_{n\geqslant 1}$ *sont adjacentes.*

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $c_n = a_n + \frac{1}{n+1}$. On a déjà montré dans la question 3(a) que $\boxed{(b_n)_{n\geqslant 1} \text{ est strictement décroissante}}$. On a :

$$\begin{aligned}
\forall n \geqslant 1, \quad c_{n+1} - c_n &= \left(a_{n+1} + \frac{1}{n+2}\right) - \left(a_n + \frac{1}{n+1}\right) \\
&= \underbrace{a_{n+1} - a_n}_{=\frac{1}{(n+1)^2}} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} \\
&= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} \\
&= \frac{(n+2) + (n+1)^2 - (n+1)(n+2)}{(n+1)^2(n+2)} \\
&= \frac{1}{(n+1)^2(n+2)} > 0.
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{(c_n)_{n\geqslant 1} \text{ est strictement croissante}}$. De plus :

$$\lim_{n\to+\infty} b_n - c_n = \lim_{n\to+\infty} \left(a_n + \frac{1}{n}\right) - \left(a_n + \frac{1}{n+1}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \boxed{0}.$$

Donc $\boxed{(c_n)_{n\geqslant 1} \text{ et } (b_n)_{n\geqslant 1} \text{ sont adjacentes}}$. D'après le théorème des suites adjacentes, on en déduit qu'elles convergent vers la même limite, qui est égale à $\alpha = \lim_{n\to+\infty} b_n$ d'après ce qu'on a montré dans la question 3(b). De plus, on a :

$$\forall n \geqslant 1, \quad a_n + \frac{1}{n+1} = c_n < \alpha < b_n = a_n + \frac{1}{n}.$$

En soustrayant $a_n$, on obtient :

$$\boxed{\forall n \geqslant 1, \quad \frac{1}{n+1} < \alpha - a_n < \frac{1}{n}}.$$

(b) *En déduire un équivalent simple de l'erreur d'approximation $\alpha - a_n$ quand $n \to +\infty$.*

▶ En divisant le résultat de la question précédente par $\frac{1}{n}$, on obtient :

$$\forall n \geqslant 1, \quad \frac{n}{n+1} < \frac{\alpha - a_n}{\frac{1}{n}} < \frac{n}{n} = 1 \quad \text{car } \frac{1}{n} > 0.$$

Or :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \quad \text{car } n+1 \underset{n\to+\infty}{\sim} n.$$

D'après le théorème de limite par encadrement, on en déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\alpha - a_n}{\frac{1}{n}} = 1 \quad \text{donc} \quad \boxed{\alpha - a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}}.$$

(c) ***[Informatique]*** *On suppose que* `epsilon` $= 10^{-6}$. *Combien de termes au minimum la fonction* `approx(epsilon)` *doit-elle calculer dans la somme définissant la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ avant de renvoyer une valeur approchée de $\alpha$ à $10^{-6}$ près ?*

▶ Pour que $a_n$ soit égal à une valeur approchée de $\alpha$ à $10^{-6}$ près, il suffit que $\alpha - a_n < 10^{-6}$. D'après le résultat de la question 4(a), on en déduit que $\frac{1}{n+1} < 10^{-6}$ (par transitivité de l'inégalité) donc $n + 1 > 10^6$. Puisque $n$ est un entier, la plus petite valeur possible est donc $\boxed{n = 10^6}$.

# Partie II

*Pour tout couple d'entiers $(n, p)$ tels que $n \geqslant 1$ et $p \geqslant 1$, on pose :*

$$S_{n,p} = \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{n} u_{i,j} \quad \text{où} \quad u_{i,j} = \begin{cases} \frac{1}{i^2 - j^2} & \text{si } i \neq j \\ 0 & \text{si } i = j. \end{cases}$$

*Le but de cette partie est de montrer que :*

$$\lim_{p\to+\infty} \left(\lim_{n\to+\infty} S_{n,p}\right) \neq \lim_{n\to+\infty} \left(\lim_{p\to+\infty} S_{n,p}\right).$$

*On admet que la suite $\left(a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right)_{n\geqslant 1}$ converge et on note $\alpha$ sa limite.*

5. *En utilisant un encadrement, montrer que :*

$$\forall j \geqslant 1, \quad \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=n-j+1}^{n+j}\frac{1}{k}\right)=0.$$

► Soit $j \geqslant 1$. Puisqu'on étudie la limite quand $n \to +\infty$, on peut supposer que $n \geqslant j$ et donc que $n-j+1 \geqslant 1$. Par conséquent, on a pour tout entier $k$ allant de $n-j+1$ à $n+j$ :

$$n-j+1 \leqslant k \leqslant n+j \quad \text{donc} \quad \frac{1}{n-j+1} \geqslant \frac{1}{k} \geqslant \frac{1}{n+j}$$

car la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$. En sommant ces inégalités, on obtient :

$$\underbrace{\sum_{k=n-j+1}^{n+j}\frac{1}{n-j+1}}_{=\frac{(n+j)-(n-j+1)+1}{n-j+1}=\frac{2j}{n-j+1}} \geqslant \sum_{k=n-j+1}^{n+j}\frac{1}{k} \geqslant \underbrace{\sum_{k=n-j+1}^{n+j}\frac{1}{n+j}}_{=\frac{(n+j)-(n-j+1)+1}{n+j}=\frac{2j}{n+j}}$$

donc :

$$\boxed{\frac{2j}{n-j+1} \geqslant \sum_{k=n-j+1}^{n+j}\frac{1}{k} \geqslant \frac{2j}{n+j}}.$$

Or :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2j}{n-j+1}=0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty}\frac{2j}{n+j}=0.$$

D'après le théorème de limite par encadrement, on en déduit que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=n-j+1}^{n+j}\frac{1}{k}\right)=0}$$

et ceci est vrai pour tout $j \geqslant 1$.

6. *Dans cette question, on fixe un entier $j \geqslant 1$.*

   (a) *Montrer que $2ju_{i,j} = \frac{1}{i-j} - \frac{1}{i+j}$ pour tout $i \neq j$.*

   ► Soit $i \neq j$. On a :

$$\frac{1}{i-j}-\frac{1}{i+j}=\frac{(i+j)-(i-j)}{(i-j)(i+j)}=\frac{2j}{i^2-j^2}=\boxed{2ju_{i,j}} \quad \text{par définition de } u_{i,j}.$$

   (b) *En déduire que pour tout entier $n > 2j$ :*

$$2j\sum_{i=1}^{n}u_{i,j}=\frac{3}{2j}-\sum_{k=n-j+1}^{n+j}\frac{1}{k}.$$

   ► On a :

$$\begin{aligned}
2j\sum_{i=1}^{n}u_{i,j} &= \sum_{i=1}^{n}2ju_{i,j} \quad \text{par linéarité}\\
&= \sum_{i=1}^{j-1}2ju_{i,j} + 2j\underbrace{u_{j,j}}_{=0} + \sum_{i=j+1}^{n}2ju_{i,j}\\
&= \sum_{i=1}^{j-1}\left(\frac{1}{i-j}-\frac{1}{i+j}\right) + \sum_{i=j+1}^{n}\left(\frac{1}{i-j}-\frac{1}{i+j}\right) \quad \text{d'après le résultat de la question précédente}\\
&= \sum_{i=1}^{j-1}\frac{1}{i-j} - \sum_{i=1}^{j-1}\frac{1}{i+j} + \sum_{i=j+1}^{n}\frac{1}{i-j} - \sum_{i=j+1}^{n}\frac{1}{i+j} \quad \text{par linéarité.}
\end{aligned}$$

Or :

$$\sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{i-j} = \sum_{k=1}^{j-i} \frac{1}{-k} = -\sum_{k=1}^{j-i} \frac{1}{k} \quad \text{d'après l'inversion de l'ordre de sommation } k = j-i,$$

$$\sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{i+j} = \sum_{k=j+1}^{2j-1} \frac{1}{k} \quad \text{d'après le décalage d'indice } k = i+j,$$

$$\sum_{i=j+1}^{n} \frac{1}{i-j} = \sum_{k=1}^{n-j} \frac{1}{k} \quad \text{d'après le décalage d'indice } k = i-j,$$

$$\sum_{i=j+1}^{n} \frac{1}{i+j} = \sum_{k=2j+1}^{n+j} \frac{1}{k} \quad \text{d'après le décalage d'indice } k = i+j.$$

*Il y a beaucoup d'autres manières de mener ces calculs de sommes. L'idée principale est de faire apparaître des sommes de termes de la forme $\frac{1}{k}$ afin d'obtenir l'expression finale après simplifications.*

En reportant, on obtient :

$$\begin{aligned}
2j\sum_{i=1}^{n} u_{i,j} &= -\sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k} - \sum_{k=j+1}^{2j-1} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n-j} \frac{1}{k} - \sum_{k=2j+1}^{n+j} \frac{1}{k} \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n-j} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k}\right) - \left(\sum_{k=j+1}^{2j-1} \frac{1}{k} + \sum_{k=2j+1}^{n+j} \frac{1}{k} + \frac{1}{2j} - \frac{1}{2j}\right) \\
&= \sum_{k=j}^{n-j} \frac{1}{k} - \left(\sum_{k=j+1}^{n+j} \frac{1}{k} - \frac{1}{2j}\right) \qquad \text{car } n-j > j \text{ (puisque } n > 2j) \\
&= \frac{1}{j} + \sum_{k=j+1}^{n-j} \frac{1}{k} - \left(\sum_{k=j+1}^{n-j} \frac{1}{k} + \sum_{k=n-j+1}^{n+j} \frac{1}{k}\right) + \frac{1}{2j} \\
&= \boxed{\frac{3}{2j} - \sum_{k=n-j+1}^{n+j} \frac{1}{k}}.
\end{aligned}$$

7. *À l'aide des résultats précédents, exprimer la limite de $S_{n,p}$ quand $n \to +\infty$ en fonction de $a_p$ pour tout entier $p \geqslant 1$, puis en déduire que :*

$$\lim_{p\to+\infty} \left(\lim_{n\to+\infty} S_{n,p}\right) = \frac{3}{4}\alpha.$$

► Soit $p \geqslant 1$. Puisqu'on étudie la limite quand $n \to +\infty$, on peut supposer que $n > 2p$ et donc que $n > 2j$ pour tout entier $j$ allant de 1 à $p$. Par conséquent, on a :

$$\begin{aligned}
S_{n,p} &= \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n} u_{i,j} \quad \text{par définition de } S_{n,p} \\
&= \sum_{j=1}^{p} \frac{1}{2j}\left(2j\sum_{i=1}^{n} u_{i,j}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{p} \frac{1}{2j}\left(\frac{3}{2j} - \sum_{k=n-j+1}^{n+j} \frac{1}{k}\right) \quad \text{d'après le résultat de la question précédente} \\
&= \frac{3}{4}\underbrace{\sum_{j=1}^{p} \frac{1}{j^2}}_{=a_p} - \sum_{j=1}^{p} \frac{1}{2j}\left(\sum_{k=n-j+1}^{n+j} \frac{1}{k}\right) \quad \text{par linéarité.}
\end{aligned}$$

Or :
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=n-j+1}^{n+j}\frac{1}{k}\right)=0 \quad \text{d'après le résultat de la question 5.}$$
Donc :
$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{j=1}^{p}\frac{1}{2j}\left(\sum_{k=n-j+1}^{n+j}\frac{1}{k}\right)=0 \quad \text{par somme de limites.}$$

*Puisque $p$ est fixé (pour l'instant), on obtient une somme d'un nombre fini de termes qui tendent tous vers 0, donc la somme tend bien vers 0. Bien sûr, ce résultat serait faux si $p=n$ (car on obtiendrait un nombre infini de termes qui tendent vers 0 ce qui est une forme indéterminée).*

On en déduit que :
$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}S_{n,p}=\frac{3}{4}a_p} \quad \text{par définition de } a_p$$
et ceci est vrai pour tout $p\geqslant 1$. Par conséquent :
$$\boxed{\lim_{p\to+\infty}\left(\lim_{n\to+\infty}S_{n,p}\right)=\frac{3}{4}\alpha} \quad \text{car } \lim_{p\to+\infty}a_p=\alpha.$$

8. *En remarquant que $u_{i,j}=-u_{j,i}$ pour tout couple $(i,j)\in\mathbb{N}^2$ et en utilisant le résultat précédent, exprimer $\lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{p\to+\infty}S_{n,p}\right)$ en fonction de $\alpha$ puis conclure.*

▶ On a :
$$-u_{j,i}=\begin{cases}\frac{-1}{j^2-i^2} & \text{si } j\neq i\\ 0 & \text{si } j=i\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{i^2-j^2} & \text{si } i\neq j\\ 0 & \text{si } i=j\end{cases}=u_{i,j} \quad \text{par définition de } u_{i,j}.$$
Par conséquent :
$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{p\to+\infty}S_{n,p}\right)&=\lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{p\to+\infty}\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n}u_{i,j}\right) && \text{par définition de } S_{n,p}\\
&=\lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{p\to+\infty}\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n}-u_{j,i}\right) && \text{d'après la remarque ci-dessus}\\
&=\lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{p\to+\infty}-\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n}u_{j,i}\right) && \text{par linéarité}\\
&=-\lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{p\to+\infty}\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n}u_{j,i}\right) && \text{d'après les opérations sur les limites}\\
&=-\lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{p\to+\infty}\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n}u_{i,j}\right) && \text{car } i \text{ et } j \text{ sont des variables muettes}\\
&=-\lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{p\to+\infty}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{p}u_{i,j}\right) && \text{par propriété des sommes doubles}\\
&=-\lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{p\to+\infty}S_{p,n}\right) && \text{par définition de } S_{p,n}\\
&=-\lim_{p\to+\infty}\left(\lim_{n\to+\infty}S_{n,p}\right) && \text{car } n \text{ et } p \text{ sont des variables muettes}\\
&=\boxed{-\frac{3}{4}\alpha} && \text{d'après le résultat de la question précédente.}
\end{aligned}$$

Pour conclure, montrons que $\lim_{p\to+\infty}(\lim_{n\to+\infty} S_{n,p}) \neq \lim_{n\to+\infty}(\lim_{p\to+\infty} S_{n,p})$. Par l'absurde, supposons que ces limites sont égales. D'après les résultats précédents, on en déduit que :

$$\frac{3}{4}\alpha = -\frac{3}{4}\alpha \quad \text{donc} \quad \alpha = 0.$$

*N'oubliez pas de justifier que $\alpha \neq 0$ pour pouvoir conclure.*

Or $\alpha$ est la limite de la suite $\left(a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right)_{n\geqslant 1}$ qui est strictement croissante d'après le résultat de la question 2($a$), donc qui est minorée par $a_1 = \frac{1}{1^2} = 1$. Par conséquent, $\alpha = 0 \geqslant 1$ ce qui est absurde. On peut donc en conclure que :

$$\boxed{\lim_{p\to+\infty}\left(\lim_{n\to+\infty} S_{n,p}\right) \neq \lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{p\to+\infty} S_{n,p}\right)}.$$

9. *Que vaut* $\lim_{n\to+\infty} S_{n,n}$ *?*

►

*Si on écrit tous les termes $u_{i,j}$ de la somme double $S_{n,n}$ sous forme d'un tableau, on obtient :*

| | $j=1$ | $j=2$ | $j=3$ | $\dots$ | $j=n-1$ | $j=n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $i=1$ | $0$ | $-\frac{1}{3}$ | $-\frac{1}{8}$ | $\dots$ | $\frac{1}{1-(n-1)^2}$ | $\frac{1}{1-n^2}$ |
| $i=2$ | $\frac{1}{3}$ | $0$ | $-\frac{1}{5}$ | $\dots$ | $\frac{1}{4-(n-1)^2}$ | $\frac{1}{4-n^2}$ |
| $i=3$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{5}$ | $0$ | $\dots$ | $\frac{1}{9-(n-1)^2}$ | $\frac{1}{9-n^2}$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\ddots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $i=n-1$ | $\frac{1}{(n-1)^2-1}$ | $\frac{1}{(n-1)^2-4}$ | $\frac{1}{(n-1)^2-9}$ | $\dots$ | $0$ | $\frac{1}{(n-1)^2-n^2}$ |
| $i=n$ | $\frac{1}{n^2-1}$ | $\frac{1}{n^2-4}$ | $\frac{1}{n^2-9}$ | $\dots$ | $\frac{1}{n^2-(n-1)^2}$ | $0$ |

*On remarque que la termes au-dessus de la diagonale sont égaux aux opposés des termes sous la diagonale. En sommant tous les termes, on obtient donc $S_{n,n} = 0$. On peut retrouver précisément ce résultat à l'aide de manipulations sur les sommes.*

On a pour tout $n \geqslant 1$ :

$$\begin{aligned}
S_{n,n} &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} u_{i,j} \quad \text{par définition de } S_{n,p} \\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j-1} u_{i,j} + \underbrace{u_{j,j}}_{=0} + \sum_{i=j+1}^{n} u_{i,j}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} u_{i,j} + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j+1}^{n} u_{i,j} \quad \text{par linéarité.}
\end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} u_{i,j} &= \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} u_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} u_{i,j} \quad \text{par propriété des sommes doubles} \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j+1}^{n} u_{j,i} \quad \text{car } i \text{ et } j \text{ sont des variables muettes} \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j+1}^{n} -u_{i,j} \quad \text{d'après la remarque utilisée dans la question précédente} \\
&= -\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j+1}^{n} u_{i,j} \quad \text{par linéarité.}
\end{aligned}$$

*On a retrouvé que la somme des termes au-dessus de la diagonale est égale à l'opposé de la somme des termes sous la diagonale.*

En reportant, on obtient :

$$\forall n \geqslant 1, \quad S_{n,n} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j-1} u_{i,j} + \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=j+1}^{n} u_{i,j} = -\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=j+1}^{n} u_{i,j} + \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=j+1}^{n} u_{i,j} = 0.$$

On en déduit que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_{n,n} = 0}.$$

## Exercice

1. *Déterminer la limite de $a_n = \dfrac{\arctan(n+1)\sqrt{n+2}}{\exp(n+3)}$ quand $n \to +\infty$.*

► Par définition, la fonction arctangente est la bijection réciproque de $\tan : ]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \to \mathbb{R}$. On en déduit que :

$$\forall n \geqslant 0, \quad \frac{-\pi}{2} < \arctan(n+1) < \frac{\pi}{2}.$$

Donc la suite $(\arctan(n+1))_{n\geqslant 0}$ est bornée. D'autre part :

$$\frac{\sqrt{n+2}}{\exp(n+3)} = \frac{\sqrt{n+2}}{e^n e^3} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n}}{e^n e^3} = \frac{1}{e^3}\left(\frac{n^{1/2}}{e^n}\right).$$

Or $n^{1/2} \underset{n\to+\infty}{=} o(e^n)$ d'après le théorème des croissances comparées donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n+2}}{\exp(n+3)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{e^3}\left(\frac{n^{1/2}}{e^n}\right) = 0.$$

Par conséquent, la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est le produit d'une suite bornée et d'une suite qui converge vers 0. D'après un corollaire du théorème de limite par encadrement, on en déduit que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0 :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} a_n = 0}.$$

2. *Déterminer un équivalent simple et la limite de $b_n = \dfrac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)}$ quand $n \to +\infty$.*

► Puisque $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, on a d'après l'équivalent usuel de la fonction sinus :

$$\sin\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

On pose $\cos\left(\frac{1}{n}\right) = 1 + u_n$ donc $u_n = \cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1$. Puisque $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, on a d'après l'équivalent usuel de la fonction cosinus :

$$u_n = \cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-\left(\frac{1}{n}\right)^2}{2} = \frac{-1}{2n^2}.$$

En particulier, on en déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{-1}{2n^2} = 0.$$

Par conséquent, on a d'après l'équivalent usuel de la fonction logarithme :

$$\ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \ln(1+u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-1}{2n^2}.$$

Finalement, on a par quotient d'équivalents :

$$b_n = \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{-1}{2n^2}} = \boxed{-2n} \quad \text{donc} \quad \lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} -2n = \boxed{-\infty}.$$

# Problème B

## Énoncé et corrigé de V. Vong

1. On a

```
def norme(M,N) :
    S = 0
    for i in range(len(M)) :
        S = S+M[i]*N[i]
    return S
```

2. On a

```
def mini(M,B) :
    if B != [] :
        P = B[0]
        d = norme(M,P)
        for i in range(1,len(B)) :
            e = norme(M,B[i])
            if d>e :
                P = B[i]
                d = e
        return d
    else :
        print("B est vide")
        return
```

3. On a

```
def distance(A,B) :
    if A != [] and B != [] :
        d = mini(A[0],B)
        for i in range(1,len(A)) :
            e = mini(A[i],B)
            if d>e :
                d = e
        return d
    else :
        print("l'une des deux listes est vide")
        return
```

4. $\mathcal{D}$ étant la droite passant par $A\,(1,0,1)$ et dirigé par $\overrightarrow{v}\,(-2,1,1)$, on en déduit qu'une représentation paramétrique de $\mathcal{D}$ est donnée par

$$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = \phantom{1 - 2}t \\ z = 1 + \phantom{2}t \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R}.$$

5. La fonction $f$ étant un polynôme du second degré, elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall t \in \mathbb{R}, f'(t) = 12t + 2.$$

On en déduit que : $f'$ est négative sur $]-\infty,-\frac{1}{6}]$ et que $f'$ est positive sur $[-\frac{1}{6},+\infty[$.
Il en résulte que $f$ est décroissante sur $]-\infty,-\frac{1}{6}]$ et croissante sur $[-\frac{1}{6},+\infty[$
Donc $f$ admet un minimum global en $-\frac{1}{6}$. De plus, $f\left(-\frac{1}{6}\right)=\frac{5}{6}$.

