Sujets et corrigés des DS
de mathématiques et d'informatique

BCPST1A lycée Hoche 2021-2022

Sébastien Godillon

Table des matières

DS n$^{\mathrm{o}}$ 1 de mathématiques

durée : 3 heures

Exercice 1

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2+3}{x+1}$. Déterminer les ensembles suivants :

$$\mathscr{E}_1 = \left\{ f(x) \;\middle|\; x \in]-5,-2[\right\} \quad \text{et} \quad \mathscr{E}_2 = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; f(x) \in [3,4[\right\}.$$

Problème 1

On considère les deux ensembles suivants :

$$E = \left\{ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; a+b=1 \right\} \quad \text{et} \quad F = \left\{ |a|+|b| \;\middle|\; (a,b) \in E \right\}.$$

Le but de ce problème est de déterminer l'ensemble F.

1. Montrer que $1 \in F$ et que $0 \notin F$.
2. Montrer que $2 \in F$ et que $\frac{1}{2} \notin F$.
3. Trouver un autre exemple d'élément appartenant à F et justifier votre réponse.
4. Justifier que F est minoré.
5. (a) Soit un réel $x \geqslant 1$. Trouver un couple $(a,b) \in E$ tel que $a \leqslant 0 \leqslant b$ et $x = |a|+|b|$.
   (b) En déduire qu'un intervalle de $\mathbb{R}$ à déterminer est inclus dans F.
   (c) F est-il majoré ? Justifier.
6. (a) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Prouver l'implication : $|a|+|b| < 1 \implies a+b<1$.
   (b) En déduire que $F \subset [1,+\infty[$.
7. Conclure.

Exercice 2

Déterminer la partie entière du réel $\alpha = \sqrt{11} + 2\sqrt{5}$ en justifiant votre réponse.

Exercice 3

Résoudre les équations et les inéquations suivantes d'inconnue x réelle.

(E_1) $\ln\big(2x+3\big) = 2\ln(x) + \ln(3)$

(E_2) $\big|x^2+6x+5\big| \leqslant x+5$

(E_3) $\Big\lfloor 2x - \sqrt{3x-5} \Big\rfloor = 4$

(E_4) $\dfrac{x^2-2x+m}{x-1} < m$ en fonction du paramètre $m \in \mathbb{R}$

(E_5) $x^2 + 2m(x+1) = 3$ en fonction du paramètre $m \in \mathbb{R}$

Problème 2

On considère les deux réels suivants :

$$\mu = \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad \nu = \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}.$$

Le but de ce problème est de simplifier les expressions de μ et ν.

1. (a) Calculer $\mu\nu$ et $\mu^3+\nu^3$.
   (b) Développer $(\mu+\nu)^3$.
2. On pose $\lambda = \mu+\nu$ et $P(x) = x^3+3x-14$ pour tout réel x.
   (a) Déduire des questions précédentes que $P(\lambda) = 0$.
   (b) Vérifier que $P(2) = 0$ (on dit que 2 est racine évidente) puis trouver trois réels a, b et c tels que :
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = (x-2)\big(ax^2+bx+c\big).$$
   (c) Résoudre l'équation $P(x) = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ et en déduire la valeur de λ.
3. On pose $Q(x) = (x-\mu)(x-\nu)$ pour tout réel x.
   (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Simplifier l'expression de $Q(x)$ à l'aide des résultats précédents.
   (b) En déduire que μ et ν sont solutions de l'équation $x^2-2x-1 = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
4. Conclure.

Exercice 4

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 0,\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n.$$

Montrer qu'il existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_n = a \times b^n + c^n$.