6. Soit $N\in\mathcal{D}$, de coordonnées $(x,y,z)$. Il existe donc $t_N\in\mathbb{R}$ tel que :

$$x=1-2t_N, y=t_N \text{ et } z=1+t_N.$$

Les coordonnées étant données dans un repère orthonormé, on a alors

$$\left\|\overrightarrow{MN}\right\|^2=(1-2t_N-1)^2+(t_N+1)^2+(1+t_N-1)^2.$$

Donc

$$\left\|\overrightarrow{MN}\right\|^2=4t_N^2+t_N^2+2t_N+1+t_N^2.$$

Donc

$$\left\|\overrightarrow{MN}\right\|^2=6t_N^2+2t_N+1=f(t_N).$$

La démonstration étant valide pour tout $N\in\mathcal{D}$, on en déduit que

$$\boxed{\forall N\in\mathcal{D},\exists t_N\in\mathbb{R}, f(t_N)=\left\|\overrightarrow{MN}\right\|^2.}$$

7. Soit $N\in\mathcal{D}$. D'après la question 6, il existe $t_N\in\mathbb{R}$ vérifiant

$$f(t_N)=\left\|\overrightarrow{MN}\right\|^2.$$

d'après la question 5, $\frac{5}{6}$ est un minimum global de $f$. Donc

$$\left\|\overrightarrow{MN}\right\|^2\geq\frac{5}{6}.$$

D'où, en prenant la racine carrée :

$$\left\|\overrightarrow{MN}\right\|\geq\sqrt{\frac{5}{6}}.$$

On en déduit que

$$\boxed{\forall N\in\mathcal{D},\left\|\overrightarrow{MN}\right\|\geq\sqrt{\frac{5}{6}}.}$$

8. Posons $t_H=-\frac{1}{6}$, Le point $H(1-2t_H,t_H,1+t_H)$ est alors un point de la droite $\mathcal{D}$ et a pour coordonnées $\left(\frac{4}{3},-\frac{1}{6},\frac{5}{6}\right)$. De plus, d'après la question 6, on sait que

$$f\left(-\frac{1}{6}\right)=\left\|\overrightarrow{MH}\right\|^2.$$

En calculant, on a $f\left(-\frac{1}{6}\right)=\frac{5}{6}$. Donc $\left\|\overrightarrow{MH}\right\|^2=\frac{5}{6}$. D'où $\left\|\overrightarrow{MH}\right\|=\sqrt{\frac{5}{6}}$.
$H$ étant un point de $\mathcal{D}$, on en déduit que $\underline{\Delta(\{M\},\mathcal{D})\leq\sqrt{\frac{5}{6}}}$ Or d'après la question 7, $\sqrt{\frac{5}{6}}$ est un minorant des distances de $\left\|\overrightarrow{MN}\right\|$ lorsque $N$ décrit $\mathcal{D}$. Donc $\underline{\Delta(\{M\},\mathcal{D})\geq\sqrt{\frac{5}{6}}}$. On en conclut que

$$\boxed{\Delta(\{M\},\mathcal{D})=\sqrt{\frac{5}{6}}}.$$

9. Soient $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ et $(t,s) \in \mathbb{R}^2$. Raisonnons par équivalence. En appliquant $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$, on obtient :

$$\begin{cases} x = 1 + t + 2s \\ y = 0 - t + s \\ z = 2 - t - s \end{cases} \iff \begin{cases} x \qquad = 1 + t + 2s \\ x + y = 1 + 3s \\ x + z = 3 + s \end{cases}$$

Appliquons $L_2 \leftarrow L_2 - 3L_3$. On a alors :

$$\begin{cases} x \qquad = 1 + t + 2s \\ x + y = 1 + 3s \\ x + z = 3 + s \end{cases} \iff \begin{cases} x \qquad\qquad\quad = 1 + t + 2s \\ -2x + y - 3z = -8 \\ x + z \qquad\quad = 3 + s \end{cases}$$

On en déduit qu'une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ est donnée par :

$$\boxed{-2x + y - 3z + 8 = 0}.$$

10. Soit $H(x_H, y_H, z_H)$ un point de $\mathscr{E}$. D'après la question 9, on a une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ et un vecteur normal à ce plan donné par $\overrightarrow{u}(-2,1,-3)$. On a donc l'équivalence :

$$\left(H \in \mathcal{P} \text{ et } \overrightarrow{MH} \perp \mathcal{P}\right) \iff \exists \lambda \in \mathbb{R} \left(-2x_H + y_H - 3z_H + 8 = 0 \text{ et } \overrightarrow{MH} = \lambda \overrightarrow{u}\right).$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} & -2x_H + y_H - 3z_H + 8 = 0 \text{ et } \overrightarrow{MH} = \lambda \overrightarrow{u} \\ \iff & -2x_H + y_H - 3z_H + 8 = 0 \text{ et } (x_H - 0, y_H - 2, z_H - 1) = (-2\lambda, \lambda, -3\lambda). \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} & -2x_H + y_H - 3z_H + 8 = 0 \text{ et } \overrightarrow{MH} = \lambda \overrightarrow{u} \\ \iff & -2x_H + y_H - 3z_H + 8 = 0 \text{ et } (x_H, y_H, z_H) = (-2\lambda, \lambda + 2, -3\lambda + 1). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} & -2x_H + y_H - 3z_H + 8 = 0 \text{ et } \overrightarrow{MH} = \lambda \overrightarrow{u} \\ \iff & -2(-2\lambda) + (\lambda + 2) - 3(-3\lambda + 1) + 8 = 0 \text{ et } (x_H, y_H, z_H) = (-2\lambda, \lambda + 2, -3\lambda + 1) \\ \iff & 14\lambda + 7 = 0 \text{ et } (x_H, y_H, z_H) = (-2\lambda, \lambda + 2, -3\lambda + 1). \end{aligned}$$

Donc

$$-2x_H + y_H - 3z_H + 8 = 0 \text{ et } \overrightarrow{MH} = \lambda \overrightarrow{u} \iff \lambda = -\frac{1}{2} \text{ et } (x_H, y_H, z_H) = \left(1, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right).$$

On en déduit que l'unique point $H$ vérifiant les propriétés demandées a pour coordonnées

$$\boxed{\left(1, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)}.$$

11. Montrons que pour tout point $N$ de $\mathcal{P}$, on a

$$\left\|\overrightarrow{MN}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{MH}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{HN}\right\|^2.$$

Soit $N \in \mathscr{E}$. On a

$$\begin{aligned} \left\|\overrightarrow{MN}\right\|^2 &= \left\|\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HN}\right\|^2 \\ &= \left(\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HN}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HN}\right) \\ &= \overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{MH} + 2\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{HN} + \overrightarrow{HN} \cdot \overrightarrow{HN} \\ &= \left\|\overrightarrow{MH}\right\|^2 + 2\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{HN} + \left\|\overrightarrow{HN}\right\|^2 \end{aligned}.$$

Or par construction de $H$, $\overrightarrow{MH}$ est orthogonal au plant $\mathcal{P}$ et $H, N$ sont des points du plan $\mathcal{P}$. On en déduit que $\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{HN} = 0$. D'où

$$\left\|\overrightarrow{MN}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{MH}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{HN}\right\|^2.$$

La démonstration étant valide pour tout $N \in \mathcal{P}$, on en conclut que

$$\boxed{\forall N \in \mathcal{P}, \left\|\overrightarrow{MN}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{MH}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{HN}\right\|^2}.$$

12. D'après la question 11, on en déduit que

$$\forall N \in \mathcal{P}, \left\|\overrightarrow{MN}\right\|^2 \geq \left\|\overrightarrow{MH}\right\|^2.$$

Donc

$$\forall N \in \mathcal{P}, \left\|\overrightarrow{MN}\right\| \geq \left\|\overrightarrow{MH}\right\|.$$

Ainsi, $\left\|\overrightarrow{MH}\right\|$ est un minorant des normes des vecteurs $\left\|\overrightarrow{MN}\right\|$ lorsque $N$ décrit le plan $\mathcal{P}$. Donc $\Delta(\{H\}, \mathcal{P}) \geq \left\|\overrightarrow{MH}\right\|$. De plus, $H$ est un élément de $\mathcal{P}$. Donc $\left\|\overrightarrow{MH}\right\|$ est atteint en prenant $N = H$. On a donc $\Delta(\{M\}, \mathcal{P}) = \left\|\overrightarrow{MH}\right\|$. D'où

$$\boxed{\Delta(\{M\}, \mathcal{P}) = \sqrt{(1-0)^2 + \left(\frac{3}{2} - 2\right)^2 + \left(\frac{5}{2} - 1\right)^2} = \frac{\sqrt{14}}{2}}.$$

13. (a) $\mathcal{D}_1$ passe par les points $A(2,1,2)$ et $B(1,0,1)$. Donc un vecteur directeur de la droite est donnée par $\overrightarrow{AB}(-1,-1,-1)$. Donc une représentation paramétrique de $\mathcal{D}_1$ est donnée par

$$\boxed{\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 - t \quad \text{où } t \in \mathbb{R} \\ z = 2 - t \end{cases}}.$$

(b) Soit $M(x, y, z)$ un point de $\mathscr{E}$. Raisonnons par équivalence :

$$M \in \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \iff \begin{cases} x + 2y + z + 1 = 0 \\ x - y - z - 1 = 0 \end{cases}$$

En effectuant $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$, on obtient

$$M \in \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \iff \begin{cases} x + 2y + z + 1 = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases}.$$

Donc

$$M \in \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \iff \begin{cases} z = -1 + 3x \\ y = -2x \end{cases}.$$

On en déduit que $\mathcal{D}_2$ admet comme représentation paramétrique

$$\boxed{\begin{cases} x = t \\ y = -2t \quad \text{où } t \in \mathbb{R} \\ z = -1 + 3t \end{cases}}.$$

14. Soit $\overrightarrow{n}\,(a,b,c)$ un vecteur non nul. Remarquons qu'un vecteur directeur de $\mathcal{D}_1$ est donné par $\overrightarrow{u_1}\,(1,1,1)$ et qu'un vecteur directeur de $\mathcal{D}_2$ est donné par $\overrightarrow{u_2}\,(1,-2,3)$. Raisonnons par équivalence

$$\overrightarrow{n} \text{ orthognal à } \mathcal{D}_1 \text{ et à } \mathcal{D}_2 \iff \overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{u_1}=0 \text{ et } \overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{u_2}=0.$$

En passant aux coordonnées, cette dernière proposition est équivalente au système

$$\begin{cases} a+b+c &= 0 \\ a-2b+3c &= 0 \end{cases}.$$

En effectuant $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$, le système est équivalent à

$$\begin{cases} a+b+c = 0 \\ -3b+2c = 0 \end{cases}.$$

Ce qui est équivalent à

$$\begin{cases} a+b+c = 0 \\ b \qquad\quad = \frac{2}{3}c \end{cases}$$

Ce qui est équivalent à

$$\begin{cases} a = -\frac{5}{3}c \\ b = \frac{2}{3}c \end{cases}$$

On en déduit qu'un vecteur normal à $\mathcal{D}_1$ et à $\mathcal{D}_2$ est donné par

$$\boxed{\overrightarrow{n}(-5,2,3).}$$

15. Soient $H\,(x_H,y_H,z_H)$ un point de $\mathcal{D}_1$ et $K\,(x_K,y_K,z_K)$ un point de $\mathcal{D}_2$. Il existe donc $t\in\mathbb{R}$ et $s\in\mathbb{R}$ vérifiant

$$\begin{matrix} x_H &= 2-t \\ y_H &= 1-t \\ z_H &= 2-t \end{matrix} \text{ et } \begin{matrix} x_K &= s \\ y_K &= -2s \\ z_K &= -1+3s \end{matrix}.$$

Le vecteur $\overrightarrow{HK}$ a donc pour coordonnées $(s+t-2,-2s+t-1,3s+t-3)$. Le vecteur $\overrightarrow{n}$ étant non nul, $\overrightarrow{HK}$ et $\overrightarrow{n}$ sont liés si et seulement s'il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ vérifiant $\overrightarrow{HK}=\lambda\overrightarrow{n}$. Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. Raisonnons par équivalence. En passant aux coordonnées, on a

$$\overrightarrow{Hk}=\lambda\overrightarrow{n} \iff \begin{cases} s+t-2 &= -5\lambda \\ -2s+t-1 &= 2\lambda \\ 3s+t-3 &= 3\lambda \end{cases}.$$

Ce qui est équivalent au systeme

$$\begin{cases} 5\lambda+s+t &= 2 \\ -2\lambda-2s+t &= 1 \\ -3\lambda+3s+t &= 3 \end{cases}$$

En effectuant $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, le système est équivalent à

$$\begin{cases} 5\lambda+s+t = 2 \\ -7\lambda-3s \ = -1 \\ -8\lambda+2s \ = 1 \end{cases}$$

En effectuant $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$, on obtient le système équivalent

$$\begin{cases} 5\lambda+s+t = 2 \\ -7\lambda-3s \ = -1 \\ -15\lambda-s \ = 0 \end{cases}$$

En effectuant $L_2 \leftarrow L_2 - 3L_3$, on obtient le système équivalent

$$\begin{cases} 5\lambda + s + t = 2 \\ 38\lambda \quad = -1 \\ -15\lambda - s = 0 \end{cases}$$

En substituant, le système est alors équivalent à

$$\begin{aligned} t &= \tfrac{33}{19} \\ \lambda &= -\tfrac{1}{38} \,. \\ s &= \tfrac{15}{38} \end{aligned}$$

Par équivalence, on en déduit que les points $H$ et $K$ ont pour coordonnées :

$$\boxed{H\left(\frac{5}{19}, -\frac{14}{19}, \frac{5}{19}\right), K\left(\frac{15}{38}, -\frac{30}{38}, \frac{7}{38}\right)}.$$

**Remarque :** On peut également utiliser une autre approche : on sait que $\overrightarrow{HK}$ a pour coordonnées $(s+t-2, -2s+t-1, 3s+t-3)$. De plus, ce vecteur est colinéaire à $\overrightarrow{n}$ si et seulement s'il est orthogonal à $\overrightarrow{u_1}(1,1,1)$ et à $\overrightarrow{u_2}(1,-2,3)$. Ce qui est équivalent au système :

$$\begin{aligned} 2s + 3t - 6 &= 0 \\ 14s + 2t - 9 &= 0 \end{aligned}.$$

Ce qui est équivalent à

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 14 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

En remarquant que le déterminant de la matrice est égale à $-38 \neq 0$ en multipliant par la matrice inverse on obtient que la proposition est équivalente à

$$\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = -\frac{1}{38} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -14 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

On retrouve bien $s = \frac{15}{38}, t = \frac{33}{19}$

16. Par définition $\Delta(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$ est la borne inférieure de l'ensemble $A = \left\{ \left\| \overrightarrow{MN} \right\|, M \in \mathcal{D}_1 \text{ et } N \in \mathcal{D}_2 \right\}$ donc un minorant de cet ensemble. Par construction, $H$ est un élément de $\mathcal{D}_1$ et $K$ est un élément de $\mathcal{D}_2$. Donc $\left\| \overrightarrow{HK} \right\|$ est un élément de $A$. On en conclut que

$$\boxed{\left\| \overrightarrow{HK} \right\| \geq \Delta(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)}.$$

17. Soient $M$ un élément de $\mathcal{D}_1$ et $N$ un élément de $\mathcal{D}_2$. D'après la relation de Chasles, on a

$$\left\| \overrightarrow{MN} \right\|^2 = \left\| \overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HK} + \overrightarrow{KN} \right\|^2.$$

Donc

$$\left\| \overrightarrow{MN} \right\|^2 = \left\| (\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{KN}) + \overrightarrow{HK} \right\|^2$$

En développant, on obtient

$$\left\| \overrightarrow{MN} \right\|^2 = \left\| (\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{KN}) \right\|^2 + 2\left(\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{KN}\right) \cdot \overrightarrow{HK} + \left\| \overrightarrow{HK} \right\|^2.$$

Or par construction de $H$ et $K$, $\overrightarrow{HK}$ est orthogonal à $\mathcal{D}_1$ et à $\mathcal{D}_2$. De plus, $H$ et $M$ étant des points de $\mathcal{D}_1$ on en déduit que $\overrightarrow{MH}$ est lié à un vecteur directeur de $\mathcal{D}_1$. Donc est orthogonal à $\overrightarrow{HK}$. De la même façon, on en déduit que $\overrightarrow{KN}$ est orthogonal à $\overrightarrow{HK}$. Ainsi, $(\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{KN})\cdot\overrightarrow{HK}=0$. Il en résulte que

$$\left\|\overrightarrow{MN}\right\|^2=\left\|(\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{KN})\right\|^2+\left\|\overrightarrow{HK}\right\|^2.$$

La démonstration étant valide pour tout point $M$ de $\mathcal{D}_1$ et tout point $N$ de $\mathcal{D}_2$, on a bien

$$\boxed{\forall M\in\mathcal{D}_1,\forall N\in\mathcal{D}_2,\left\|\overrightarrow{MN}\right\|^2=\left\|\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{KN}\right\|^2+\left\|\overrightarrow{HK}\right\|^2}.$$

18. Montrons d'abord que $\left\|\overrightarrow{HK}\right\|$ est un minorant de l'ensemble $A$ défini dans la question 16. Soient $M\in\mathcal{D}_1$ et $N\in\mathcal{D}_2$. D'après la question 17, on a

$$\left\|\overrightarrow{MN}\right\|^2=\left\|(\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{KN})\right\|^2+\left\|\overrightarrow{HK}\right\|^2.$$

Par positivité d'un carré, on en déduit que

$$\left\|\overrightarrow{MN}\right\|^2\geq\left\|\overrightarrow{HK}\right\|^2.$$

Par positivité des normes, on en déduit que

$$\left\|\overrightarrow{MN}\right\|\geq\left\|\overrightarrow{HK}\right\|.$$

On en conclut que $\left\|\overrightarrow{HK}\right\|$ est un minorant de $A$. Or par définition, $\Delta(\mathcal{D}_1,\mathcal{D}_2)$ est le plus grand minorant de $A$. Donc

$$\Delta(\mathcal{D}_1,\mathcal{D}_2)\geq\left\|\overrightarrow{HK}\right\|.$$

Or dans la question 16, on a montré que $\left\|\overrightarrow{HK}\right\|\geq\Delta(\mathcal{D}_1,\mathcal{D}_2)$. On en déduit que $\Delta(\mathcal{D}_1,\mathcal{D}_2)=\left\|\overrightarrow{HK}\right\|$. En calculant $\left\|\overrightarrow{HK}\right\|$, on en conclut que

$$\boxed{\Delta(\mathcal{D}_1,\mathcal{D}_2)=\sqrt{38}}.$$

**Remarque :** Pour calculer $\left\|\overrightarrow{HK}\right\|$, plutôt que d'utiliser les coordonnées de $H$ et $K$, on peut aussi se souvenir que l'on a $\overrightarrow{HK}=\lambda\overrightarrow{n}$ avec $\lambda=-\frac{1}{38}$ et $\overrightarrow{n}(-5,2,3)$.

19. Par définition, l'isobarycentre $G$ est l'unique point vérifiant

$$\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{GM_k}=\overrightarrow{0}.$$

20. Soit $N\in\mathscr{E}$. On a

$$d(N)=\sum_{k=1}^{n}\left\|\overrightarrow{NM_k}\right\|^2.$$

D'après la relation de Chasles, on a donc

$$d(N)=\sum_{k=1}^{n}\left\|\overrightarrow{NG}+\overrightarrow{GM_k}\right\|^2.$$

En développant, on obtient donc

$$\boxed{d(N)=\sum_{k=1}^{n}\left(\left\|\overrightarrow{NG}\right\|^2+2\overrightarrow{NG}\cdot\overrightarrow{GM_k}+\left\|\overrightarrow{GM_k}\right\|^2\right)}.$$

21. Soit $N \in \mathscr{E}$. D'après la question 20, on a

$$d(N) = \sum_{k=1}^{n} \left( \left\| \overrightarrow{NG} \right\|^2 + 2\overrightarrow{NG} \cdot \overrightarrow{GM_k} + \left\| \overrightarrow{GM_k} \right\|^2 \right)$$

Donc, par linéarité :

$$d(N) = \sum_{k=1}^{n} \left\| \overrightarrow{NG} \right\|^2 + 2\overrightarrow{NG} \cdot \left( \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{GM_k} \right) + \sum_{k=1}^{n} \left\| \overrightarrow{GM_k} \right\|^2 .$$

Or $G$ est isobarycentre de $M_1, \dots, M_n$. Donc

$$d(N) = \sum_{k=1}^{n} \left\| \overrightarrow{NG} \right\|^2 + 2\overrightarrow{NG} \cdot \overrightarrow{0} + \sum_{k=1}^{n} \left\| \overrightarrow{GM_k} \right\|^2 .$$

D'où

$$d(N) = n \left\| \overrightarrow{NG} \right\|^2 + d(G) .$$

Or $n \left\| \overrightarrow{NG} \right\|^2 \geq 0$. Donc

$$d(N) \geq d(G) .$$

On a bien

$$\boxed{\forall N \in \mathscr{E}, d(N) \geq d(G)}.$$

# DS n$^{o}$ 6 de mathématiques et d'informatique

## durée : 3 heures

## Exercice (informatique)

Dans tout cet exercice, les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ sont modélisés en Python par la liste de leurs coefficients dans l'ordre croissant des degrés. Par exemple, le polynôme $P = 3 - X + 2X^3 + X^4$ est modélisé par la liste `P=[3,-1,0,2,1]`. La liste vide `[]` modélise le polynôme nul.

1. Écrire une fonction `deriver(P)` qui prend en argument un polynôme $P$, puis qui renvoie la liste des coefficients du polynôme dérivé $P'$. Par exemple, `deriver([3,-1,0,2,1])` renvoie `[-1,0,6,4]`.
2. Écrire une fonction `evaluer(P,r)` qui prend en arguments un polynôme $P$ et un réel $r$, puis qui renvoie la valeur de $P(r)$. Par exemple, `evaluer([3,-1,0,2,1],-2)` renvoie `5`.
3. On considère la fonction `mystere` ci-contre.
   (a) Que renvoie `mystere([-1,3,-4,4,-3,1],1)` ?
   (b) Comment s'appelle ce que renvoie `mystere(P,r)` ?

```
def mystere(P,r):
    L=P
    n=0
    while evaluer(L,r)==0:
        L=deriver(L)
        n=n+1
    return n
```

4. Dans cette question, on suppose que $r \in \mathbb{R}$ est une racine de $P \in \mathbb{R}[X]$. On rappelle qu'il existe alors $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = (X - r)Q$. On note $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{d-1} b_k X^k$.
   (a) Montrer que :
   $$b_{d-1} = a_d \quad \text{et} \quad \forall k \in \{d-1, d-2, \dots, 3, 2, 1\},\ b_{k-1} = a_k + rb_k.$$
   (b) Écrire une fonction `factoriser_simple(P,r)` qui prend en arguments le polynôme $P$ et le réel $r$, puis qui renvoie la liste des coefficients du polynôme $Q$.
5. Dans cette question, on suppose que $r \in \mathbb{R}$ est une racine d'ordre de multiplicité $n \geqslant 1$ de $P \in \mathbb{R}[X]$. À l'aide de la fonction `factoriser_simple`, écrire une fonction `factoriser_multiple(P,r,n)` qui renvoie la liste des coefficients du polynôme $Q$ tel que $P = (X - r)^n Q$.

# Problème A

Le but de ce problème est d'étudier la fonction suivante :

$$f : x \mapsto f(x) = \int_{2x}^{3x} \frac{e^t}{t} \mathrm{d}t.$$

Dans tout l'énoncé, on pose la fonction $g : t \mapsto \frac{e^t}{t}$.

1. Dresser le tableau des variations de la fonction $g$ en indiquant les limites aux bornes de l'ensemble de définition de $g$.
2. Montrer que $f$ est définie sur $\mathbb{R}^*$. Indication : fixer $x$ puis justifier que l'intégrale $f(x)$ est bien définie en distinguant les cas $x > 0$ et $x < 0$.
3. Pour cette question, on note $G_+$ une primitive de $g$ sur $]0, +\infty[$.
   (a) Soit $x > 0$. Exprimer $f(x)$ à l'aide de la fonction $G_+$.
   (b) En déduire que $f$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que pour tout $x > 0$ :
   $$f'(x) = \frac{e^x - 1}{x} e^{2x}.$$
4. En vous inspirant de la question précédente, montrer que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et que l'expression de $f'(x)$ obtenue ci-dessus est valable pour tout $x \neq 0$.
5. Dresser le tableau des variations de $f$. Les limites aux bornes de l'ensemble de définition de $f$ ne sont pas demandées à cette question et font l'objet de questions suivantes. Le tableau pourra être complété à chaque limite trouvée.
6. (a) Montrer que $-e^t \leqslant g(t) \leqslant 0$ pour tout $t \leqslant -1$, puis que $0 \leqslant f(x) \leqslant e^{2x} - e^{3x}$ pour tout $x \leqslant -\frac{1}{2}$.
   (b) En déduire la limite de $f$ en $-\infty$.
7. (a) Montrer que $1 + t \leqslant e^t \leqslant 1 + t + t^2$ pour tout $t \leqslant \ln(2)$. Indication : étudier deux fonctions bien choisies qu'on pourra appeler $h_1$ et $h_2$.
   (b) En déduire un encadrement de $f(x)$ pour tout $x \in \left]0, \frac{\ln(2)}{3}\right]$, puis que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$.
   (c) En vous inspirant de la question précédente, déterminer la limite à gauche de $f$ en 0.
8. (a) Dans cette question, on fixe $\lambda > 0$. Montrer que $\ln\left(\frac{e^{3x}-e^{2x}}{\lambda x}\right) \sim 3x$ quand $x \to +\infty$.
   (b) Montrer que :
   $$\forall x > 0, \quad \frac{e^{3x} - e^{2x}}{3x} \leqslant f(x) \leqslant \frac{e^{3x} - e^{2x}}{2x}.$$
   (c) Déduire des résultats précédents un équivalent de $\ln(f(x))$ quand $x \to +\infty$, puis la limite de $f$ en $+\infty$.

# Problème B : Étude d'un mélange de trois cartes

On considère un jeu de 3 cartes notées $C_0, C_1, C_2$ et disposées en un paquet sur une table.

On représente mathématiquement le paquet par une 3-liste sans répétition $L = [L_0, L_1, L_2]$ de $C_0, C_1, C_2$, où $L_0$ est la carte située en haut de la pile, $L_1$ est la carte du milieu, et $L_2$ est la carte située tout en dessous de la pile. La position $i$ d'une carte $C_k$ dans $L$ vérifie $L_i = C_k$. Par exemple, dans $L = [C_2, C_0, C_1]$, la carte $C_1$ se trouve en position 2.

Dans la suite, l'univers $\Omega$ désigne l'ensemble des 3-listes sans répétition de $C_0, C_1, C_2$, qui correspond donc à toutes les configurations possibles pour le paquet de trois cartes.

Pour tout $k$ élément de $[\![0, 2]\!]$, on appelle *insertion* à la position $k$ dans $L = [L_0, L_1, L_2]$ l'opération qui consiste à prendre la carte située au-dessus du paquet et à l'insérer entre $L_k$ et $L_{k+1}$. Une insertion à la position 0 ne change pas l'ordre des cartes. Une insertion à la position 2 consiste à faire glisser la carte située au-dessus du paquet pour la mettre sous le paquet. Par exemple, pour $L = [C_1, C_0, C_2]$ après insertion à la position 2, on obtient la liste $[C_0, C_2, C_1]$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, le battage à $k$ insertions consiste à effectuer $k$ insertions successives aléatoires, les choix des positions des insertions étant mutuellement indépendants et tout choix suivant la distribution uniforme sur $[\![0, 2]\!]$.

Dans la suite, on considère un paquet initialement trié qui est donc représenté par liste $L^{[0]} = [C_0, C_1, C_2]$, et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $L^{[k]}$ désigne la liste représentant le paquet obtenu après un battage à $k$ insertions et pour tout $L \in \Omega$, $\left(L^{[k]} = L\right)$ désigne l'événement :

$$\left(L^{[k]} = L\right) : \text{"le paquet est dans la configuration } L \text{ après un battage à } k \text{ insertions."}$$

1. Expliciter toutes les listes appartenant à $\Omega$.
2. Soit $L = [L_0, L_1, L_2]$ une liste de $\Omega$. Déterminer toutes les listes que l'on peut obtenir à partir de $L$ en effectuant une unique insertion.
3. (Informatique) Écrire une fonction `insertion(L,i)` prenant en argument une liste $L$ et un entier $i$ et qui renvoie la liste obtenue en insérant $L[0]$ à la position $i$. Par exemple, si $L = [L_0, L_1, L_2]$ et $i = 1$, la valeur de retour sera $[L_1, L_0, L_2]$.
4. (Informatique) Écrire une fonction `battage(L,k)` prenant en argument une liste $L$ et un entier $k$ et qui renvoie une liste obtenue en appliquant $k$ fois la fonction `insertion` à $L$ le choix des positions étant mutuellement indépendants et suivant une distribution uniforme sur l'ensemble des positions possibles. On pourra utiliser la fonction `randint(a,b)`, qui prend en arguments deux entiers $a, b$ et qui renvoie un entier aléatoire appartenant $[\![a, b]\!]$, celui-ci étant choisi de manière uniforme.
5. On rappelle que initialement, on a $L^{[0]} = [C_0, C_1, C_2]$.
   (a) Calculer :
   $$P\left(L^{[1]} = [C_0, C_1, C_2]\right), P\left(L^{[1]} = [C_1, C_0, C_2]\right), P\left(L^{[1]} = [C_1, C_2, C_0]\right),$$
   $$P\left(L^{[1]} = [C_0, C_2, C_1]\right), P\left(L^{[1]} = [C_2, C_0, C_1]\right), P\left(L^{[1]} = [C_2, C_1, C_0]\right).$$
   (b) Puis calculer
   $$P\left(L^{[2]} = [C_0, C_1, C_2]\right), P\left(L^{[2]} = [C_1, C_0, C_2]\right), P\left(L^{[2]} = [C_1, C_2, C_0]\right)$$
   $$P\left(L^{[2]} = [C_0, C_2, C_1]\right), P\left(L^{[2]} = [C_2, C_0, C_1]\right), P\left(L^{[2]} = [C_2, C_1, C_0]\right).$$
6. Soient $k \geq 2$ et $L = [L_0, L_1, L_2]$ une liste de $\Omega$. Montrer que
$$\begin{aligned} P\left(L^{[k+1]} = L\right) = {} & P\left(L^{[k+1]} = L \middle| L^{[k]} = [L_0, L_1, L_2]\right) P\left(L^{[k]} = [L_0, L_1, L_2]\right) \\ & + P\left(L^{[k+1]} = L \middle| L^{[k]} = [L_1, L_0, L_2]\right) P\left(L^{[k]} = [L_1, L_0, L_2]\right). \\ & + P\left(L^{[k+1]} = L \middle| L^{[k]} = [L_2, L_0, L_1]\right) P\left(L^{[k]} = [L_2, L_0, L_1]\right) \end{aligned}$$

7. Montrer par récurrence que pour tout $k \geq 2$, on a

$$P\left(L^{[k]} = [C_0, C_1, C_2]\right) = P\left(L^{[k]} = [C_1, C_0, C_2]\right) = P\left(L^{[k]} = [C_1, C_2, C_0]\right),$$

et

$$P\left(L^{[k]} = [C_0, C_2, C_1]\right) = P\left(L^{[k]} = [C_2, C_0, C_1]\right) = P\left(L^{[k]} = [C_2, C_1, C_0]\right).$$

8. Pour tout $k \geq 2$, on note $\alpha_k = P\left(L^{[k]} = [C_0, C_1, C_2]\right)$ et $\beta_k = P\left(L^{[k]} = [C_0, C_2, C_1]\right)$.

   (a) Montrer que pour tout $k \geq 2$, on a : $\alpha_{k+1} = \dfrac{2}{3}\alpha_k + \dfrac{1}{3}\beta_k$ et $\beta_{k+1} = \dfrac{1}{3}\alpha_k + \dfrac{2}{3}\beta_k$.

   (b) (Informatique) Écrire une fonction `calcul_proba(k)` qui prend en argument un entier $k \geq 2$ et qui renvoie le couple $(\alpha_k, \beta_k)$.

   (c) En posant $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, montrer que pour tout $k \geq 2$, on a

$$\begin{pmatrix} \alpha_k \\ \beta_k \end{pmatrix} = A^{k-2} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix}.$$

   (d) On pose $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que pour tout $\ell \geq 1$, on a $J^\ell = 2^{\ell-1}J$.

   (e) Pour tout $k \geq 1$, écrire $A^k$ sous la forme $c_k I_2 + d_k J$, où $c_k$ et $d_k$ sont des réels dépendant de $k$ à expliciter.

   (f) En déduire une expression simple de $\alpha_k$ et $\beta_k$ en fonction de $k$ pour $k \geq 3$.

   (g) Calculer $\lim_{k\to+\infty} \alpha_k$ et $\lim_{k\to+\infty} \beta_k$.

9. Soient $\varepsilon > 0$ et $k \in \mathbb{N}$. On dit que le battage à $k$ insertions est une $\varepsilon$-approximation de la probabilité uniforme si

$$\sum_{L\in\Omega} \left| P\left(L^{[k]} = L\right) - \frac{1}{6} \right| \leq \varepsilon.$$

   (a) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe un entier $k_0 \geq 2$ tel que pour tout $k \geq k_0$, le battage à $k$ insertions est une $\varepsilon$-approximation de la probabilité uniforme.

   (b) (Informatique) Écrire une fonction `epsilon_approx(epsilon)` prenant en argument un réel `epsilon` strictement positif et qui renvoie le plus petit entier $k_0 \geq 2$ tel que le battage à $k_0$ insertions soit une `epsilon` approximation de la probabilité uniforme.

   (c) Interpréter en terme de mélange de cartes le fait qu'un battage à $k$ insertions soit une $\varepsilon$-approximation de la probabilité uniforme lorsque $\varepsilon$ est très petit.

# Corrigé du DS n° 6 de mathématiques et d'informatique

## Exercice (informatique)

*Dans tout cet exercice, les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ sont modélisés en Python par la liste de leurs coefficients dans l'ordre croissant des degrés. Par exemple, le polynôme $P = 3 - X + 2X^3 + X^4$ est modélisé par la liste* `P=[3,-1,0,2,1]`*. La liste vide* `[]` *modélise le polynôme nul.*

1. *Écrire une fonction* `deriver(P)` *qui prend en argument un polynôme $P$, puis qui renvoie la liste des coefficients du polynôme dérivé $P'$. Par exemple,* `deriver([3,-1,0,2,1])` *renvoie* `[-1,0,6,4]`*.*

   ▶ Par exemple :

```
def deriver(P):
    degre=len(P)-1
    Pprime=[]
    for k in range(1,degre+1):
        Pprime.append(P[k]*k)
    return Pprime
```

2. *Écrire une fonction* `evaluer(P,r)` *qui prend en arguments un polynôme $P$ et un réel $r$, puis qui renvoie la valeur de $P(r)$. Par exemple,* `evaluer([3,-1,0,2,1],-2)` *renvoie* `5`*.*

   ▶ Par exemple :

```
def evaluer(P,r):
    degre=len(P)-1
    valeur=0
    for k in range(degre+1):
        valeur=valeur+P[k]*(r**k)
    return valeur
```

3. *On considère la fonction* `mystere` *ci-contre.*

```
def mystere(P,r):
    L=P
    n=0
    while evaluer(L,r)==0:
        L=deriver(L)
        n=n+1
    return n
```

   (a) *Que renvoie* `mystere([-1,3,-4,4,-3,1],1)` *?*

   ▶ La liste `P=[-1,3,-4,4,-3,1]` modélise le polynôme $P = -1 + 3X - 4X^2 + 4X^3 - 3X^4 + X^5$. La fonction `mystere` commence par initialiser une liste `L=[-1,3,-4,4,-3,1]` et un entier `n=0`. D'après la question précédente, `evaluer(L,r)` renvoie la valeur :

$$P(1) = -1 + 3 - 4 + 4 - 3 + 1 = 0.$$

   Puisque la condition de la boucle `while` est vérifiée, la fonction `mystere` modifie la liste `L` pour lui attribuer la liste des coefficients de $P' = 3 - 8X + 12X^2 - 12X^3 + 5X^4$, c'est-à-dire

`L=[3,-8,12,-12,5]`, et l'entier `n` pour lui attribuer la valeur `n=0+1=1`. Puis `evaluer(L,r)` renvoie la valeur :

$$P'(1) = 3 - 8 + 12 - 12 + 5 = 0.$$

Puisque la condition de la boucle `while` est vérifiée, la fonction `mystere` modifie la liste `L` pour lui attribuer la liste des coefficients de $(P')' = P'' = -8 + 24X - 36X^2 + 20X^3$, c'est-à-dire `L=[-8,24,-36,20]`, et l'entier `n` pour lui attribuer la valeur `n=1+1=2`. Puis `evaluer(L,r)` renvoie la valeur :

$$P''(1) = -8 + 24 - 36 + 20 = 0.$$

Puisque la condition de la boucle `while` est vérifiée, la fonction `mystere` modifie la liste `L` pour lui attribuer la liste des coefficients de $(P'')' = P^{(3)} = 24 - 72X + 60X^2$, c'est-à-dire `L=[24,-72,60]`, et l'entier `n` pour lui attribuer la valeur `n=2+1=3`. Puis `evaluer(L,r)` renvoie la valeur :

$$P^{(3)}(1) = 24 - 72 + 60 = 12 \neq 0.$$

Puisque la condition de la boucle `while` n'est plus vérifiée, la fonction `mystere` renvoie l'entier `n`, c'est-à-dire $\boxed{3}$.

(b) *Comment s'appelle ce que renvoie* `mystere(P,r)` *?*

▶ On reconnaît l'ordre de multiplicité d'une racine. Plus précisément, si `r` est une racine de `P` alors `mystere(P,r)` renvoie son $\boxed{\text{ordre de multiplicité}}$, sinon `mystere(P,r)` renvoie `0`.

4. *Dans cette question, on suppose que $r \in \mathbb{R}$ est une racine de $P \in \mathbb{R}[X]$. On rappelle qu'il existe alors $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = (X-r)Q$. On note $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{d-1} b_k X^k$.*

(a) *Montrer que :*

$$b_{d-1} = a_d \quad \text{et} \quad \forall k \in \{d-1, d-2, \ldots, 3, 2, 1\},\ b_{k-1} = a_k + r b_k.$$

▶ Puisque $P = (X-r)Q$, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{d} a_k X^k &= (X-r)\sum_{k=0}^{d-1} b_k X^k \\
&= \sum_{k=0}^{d-1} b_k X^{k+1} - \sum_{k=0}^{d-1} r b_k X^k \quad \text{par linéarité} \\
&= \sum_{k=1}^{d} b_{k-1} X^k - \sum_{k=0}^{d-1} r b_k X^k \quad \text{par décalage d'indice} \\
&= b_{d-1}X^d + \sum_{k=1}^{d-1} \big(b_{k-1} - r b_k\big) X^k - r b_0 \quad \text{par associativité et linéarité.}
\end{aligned}$$

En identifiant les coefficients, on obtient :

$$a_d = b_{d-1}, \quad \forall k \in \{1, 2, \ldots, d-1\},\ a_k = b_{k-1} - r b_k \quad \text{et} \quad a_0 = r b_0.$$

En particulier :

$$\boxed{b_{d-1} = a_d} \quad \text{et} \quad \boxed{\forall k \in \{d-1, d-2, \ldots, 3, 2, 1\},\ b_{k-1} = a_k + r b_k}.$$

(b) *Écrire une fonction* `factoriser_simple(P,r)` *qui prend en arguments le polynôme $P$ et le réel $r$, puis qui renvoie la liste des coefficients du polynôme $Q$.*

▶ Par exemple :

```
def factoriser_simple(P,r):
    degre=len(P)-1
    Q=[0 for k in range(degre)]
    Q[degre-1]=P[degre]
    for k in range(degre-1,0,-1):
        Q[k-1]=P[k]+r*Q[k]
    return Q
```

*La difficulté est de parcourir la liste modélisant le polynôme $Q$ dans le sens inverse. En effet, d'après le résultat de la question précédente, la liste des coefficients de $Q$ est définie par une récurrence «descendante». Il n'est donc pas possible d'utiliser la commande* `append`. *Par contre, on peut utiliser l'instruction* `Q=[e]+Q` *qui permet d'ajouter l'élément* `e` *à gauche de la liste* `Q`. *Par exemple :*

```
def factoriser_simple(P,r):
    degre=len(P)-1
    Q=[P[degre]]
    bk=P[degre]
    for i in range(1,degre):
        bk=P[degre-i]+r*bk
        Q=[bk]+Q
    return Q
```

5. *Dans cette question, on suppose que $r \in \mathbb{R}$ est une racine d'ordre de multiplicité $n \geqslant 1$ de $P \in \mathbb{R}[X]$. À l'aide de la fonction* `factoriser_simple`, *écrire une fonction* `factoriser_multiple(P,r,n)` *qui renvoie la liste des coefficients du polynôme $Q$ tel que $P = (X-r)^n Q$.*

   ▶ Par exemple :

```
def factoriser_multiple(P,r,n):
    Q=P
    for i in range(n):
        Q=factoriser_simple(Q,r)
    return Q
```

# Problème A

*Le but de ce problème est d'étudier la fonction suivante :*

$$f : x \mapsto f(x) = \int_{2x}^{3x} \frac{e^t}{t} \mathrm{d}t.$$

*Dans tout l'énoncé, on pose la fonction $g : t \mapsto \frac{e^t}{t}$.*

1. *Dresser le tableau des variations de la fonction $g$ en indiquant les limites aux bornes de l'ensemble de définition de $g$.*

   ▶ La fonction $g$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de fonctions dont le dénominateur ne s'annule pas. On a :

$$\forall t \in \mathbb{R}^*, \quad g'(t) = \frac{e^t t - e^t}{t^2} = (t-1)\frac{e^t}{t^2}.$$

   Puisque $e^t/t^2 > 0$ pour tout $t \neq 0$, $g'(t)$ est du même signe que $t-1$. On en déduit le tableau des variations de $g$ :

| $t$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $t-1$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(t)$ | $0 \searrow$ | | $-\infty \,\Vert\, +\infty$ | $\searrow$ | $e$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

car :

- $\lim_{t\to-\infty} g(t) = \lim_{t\to-\infty} e^t/t = 0/-\infty = 0$,
- $\lim_{t\to0^-} g(t) = \lim_{t\to0^-} e^t/t = 1/0^- = -\infty$,
- $\lim_{t\to0^+} g(t) = \lim_{t\to0^+} e^t/t = 1/0^+ = +\infty$,
- $g(1) = e^1/1 = e$,
- $\lim_{t\to+\infty} g(t) = \lim_{t\to+\infty} e^t/t = +\infty$ d'après le théorème des croissances comparées pour lever la forme indéterminée du type $+\infty/+\infty$.

2. *Montrer que $f$ est définie sur $\mathbb{R}^*$. Indication : fixer $x$ puis justifier que l'intégrale $f(x)$ est bien définie en distinguant les cas $x>0$ et $x<0$.*

   ▶

   *Rappel : pour justifier qu'une intégrale $\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ est bien définie, il suffit de vérifier que la fonction $g$ est continue sur le segment $[a,b]$. Dans le cas où $a>b$, il suffit que $g$ soit continue sur $[b,a]$ car $\int_a^b g(t)\mathrm{d}t = -\int_b^a g(t)\mathrm{d}t$.*

   On fixe $x\in\mathbb{R}^*$ et on raisonne par disjonction de cas.
   1^er cas : $x>0$. Alors $0<2x<3x$ donc la fonction $g$ est continue sur le segment $[2x,3x]$ (d'après le tableau des variations de $g$ car $0\notin[2x,3x]$). On en déduit que l'intégrale $f(x)=\int_{2x}^{3x} g(t)\mathrm{d}t$ est bien définie.
   2^e cas : $x<0$. Alors $3x<2x<0$ donc la fonction $g$ est continue sur le segment $[3x,2x]$ (d'après le tableau des variations de $g$ car $0\notin[3x,2x]$). On en déduit que l'intégrale $f(x)=\int_{2x}^{3x} g(t)\mathrm{d}t = -\int_{3x}^{2x} g(t)\mathrm{d}t$ est bien définie.
   Conclusion. Dans tous les cas, l'intégrale $f(x)$ est bien définie si $x\in\mathbb{R}^*$. Par conséquent, la fonction $\boxed{f \text{ est définie sur } \mathbb{R}^*}$.