Corrigé du DS n° 1 de mathématiques

Exercice 1

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2+3}{x+1}$. Déterminer les ensembles suivants :

$$\mathscr{E}_1 = \{f(x) \mid x \in]-5,-2[\} \quad \textit{et} \quad \mathscr{E}_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in [3,4[\}.$$

► La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ comme quotient de fonctions polynomiales dont le dénominateur ne s'annule pas. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \quad f'(x) = \frac{2x(x+1) - (x^2+3) \times 1}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}.$$

On reconnaît au numérateur un polynôme du second degré de discriminant $\Delta = 2^2 - 4 \times (-3) = 16 > 0$. Donc le numérateur s'annule en $(-2+\sqrt{16})/2 = 1$ et en $(-2-\sqrt{16})/2 = -3$. De plus, il est strictement négatif sur $]-3,1[$ et strictement positif sur $]-\infty,-3[\cup]1,+\infty[$. Puisque $(x+1)^2 > 0$ pour tout $x \neq -1$, on en déduit le tableau des variations de f.

x	$-\infty$	-5		-3		-2		-1	$2-\sqrt{5}$	0	1	3	$2+\sqrt{5}$	$+\infty$
$f'(x)$			$+$	0	$-$			‖	$-$		0	$+$		
$f(x)$	$-\infty$ ↗	-7	↗	-6	↘	-7	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘ 4	↘ 3	↘ 2	↗ 3	↗ 4	↗ $+\infty$

car :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x+\frac{3}{x}}{1+\frac{1}{x}} = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+\frac{3}{x}}{1+\frac{1}{x}} = +\infty$$

$$f(-3) = \frac{(-3)^2+3}{-3+1} = \frac{12}{-2} = -6 \qquad f(1) = \frac{1^2+3}{1+1} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\lim_{x\to-1^-} f(x) = \lim_{x\to-1^-} \frac{x^2+3}{x+1} = -\infty \qquad \lim_{x\to-1^+} f(x) = \lim_{x\to-1^+} \frac{x^2+3}{x+1} = +\infty$$

On a $f(-5) = \dfrac{(-5)^2+3}{-5+1} = \dfrac{28}{-4} = -7$ et $f(-2) = \dfrac{(-2)^2+3}{-2+1} = \dfrac{7}{-1} = -7$. On déduit du tableau des variations de f que :

$$\mathscr{E}_1 = \{f(x) \mid x \in]-5,-2[\} = \boxed{]-7,-6]}.$$

Soyez précis avec les bornes des intervalles : -7 est exclus car $]-5,-2[$ est un intervalle ouvert mais -6 est inclus car $-3 \in]-5,-2[$.

Pour déterminer $\mathscr{E}_2$, on résout les deux équations suivantes :

- $f(x) = 3 \iff \dfrac{x^2+3}{x+1} = 3 \iff x^2+3 = 3(x+1) \iff x(x-3) = 0 \iff (x = 0 \text{ ou } x = 3)$.

- $f(x) = 4 \iff \dfrac{x^2+3}{x+1} = 4 \iff x^2+3 = 4(x+1) \iff x^2-4x-1=0.$
  On obtient une équation du second degré de discriminant $\Delta = (-4)^2 - 4 \times (-1) = 20 > 0$ qui admet pour solutions $x = (4+\sqrt{20})/2 = (4+2\sqrt{5})/2 = 2+\sqrt{5}$ et $x = 2-\sqrt{5}$.

On déduit du tableau des variations de f que :

$$\mathscr{E}_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in [3,4[\} = \boxed{\left]2-\sqrt{5}, 0\right] \cup \left[3, 2+\sqrt{5}\right[}.$$

Problème 1

On considère les deux ensembles suivants :

$$E = \left\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; a+b=1\right\} \quad \textit{et} \quad F = \left\{|a|+|b| \;\middle|\; (a,b) \in E\right\}.$$

Le but de ce problème est de déterminer l'ensemble F.

1. *Montrer que $1 \in F$ et que $0 \notin F$.*

   ▶ On a $(1,0) \in E$ car $1+0=1$, donc $\boxed{1 = |1|+|0| \in F}$.

   N'importe quel autre exemple de couple $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ et $a+b=1$ permet de conclure que $1 \in F$. Par exemple $(0,1)$ ou $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ou $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$.