3. *Pour cette question, on note $G_+$ une primitive de $g$ sur $]0,+\infty[$.*

   (a) *Soit $x>0$. Exprimer $f(x)$ à l'aide de la fonction $G_+$.*

   ▶ Puisque $0<2x<3x$, $G_+$ est une primitive de $g$ sur le segment $[2x,3x]$. Par définition de l'intégrale, on en déduit que :

$$f(x)=\int_{2x}^{3x} g(t)\mathrm{d}t = \big[G_+(t)\big]_{2x}^{3x} = \boxed{G_+(3x)-G_+(2x)}.$$

   (b) *En déduire que $f$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que pour tout $x>0$ :*

$$f'(x)=\frac{e^x-1}{x}e^{2x}.$$

   ▶ La fonction $G_+$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme primitive de $g$. De plus, $x\mapsto 2x$ et $x\mapsto 3x$ sont dérivables sur $]0,+\infty[$ comme fonctions usuelles. D'après le résultat de la question précédente, on en déduit que $\boxed{f \text{ est dérivable sur } ]0,+\infty[}$ comme différence et composées de fonctions dérivables. On a :

$$\begin{aligned}\forall x>0,\quad f'(x)&=3G'_+(3x)-2G'_+(2x)\quad \text{d'après la formule de dérivation d'une composée}\\&=3g(3x)-2g(2x)\quad \text{car } G_+ \text{ est une primitive de } g\\&=3\frac{e^{3x}}{3x}-2\frac{e^{2x}}{2x}=\frac{e^{3x}}{x}-\frac{e^{2x}}{x}=\boxed{\frac{e^x-1}{x}e^{2x}}.\end{aligned}$$

4. *En vous inspirant de la question précédente, montrer que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et que l'expression de $f'(x)$ obtenue ci-dessus est valable pour tout $x \neq 0$.*

▶ Puisque $g$ est continue sur l'intervalle $]-\infty,0[$ (d'après le tableau des variations de $g$), $g$ admet des primitives sur $]-\infty,0[$ d'après le théorème fondamental de l'analyse. On note $G_-$ une primitive de $g$ sur $]-\infty,0[$. Soit $x<0$. Puisque $3x<2x<0$, $G_-$ est une primitive de $g$ sur le segment $[3x,2x]$. Par définition de l'intégrale, on a :

$$f(x)=\int_{2x}^{3x} g(t)\mathrm{d}t=-\int_{3x}^{2x} g(t)\mathrm{d}t=-\big[G_-(t)\big]_{3x}^{2x}=-\big(G_-(2x)-G_-(3x)\big)=G_-(3x)-G_-(2x).$$

On en déduit que $\boxed{f \text{ est dérivable sur } ]-\infty,0[}$ comme différence et composées de fonctions dérivables. De plus :

$$\begin{aligned}\forall x<0,\quad f'(x)&=3G'_-(3x)-2G'_-(2x)\quad \text{d'après la formule de dérivation d'une composée}\\&=3g(3x)-2g(2x)\quad \text{car } G_- \text{ est une primitive de } g\\&=\boxed{\frac{e^x-1}{x}e^{2x}}\quad \text{en reprenant le calcul de la question précédente.}\end{aligned}$$

Finalement, en réunissant ce résultat avec celui de la question précédente, on a montré que $\boxed{f \text{ est dérivable sur } ]-\infty,0[\cup]0,+\infty[=\mathbb{R}^*}$ et que :

$$\boxed{\forall x\neq 0,\quad f'(x)=\frac{e^x-1}{x}e^{2x}}.$$

5. *Dresser le tableau des variations de $f$. Les limites aux bornes de l'ensemble de définition de $f$ ne sont pas demandées à cette question et font l'objet de questions suivantes. Le tableau pourra être complété à chaque limite trouvée.*

▶ Puisque $e^{2x}>0$ pour tout $x\neq 0$, $f'(x)$ est du même signe que $(e^x-1)/x$. D'après les propriétés de la fonction usuelle exp, on sait que $e^x-1>0 \iff x>0$. On en déduit le tableau des variations de $f$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $e^x-1$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $x$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f'(x)$ | | $+$ | ‖ | $+$ | |
| $f(x)$ | $0$ | ↗ | $\ln(3/2)$ ‖ $\ln(3/2)$ | ↗ | $+\infty$ |

6. (a) *Montrer que $-e^t \leqslant g(t) \leqslant 0$ pour tout $t \leqslant -1$, puis que $0 \leqslant f(x) \leqslant e^{2x} - e^{3x}$ pour tout $x \leqslant -\frac{1}{2}$.*

▶ Soit $t \leqslant -1$. On a :

$$\underbrace{\frac{1}{-1}}_{=-1} \leqslant \frac{1}{t} < 0 \quad \text{d'après les propriétés de la fonction usuelle } t \mapsto 1/t$$

$$\text{donc} \quad \boxed{-e^t \leqslant \underbrace{\frac{e^t}{t}}_{=g(t)} \leqslant 0} \quad \text{en multipliant par } e^t > 0.$$

Soit $x \leqslant -\frac{1}{2}$. Puisque $3x < 2x \leqslant 1$, on a d'après le résultat précédent :

$$\forall t \in [3x, 2x], \quad -e^t \leqslant g(t) \leqslant 0.$$

Par croissance de l'intégrale sur le segment $[3x, 2x]$, on en déduit que :

$$\underbrace{\int_{3x}^{2x} -e^t \mathrm{d}t}_{=-\int_{3x}^{2x} e^t \mathrm{d}t} \leqslant \int_{3x}^{2x} g(t)\mathrm{d}t \leqslant \underbrace{\int_{3x}^{2x} 0\mathrm{d}t}_{=\left[0\right]_{3x}^{2x}=0}$$

*Attention à l'utilisation de la croissance de l'intégrale : il faut bien vérifier que les bornes sont dans le sens croissant !*

d'où en multipliant par $-1$ :

$$\underbrace{\int_{3x}^{2x} e^t \mathrm{d}t}_{=\left[e^t\right]_{3x}^{2x}=e^{2x}-e^{3x}} \geqslant \underbrace{-\int_{3x}^{2x} g(t)\mathrm{d}t}_{=\int_{2x}^{3x} g(t)\mathrm{d}t=f(x)} \geqslant 0.$$

Finalement, on a bien montré que :

$$\boxed{\forall x \leqslant -\tfrac{1}{2}, \quad 0 \leqslant f(x) \leqslant e^{2x} - e^{3x}}.$$

(b) *En déduire la limite de $f$ en $-\infty$.*

▶ On a :

$$\lim_{x \to -\infty} e^{2x} - e^{3x} = 0 - 0 = 0.$$

Donc $\boxed{\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0}$ en appliquant le théorème de limite par encadrement d'après le résultat de la question précédente.

7. (a) *Montrer que $1 + t \leqslant e^t \leqslant 1 + t + t^2$ pour tout $t \leqslant \ln(2)$. Indication : étudier deux fonctions bien choisies qu'on pourra appeler $h_1$ et $h_2$.*

▶ On pose :

$$h_1 : t \mapsto e^t - (1 + t) \quad \text{et} \quad h_2 : t \mapsto (1 + t + t^2) - e^t.$$

Montrons que les fonctions $h_1$ et $h_2$ sont positives sur $I = ]-\infty, \ln(2)]$. Elles sont dérivables sur $I$ comme somme de fonctions usuelles. De plus :

$$\forall t \leqslant \ln(2), \quad h_1'(t) = e^t - 1 \quad \text{et} \quad h_2'(t) = 1 + 2t - e^t.$$

D'après les propriétés de la fonction usuelle exp, on sait que $e^t - 1 > 0 \iff t > 0$. On en déduit le tableau des variations de $h_1$ :

| $t$ | $-\infty$ | | $0$ | | $\ln(2)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h_1'(t)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $h_1(t)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $1-\ln(2)$ |

car :

— $\lim_{t\to-\infty} h_1(t) = \lim_{t\to-\infty} e^t - (1+t) = 0 - (1-\infty) = +\infty$,

— $h_1(0) = e^0 - (1+0) = 0$,

— $h_1(\ln(2)) = e^{\ln(2)} - (1+\ln(2)) = 1 - \ln(2)$.

En particulier, on en déduit que $h_1$ est positive sur $I$ donc que $1+t \leqslant e^t$ pour tout $t \leqslant \ln(2)$. La fonction $h_2' : t \mapsto 1+2t-e^t$ est dérivable sur $I$ comme somme de fonctions usuelles. On a :

$$\forall t \leqslant \ln(2), \quad h_2''(t) = 2 - e^t.$$

D'après les propriétés de la fonction usuelle exp, on sait que $2 - e^t > 0 \iff t < \ln(2)$. On en déduit le tableau des variations de $h_2'$ :

| $t$ | $-\infty$ | | $0$ | | $\ln(2)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h_2''(t)$ | | $+$ | | | $0$ |
| $h_2'(t)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $2\ln(2)-1$ |

car :

— $\lim_{t\to-\infty} h_2'(t) = \lim_{t\to-\infty} 1+2t-e^t = 1-\infty-0 = -\infty$,

— $h_2'(\ln(2)) = 1+2\ln(2)-e^{\ln(2)} = 2\ln(2)-1$,

— $h_2'(0) = 1+0-e^0 = 0$.

On en déduit le tableau des variations de $h_2$ :

| $t$ | $-\infty$ | | $0$ | | $\ln(2)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h_2'(t)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $h_2(t)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $\ln(2)+\ln(2)^2-1$ |

car :

— $\lim_{t\to-\infty} h_2(t) = \lim_{t\to-\infty} \underbrace{(1+t+t^2)}_{\sim t^2} - e^t = (-\infty)^2 - 0 = +\infty$,

— $h_2(0) = (1+0+0) - e^0 = 0$,
— $h_2(\ln(2)) = (1+\ln(2)+\ln(2)^2) - e^{\ln(2)} = \ln(2)+\ln(2)^2 - 1$.

En particulier, on en déduit que $h_2$ est positive sur $I$ donc que $e^t \leqslant 1+t+t^2$ pour tout $t \leqslant \ln(2)$. Finalement, on a bien montré que :

$$\boxed{\forall t \leqslant \ln(2), \quad 1+t \leqslant e^t \leqslant 1+t+t^2}.$$

(b) *En déduire un encadrement de $f(x)$ pour tout $x \in \left]0, \frac{\ln(2)}{3}\right]$, puis que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$.*

▶ Soit $x \in \left]0, \frac{\ln(2)}{3}\right]$. Puisque $0 < 2x < 3x \leqslant \ln(2)$, on a d'après le résultat de la question précédente :

$$\forall t \in [2x, 3x], \quad 1+t \leqslant e^t \leqslant 1+t+t^2$$

$$\text{donc} \quad \forall t \in [2x,3x], \quad \frac{1}{t}+1 \leqslant \underbrace{\frac{e^t}{t}}_{=g(t)} \leqslant \frac{1}{t}+1+t \quad \text{en divisant par } t>0.$$

Par croissance de l'intégrale sur le segment $[2x, 3x]$, on en déduit que :

$$\int_{2x}^{3x} \left(\frac{1}{t}+1\right) \mathrm{d}t \leqslant \underbrace{\int_{2x}^{3x} g(t)\mathrm{d}t}_{=f(x)} \leqslant \int_{2x}^{3x} \left(\frac{1}{t}+1+t\right) \mathrm{d}t.$$

Or :

$$\begin{aligned}
\int_{2x}^{3x} \left(\frac{1}{t}+1\right) \mathrm{d}t &= \big[\ln(t)+t\big]_{2x}^{3x} \\
&= \big(\ln(3x)+3x\big) - \big(\ln(2x)+2x\big) \\
&= \ln\left(\frac{3x}{2x}\right) + x = \ln\left(\tfrac{3}{2}\right) + x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{et} \quad \int_{2x}^{3x} \left(\frac{1}{t}+1+t\right) \mathrm{d}t &= \left[\ln(t)+t+\frac{t^2}{2}\right]_{2x}^{3x} \\
&= \left(\ln(3x)+3x+\frac{9x^2}{2}\right) - \left(\ln(2x)+2x+\frac{4x^2}{2}\right) \\
&= \ln\left(\tfrac{3}{2}\right) + x + \frac{5x^2}{2}.
\end{aligned}$$

On a donc trouvé l'encadrement suivant :

$$\boxed{\forall x \in \left]0, \tfrac{\ln(2)}{3}\right], \quad \ln\left(\tfrac{3}{2}\right) + x \leqslant f(x) \leqslant \ln\left(\tfrac{3}{2}\right) + x + \frac{5x^2}{2}}.$$

Or :

$$\lim_{x\to 0^+} \ln\left(\tfrac{3}{2}\right) + x = \ln\left(\tfrac{3}{2}\right) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^+} \ln\left(\tfrac{3}{2}\right) + x + \frac{5x^2}{2} = \ln\left(\tfrac{3}{2}\right).$$

Donc $\boxed{\lim_{x\to 0^+} f(x) = \ln\left(\frac{3}{2}\right)}$ en appliquant le théorème de limite par encadrement.

(c) *En vous inspirant de la question précédente, déterminer la limite à gauche de $f$ en $0$.*

▶ Soit $x < 0$. Puisque $3x < 2x < 0 \leqslant \ln(2)$, on a d'après le résultat de la question 7(a) :

$$\forall t \in [3x, 2x], \quad 1+t \leqslant e^t \leqslant 1+t+t^2$$

$$\text{donc} \quad \forall t \in [3x,2x], \quad \frac{1}{t}+1 \geqslant \underbrace{\frac{e^t}{t}}_{=g(t)} \geqslant \frac{1}{t}+1+t \quad \text{en divisant par } t<0.$$

Par croissance de l'intégrale sur le segment $[3x, 2x]$, on en déduit que :

$$\int_{3x}^{2x}\left(\frac{1}{t}+1\right)\mathrm{d}t \geqslant \int_{3x}^{2x} g(t)\mathrm{d}t \geqslant \int_{3x}^{2x}\left(\frac{1}{t}+1+t\right)\mathrm{d}t$$

*Encore une fois : attention à bien vérifier que les bornes sont dans le sens croissant pour appliquer la croissance de l'intégrale.*

d'où en multipliant par $-1$ :

$$\underbrace{-\int_{3x}^{2x}\left(\frac{1}{t}+1\right)\mathrm{d}t}_{=\int_{2x}^{3x}\left(\frac{1}{t}+1\right)\mathrm{d}t} \leqslant \underbrace{-\int_{3x}^{2x} g(t)\mathrm{d}t}_{=\int_{2x}^{3x} g(t)\mathrm{d}t=f(x)} \leqslant \underbrace{-\int_{3x}^{2x}\left(\frac{1}{t}+1+t\right)\mathrm{d}t}_{=\int_{2x}^{3x}\left(\frac{1}{t}+1+t\right)\mathrm{d}t}.$$

En reprenant les calculs de la question précédente, on obtient l'encadrement suivant :

$$\boxed{\forall x<0, \quad \ln\left(\frac{3}{2}\right)+x \leqslant f(x) \leqslant \ln\left(\frac{3}{2}\right)+x+\frac{5x^2}{2}}.$$

Or :

$$\lim_{x\to 0^-} \ln\left(\frac{3}{2}\right)+x = \lim_{x\to 0^-} \ln\left(\frac{3}{2}\right)+x+\frac{5x^2}{2} = \ln\left(\frac{3}{2}\right).$$

Donc $\boxed{\lim_{x\to 0^-} f(x) = \ln\left(\frac{3}{2}\right)}$ en appliquant le théorème de limite par encadrement.

8. (a) *Dans cette question, on fixe $\lambda>0$. Montrer que $\ln\left(\frac{e^{3x}-e^{2x}}{\lambda x}\right) \sim 3x$ quand $x\to+\infty$.*

▶ On a pour tout $x$ suffisamment grand :

$$\begin{aligned}\frac{\ln\left(\frac{e^{3x}-e^{2x}}{\lambda x}\right)}{3x} &= \frac{\ln\left(\frac{e^{3x}(1-e^{-x})}{\lambda x}\right)}{3x}\\ &= \frac{\overbrace{\ln\left(e^{3x}\right)}^{=3x}+\ln\left(1-e^{-x}\right)-\ln(\lambda x)}{3x}\\ &= 1+\frac{\ln\left(1-e^{-x}\right)}{3x}-\frac{\ln(\lambda x)}{3x}.\end{aligned}$$

On a :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(\lambda x)}{3x}=0 \quad \text{d'après le théorème des croissances comparées.}$$

D'autre part, $\lim_{x\to+\infty} -e^{-x}=0$ d'où $\ln\left(1-e^{-x}\right)\sim -e^{-x}$ quand $x\to+\infty$ d'après un équivalent usuel. On en déduit que :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1-e^{-x}\right)}{3x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-e^{-x}}{3x}=0 \quad \text{d'après le théorème des croissances comparées.}$$

Finalement, on obtient :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\frac{e^{3x}-e^{2x}}{\lambda x}\right)}{3x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\ln\left(1-e^{-x}\right)}{3x}-\frac{\ln(\lambda x)}{3x}\right)=1+0-0=1.$$

On en déduit que $\boxed{\ln\left(\frac{e^{3x}-e^{2x}}{\lambda x}\right)\sim 3x}$ quand $x\to+\infty$.

*(b) Montrer que :*

$$\forall x > 0, \quad \frac{e^{3x} - e^{2x}}{3x} \leqslant f(x) \leqslant \frac{e^{3x} - e^{2x}}{2x}.$$

▶ Soit $x > 0$. Puisque $0 < 2x < 3x$, on a pour tout $t \in [2x, 3x]$ :

$$\frac{1}{3x} \leqslant \frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{2x} \quad \text{d'après les propriétés de la fonction usuelle } t \mapsto 1/t$$

$$\text{donc} \quad \frac{e^t}{3x} \leqslant \underbrace{\frac{e^t}{t}}_{=g(t)} \leqslant \frac{e^t}{2x} \quad \text{en multipliant par } e^t > 0.$$

Par croissance de l'intégrale sur le segment $[2x, 3x]$, on en déduit que :

$$\int_{2x}^{3x} \frac{e^t}{3x} \mathrm{d}t \leqslant \underbrace{\int_{2x}^{3x} g(t) \mathrm{d}t}_{=f(x)} \leqslant \int_{2x}^{3x} \frac{e^t}{2x} \mathrm{d}t.$$

Or :

$$\int_{2x}^{3x} \frac{e^t}{3x} \mathrm{d}t = \frac{1}{3x} \left[e^t\right]_{2x}^{3x} = \frac{1}{3x}\left(e^{3x} - e^{2x}\right) = \frac{e^{3x} - e^{2x}}{3x} \quad \text{et de même} \quad \int_{2x}^{3x} \frac{e^t}{2x} \mathrm{d}t = \frac{e^{3x} - e^{2x}}{2x}.$$

Finalement, on a bien montré que :

$$\boxed{\forall x > 0, \quad \frac{e^{3x} - e^{2x}}{3x} \leqslant f(x) \leqslant \frac{e^{3x} - e^{2x}}{2x}}.$$

*(c) Déduire des résultats précédents un équivalent de $\ln(f(x))$ quand $x \to +\infty$, puis la limite de $f$ en $+\infty$.*

▶ D'après le résultat de la question précédente, on a pour tout $x$ suffisamment grand :

$$\ln\left(\frac{e^{3x} - e^{2x}}{3x}\right) \leqslant \ln\left(f(x)\right) \leqslant \ln\left(\frac{e^{3x} - e^{2x}}{2x}\right) \quad \text{car la fonction ln est strictement croissante}$$

$$\text{donc} \quad \frac{\ln\left(\frac{e^{3x} - e^{2x}}{3x}\right)}{3x} \leqslant \frac{\ln\left(f(x)\right)}{3x} \leqslant \frac{\ln\left(\frac{e^{3x} - e^{2x}}{2x}\right)}{3x} \quad \text{en divisant par } 3x > 0.$$

Or :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln\left(\frac{e^{3x} - e^{2x}}{3x}\right)}{3x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln\left(\frac{e^{3x} - e^{2x}}{3x}\right)}{2x} = 1 \quad \text{d'après le résultat de la question 8(a).}$$

En appliquant le théorème de la limite par encadrement, on en déduit que $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(f(x))}{3x} = 1$ et donc que $\boxed{\ln\left(f(x)\right) \sim 3x}$ quand $x \to +\infty$. Par conséquent :

$$\lim_{x \to +\infty} \ln\left(f(x)\right) = \lim_{x \to +\infty} 3x = +\infty \quad \text{et donc} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} e^{\ln(f(x))} = e^{+\infty} = \boxed{+\infty}$$

par composée de limites.

# Problème B

## Énoncé et corrigé de V. Vong

1. On a
$$\boxed{\Omega = \{[C_0, C_1, C_2], [C_0, C_2, C_1], [C_1, C_0, C_2], [C_1, C_2, C_0], [C_2, C_0, C_1], [C_2, C_1, C_0]\}}.$$

2. Soit $L = [L_0, L_1, L_2]$ une liste de $\Omega$. La liste étant de taille 3, on peut effectuer une insertion en position $0, 1$, ou $2$.
   — Après insertion en position 0, on obtient $[L_0, L_1, L_2]$,
   — après insertion en position 1, on obtient $[L_1, L_0, L_2]$,
   — après insertion en position 2, on obtient $[L_1, L_2, L_0]$.

   Ainsi, après une unique insertion les permutations que l'on peut obtenir à partir de $L$ sont exactement
$$\boxed{[L_0, L_1, L_2], [L_1, L_0, L_2], [L_1, L_2, L_0]}.$$

3. Voici le code demandé :

```
def insertion(L,i) :
    if 0<= i <len(L) :
        for j in range(i) :
            L[j],L[j+1] = L[j+1],L[j]
        return L
    return L
```

4. Voici la fonction demandée :

```
import random as rd
def battage(L,k) :
    for l in range(k) :
        i = rd.randint(0,2)
        insertion(L,i)
    return L
```

5. On rappelle que initialement, on a $L^{[0]} = [C_0, C_1, C_2]$.
   (a) D'après la question 2, les listes que l'on peut obtenir à partir de $[C_0, C_1, C_2]$ sont : $[C_0, C_1, C_2], [C_1, C_0, C_2$
   Le choix de la position étant fait en suivant une distribution uniforme, on en déduit que
$$\underline{P\left(L^{[1]} = [C_0, C_1, C_2]\right) = P\left(L^{[1]} = [C_1, C_0, C_2]\right) = P\left(L^{[1]} = [C_1, C_2, C_0]\right) = \frac{1}{3}}.$$
   Les autres permutations ne pouvant pas être obtenues à l'issue d'une unique insertion à partir de $[C_0, C_1, C_2]$, on en déduit que
$$\underline{P\left(L^{[1]} = [C_0, C_2, C_1]\right) = P\left(L^{[1]} = [C_2, C_0, C_1]\right) = P\left(L^{[1]} = [C_2, C_1, C_0]\right) = 0}.$$
   (b) Remarquons que pour tout $L = [L_0, L_1, L_2]$, les permutations pouvant donner $L$ après une unique insertion sont $[L_0, L_1, L_2], [L_1, L_0, L_2], [L_2, L_0, L_1]$. De plus, la famille $\left(L^{[1]} = L\right)_{L\in\Omega}$ formant un système complet d'événements. On en déduit que
$$\begin{aligned} P\left(L^{[2]} = [C_0, C_1, C_2]\right) &= P\left(L^{[2]} = [C_0, C_1, C_2], L^{[1]} = [C_0, C_1, C_2]\right) \\ &\quad + P\left(L^{[2]} = [C_0, C_1, C_2], L^{[1]} = [C_1, C_0, C_2]\right) \\ &\quad + P\left(L^{[2]} = [C_0, C_1, C_2], L^{[1]} = [C_2, C_0, C_1]\right) \end{aligned}$$

L'événement $L^{[1]} = [C_2, C_0, C_1]$ étant impossible et en appliquant la formule des probabilités composées, on obtient

$$\begin{aligned} P\left(L^{[2]} = [C_0, C_1, C_2]\right) = & \; P\left(L^{[2]} = [C_0, C_1, C_2] | L^{[1]} = [C_0, C_1, C_2]\right) P\left(L^{[1]} = [C_0, C_1, C_2]\right) \\ & + P\left(L^{[2]} = [C_0, C_1, C_2] | L^{[1]} = [C_1, C_0, C_2]\right) P\left(L^{[1]} = [C_1, C_0, C_2]\right) \end{aligned}$$

Le choix de l'insertion suivant une distribution uniforme, on a

$$P\left(L^{[2]} = [C_0, C_1, C_2] | L^{[1]} = [C_0, C_1, C_2]\right) = P\left(L^{[2]} = [C_0, C_1, C_2] | L^{[1]} = [C_1, C_0, C_2]\right) = \frac{1}{3}.$$

Donc, en remplaçant par les valeurs calculées

$$P\left(L^{[2]} = [C_0, C_1, C_2]\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}.$$

En raisonnant de manières similaires, on obtient :

$$\begin{aligned} P\left(L^{[2]} = [C_1, C_0, C_2]\right) & = P\left(L^{[2]} = [C_1, C_0, C_2], L^{[1]} = [C_1, C_0, C_2]\right) \\ & \quad + P\left(L^{[2]} = [C_1, C_0, C_2], L^{[1]} = [C_0, C_1, C_2]\right) \\ & \quad + P\left(L^{[2]} = [C_1, C_0, C_2], L^{[1]} = [C_2, C_1, C_0]\right). \\ & = \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{3} + 0 \\ & = \tfrac{2}{9} \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} P\left(L^{[2]} = [C_1, C_2, C_0]\right) & = P\left(L^{[2]} = [C_1, C_2, C_0], L^{[1]} = [C_1, C_2, C_0]\right) \\ & \quad + P\left(L^{[2]} = [C_1, C_2, C_0], L^{[1]} = [C_0, C_1, C_2]\right) \\ & \quad + P\left(L^{[2]} = [C_1, C_2, C_0], L^{[1]} = [C_2, C_1, C_0]\right). \\ & = \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{3} + 0 \\ & = \tfrac{2}{9} \end{aligned}$$

De la même façon,

$$\begin{aligned} P\left(L^{[2]} = [C_0, C_2, C_1]\right) & = P\left(L^{[2]} = [C_0, C_2, C_1], L^{[1]} = [C_0, C_2, C_1]\right) \\ & \quad + P\left(L^{[2]} = [C_0, C_2, C_1], L^{[1]} = [C_2, C_0, C_1]\right) \\ & \quad + P\left(L^{[2]} = [C_0, C_2, C_1], L^{[1]} = [C_1, C_0, C_2]\right). \\ & = 0 + 0 + \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{3} \\ & = \tfrac{1}{9} \end{aligned}$$

De même, on obtient

$$P\left(L^{[2]} = [C_2, C_0, C_1]\right) = \frac{1}{9}, P\left(L^{[2]} = [C_2, C_1, C_0]\right) = \frac{1}{9}.$$

6. Soient $k \geq 2$ et $L = [L_0, L_1, L_2]$ une liste de $\Omega$. Remarquons que les permutations pouvant donner $L$ après une unique insertion sont $[L_0, L_1, L_2], [L_1, L_0, L_2], [L_2, L_0, L_1]$. De plus, la famille $\left(L^{[k]} = L\right)_{L\in\Omega}$ formant un système complet d'événements. On en déduit que

$$\begin{aligned} P\left(L^{[k+1]} = L\right) = & P\left(L^{[k+1]} = L, L^{[k]} = [L_0, L_1, L_2]\right) \\ & + P\left(L^{[k+1]} = L, L^{[k]} = [L_1, L_0, L_2]\right) \\ & + P\left(L^{[k+1]} = L, L^{[k]} = [L_2, L_0, L_1]\right) \end{aligned}$$

$k$ étant supérieur à 2, les événements $\left(L^{[k]} = K\right)$ sont de probabilités non nulles pour tout $K \in \Omega$. Donc, en appliquant la formule des probabilités composées, on trouve

$$\boxed{\begin{aligned} P\left(L^{[k+1]} = L\right) = & P\left(L^{[k+1]} = L \middle| L^{[k]} = [L_0, L_1, L_2]\right) P\left(L^{[k]} = [L_0, L_1, L_2]\right) \\ & + P\left(L^{[k+1]} = L \middle| L^{[k]} = [L_1, L_0, L_2]\right) P\left(L^{[k]} = [L_1, L_0, L_2]\right) \\ & + P\left(L^{[k+1]} = L \middle| L^{[k]} = [L_2, L_0, L_1]\right) P\left(L^{[k]} = [L_2, L_0, L_1]\right) \end{aligned}}.$$

7. Pour tout $k \geq 2$, on pose

$$H(k) : \begin{array}{l} P\left(L^{[k]} = [C_0, C_1, C_2]\right) = P\left(L^{[k]} = [C_1, C_0, C_2]\right) = P\left(L^{[k]} = [C_1, C_2, C_0]\right) \\ \text{et} \\ P\left(L^{[k]} = [C_0, C_2, C_1]\right) = P\left(L^{[k]} = [C_2, C_0, C_1]\right) = P\left(L^{[k]} = [C_2, C_1, C_0]\right) \end{array}.$$

Démontrons $H$ par récurrence.

— Initialisation : d'après la question 5.$a$, on a $H(2)$ vraie.

— Hérédité : soit $k \geq 2$. Supposons que $H(k)$ est vraie. Montrons que $H(k+1)$ est vraie. On note $\alpha_k = P\left(L^{[k]} = [C_0, C_1, C_2\right)$ et $\beta_k = P\left(L^{[k]} = [C_2, C_1, C_0]\right)$ D'après la question 6, on a :

$$\begin{aligned} P\left(L^{[k+1]} = [C_0, C_1, C_2\right) = & P\left(L^{[k+1]} = [C_0, C_1, C_2] \middle| L^{[k]} = [C_0, C_1, C_2]\right) P\left(L^{[k]} = [C_0, C_1, C_2]\right) \\ & + P\left(L^{[k+1]} = [C_0, C_1, C_2 \middle| L^{[k]} = [C_1, C_0, C_2]\right) P\left(L^{[k]} = [C_1, C_0, C_2]\right). \\ & + P\left(L^{[k+1]} = [C_0, C_1, C_2 \middle| L^{[k]} = [C_2, C_0, C_1]\right) P\left(L^{[k]} = [C_2, C_0, C_1]\right) \end{aligned}$$

En remplaçant par les valeurs, et d'après $H(k)$ on obtient :

$$P\left(L^{[k+1]} = [C_0, C_1, C_2]\right) = \frac{1}{3}\alpha_k + \frac{1}{3}\alpha_k + \frac{1}{3}\beta_k$$

Donc $P\left(L^{[k+1]} = [C_0, C_1, C_2]\right) = \frac{2}{3}\alpha_k + \frac{1}{3}\beta_k$. En raisonnant de manière similaire pour les autres permutations, on obtient :

$$P\left(L^{[k+1]} = [C_1, C_0, C_2]\right) = \frac{2}{3}\alpha_k + \frac{1}{3}\beta_k, P\left(L^{[k+1]} = [C_1, C_2, C_0]\right) = \frac{2}{3}\alpha_k + \frac{1}{3}\beta_k.$$

et

$$P\left(L^{[k+1]} = [C_2, C_0, C_1]\right) = P\left(L^{[k+1]} = [C_2, C_0, C_1]\right) = P\left(L^{[k+1]} = [C_2, C_1, C_0]\right) \frac{1}{3}\alpha_k + \frac{2}{3}\beta_k.$$

$H(k+1)$ est donc bien vérifiée.

— Conclusion : pour tout $k \geq 2$, $H(k)$ est vraie.

8. Pour tout $k \geq 2$, on note $\alpha_k = P\left(L^{[k]} = [C_0, C_1, C_2]\right)$ et $\beta_k = P\left(L^{[k]} = [C_0, C_2, C_1]\right)$.

(a) Soit $k \geq 2$. En considérant respectivement $P\left(L^{[k+1]} = [C_0, C_1, C_2]\right)$, $P\left(L^{[k+1]} = [C_0, C_1, C_2]\right)$ et d'après la question 6, on a

$$P\left(L^{[k+1]} = [C_0, C_1, C_2]\right) = P\left(L^{[k+1]} = [C_0, C_1, C_2] \middle| L^{[k]} = [C_0, C_1, C_2]\right) P\left(L^{[k]} = [C_0, C_1, C_2]\right)$$
$$+P\left(L^{[k+1]} = [C_0, C_1, C_2] \middle| L^{[k]} = [C_1, C_0, C_2]\right) P\left(L^{[k]} = [C_1, C_0, C_2]\right).$$
$$+P\left(L^{[k+1]} = [C_0, C_1, C_2] \middle| L^{[k]} = [C_2, C_0, C_1]\right) P\left(L^{[k]} = [C_2, C_0, C_1]\right)$$

et

$$P\left(L^{[k+1]} = [C_0, C_2, C_1]\right) = P\left(L^{[k+1]} = [C_0, C_2, C_1] \middle| L^{[k]} = [C_0, C_2, C_1]\right) P\left(L^{[k]} = [C_0, C_2, C_1]\right)$$
$$+P\left(L^{[k+1]} = [C_0, C_2, C_1] \middle| L^{[k]} = [C_2, C_0, C_1]\right) P\left(L^{[k]} = [C_2, C_0, C_1]\right).$$
$$+P\left(L^{[k+1]} = [C_0, C_2, C_1] \middle| L^{[k]} = [C_1, C_0, C_2]\right) P\left(L^{[k]} = [C_1, C_0, C_2]\right)$$

En remplaçant par les valeurs, on obtient :

$$\boxed{\alpha_{k+1} = \frac{2}{3}\alpha_k + \frac{1}{3}\beta_k, \beta_{k+1} = \frac{2}{3}\beta_k + \frac{1}{3}\alpha_k}.$$

(b) Voici la fonction demandée :

```
def calcul_proba(k) :
    alpha = 2/9
    beta = 1/9
    for i in range(2,k) :
        a = (2/3)*alpha + (1/3)*beta
        b = (2/3)*beta + (1/3)*alpha
        alpha = a
        beta = b
  return (alpha,beta)
```

(c) Pour tout $k \geq 2$, on pose

$$P(k) : \begin{pmatrix} \alpha_k \\ \beta_k \end{pmatrix} = A^{k-2} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix}.$$

Montrons $P$ par récurrence.

— Initialisation : on a bien

$$\begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = A^0 \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix}.$$

— Hérédité : soit $k \geq 2$. Supposons que $P(k)$ vraie. Montrons que $P(k+1)$ est vraie. On a :

$$\alpha_{k+1} = \frac{2}{3}\alpha_k + \frac{1}{3}\beta_k, \beta_{k+1} = \frac{1}{3}\alpha_k + \frac{2}{3}\beta_k.$$

Ce qui se réécrit à l'aide de la matrice $A$ :

$$\begin{pmatrix} \alpha_{k+1} \\ \beta_{k+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \alpha_k \\ \beta_k \end{pmatrix}.$$

D'après $P(k)$, on en déduit que

$$\begin{pmatrix} \alpha_{k+1} \\ \beta_{k+1} \end{pmatrix} = A \cdot A^{k-2} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix}.$$

Donc $\begin{pmatrix} \alpha_{k+1} \\ \beta_{k+1} \end{pmatrix} = A^{k+1-2} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$. $P(k+1)$ est donc vraie.

— Conclusion : pour tout $k \geq 2$, $P(k)$ est vraie.

En posant $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, montrer que pour tout $k \geq 2$, on a

$$\begin{pmatrix} \alpha_k \\ \beta_k \end{pmatrix} = A^{k-2}\begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix}.$$

(d) Pour tout $\ell \geq 1$, on pose

$$P(\ell) : J^\ell = 2^{\ell-1}J.$$

Démontrons $P$ par récurrence.

— Initialisation : on a $2^{1-1}J = J$. Donc $P(1)$ est vraie.

— Hérédité : soit $\ell \geq 1$. Supposons que $P(\ell)$ est vraie. Montrons que $P(\ell+1)$ est vraie. D'après $P(\ell)$, on a

$$J^{\ell+1} = 2^{\ell-1}J \cdot J.$$

Or $J^2 = 2J$. Donc $J^{\ell+1} = 2^\ell J$. $P(\ell+1)$ est vraie.

— Conclusion : d'après le principe de récurrence, on en déduit que pour tout $\ell \geq 2$, $J^\ell = 2^{\ell-1}J$.

On pose $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que pour tout $\ell \geq 1$, on a $J^\ell = 2^{\ell-1}J$.

(e) Soit $k \geq 1$. On a

$$A^k = \left(\frac{1}{3}(I_2 + J)\right)^k.$$

$I_2$ et $J$ commutant, on en déduit d'après la formule du binôme :

$$A^k = \frac{1}{3^k}\left(\sum_{\ell=0}^{k}\binom{k}{\ell}J^\ell I_2^{k-\ell}\right).$$

D'après la question 8d, on en déduit que

$$A^k = \frac{1}{3^k}\left(I_2 + \sum_{\ell=1}^{k}\binom{k}{\ell}2^{\ell-1}J\right).$$

Donc

$$A^k = \frac{1}{3^k}\left(I_2 + \left(\sum_{\ell=1}^{k}\binom{k}{\ell}2^\ell\right)\frac{1}{2}J\right).$$

D'où

$$A^k = \frac{1}{3^k}\left(I_2 + \frac{(3^k-1)}{2}J\right).$$

Donc

$$\boxed{A^k = \frac{1}{3^k}I_2 + \frac{(3^k-1)}{2\cdot 3^k}J}.$$

On a donc l'expression demandée, en posant $c_k = \frac{1}{3^k}, d_k = \frac{3^k-1}{2\cdot 3^k}$.

(f) Soit $k \geq 3$. On a donc

$$\begin{pmatrix} \alpha_k \\ \beta_k \end{pmatrix} = A^{k-2}\begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix}.$$

D'après la question 8.e, on en déduit que

$$\begin{pmatrix} \alpha_k \\ \beta_k \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{3^{k-2}}I_2 + \frac{3^{k-2}-1}{2\cdot 3^{k-2}}J\right)\begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix}.$$

Donc, en remplaçant par les valeurs et en simplifiant :

$$\begin{pmatrix}\alpha_k\\ \beta_k\end{pmatrix} = \frac{1}{2\cdot 3^k}\begin{pmatrix}3^{k-1}+1\\ 3^{k-1}-1\end{pmatrix}.$$

D'où

$$\boxed{\alpha_k = \frac{3^{k-1}+1}{2\cdot 3^k}, \beta_k = \frac{3^{k-1}-1}{2\cdot 3^k}}.$$

(g) Pour tout $k \geq 3$, en factorisant par $3^{k-1}$ et en simplifiant, on a

$$\alpha_k = \frac{1+\frac{1}{3^{k-1}}}{6}, \beta_k = \frac{1-\frac{1}{3^{k-1}}}{6}.$$

Or $0 \leq \frac{1}{3} < 1$. Donc $\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{3^{k-1}} = 0$. D'où

$$\boxed{\lim_{k\to+\infty} \alpha_k = \frac{1}{6}, \lim_{k\to+\infty} \beta_k = \frac{1}{6}}.$$

9. Soient $\varepsilon > 0$ et $k \in \mathbb{N}$. On dit que le battage à $k$ insertions est une $\varepsilon$-approximation de la probabilité uniforme si

$$\sum_{L\in\Omega} \left| P\left(L^{[k]} = L\right) - \frac{1}{6}\right| \leq \varepsilon.$$

(a) Soit $\varepsilon > 0$. On a, d'après les questions précédentes :

$$\sum_{L\in\Omega} \left| P\left(L^{[k]} = L\right) - \frac{1}{6}\right| = 3|\alpha_k - \frac{1}{6}| + 3|\beta_k - \frac{1}{6}|.$$

Donc, en remplaçant $\alpha_k, \beta_k$ par leur expressions, on obtient

$$\sum_{L\in\Omega} \left| P\left(L^{[k]} = L\right) - \frac{1}{6}\right| = 3|\frac{1}{3^{k-1}}| + 3|-\frac{1}{3^{k-1}}| = \frac{2}{3^k}.$$

La limite de $\frac{2}{3^k}$ étant 0 lorsque $k$ tend vers $+\infty$, on en déduit qu'il existe un rang $k_0 \geq 2$ tel que pour tout $k \geq k_0$, on a $0 \leq \frac{2}{3^k} < \varepsilon$.

(b) On écrit une version qui ne suppose pas avoir trouvé une formule pour $\alpha_k, \beta_k$.

```
def epsilon_approx(epsilon) :
    k0 = 2
    L = calcul_proba(k0)
    while 3*(abs(L[0]-1/6)+abs(L[1]-1/6)) > epsilon :
        k0 = k0 + 1
        L = calcul_proba(k0)
    return k0
```

(c) Pour $\varepsilon$ proche de 0, en effectuant suffisamment de mélange de cartes, les différentes configurations possibles sont presque équiprobables.

# DS n$^{\text{o}}$ 7 de mathématiques et d'informatique

## durée : 3 heures à distance

### Exercice 1

Le but de cet exercice est de démontrer le théorème des bornes atteintes. Pour rappel :

*Toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.*

On fixe donc une fonction $f$ continue sur un segment $[a, b]$ dans tout l'exercice. On cherche à montrer que $f$ est majorée sur $[a, b]$ (question 1) et que la borne supérieure de $f$ est atteinte sur $[a, b]$ (question 2).

1. Par l'absurde, on suppose que $f$ n'est pas majorée sur $[a, b]$ et on définit deux suites par la récurrence suivante :

$$(a_0, b_0) = (a, b) \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ (a_{n+1}, b_{n+1}) = \begin{cases} \left(a_n, \frac{a_n+b_n}{2}\right) & \text{si } f \text{ n'est pas majorée sur } \left[a_n, \frac{a_n+b_n}{2}\right] \\ \left(\frac{a_n+b_n}{2}, b_n\right) & \text{sinon.} \end{cases}$$

   (a) Montrer que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, justifier que $f$ n'est pas majorée sur $[a_n, b_n]$ puis en déduire l'existence d'un réel $c_n \in [a_n, b_n]$ tel que $f(c_n) \geqslant n$.

   (c) Conclure en étudiant la limite de $f(c_n)$ quand $n \to +\infty$.

2. Dans cette question, on admet le résultat de la question 1, c'est-à-dire que toute fonction continue sur $[a, b]$ est majorée. On note $M_1$ la borne supérieure de $f$ sur $[a, b]$. Par l'absurde, on suppose que $M_1$ n'est pas atteinte et on définit la fonction $g : x \mapsto 1/(M_1 - f(x))$.

   (a) Justifier l'existence d'un réel $M_2 > 0$ tel que $\forall x \in [a, b],\ g(x) \leqslant M_2$.

   (b) Conclure.

3. Que peut-on dire en considérant la fonction $-f$ ?

## Exercice 2

On effectue $n \geqslant 2$ lancers consécutifs d'une pièce déséquilibrée dont la probabilité de donner «pile» est notée $p \in ]0,1[$. Le but de l'exercice est de trouver les valeurs de $p$ pour lesquelles la probabilité $f_n(p)$ d'obtenir au moins deux piles durant ces $n$ lancers est supérieure à $1/2$.

Pour les questions d'informatique, on utilisera seulement le langage Python et on pourra faire appel aux fonctions des questions précédentes même si elles n'ont pas été écrites.

1. **[Informatique]** On rappelle que la commande `random()` de la bibliothèque `random` renvoie un nombre réel aléatoire compris entre 0 et 1.
   (a) Écrire une fonction `piece(proba)` qui simule la pièce déséquilibrée, c'est-à-dire qui prend en argument le réel $p$ puis qui renvoie `'Pile'` avec probabilité $p$ et `'Face'` sinon.
   (b) Écrire une fonction `lancers(nbLancers,proba)` qui prend en arguments l'entier $n$ et le réel $p$ puis qui renvoie le nombre de piles obtenus en simulant $n$ lancers de la pièce déséquilibrée.
   (c) Écrire une fonction `probaEmpirique(nbLancers,proba,nbSimul)` qui simule `nbSimul` fois l'expérience puis qui renvoie la fréquence de l'événement «obtenir au moins deux piles».
2. Pour tout entier $i \geqslant 2$, on note $d_i$ la probabilité de l'événement «obtenir pour la deuxième fois un pile au $i$-ième lancer».
   (a) Calculer $d_2$ et $d_3$. Montrer que $d_4 = 3p^2(1-p)^2$.
   (b) Déterminer $d_i$ en fonction de l'entier $i \geqslant 2$ et du réel $p$.
   (c) En déduire que $f_n(p) = p^2 \sum_{k=1}^{n-1} k(1-p)^{k-1}$.
3. Dans cette question, on pose la fonction $g : x \mapsto \sum_{k=1}^{n-1} x^k$.
   (a) Pour tout $x \in ]0,1[$, exprimer $g(x)$ sans le symbole $\sum$.
   (b) En déduire, pour tout $x \in ]0,1[$, une expression de $\sum_{k=1}^{n-1} kx^{k-1}$ sans le symbole $\sum$.
   (c) Déduire des résultats précédents que :
   $$f_n(p) = 1 - (1-p)^n - np(1-p)^{n-1}.$$
4. (a) À l'aide du résultat de la question précédente, dresser le tableau des variations de la fonction $f_n$ sur $]0,1[$ en précisant les limites en 0 et en 1.
   (b) En déduire qu'il existe une valeur minimale $p_n \in ]0,1[$ telle que, pour tout $p \in ]p_n, 1[$, la probabilité d'obtenir au moins deux piles durant les $n$ lancers est supérieure à $1/2$.
5. **[Informatique]** On souhaite calculer une valeur approchée de $p_n$ à l'aide d'un algorithme de dichotomie.
   (a) Écrire une fonction `dichotomie1(nbLancers,nbIter)` qui partage `nbIter` fois l'intervalle $[0,1]$ à l'aide de la méthode de dichotomie puis qui renvoie une valeur approchée de $p_n$ par excès.
   (b) Écrire une fonction `dichotomie2(nbLancers,precision)` qui prend en argument une précision $\varepsilon =$ `precision` $> 0$ puis qui renvoie une valeur approchée de $p_n$ par excès à $\varepsilon$ près.

# Corrigé du DS n° 7 de mathématiques et d'informatique

## Exercice 1

*Le but de cet exercice est de démontrer le théorème des bornes atteintes. Pour rappel :*

*Toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.*

*On fixe donc une fonction $f$ continue sur un segment $[a,b]$ dans tout l'exercice. On cherche à montrer que $f$ est majorée sur $[a,b]$ (question 1) et que la borne supérieure de $f$ est atteinte sur $[a,b]$ (question 2).*

1. *Par l'absurde, on suppose que $f$ n'est pas majorée sur $[a,b]$ et on définit deux suites par la récurrence suivante :*

$$(a_0,b_0)=(a,b) \quad \text{et} \quad \forall n\in\mathbb{N},\ (a_{n+1},b_{n+1})=\begin{cases}\left(a_n,\frac{a_n+b_n}{2}\right) & \text{si } f \text{ n'est pas majorée sur } \left[a_n,\frac{a_n+b_n}{2}\right]\\ \left(\frac{a_n+b_n}{2},b_n\right) & \text{sinon.}\end{cases}$$

   (a) *Montrer que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.*

   ▶

   *Il faut reconnaître la définition des deux suites de la méthode de dichotomie et donc reproduire une démonstration similaire.*

   On a pour tout $n\in\mathbb{N}$ :

$$\begin{aligned} b_{n+1}-a_{n+1} &= \begin{cases}\frac{a_n+b_n}{2}-a_n & \text{si } f \text{ n'est pas majorée sur } \left[a_n,\frac{a_n+b_n}{2}\right]\\ b_n-\frac{a_n+b_n}{2} & \text{sinon.}\end{cases}\\ &= \begin{cases}\frac{b_n-a_n}{2} & \text{si } f \text{ n'est pas majorée sur } \left[a_n,\frac{a_n+b_n}{2}\right]\\ \frac{b_n-a_n}{2} & \text{sinon.}\end{cases}\\ &= \frac{b_n-a_n}{2} \quad \text{dans tous les cas.}\end{aligned}$$

   Ainsi, $(b_n-a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $b_0-a_0=b-a$, par conséquent :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ b_n-a_n=(b-a)\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{b-a}{2^n}.$$

   En particulier, on en déduit que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} b_n-a_n=0} \quad \text{car} \lim_{n\to+\infty} 2^n=+\infty.$$

   D'autre part, on a pour tout $n\in\mathbb{N}$ :

$$\begin{aligned} a_{n+1}-a_n &= \begin{cases}a_n-a_n & \text{si } f \text{ n'est pas majorée sur } \left[a_n,\frac{a_n+b_n}{2}\right]\\ \frac{a_n+b_n}{2}-a_n & \text{sinon.}\end{cases}\\ &= \begin{cases}0 & \text{si } f \text{ n'est pas majorée sur } \left[a_n,\frac{a_n+b_n}{2}\right]\\ \frac{b_n-a_n}{2} & \text{sinon.}\end{cases}\\ &\geqslant 0 \quad \text{dans tous les cas car } \frac{b_n-a_n}{2}=\frac{b-a}{2^n}>0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et} \quad b_{n+1}-b_n &= \begin{cases}\frac{a_n+b_n}{2}-b_n & \text{si } f \text{ n'est pas majorée sur } \left[a_n,\frac{a_n+b_n}{2}\right]\\ b_n-b_n & \text{sinon.}\end{cases}\\ &= \begin{cases}\frac{a_n-b_n}{2} & \text{si } f \text{ n'est pas majorée sur } \left[a_n,\frac{a_n+b_n}{2}\right]\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}\\ &\leqslant 0 \quad \text{dans tous les cas car } \frac{a_n-b_n}{2}=-\left(\frac{b-a}{2^n}\right)<0.\end{aligned}$$

On en déduit que $\boxed{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante}}$ et $\boxed{(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante}}$. Finalement, on a bien montré que les suites $\boxed{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ sont adjacentes}}$.

(b) *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, justifier que $f$ n'est pas majorée sur $[a_n, b_n]$ puis en déduire l'existence d'un réel $c_n \in [a_n, b_n]$ tel que $f(c_n) \geqslant n$.*

▶ Montrons par récurrence que $f$ n'est pas majorée sur $[a_n, b_n]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Initialisation. Pour $n = 0$, $f$ n'est pas majorée sur $[a_0, b_0] = [a, b]$ par hypothèse de l'énoncé.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $f$ n'est pas majorée sur $[a_n, b_n]$. On a :

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] = \begin{cases} \left[a_n, \frac{a_n+b_n}{2}\right] & \text{si } f \text{ n'est pas majorée sur } \left[a_n, \frac{a_n+b_n}{2}\right] \\ \left[\frac{a_n+b_n}{2}, b_n\right] & \text{sinon.} \end{cases}$$

Or $[a_n, b_n] = \left[a_n, \frac{a_n+b_n}{2}\right] \cup \left[\frac{a_n+b_n}{2}, b_n\right]$ donc, si $f$ est majorée sur $\left[a_n, \frac{a_n+b_n}{2}\right]$ alors $f$ n'est pas majorée sur $[a_{n+1}, b_{n+1}] = \left[\frac{a_n+b_n}{2}, b_n\right]$ (car $f$ n'est pas majorée sur $[a_n, b_n]$). Dans tous les cas, on en déduit que $f$ n'est pas majorée sur $[a_{n+1}, b_{n+1}]$.
Conclusion. D'après le principe de récurrence, on a montré pour tout $n \in \mathbb{N}$ que $\boxed{f \text{ n'est pas majorée sur } [a_n, b_n]}$. Par conséquent :

$$\begin{aligned} &\text{non}\big(\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in [a_n, b_n],\ f(x) \leqslant M\big) \\ \text{donc} \quad &\forall M \in \mathbb{R},\ \exists x \in [a_n, b_n],\ f(x) > M. \end{aligned}$$

En particulier pour $M = n$, on en déduit l'existence de $\boxed{c_n \in [a_n, b_n] \text{ tel que } f(c_n) \geqslant n}$.

(c) *Conclure en étudiant la limite de $f(c_n)$ quand $n \to +\infty$.*

▶ Puisque $f(c_n) \geqslant n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a d'après le théorème de limite par comparaison :

$$\lim_{n\to+\infty} f(c_n) = +\infty.$$

*Attention, le raisonnement n'est pas fini ! Lisez attentivement l'énoncé : nous devons conclure un raisonnement par l'absurde pour prouver que $f$ est majorée sur $[a, b]$, donc obtenir une absurdité.*

De plus, on sait que $c_n \in [a_n, b_n]$, donc que $a_n \leqslant c_n \leqslant b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Or les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes d'après le résultat de la question 1(a). Donc ces deux suites convergent vers la même limite d'après le théorème des suites adjacentes. On note $\ell = \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n$. D'après le théorème de limite par encadrement, on en déduit que la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers $\ell$. Puisque $f$ est continue en $\ell \in [a, b]$, on obtient :

$$f(\ell) = \lim_{n\to+\infty} f(c_n) = +\infty$$

ce qui est absurde (car $f$ est définie sur $[a, b]$ donc en particulier en $\ell \in [a, b]$). Finalement, on a démontré par l'absurde que $\boxed{f \text{ est majorée sur } [a, b]}$.

*Attention, la continuité de $f$ est nécessaire pour conclure ! Cette justification doit apparaître explicitement dans votre copie.*

2. *Dans cette question, on admet le résultat de la question 1, c'est-à-dire que toute fonction continue sur $[a, b]$ est majorée. On note $M_1$ la borne supérieure de $f$ sur $[a, b]$. Par l'absurde, on suppose que $M_1$ n'est pas atteinte et on définit la fonction $g : x \mapsto 1/(M_1 - f(x))$.*

(a) *Justifier l'existence d'un réel $M_2 > 0$ tel que $\forall x \in [a, b],\ g(x) \leqslant M_2$.*

▶ D'après le résultat de la question 1, il suffit de justifier que $g$ est continue sur $[a, b]$. Or $f$ est strictement inférieur à $M_1$ sur $[a, b]$ par hypothèse de l'énoncé, donc :

$$\forall x \in [a, b],\ M_1 - f(x) > 0.$$

Ainsi, $g$ est continue sur $[a,b]$ comme l'inverse d'une différence de fonctions continues (car $f$ est continue sur $[a,b]$) qui ne s'annule pas. D'après le résultat de la question 1, on en déduit que $g$ est majorée sur $[a,b]$. On pose $\boxed{M_2 \text{ un majorant de } g \text{ sur } [a,b]}$. Alors $\boxed{M_2 > 0}$ car $g$ est strictement positive sur $[a,b]$ (comme l'inverse d'une fonction strictement positive) et par définition du majorant :

$$\boxed{\forall x \in [a,b],\ g(x) \leqslant M_2}.$$

*N'oubliez pas de justifier que $M_2 > 0$ ! Cette propriété est essentielle pour la question suivante.*

(b) *Conclure.*

▶ On a pour tout $x \in [a,b]$ :

$$\begin{aligned} & g(x) = \frac{1}{M_1 - f(x)} \leqslant M_2 \\ \text{donc} \quad & M_1 - f(x) \geqslant \frac{1}{M_2} \quad \text{car } M_1 - f(x) > 0 \\ \text{donc} \quad & f(x) \leqslant M_1 - \frac{1}{M_2}. \end{aligned}$$

On en déduit que $M_1 - \frac{1}{M_2}$ est un majorant de $f$ sur $[a,b]$. Or $M_1$ est la borne supérieure de $f$ sur $[a,b]$, donc le plus petit des majorants. Ceci est absurde puisque $M_1 - \frac{1}{M_2} < M_1$ (car $M_2 > 0$).

*L'argument $M_2 > 0$ est donc bien nécessaire pour conclure.*

Finalement, on a démontré par l'absurde que $\boxed{\text{la borne supérieure de } f \text{ est atteinte sur } [a,b]}$.

3. *Que peut-on dire en considérant la fonction $-f$ ?*

▶ La fonction $-f$ est continue sur $[a,b]$ comme opposée d'une fonction continue sur $[a,b]$. D'après le résultat de la question 1, on en déduit que $-f$ est majorée sur $[a,b]$, donc que $\boxed{f \text{ est minorée sur } [a,b]}$. D'après le résultat de la question 2, on en déduit que la borne supérieure de $-f$ est atteinte sur $[a,b]$, donc que $\boxed{\text{la borne inférieure de } f \text{ est atteinte sur } [a,b]}$. Finalement, on bien démontré le théorème des bornes : $\boxed{f \text{ est bornée sur } [a,b] \text{ et atteint ses bornes}}$.

## Exercice 2

*On effectue $n \geqslant 2$ lancers consécutifs d'une pièce déséquilibrée dont la probabilité de donner «pile» est notée $p \in ]0,1[$. Le but de l'exercice est de trouver les valeurs de $p$ pour lesquelles la probabilité $f_n(p)$ d'obtenir au moins deux piles durant ces $n$ lancers est supérieure à $1/2$.*

*Pour les questions d'informatique, on utilisera seulement le langage Python et on pourra faire appel aux fonctions des questions précédentes même si elles n'ont pas été écrites.*

1. ***[Informatique]*** *On rappelle que la commande* `random()` *de la bibliothèque* `random` *renvoie un nombre réel aléatoire compris entre 0 et 1.*

(a) *Écrire une fonction* `piece(proba)` *qui simule la pièce déséquilibrée, c'est-à-dire qui prend en argument le réel $p$ puis qui renvoie* `'Pile'` *avec probabilité $p$ et* `'Face'` *sinon.*

▶ Par exemple :

```
import random
def piece(proba):
    x=random.random()
    if x<proba:
        return 'Pile'
    else:
        return 'False'
```

(b) *Écrire une fonction* `lancers(nbLancers,proba)` *qui prend en arguments l'entier $n$ et le réel $p$ puis qui renvoie le nombre de piles obtenus en simulant $n$ lancers de la pièce déséquilibrée.*

▶ Par exemple :

```
def lancers(nbLancers,proba):
    nbPiles=0
    for i in range(nbLancers):
        if piece(proba)=='Pile':
            nbPiles=nbPiles+1
    return nbPiles
```

(c) *Écrire une fonction* `probaEmpirique(nbLancers,proba,nbSimul)` *qui simule* `nbSimul` *fois l'expérience puis qui renvoie la fréquence de l'événement «obtenir au moins deux piles».*

▶ Par exemple :

```
def probaEmpirique(nbLancers,proba,nbSimul):
    nbApparition=0
    for i in range(nbSimul):
        if lancers(nbLancers,proba)>=2:
            nbApparition=nbApparition+1
    return nbApparition/nbSimul
```

2. *Pour tout entier $i \geqslant 2$, on note $d_i$ la probabilité de l'événement «obtenir pour la deuxième fois un pile au $i$-ième lancer».*

(a) *Calculer $d_2$ et $d_3$. Montrer que $d_4 = 3p^2(1-p)^2$.*

▶ Pour tout entier $j \geqslant 1$, on note $P_j$ l'événement «obtenir pile au $j$-ième lancer». On a $\mathrm{P}(P_j) = p$ d'après l'énoncé. De plus, puisque le résultat de chaque lancer est indépendant des autres, les événements $P_1, P_2, \ldots, P_n$ sont mutuellement indépendants.

$d_2$ est la probabilité de l'événement «obtenir deux piles aux deux premiers lancers». Donc :

$$\begin{aligned} d_2 &= \mathrm{P}(P_1 \cap P_2) \\ &= \mathrm{P}(P_1)\mathrm{P}(P_2) \quad \text{par indépendance} \\ &= \boxed{p^2}. \end{aligned}$$

$d_3$ est la probabilité de l'événement «obtenir un pile et un face aux deux premiers lancers, puis un pile au troisième lancer». Donc :

$$\begin{aligned} d_3 &= \mathrm{P}\left(\left(P_1 \cap \overline{P_2} \cap P_3\right) \cup \left(\overline{P_1} \cap P_2 \cap P_3\right)\right) \\ &= \mathrm{P}\left(P_1 \cap \overline{P_2} \cap P_3\right) + \mathrm{P}\left(\overline{P_1} \cap P_2 \cap P_3\right) \quad \text{car } P_1 \text{ et } \overline{P_1} \text{ sont incompatibles} \\ &= \mathrm{P}\left(P_1\right)\mathrm{P}\left(\overline{P_2}\right)\mathrm{P}\left(P_3\right) + \mathrm{P}\left(\overline{P_1}\right)\mathrm{P}\left(P_2\right)\mathrm{P}\left(P_3\right) \quad \text{par indépendance mutuelle} \\ &= p(1-p)p + (1-p)p^2 \\ &= \boxed{2p^2(1-p)}. \end{aligned}$$

De même, on a :

$$\begin{aligned} d_4 &= \mathrm{P}\left(\left(P_1 \cap \overline{P_2} \cap \overline{P_3} \cap P_4\right) \cup \left(\overline{P_1} \cap P_2 \cap \overline{P_3} \cap P_4\right) \cup \left(\overline{P_1} \cap \overline{P_2} \cap P_3 \cap P_4\right)\right) \\ &= \mathrm{P}\left(P_1 \cap \overline{P_2} \cap \overline{P_3} \cap P_4\right) + \mathrm{P}\left(\overline{P_1} \cap P_2 \cap \overline{P_3} \cap P_4\right) + \mathrm{P}\left(\overline{P_1} \cap \overline{P_2} \cap P_3 \cap P_4\right) \\ &\qquad\qquad \text{car les trois événements sont deux à deux incompatibles} \\ &= \mathrm{P}\left(P_1\right)\mathrm{P}\left(\overline{P_2}\right)\left(\overline{P_3}\right)\mathrm{P}\left(P_4\right) + \mathrm{P}\left(\overline{P_1}\right)\mathrm{P}\left(P_2\right)\mathrm{P}\left(\overline{P_3}\right)\mathrm{P}\left(P_4\right) + \mathrm{P}\left(\overline{P_1}\right)\mathrm{P}\left(\overline{P_2}\right)\mathrm{P}\left(P_3\right)\mathrm{P}\left(P_4\right) \\ &\qquad\qquad \text{par indépendance mutuelle} \\ &= p(1-p)^2p + (1-p)p(1-p)p + (1-p)^2p^2 \\ &= \boxed{3p^2(1-p)^2}. \end{aligned}$$

(b) *Déterminer $d_i$ en fonction de l'entier $i \geqslant 2$ et du réel $p$.*

▶ Soit $i \geqslant 2$. On raisonne comme à la question précédente. $d_i$ est la probabilité de l'événement «obtenir un seul pile durant les $i-1$ premiers lancers, puis un pile au $i$-ième lancer». Donc :

$$\begin{aligned} d_i &= \underbrace{\binom{i-1}{1}}_{\substack{\text{choix du 1}^{\text{er}}\text{ pile parmi} \\ \text{les } i-1 \text{ premiers lancers}}} \times \underbrace{p}_{\text{proba du 1}^{\text{er}}\text{ pile}} \times \underbrace{(1-p)^{i-1-1}}_{\substack{\text{proba d'obtenir face} \\ \text{aux lancers restants}}} \times \underbrace{p}_{\substack{\text{proba du 2}^{\text{e}}\text{ pile} \\ \text{au } i\text{-ième lancer}}} \\ &= \boxed{(i-1)p^2(1-p)^{i-2}}. \end{aligned}$$

(c) *En déduire que $f_n(p) = p^2 \sum_{k=1}^{n-1} k(1-p)^{k-1}$.*

▶ Pour tout entier $i \geqslant 2$, on note $D_i$ l'événement «obtenir pour la deuxième fois un pile au $i$-ième lancer». On a $\mathrm{P}(D_i) = d_i = (i-1)p^2(1-p)^{i-2}$ d'après le résultat de la question précédente. De plus, les événements $D_2, D_3, \dots, D_n$ sont deux à deux incompatibles.
$f_n(p)$ est la probabilité de l'événement «obtenir au moins deux piles durant les $n$ lancers». Donc :

$$\begin{aligned} f_n(p) &= \mathrm{P}\left(D_2 \cup D_3 \cup \cdots \cup D_n\right) = \mathrm{P}\left(\bigcup_{i=2}^{n} D_i\right) \\ &= \sum_{i=2}^{n} \mathrm{P}(D_i) \quad \text{car les } n-1 \text{ événements sont deux à deux incompatibles} \\ &= \sum_{i=2}^{n} (i-1)p^2(1-p)^{i-2} \quad \text{d'après le résultat de la question précédente} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} kp^2(1-p)^{k-1} \quad \text{à l'aide du décalage d'indice } k = i-1 \\ &= \boxed{p^2 \sum_{k=1}^{n-1} k(1-p)^{k-1}} \quad \text{par linéarité.} \end{aligned}$$

3. *Dans cette question, on pose la fonction $g : x \mapsto \sum_{k=1}^{n-1} x^k$.*

(a) *Pour tout $x \in ]0,1[$, exprimer $g(x)$ sans le symbole $\sum$.*

▶ Soit $x \in ]0,1[$. On reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique de raison $x \neq 1$. Donc :

$$g(x) = \sum_{k=1}^{n-1} x^k = x^1 \frac{1 - x^{(n-1)-1+1}}{1-x} = \boxed{\frac{x - x^n}{1-x}}.$$

(b) *En déduire, pour tout $x \in ]0,1[$, une expression de $\sum_{k=1}^{n-1} kx^{k-1}$ sans le symbole $\sum$.*

▶ La fonction $g$ est dérivable sur $]0,1[$ comme fonction polynomiale (ou, d'après le résultat de la question précédente, comme quotient de fonctions polynomiales dont le dénominateur ne s'annule pas). Soit $x \in ]0,1[$. On a par définition de la fonction $g$ :

$$g'(x) = \sum_{k=1}^{n-1} kx^{k-1} \quad \text{car } \frac{\mathrm{d}(x^k)}{\mathrm{d}x} = kx^{k-1}.$$

De plus, on a d'après le résultat de la question précédente :

$$g'(x) = \frac{(1 - nx^{n-1})(1-x) - (x - x^n)(-1)}{(1-x)^2} = \frac{1 - nx^{n-1} - x + nx^n + x - x^n}{(1-x)^2}.$$

On en déduit que :

$$\sum_{k=1}^{n-1} kx^{k-1} = \boxed{\frac{1 - x^n - nx^{n-1}(1-x)}{(1-x)^2}}.$$

(c) *Déduire des résultats précédents que :*

$$f_n(p) = 1 - (1-p)^n - np(1-p)^{n-1}.$$

► On a :

$$\begin{aligned}
f_n(p) &= p^2 \sum_{k=1}^{n-1} k(1-p)^{k-1} && \text{d'après le résultat de la question 2(c)} \\
&= p^2 \frac{1-(1-p)^n - n(1-p)^{n-1}(1-(1-p))}{(1-(1-p))^2} && \text{d'après le résultat de la question précédente en posant } x = 1-p \in ]0,1[ \\
&= p^2 \frac{1-(1-p)^n - n(1-p)^{n-1}p}{p^2} \\
&= \boxed{1-(1-p)^n - np(1-p)^{n-1}} && \text{après simplifications.}
\end{aligned}$$

4. (a) *À l'aide du résultat de la question précédente, dresser le tableau des variations de la fonction $f_n$ sur $]0,1[$ en précisant les limites en $0$ et en $1$.*

► D'après le résultat de la question précédente, la fonction $f_n$ est définie et dérivable sur $]0,1[$ comme fonction polynomiale. De plus :

$$\begin{aligned}
\forall p \in ]0,1[,\ f_n'(p) &= 0 - (-1)n(1-p)^{n-1} - n\left(1(1-p)^{n-1} + p(-1)(n-1)(1-p)^{n-2}\right) \\
&= n(1-p)^{n-1} - n(1-p)^{n-1} + np(n-1)(1-p)^{n-2} \\
&= \underbrace{n(n-1)}_{\substack{\geqslant 2 \\ \text{car } n \geqslant 2}} \underbrace{p(1-p)^{n-2}}_{\substack{>0 \\ \text{car } p \in ]0,1[}} > 0.
\end{aligned}$$

On en déduit que la fonction $f_n$ est strictement croissante sur l'intervalle $]0,1[$ (d'après le principe de Lagrange). D'où le tableau des variations de $f_n$ :

| $p$ | $0$ | $p_n$ | $1$ |
|---|---|---|---|
| $f_n(p)$ | $0$ ↗ | $\frac{1}{2}$ ↗ | $1$ |

car :

$$\begin{aligned}
\lim_{p\to 0} f_n(p) &= \lim_{p\to 0} \left(1 - \underbrace{(1-p)^n}_{\to 1} - n \underbrace{p}_{\to 0} \underbrace{(1-p)^{n-1}}_{\to 1}\right) = 1 - 1 - 0 = 0, \\
\lim_{p\to 1} f_n(p) &= \lim_{p\to 1} \left(1 - \underbrace{(1-p)^n}_{\to 0} - n \underbrace{p}_{\to 1} \underbrace{(1-p)^{n-1}}_{\to 0}\right) = 1 - 0 - 0 = 1.
\end{aligned}$$

(b) *En déduire qu'il existe une valeur minimale $p_n \in ]0,1[$ telle que, pour tout $p \in ]p_n, 1[$, la probabilité d'obtenir au moins deux piles durant les $n$ lancers est supérieure à $1/2$.*

► On cherche un réel $p_n \in ]0,1[$ tel que $f_n(p) > \frac{1}{2}$ pour tout $p > p_n$. Or $f_n$ est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]0,1[$ (d'après le résultat de la question précédente). Donc $f_n : ]0,1[ \to ]0,1[$ est bijective, d'après le théorème de la bijection. En particulier, $\frac{1}{2}$ admet un unique antécédent. On pose $\boxed{p_n \text{ l'antécédent de } \frac{1}{2} \text{ par } f_n}$. D'après le tableau des variations de $f_n$ obtenu à la question précédente, on a bien $f_n(p) > \frac{1}{2}$ pour tout $p > p_n$.

*Vérifiez bien toutes les hypothèses lorsque vous appliquez un théorème (ici le théorème de la bijection) pour montrer que vous maîtrisez votre cours.*

5. ***[Informatique]*** *On souhaite calculer une valeur approchée de $p_n$ à l'aide d'un algorithme de dichotomie.*

   (a) *Écrire une fonction* `dichotomie1(nbLancers,nbIter)` *qui partage* `nbIter` *fois l'intervalle $[0,1]$ à l'aide de la méthode de dichotomie puis qui renvoie une valeur approchée de $p_n$ par excès.*

   ► Pour approcher $p_n$ à l'aide de la méthode de dichotomie, on définit par récurrence deux suites de la façon suivante :

$$a_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall i \in \mathbb{N},\ a_{i+1} = \begin{cases} a_i & \text{si } f_n\left(\frac{a_i+b_i}{2}\right) > \frac{1}{2} \\ \frac{a_i+b_i}{2} & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$b_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall i \in \mathbb{N},\ b_{i+1} = \begin{cases} \frac{a_i+b_i}{2} & \text{si } f_n\left(\frac{a_i+b_i}{2}\right) > \frac{1}{2} \\ b_i & \text{sinon.} \end{cases}$$

   À chaque étape $i \in \mathbb{N}$, l'intervalle $[a_i, b_i]$ est partagé en deux et on conserve la moitié $[a_{i+1}, b_{i+1}]$ qui contient $p_n$. Alors les suites $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes et convergent vers $p_n$. En particulier, pour un nombre de partage $i$ suffisamment grand, $b_i$ est une valeur approchée de $p_n$ par excès. Une fonction Python renvoyant $b_i$ est par exemple :

```
def dichotomie1(nbLancers,nbIter):
    a=0
    b=1
    for i in range(nbIter):
        c=(a+b)/2
        image=1-(1-c)**nbLancers-nbLancers*c*(1-c)**(nbLancers-1)
        if image>1/2:
            b=c
        else:
            a=c
    return b
```

   (b) *Écrire une fonction* `dichotomie2(nbLancers,precision)` *qui prend en argument une précision $\varepsilon =$* `precision` *$> 0$ puis qui renvoie une valeur approchée de $p_n$ par excès à $\varepsilon$ près.*

   ► On cherche le nombre de partage $i$ nécessaire pour que $b_i - p_n \leqslant \varepsilon$. Puisque $a_i \leqslant p_n \leqslant b_i$, il suffit que $b_i - a_i \leqslant \varepsilon$. Or, d'après la méthode de dichotomie :

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad b_i - a_i = (b_0 - a_0)\left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{1}{2^i}.$$

   Il suffit donc de choisir un nombre de partage $i$ suffisamment grand pour que $\frac{1}{2^i} \leqslant \varepsilon$. Alors $b_i - p_n \leqslant \varepsilon$ donc $b_i$ sera bien une valeur approchée de $p_n$ par excès à $\varepsilon$ près. Une fonction Python calculant ce nombre de partage $i$ et renvoyant $b_i$ est par exemple :

```
def dichotomie2(nbLancers,precision):
    nbIter=0
    while 1/2**nbIter>precision:
        nbIter=nbIter+1
    return dichotomie1(nbLancers,nbIter)
```

# DS n$^{\text{o}}$ 8 de mathématiques et d'informatique

## durée : 3 heures

## Exercice 1

On considère l'application suivante :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto (-x - 2y + 2z, -x + z, -2x - 2y + 3z).$$

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose $F_\lambda = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = \lambda(x, y, z)\}$.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Justifier que $F_\lambda$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer les valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ pour lesquelles $F_\lambda \neq \{\overrightarrow{0}\}$.
3. Déterminer une base et la dimension de $F_\lambda$ pour chaque valeur de $\lambda$ obtenue à la question précédente.

## Problème 1

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on considère le polynôme :

$$P_k = 4 - \frac{(-1)^k}{4^{k-1}} X^{4k}(1 - X)^{4k}.$$

1. Montrer que $i$ et $-i$ sont racines de $P_k \in \mathbb{C}[X]$ et en déduire qu'il existe un polynôme $Q_k \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P_k = (1 + X^2)Q_k$.
2. Montrer que :
$$\int_0^1 Q_k(x)\mathrm{d}x = \pi - \frac{(-1)^k}{4^{k-1}} \int_0^1 \frac{x^{4k}(1 - x)^{4k}}{1 + x^2}\mathrm{d}x$$
et en déduire que :
$$\left|\pi - \int_0^1 Q_k(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{1}{4^{k-1}} \int_0^1 x^{4k}(1 - x)^{4k}\mathrm{d}x.$$
3. À l'aide d'intégrations par parties, démontrer que :
$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 x^p(1 - x)^p\mathrm{d}x = \frac{(p!)^2}{(2p + 1)!}$$
et en déduire que :
$$\left|\pi - \int_0^1 Q_k(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{\big((4k)!\big)^2}{4^{k-1}(8k + 1)!}.$$
4. Déterminer $Q_1$ et en déduire une approximation de $\pi$ par une fraction. On donnera une majoration de l'erreur commise.
5. **[Informatique]** On utilisera seulement le langage Python et on pourra faire appel aux fonctions des questions précédentes même si elles n'ont pas été écrites.
   (a) Écrire une fonction `polyQ` qui prend en arguments l'entier $k$ et un réel $x$ puis qui renvoie la valeur de $Q_k(x)$.
   (b) Écrire une fonction `sommeRiemann` qui prend en arguments l'entier $k$ et un entier $n \geqslant 1$, puis qui renvoie la valeur de la $n$-ième somme de Riemann à gauche de la fonction $x \mapsto Q_k(x)$ sur $[0, 1]$.

## Exercice 2

On considère la fonction suivante :

$$f : x \mapsto \frac{x}{\ln(\sin(x)+1)}.$$

Calculer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction $f$. Puis justifier que $f$ est prolongeable par continuité en 0 et que la courbe représentative de son prolongement par continuité en 0, qu'on notera encore $f$, admet une tangente au point d'abscisse 0. Enfin, étudier la position relative de cette tangente par rapport à la courbe représentative de $f$ au voisinage du point d'abscisse 0.

## Problème 2

Dans tout ce problème, on fixe $n \in \mathbb{N}$ et on considère une urne contenant des boules sur chacune desquelles est inscrit un numéro de 0 à $n$, de telle façon que chaque numéro $k$ est inscrit sur exactement $\binom{n}{k}$ boules. On pioche simultanément $p$ boules et on note $S$ la somme des numéros inscrits sur les boules piochées.

1. **[Questions préliminaires]**
   (a) Quel est le nombre total de boules dans l'urne ?
   (b) Montrer que $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$ (on pourra distinguer le cas $n = 0$).
2. **[Informatique]** On utilisera seulement le langage Python et on pourra faire appel aux fonctions des questions précédentes même si elles n'ont pas été écrites.
   (a) Écrire des fonctions `fact(k)` et `binom(k,n)` qui renvoient les valeurs de $k!$ et $\binom{n}{k}$ respectivement.
   (b) Écrire une fonction `urne` qui prend en argument l'entier $n$ et qui renvoie une liste des numéros inscrits sur les boules dans l'urne. Par exemple, `urne(3)` renvoie `[0,1,1,1,2,2,2,3]`.
   (c) Écrire une fonction `tirage` qui prend en arguments les entiers $n$ et $p$ puis qui simule l'expérience et renvoie une liste des numéros inscrits sur les boules piochées. On rappelle que la fonction `random.randint(a,b)` de la bibliothèque `random` renvoie un entier choisi au hasard entre `a` et `b` compris, et que l'instruction `L.remove(a)` enlève une fois la valeur `a` de la liste `L`.
   (d) Écrire une fonction `simul` qui prend en arguments les entiers $n$ et $p$ ainsi qu'un entier `nbSimul`, puis qui renvoie la moyenne statistique de $S$ après avoir simulé `nbSimul` fois l'expérience.
3. **[Cas particuliers]** En reconnaissant des lois usuelles, déterminer l'espérance et la variance de $S$ dans les deux cas suivants :
   (a) $p = 1$,
   (b) $p = 2^n$.

Dans la suite du problème, on suppose que $1 < p < 2^n$ et on propose de démontrer que $\mathrm{E}(S) = \frac{np}{2}$ par deux méthodes différentes.

4. **[1$^{\text{re}}$ méthode]** On note $X_k$ le nombre de boules piochées sur lesquelles est inscrit le numéro $k$.
   (a) Quelle est la loi de $X_k$ ? On précisera les paramètres.
   (b) À l'aide d'une somme, exprimer $S$ en fonction des variables aléatoires $X_k$.
   (c) Conclure.
5. **[2$^{\text{e}}$ méthode]** Pour chaque numéro $i \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$, on numérote les boules sur lesquelles est inscrit le numéro $i$ et on note $B_{i,j}$ la $j$-ième de ces boules. Ainsi $j \in \{1, 2, 3, \ldots, \binom{n}{i}\}$. On note $Y_{i,j}$ la variable aléatoire égale à 1 si $B_{i,j}$ a été piochée et égale à 0 sinon.
   (a) Quelle est la loi de $Y_{i,j}$ ? On précisera les paramètres.
   (b) À l'aide d'une somme double, exprimer $S$ en fonction des variables aléatoires $Y_{i,j}$.
   (c) Conclure.

# Corrigé du DS n° 8 de mathématiques et d'informatique

## Exercice 1

*On considère l'application suivante :*

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x,y,z) \mapsto (-x-2y+2z, -x+z, -2x-2y+3z).$$

*Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose $F_\lambda = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z) = \lambda(x,y,z)\}$.*

1. *Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Justifier que $F_\lambda$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.*

   ▶ On a $f(0,0,0) = (0,0,0) = \lambda(0,0,0)$ donc $\overrightarrow{0} \in F_\lambda$. On fixe un scalaire $\mu \in \mathbb{R}$ et deux vecteurs $(x_1,y_1,z_1) \in F_\lambda$ et $(x_2,y_2,z_2) \in F_\lambda$. Montrons que $\mu(x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2) \in F_\lambda$. On pose :

$$(x,y,z) = \mu(x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2) = \big(\underbrace{\mu x_1+x_2}_{=x}, \underbrace{\mu y_1+y_2}_{=y}, \underbrace{\mu z_1+z_2}_{=z}\big).$$

   Alors :

$$\begin{aligned}
f(x,y,z) =& \big(-x-2y+2z, -x+z, -2x-2y+3z\big)\\
=& \big(-(\mu x_1+x_2)-2(\mu y_1+y_2)+2(\mu z_1+z_2), -(\mu x_1+x_2)+(\mu z_1+z_2),\\
& \qquad -2(\mu x_1+x_2)-2(\mu y_1+y_2)+3(\mu z_1+z_2)\big)\\
=& \mu\big(-x_1-2y_1+2z_1, -x_1+z_1, -2x_1-2y_1+3z_1\big)\\
& \qquad + \big(-x_2-2y_2+2z_2, -x_2+z_2, -2x_2-2y_2+3z_2\big)\\
=& \mu f(x_1,y_1,z_1)+f(x_2,y_2,z_2)\\
=& \mu\big(\lambda(x_1,y_1,z_1)\big)+\lambda(x_2,y_2,z_2) \quad \text{car } (x_1,y_1,z_1) \in F_\lambda \text{ et } (x_2,y_2,z_2) \in F_\lambda\\
=& \lambda\big(\mu(x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)\big)\\
=& \lambda(x,y,z).
\end{aligned}$$

   On en déduit que $\mu(x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2) \in F_\lambda$ pour tout scalaire $\mu \in \mathbb{R}$ et tous vecteurs $(x_1,y_1,z_1) \in F_\lambda$ et $(x_2,y_2,z_2) \in F_\lambda$. Par conséquent, $\boxed{F_\lambda \text{ est bien un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^3}$.

2. *Déterminer les valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ pour lesquelles $F_\lambda \neq \{\overrightarrow{0}\}$.*

   ▶ On a :

$$f(x,y,z) = \lambda(x,y,z) \iff \begin{cases} -x-2y+2z = \lambda x \\ -x+z = \lambda y \\ -2x-2y+3z = \lambda z \end{cases} \iff \begin{pmatrix} -1-\lambda & -2 & 2 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ -2 & -2 & 3-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   On reconnaît un système linéaire homogène de trois équations à trois inconnues. On cherche les valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ pour lesquelles $\overrightarrow{0} = (0,0,0)$ n'est pas l'unique solution, donc pour lesquelles le rang n'est pas maximal. On a :

$$\begin{aligned}
&\operatorname{rang}\begin{pmatrix} -1-\lambda & -2 & 2 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ -2 & -2 & 3-\lambda \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftrightarrow L_2 \\ L_2 \leftrightarrow L_1 \\ \phantom{x} \end{matrix} \\
=&\operatorname{rang}\begin{pmatrix} \boxed{-1} & -\lambda & 1 \\ -1-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 3-\lambda \end{pmatrix} \begin{matrix} \phantom{x} \\ L_2 \leftarrow L_2-(1+\lambda)L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{matrix} \\
=&\operatorname{rang}\begin{pmatrix} \boxed{-1} & -\lambda & 1 \\ 0 & a & b \\ 0 & -2+2\lambda & 1-\lambda \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} \text{où} \quad a &= -2+(1+\lambda)\lambda = -2+\lambda+\lambda^2 \\ &= (\lambda-1)(\lambda+2) \quad \text{car 1 est une racine évidente} \\ \text{et} \quad b &= 2-(1+\lambda) = 1-\lambda \end{aligned} \\
=&\operatorname{rang}\begin{pmatrix} \boxed{-1} & -\lambda & 1 \\ 0 & (1-\lambda)(-2-\lambda) & 1-\lambda \\ 0 & -2(1-\lambda) & 1-\lambda \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

<u>1er cas :</u> $1-\lambda=0 \iff \lambda=1$. Alors :

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} -1-\lambda & -2 & 2 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ -2 & -2 & 3-\lambda \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} \boxed{-1} & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1.$$

<u>2e cas :</u> $1-\lambda\neq 0 \iff \lambda\neq 1$. Alors :

$$\begin{aligned}
&\operatorname{rang}\begin{pmatrix} -1-\lambda & -2 & 2 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ -2 & -2 & 3-\lambda \end{pmatrix} \\
=&\operatorname{rang}\begin{pmatrix} \boxed{-1} & -\lambda & 1 \\ 0 & (1-\lambda)(-2-\lambda) & 1-\lambda \\ 0 & -2(1-\lambda) & 1-\lambda \end{pmatrix} \begin{matrix} \phantom{x} \\ L_2 \leftarrow L_2/(1-\lambda) \\ L_3 \leftarrow L_3/(1-\lambda) \end{matrix} \\
=&\operatorname{rang}\begin{pmatrix} \boxed{-1} & -\lambda & 1 \\ 0 & -2-\lambda & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \phantom{x} \\ L_2 \leftrightarrow L_3 \\ L_3 \leftrightarrow L_2 \end{matrix} \\
=&\operatorname{rang}\begin{pmatrix} \boxed{-1} & -\lambda & 1 \\ 0 & \boxed{-2} & 1 \\ 0 & -2-\lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \phantom{x} \\ \phantom{x} \\ L_3 \leftarrow 2L_3-(2+\lambda)L_2 \end{matrix} \\
=&\operatorname{rang}\begin{pmatrix} \boxed{-1} & -\lambda & 1 \\ 0 & \boxed{-2} & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad c = 2-(2+\lambda) = -\lambda.
\end{aligned}$$

On en déduit que le rang du système est égal à 2 si $\lambda=0$ et à 3 sinon.
<u>Conclusion</u>. Par conséquent, $F_\lambda \neq \{\overrightarrow{0}\}$ si et seulement si $\boxed{\lambda\in\{0,1\}}$.

*En cette fin d'année, il faut savoir faire ce type de calcul de rang avec un paramètre vite et sans erreurs. N'hésitez pas à poser vos calculs intermédiaires comme ceux pour a, b et c (les calculs de tête sont chronophages et sources d'erreurs) et pensez à utiliser ce que nous avons appris sur les polynômes pour aller plus vite (racine évidente, factorisation, etc.).*

3. *Déterminer une base et la dimension de $F_\lambda$ pour chaque valeur de $\lambda$ obtenue à la question précédente.*

► Puisque le système linéaire est homogène, on a en reprenant les calculs de la question précédente :

$$f(x,y,z)=\lambda(x,y,z) \iff \begin{pmatrix} -1 & -\lambda & 1 \\ 0 & (1-\lambda)(-2-\lambda) & 1-\lambda \\ 0 & -2(1-\lambda) & 1-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

•Si $\lambda = 1$. Alors on obtient la représentation paramétrique suivante de $F_1$ :

$$f(x,y,z) = (x,y,z) \iff \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x = -y + z \\ y = y \\ z = z \end{cases}, \quad (y,z) \in \mathbb{R}^2.$$

On en déduit que $F_1 = \mathrm{Vect}((-1,1,0),(1,0,1))$. Or $(-1,1,0)$ et $(1,0,1)$ ne sont pas colinéaires, par conséquent $\boxed{\text{les vecteurs } (-1,1,0) \text{ et } (1,0,1) \text{ forment une base de } F_1 \text{ qui est donc de dimension } 2}$.

•Si $\lambda = 0$. Alors on obtient la représentation paramétrique suivante de $F_0$ :

$$f(x,y,z) = (0,0,0) \iff \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x = z \\ y = z/2 \\ z = z \end{cases}, \quad z \in \mathbb{R}.$$

On en déduit que $F_0 = \mathrm{Vect}\left((1, \frac{1}{2}, 1)\right)$. Or $(1, \frac{1}{2}, 1) \neq \overrightarrow{0}$, par conséquent $\boxed{\text{le vecteur } (1, \frac{1}{2}, 1) \text{ forme une base de } F_0 \text{ qui est donc de dimension } 1}$.

## Problème 1

*Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on considère le polynôme :*

$$P_k = 4 - \frac{(-1)^k}{4^{k-1}} X^{4k}(1-X)^{4k}.$$

1. *Montrer que $i$ et $-i$ sont racines de $P_k \in \mathbb{C}[X]$ et en déduire qu'il existe un polynôme $Q_k \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P_k = (1+X^2)Q_k$.*

► D'après la formule du binôme de Newton, on a :

$$(1-i)^4 = 1 + 4(-i) + 6(-i)^2 + 4(-i)^3 + (-i)^4 = 1 - 4i - 6 + 4i + 1 = -4.$$

Donc :

$$\begin{aligned} P_k(i) &= 4 - \frac{(-1)^k}{4^{k-1}} i^{4k}(1-i)^{4k} \\ &= 4 - \frac{(-1)^k}{4^{k-1}} \left(i^4\right)^k \left((1-i)^4\right)^k \\ &= 4 - \frac{(-1)^k}{4^{k-1}} \underbrace{1^k}_{=1} \underbrace{(-4)^k}_{=(-1)^k 4^k} \\ &= 4 - \underbrace{(-1)^k(-1)^k}_{=(-1)^{2k}=1} \times \underbrace{\frac{4^k}{4^{k-1}}}_{=4^{k-(k-1)}=4} \\ &= 4 - 4 = 0. \end{aligned}$$

Donc $\boxed{i \text{ est racine de } P_k}$. De même :

$$P_k(-i) = P_k\left(\bar{i}\right) = \overline{P_k(i)} = \bar{0} = 0 \quad \text{car } P_k \in \mathbb{R}[X].$$

*Il est nécessaire de préciser que $P_k$ est à coefficients réels pour justifier que $P_k(\bar{z}) = \overline{P_k(z)}$. Cette propriété est fausse pour les polynômes à coefficients complexes !*

Donc $\boxed{i \text{ est racine de } P_k}$. Par conséquent, $P_k$ est factorisable par $(X-i)$ et par $(X+i)$ donc par $(X-i)(X+i) = X^2+1$. Puisque $P_k$ et $X^2+1$ sont des polynômes à coefficients réels, on en déduit bien l'existence de $\boxed{Q_k \in \mathbb{R}[X] \text{ tel que } P_k = (1+X^2)Q_k}$.

2. *Montrer que :*
$$\int_0^1 Q_k(x)\mathrm{d}x = \pi - \frac{(-1)^k}{4^{k-1}}\int_0^1 \frac{x^{4k}(1-x)^{4k}}{1+x^2}\mathrm{d}x$$
*et en déduire que :*
$$\left|\pi - \int_0^1 Q_k(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{1}{4^{k-1}}\int_0^1 x^{4k}(1-x)^{4k}\mathrm{d}x.$$

► On a :
$$\begin{aligned}\int_0^1 Q_k(x)\mathrm{d}x &= \int_0^1 \frac{P_k(x)}{1+x^2}\mathrm{d}x \quad \text{d'après le résultat de la question précédente}\\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\left(4 - \frac{(-1)^k}{4^{k-1}}x^{4k}(1-x)^{4k}\right)\mathrm{d}x \quad \text{par définition de } P_k\\ &= 4\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} - \frac{(-1)^k}{4^{k-1}}\int_0^1 \frac{x^{4k}(1-x)^{4k}}{1+x^2}\mathrm{d}x \quad \text{par linéarité de l'intégrale.}\end{aligned}$$

Or on a :
$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \big[\arctan(x)\big]_0^1 = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}.$$

Par conséquent :
$$\boxed{\int_0^1 Q_k(x)\mathrm{d}x = \pi - \frac{(-1)^k}{4^{k-1}}\int_0^1 \frac{x^{4k}(1-x)^{4k}}{1+x^2}\mathrm{d}x}.$$

On en déduit que :
$$\left|\pi - \int_0^1 Q_k(x)\mathrm{d}x\right| = \left|\frac{(-1)^k}{4^{k-1}}\int_0^1 \frac{x^{4k}(1-x)^{4k}}{1+x^2}\mathrm{d}x\right| = \frac{1}{4^{k-1}}\left|\int_0^1 \frac{x^{4k}(1-x)^{4k}}{1+x^2}\mathrm{d}x\right|.$$

Or la fonction $x \mapsto \frac{x^{4k}(1-x)^{4k}}{1+x^2}$ est positive sur $[0,1]$ donc :
$$\int_0^1 \frac{x^{4k}(1-x)^{4k}}{1+x^2}\mathrm{d}x \geqslant 0 \quad \text{par positivité de l'intégrale.}$$

Par conséquent :
$$\left|\pi - \int_0^1 Q_k(x)\mathrm{d}x\right| = \frac{1}{4^{k-1}}\int_0^1 \frac{x^{4k}(1-x)^{4k}}{1+x^2}\mathrm{d}x.$$

De plus, $1+x^2 \geqslant 1$ pour tout $x \in [0,1]$ donc :
$$\forall x \in [0,1], \quad \frac{x^{4k}(1-x)^{4k}}{1+x^2} \leqslant \frac{x^{4k}(1-x)^{4k}}{1} = x^{4k}(1-x)^{4k} \quad \text{car } x^{4k}(1-x)^{4k} \geqslant 0.$$

Par monotonie de l'intégrale, on en déduit que :
$$\boxed{\left|\pi - \int_0^1 Q_k(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{1}{4^{k-1}}\int_0^1 x^{4k}(1-x)^{4k}\mathrm{d}x}.$$

3. *À l'aide d'intégrations par parties, démontrer que :*
$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 x^p(1-x)^p\mathrm{d}x = \frac{(p!)^2}{(2p+1)!}$$
*et en déduire que :*
$$\left|\pi - \int_0^1 Q_k(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{\big((4k)!\big)^2}{4^{k-1}(8k+1)!}.$$

► Soit $p \in \mathbb{N}$. On pose :
$$\begin{cases} u' : x \mapsto x^p \\ v : x \mapsto (1-x)^p \end{cases} \quad \text{et donc} \quad \begin{cases} u : x \mapsto \frac{x^{p+1}}{p+1} \\ v' : x \mapsto -p(1-x)^{p-1} \end{cases}.$$

Les fonctions $u$ et $v$ sont bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ comme fonctions polynomiales.

*N'oubliez pas de vérifier les hypothèses des théorèmes que vous appliquez. Pour l'intégration par parties, les deux fonctions auxiliaires doivent être de classe $\mathscr{C}^1$.*

On obtient donc en intégrant par parties :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^p(1-x)^p \mathrm{d}x &= \int_0^1 u'(x)v(x)\mathrm{d}x \\
&= \big[u(x)v(x)\big]_0^1 - \int_0^1 u(x)v'(x)\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{x^{p+1}}{p+1}(1-x)^p\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{p+1}}{p+1}\big(-p(1-x)^{p-1}\big)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1^{p+1}}{p+1}\underbrace{(1-1)^p}_{=0} - \frac{\overbrace{0^{p+1}}^{=0}}{p+1}(1-0)^p + \frac{p}{p+1}\int_0^1 x^{p+1}(1-x)^{p-1}\mathrm{d}x \quad \text{par linéarité} \\
&= \frac{p}{p+1}\int_0^1 x^{p+1}(1-x)^{p-1}\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

De même, puisque les fonctions $x \mapsto \frac{x^{p+2}}{p+2}$ et $x \mapsto (1-x)^{p-1}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$, on obtient en intégrant par parties :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^p(1-x)^p \mathrm{d}x &= \frac{p}{p+1}\int_0^1 x^{p+1}(1-x)^{p-1}\mathrm{d}x \\
&= \frac{p}{p+1}\left(\left[\frac{x^{p+2}}{p+2}(1-x)^{p-1}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{p+2}}{p+2}\big(-(p-1)(1-x)^{p-2}\big)\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{p(p-1)}{(p+1)(p+2)}\int_0^1 x^{p+2}(1-x)^{p-2}\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

En itérant ce raisonnement, on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^p(1-x)^p \mathrm{d}x &= \frac{p(p-1)(p-2)}{(p+1)(p+2)(p+3)}\int_0^1 x^{p+3}(1-x)^{p-3}\mathrm{d}x \\
&= \dots \\
&= \frac{p(p-1)(p-2)\dots(p-(p-1))}{(p+1)(p+2)(p+3)\dots(p+p)}\int_0^1 x^{p+p}(1-x)^{p-p}\mathrm{d}x \\
&= \frac{p(p-1)(p-2)\dots 1}{(p+1)(p+2)(p+3)\dots(2p)}\int_0^1 x^{2p}\mathrm{d}x \\
&= \frac{p!}{\frac{(2p)!}{p!}}\left[\frac{x^{2p+1}}{2p+1}\right]_0^1 \\
&= \frac{(p!)^2}{(2p)!}\left(\frac{1^{2p+1}}{2p+1} - \frac{0^{2p+1}}{2p+1}\right) \\
&= \frac{(p!)^2}{(2p)!(2p+1)} \\
&= \boxed{\frac{(p!)^2}{(2p+1)!}}.
\end{aligned}$$

En particulier, pour $p = 4k$ on a :

$$\int_0^1 x^{4k}(1-x)^{4k}\mathrm{d}x = \frac{\big((4k)!\big)^2}{(2(4k)+1)!} = \frac{\big((4k)!\big)^2}{(8k+1)!}.$$

En réinjectant cette expression dans le résultat de la question précédente, on en déduit bien que :

$$\boxed{\left|\pi - \int_0^1 Q_k(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{\left((4k)!\right)^2}{4^{k-1}(8k+1)!}}.$$

4. *Déterminer $Q_1$ et en déduire une approximation de $\pi$ par une fraction. On donnera une majoration de l'erreur commise.*

▶ On a par définition de $P_1$ :

$$P_1 = 4 - \frac{(-1)^1}{4^0}X^4(1-X)^4 = 4 + X^4(1-X)^4.$$

Or on a d'après la formule du binôme de Newton :

$$(1-X)^4 = 1 + 4(-X) + 6(-X)^2 + 4(-X)^3 + (-X)^4 = 1 - 4X + 6X^2 - 4X^3 + X^4.$$

Donc :

$$P_1 = 4 + X^4 - 4X^5 + 6X^6 - 4X^7 + X^8.$$

En particulier, $\deg(P_1) = 8$. D'après le résultat de la question 1, on sait que le polynôme $Q_1 \in \mathbb{R}[X]$ est tel que $P_1 = (1+X^2)Q_1$. Par conséquent :

$$8 = \deg(P_1) = \deg((1+X^2)Q_1) = \deg(1+X^2) + \deg(Q_1) = 2 + \deg(Q_1).$$

On en déduit que $\deg(Q_1) = 6$, et donc $Q_1$ est de la forme :

$$Q_1 = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 + a_4X^4 + a_5X^5 + a_6X^6$$

où $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6) \in \mathbb{R}^7$ sont les coefficients réels de $Q_1$. On a :

$$\begin{aligned}
&4 + X^4 - 4X^5 + 6X^6 - 4X^7 + X^8 \\
=&P_1 \\
=&(1+X^2)Q_1 \\
=&(1+X^2)(a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 + a_4X^4 + a_5X^5 + a_6X^6) \\
=&a_0 + a_1X + (a_0+a_2)X^2 + (a_1+a_3)X^3 + (a_2+a_4)X^4 \\
&\qquad\qquad + (a_3+a_5)X^5 + (a_4+a_6)X^6 + a_5X^7 + a_6X^8.
\end{aligned}$$

Par identification des coefficients, on en déduit que :

$$\left\{\begin{aligned} a_0 &= 4 \\ a_1 &= 0 \\ a_0 + a_2 &= 0 \\ a_1 + a_3 &= 0 \\ a_2 + a_4 &= 1 \\ a_3 + a_5 &= -4 \\ a_4 + a_6 &= 6 \\ a_5 &= -4 \\ a_6 &= 1 \end{aligned}\right. \quad \text{donc} \quad \left\{\begin{aligned} a_0 &= 4 \\ a_1 &= 0 \\ a_2 &= -4 \\ a_3 &= 0 \\ a_4 &= 5 \\ a_5 &= -4 \\ a_6 &= 1 \end{aligned}\right. .$$

Finalement :

$$\boxed{Q_1 = 4 - 4X^2 + 5X^4 - 4X^5 + X^6}.$$

D'après le résultat de la question précédente, on a pour $k = 1$ :

$$\left|\pi - \int_0^1 Q_1(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{(4!)^2}{4^0(8+1)!} = \frac{(2\times3\times4)\times(2\times3\times4)}{2\times3\times4\times5\times6\times7\times8\times9} = \frac{1}{5\times7\times2\times9} = \frac{1}{10\times63} = \frac{1}{630}.$$

De plus :

$$\begin{aligned}\int_0^1 Q_1(x)\mathrm{d}x &= \int_0^1 \left(4-4x^2+5x^4-4x^5+x^6\right)\mathrm{d}x\\ &= \left[4x-4\frac{x^3}{3}+5\frac{x^5}{5}-4\frac{x^6}{6}+\frac{x^7}{7}\right]_0^1\\ &= 4-\frac{4}{3}+1-\frac{2}{3}+\frac{1}{7}=\frac{84-28+21-14+3}{21}=\frac{66}{21}=\frac{22}{7}.\end{aligned}$$

Par conséquent, on a montré que :

$$\left|\pi-\frac{22}{7}\right|\leqslant\frac{1}{630}.$$

On en déduit que $\boxed{\frac{22}{7} \text{ est une approximation de } \pi \text{ à } \frac{1}{630} \text{ près}}$.

5. ***[Informatique]*** *On utilisera seulement le langage Python et on pourra faire appel aux fonctions des questions précédentes même si elles n'ont pas été écrites.*

   (a) *Écrire une fonction* `polyQ` *qui prend en arguments l'entier $k$ et un réel $x$ puis qui renvoie la valeur de $Q_k(x)$.*

   ▶ Par exemple :

```
def polyQ(k,x):
    P=4-((-1)**k)/(4**(k-1))*(x**(4*k))*((1-x)**(4*k))
    return P/(1+x**2)
```

   (b) *Écrire une fonction* `sommeRiemann` *qui prend en arguments l'entier $k$ et un entier $n \geqslant 1$, puis qui renvoie la valeur de la $n$-ième somme de Riemann à gauche de la fonction $x \mapsto Q_k(x)$ sur $[0,1]$.*

   ▶ Par exemple :

```
def sommeRiemann(k,n):
    S=0
    for i in range(n):
        S=S+polyQ(k,i/n)
    return S/n
```

## Exercice 2

*On considère la fonction suivante :*

$$f : x \mapsto \frac{x}{\ln(\sin(x)+1)}.$$

*Calculer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction $f$. Puis justifier que $f$ est prolongeable par continuité en 0 et que la courbe représentative de son prolongement par continuité en 0, qu'on notera encore $f$, admet une tangente au point d'abscisse 0. Enfin, étudier la position relative de cette tangente par rapport à la courbe représentative de $f$ au voisinage du point d'abscisse 0.*

▶

*Puisque $\ln(\sin(x)+1) \sim \sin(x) \sim x$ quand $x \to 0$, le* DL *du dénominateur peut se factoriser par un facteur $x$ qui va se simplifier avec le numérateur. Cette simplification fait perdre un ordre au* DL *du dénominateur. Pour obtenir un* DL *final d'ordre 3, il faut donc commencer avec un* DL *à l'ordre 4.*

On a d'après les développements limités usuels :

$$\sin(x)=x-\frac{x^3}{6}+\underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^4\right) \quad \text{et} \quad \ln(1+h)=h-\frac{h^2}{2}+\frac{h^3}{3}-\frac{h^4}{4}+\underset{h\to 0}{\mathrm{o}}\left(h^4\right).$$

Puisque $h = \sin(x)$ tend vers 0 quand $x \to 0$, on obtient par composition de développements limités :

$$\begin{aligned}
\ln(1+\sin(x)) &= \left(x - \frac{x^3}{6}\right) - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^3 - \frac{1}{4}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^4 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^4\right) \\
&= \left(x - \frac{x^3}{6}\right) - \frac{1}{2}\left(x^2 - 2\frac{x^4}{6}\right) + \frac{1}{3}\left(x^3\right) - \frac{1}{4}\left(x^4\right) + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^4\right) \\
&= x - \frac{x^2}{2} + \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\right)x^3 + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{4}\right)x^4 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^4\right) \\
&= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^4\right).
\end{aligned}$$

Donc :

$$f(x) = \frac{x}{\ln(\sin(x)+1)} = \frac{x}{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^4\right)} = \frac{1}{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} - \frac{x^3}{12} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^3\right)} = \frac{1}{1+h}$$

en posant $h = -\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} - \frac{x^3}{12} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^3\right)$ qui tend vers 0 quand $x \to 0$. Or on a l'équivalent usuel :

$$\frac{1}{1+h} = 1 - h + h^2 - h^3 + \underset{h\to 0}{\mathrm{o}}\left(h^3\right).$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
f(x) &= 1 - \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} - \frac{x^3}{12}\right) + \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} - \frac{x^3}{12}\right)^2 - \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} - \frac{x^3}{12}\right)^3 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^3\right) \\
&= 1 - \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} - \frac{x^3}{12}\right) + \left(\frac{x^2}{4} - 2\frac{x^3}{12}\right) - \left(-\frac{x^3}{8}\right) + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^3\right) \\
&= 1 + \frac{x}{2} + \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{4}\right)x^2 + \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{6} + \frac{1}{8}\right)x^3 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^3\right) \\
&= \boxed{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + \frac{x^3}{24} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^3\right)}.
\end{aligned}$$

En particulier, $f$ admet le développement limité à l'ordre 0 en 0 suivant :

$$f(x) = 1 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(1).$$

Donc $\boxed{f \text{ est prolongeable par continuité en 0 en posant } f(0) = 1}$. De même, $f$ admet le développement limité à l'ordre 1 en 0 suivant :

$$f(x) = 1 + \frac{x}{2} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x).$$

Donc le prolongement par continuité de $f$ en 0 est dérivable en 0 (avec $f'(0) = \frac{1}{2}$) et $\boxed{\text{la courbe représentative de } f \text{ admet une tangente au point d'abscisse 0 d'équation } y = 1 + \frac{x}{2}}$. De plus :

$$f(x) - \left(1 + \frac{x}{2}\right) = \frac{x^2}{12} + \frac{x^3}{24} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^3\right) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{12} \geqslant 0.$$

On en déduit que $\boxed{\text{la tangente d'équation } y = 1 + \frac{x}{2} \text{ est en-dessous de la courbe représentative de } f \text{ au voisinage du point d'abscisse 0}}$.

## Problème 2

*Dans tout ce problème, on fixe $n \in \mathbb{N}$ et on considère une urne contenant des boules sur chacune desquelles est inscrit un numéro de 0 à $n$, de telle façon que chaque numéro $k$ est inscrit sur exactement $\binom{n}{k}$ boules. On pioche simultanément $p$ boules et on note $S$ la somme des numéros inscrits sur les boules piochées.*

1. ***[Questions préliminaires]***

   (a) *Quel est le nombre total de boules dans l'urne ?*

   ▶ D'après l'énoncé, le nombre total de boules dans l'urne est égal à :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k1^{n-k}=(1+1)^n=\boxed{2^n}\quad\text{d'après la formule du binôme de Newton.}$$

   (b) *Montrer que $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}=n2^{n-1}$ (on pourra distinguer le cas $n=0$).*

   ▶ <u>$1^{\text{er}}$ cas : $n=0$</u>. Alors :

$$\sum_{k=0}^{0}k\binom{0}{k}=0\binom{0}{0}=0\quad\text{et}\quad 0\times 2^{0-1}=0.$$

   <u>$2^{\text{e}}$ cas : $n\neq 0$</u>. Alors :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}&=0\binom{n}{0}+\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}&&\text{par associativité}\\&=0+\sum_{k=1}^{n}k\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}&&\text{d'après la formule du pion car } n\geqslant 1 \text{ et } k\geqslant 1\\&=n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}&&\text{par linéarité}\\&=n\sum_{\ell=0}^{n-1}\binom{n-1}{\ell}&&\text{à l'aide du décalage d'indice } \ell=k-1\\&=n\sum_{\ell=0}^{n-1}\binom{n-1}{\ell}1^{\ell}1^{n-\ell}\\&=n(1+1)^{n-1}&&\text{d'apès la formule du binôme de Newton (car } n-1\geqslant 0)\\&=n2^{n-1}.\end{aligned}$$

   <u>Conclusion</u>. Dans tous les cas, on a bien montré que :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}=n2^{n-1}}.$$

2. ***[Informatique]*** *On utilisera seulement le langage Python et on pourra faire appel aux fonctions des questions précédentes même si elles n'ont pas été écrites.*

   (a) *Écrire des fonctions `fact(k)` et `binom(k,n)` qui renvoient les valeurs de $k!$ et $\binom{n}{k}$ respectivement.*

   ▶ Par exemple :

```
def fact(k):
    f=1
    for i in range(1,k+1):
        f=f*i
    return f
def binom(k,n):
    coeff=fact(n)/(fact(k)*fact(n-k))
    return int(coeff)
```

(b) *Écrire une fonction* `urne` *qui prend en argument l'entier $n$ et qui renvoie une liste des numéros inscrits sur les boules dans l'urne. Par exemple,* `urne(3)` *renvoie* `[0,1,1,1,2,2,2,3]`.

▶ Par exemple :

```
def urne(n):
    L=[]
    for k in range(n+1):
        for i in range(binom(k,n)):
            L=L+[k]
    return L
```

(c) *Écrire une fonction* `tirage` *qui prend en arguments les entiers $n$ et $p$ puis qui simule l'expérience et renvoie une liste des numéros inscrits sur les boules piochées. On rappelle que la fonction* `random.randint(a,b)` *de la bibliothèque* `random` *renvoie un entier choisi au hasard entre* `a` *et* `b` *compris, et que l'instruction* `L.remove(a)` *enlève une fois la valeur* `a` *de la liste* `L`.

▶ Par exemple :

```
import random as rd
def tirage(n,p):
    Lurne=urne(n)
    Lpioche=[]
    for i in range(p):
        hasard=rd.randint(0,len(Lurne)-1)
        boule=Lurne[hasard]
        Lurne.remove(boule)
        Lpioche=Lpioche+[boule]
    return Lpioche
```

(d) *Écrire une fonction* `simul` *qui prend en arguments les entiers $n$ et $p$ ainsi qu'un entier* `nbSimul`*, puis qui renvoie la moyenne statistique de $S$ après avoir simulé* `nbSimul` *fois l'expérience.*

▶ Par exemple :

```
def simul(n,p,nbSimul):
    moyenne=0
    for i in range(nbSimul):
        L=tirage(n,p)
        S=0
        for j in range(p):
            S=S+L[j]
        moyenne=moyenne+S
    moyenne=moyenne/nbSimul
    return moyenne
```

3. ***[Cas particuliers]*** *En reconnaissant des lois usuelles, déterminer l'espérance et la variance de $S$ dans les deux cas suivants :*

   (a) $p = 1$,

   ▶ Le cas $p = 1$ correspond au cas où on pioche qu'une seule boule et donc $S$ est égale au numéro inscrit sur la seule boule piochée. Puisque chaque boule est équiprobable, on a d'après la probabilité uniforme :

$$\mathrm{P}(S=k) = \frac{\text{nb de boules sur lesquelles est inscrit le numéro } k}{\text{nb total de boules}} = \frac{\binom{n}{k}}{2^n} = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(1-\frac{1}{2}\right)^{n-k}.$$

   On reconnaît une loi binomiale : $\boxed{S \hookrightarrow \mathscr{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)}$.

*Lisez attentivement l'énoncé : n'oubliez pas de reconnaître une loi usuelle comme demandé !*

On en déduit que :

$$\mathrm{E}(S) = n \times \frac{1}{2} = \boxed{\frac{n}{2}} \quad \text{et} \quad \mathrm{V}(S) = n \times \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \boxed{\frac{n}{4}}.$$

*(b) $p = 2^n$.*

▶ Le cas $p = 2^n$ correspond au cas où on pioche toutes les boules et donc $S$ est égale à la somme de tous les numéros inscrits sur les boules dans l'urne :

$$\begin{aligned} S =& 0 \times (\text{nb de boules sur lesquelles est inscrit le numéro } 0) \\ & + 1 \times (\text{nb de boules sur lesquelles est inscrit le numéro } 1) \\ & + 2 \times (\text{nb de boules sur lesquelles est inscrit le numéro } 2) \\ & \dots \\ & + n \times (\text{nb de boules sur lesquelles est inscrit le numéro } n) \\ =& \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} \\ =& n2^{n-1} \quad \text{d'après le résultat de la question 1(b).} \end{aligned}$$

On reconnaît une loi certaine : $\boxed{S \hookrightarrow n2^{n-1}}$. On en déduit que :

$$\mathrm{E}(S) = \boxed{n2^{n-1}} \quad \text{et} \quad \mathrm{V}(S) = \boxed{0}.$$

*Dans la suite du problème, on suppose que $1 < p < 2^n$ et on propose de démontrer que $\mathrm{E}(S) = \frac{np}{2}$ par deux méthodes différentes.*

4. ***[1re méthode]*** *On note $X_k$ le nombre de boules piochées sur lesquelles est inscrit le numéro $k$.*

   *(a) Quelle est la loi de $X_k$ ? On précisera les paramètres.*

   ▶ $X_k$ est égale au nombre de succès (piocher une boule sur laquelle est inscrit le numéro $k$) d'un tirage sans remise de $p$ boules parmi $2^n$. On reconnaît une loi hypergéométrique. D'après la probabilité uniforme, la probabilité de succès au 1er tirage est égale à :

$$\frac{\text{nb de boules sur lesquelles est inscrit le numéro } k}{\text{nb total de boules}} = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}.$$

   Par conséquent :

$$\boxed{X_k \hookrightarrow \mathscr{H}\left(2^n, p, \frac{\binom{n}{k}}{2^n}\right)}.$$

   *(b) À l'aide d'une somme, exprimer $S$ en fonction des variables aléatoires $X_k$.*

   ▶ En raisonnant comme à la question 3(b), on a :

$$\begin{aligned} S =& 0 \times (\text{nb de boules piochées sur lesquelles est inscrit le numéro } 0) \\ & + 1 \times (\text{nb de boules piochées sur lesquelles est inscrit le numéro } 1) \\ & + 2 \times (\text{nb de boules piochées sur lesquelles est inscrit le numéro } 2) \\ & \dots \\ & + n \times (\text{nb de boules piochées sur lesquelles est inscrit le numéro } n) \\ =& \boxed{\sum_{k=0}^{n} kX_k}. \end{aligned}$$

(c) *Conclure.*

▶ D'après le résultat de la question 4(a), on a :

$$\mathrm{E}(X_k) = p \times \frac{\binom{n}{k}}{2^n} = \frac{p}{2^n}\binom{n}{k}.$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(S) &= \mathrm{E}\left(\sum_{k=0}^{n} kX_k\right) \quad \text{d'après le résultat de la question précédente} \\
&= \sum_{k=0}^{n} k\mathrm{E}(X_k) \quad \text{par linéarité de l'espérance} \\
&= \sum_{k=0}^{n} k\frac{p}{2^n}\binom{n}{k} \quad \text{d'après le résultat de la question 4(a)} \\
&= \frac{p}{2^n}\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} \quad \text{par linéarité} \\
&= \frac{p}{2^n}n2^{n-1} \quad \text{d'après le résultat de la question 1(b)} \\
&= \boxed{\frac{np}{2}}.
\end{aligned}$$

5. ***[2^e^ méthode]*** *Pour chaque numéro $i \in \{0,1,2,\dots,n\}$, on numérote les boules sur lesquelles est inscrit le numéro $i$ et on note $B_{i,j}$ la $j$-ième de ces boules. Ainsi $j \in \{1,2,3,\dots,\binom{n}{i}\}$. On note $Y_{i,j}$ la variable aléatoire égale à 1 si $B_{i,j}$ a été piochée et égale à 0 sinon.*

(a) *Quelle est la loi de $Y_{i,j}$ ? On précisera les paramètres.*

▶ $Y_{i,j}$ est égale à 0 ou 1. On reconnaît une loi de Bernoulli. Puisque chaque boule est équiprobable, on a d'après la probabilité uniforme :

$$\mathrm{P}(Y_{i,j}=1) = \mathrm{P}\left(\text{piocher la boule } B_{i,j}\right) = \frac{\text{nb de boules piochées}}{\text{nb total de boules}} = \frac{p}{2^n}.$$

Par conséquent :

$$\boxed{Y_{i,j} \hookrightarrow \mathscr{B}\left(\frac{p}{2^n}\right)}.$$

(b) *À l'aide d'une somme double, exprimer $S$ en fonction des variables aléatoires $Y_{i,j}$.*

▶ En raisonnant comme à la question 4(b), on a :

$$S = \boxed{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=1}^{\binom{n}{i}} iY_{i,j}}.$$

*(c) Conclure.*

▶ On a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(S) &= \mathrm{E}\left(\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=1}^{\binom{n}{i}} iY_{i,j}\right) \quad \text{d'après le résultat de la question précédente}\\
&= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=1}^{\binom{n}{i}} i\mathrm{E}(Y_{i,j}) \quad \text{par linéarité de l'espérance}\\
&= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=1}^{\binom{n}{i}} i\frac{p}{2^n} \quad \text{d'après le résultat de la question 5(a)}\\
&= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} i\frac{p}{2^n}\\
&= \frac{p}{2^n}\sum_{i=0}^{n} i\binom{n}{i} \quad \text{par linéarité}\\
&= \frac{p}{2^n}n2^{n-1} \quad \text{d'après le résultat de la question 1(b)}\\
&= \boxed{\frac{np}{2}}.
\end{aligned}$$