   Par l'absurde, on suppose que $0 \in F$. Par définition de F, on sait qu'il existe un couple $(a,b) \in E$ tel que $0 = |a|+|b|$. Puisque $|a|+|b|$ est une somme de deux valeurs absolues positives, on en déduit que $|a|=|b|=0$ et donc que $a=b=0$. Ainsi $a+b=0$ ce qui est absurde car $(a,b) \in E$. Par conséquent, $\boxed{0 \notin F}$.

2. *Montrer que $2 \in F$ et que $\frac{1}{2} \notin F$.*

   ▶ Pour montrer que $2 \in F$, on cherche un couple $(a,b) \in E$ tel que $|a|+|b|=2$. On raisonne par analyse-synthèse.
   Analyse. On veut que $(a,b) \in E$, donc que $a+b=1$ et que $|a|+|b|=2$. C'est absurde si a et b sont positifs (car $a+b=|a|+|b|$ dans ce cas). Si a est positif et b est négatif, on a :

   $$|a|+|b| = a+(-b) = a-b.$$

   On veut donc que $a+b=1$ et $a-b=2$. On résout ces deux équations par substitution. La première donne $b=1-a$ et on reporte cette expression dans la deuxième :

   $$a-b=2 \iff a-(1-a)=2 \iff 2a-1=2 \iff a=\frac{3}{2}.$$

   De plus, si $a=\frac{3}{2}$ alors $b=1-a=1-\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}$.
   Synthèse. On pose $(a,b)=(\frac{3}{2},-\frac{1}{2})$. On vérifie bien que $(\frac{3}{2},-\frac{1}{2}) \in E$ car $a+b=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=1$. De plus, $|a|+|b| = \left|\frac{3}{2}\right| + \left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{3}{2}+\frac{1}{2} = 2$ donc $\boxed{2 \in F}$.

   Bien sûr, le couple $(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ permet aussi de conclure.

   Par l'absurde, on suppose que $\frac{1}{2} \in F$. Par définition de F, on sait qu'il existe un couple $(a,b) \in E$ tel que $\frac{1}{2} = |a|+|b|$. Puisque $(a,b) \in E$, on sait aussi que $a+b=1$. D'après l'inégalité triangulaire, on en déduit que :

   $$|\underbrace{a+b}_{=1}| \leqslant \underbrace{|a|+|b|}_{=1/2} \quad \text{donc } 1 \leqslant \tfrac{1}{2} \text{ ce qui est absurde.}$$

   Par conséquent, $\boxed{\frac{1}{2} \notin F}$.

3. *Trouver un autre exemple d'élément appartenant à F et justifier votre réponse.*

▶ On a $(3,-2) \in E$ car $3+(-2)=1$, donc $\boxed{5 = |3| + |-2| \in F}$.

Attention de ne pas prendre un exemple de couple $(a,b) \in E$ avec a et b positifs, sinon on retrouve que $|a|+|b| = a+b = 1$ est un élément de F.

4. *Justifier que F est minoré.*

▶ Pour tout couple $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on a $|a|+|b| \geqslant 0$ car les valeurs absolues sont positives. On en déduit que 0 est un minorant de F. Par conséquent, $\boxed{F \text{ est minoré}}$.

5. (a) *Soit un réel $x \geqslant 1$. Trouver un couple $(a,b) \in E$ tel que $a \leqslant 0 \leqslant b$ et $x = |a|+|b|$.*

▶ On raisonne par analyse-synthèse.

Analyse. On cherche un couple $(a,b) \in E$ tel que $a \leqslant 0$, $b \geqslant 0$ et $x = |a|+|b|$. On a : $|a| = -a$ et $|b| = b$. On veut donc que $a+b=1$ (car $(a,b) \in E$) et $x = -a+b$. On résout ces deux équations par substitution. La première donne $b = 1-a$ et on reporte cette expression dans la deuxième :

$$-a+b = x \iff -a+(1-a) = x \iff 1-2a = x \iff a = \frac{1-x}{2}.$$

De plus, si $a = \frac{1-x}{2}$ alors $b = 1-a = 1-\frac{1-x}{2} = \frac{1+x}{2}$.

Synthèse. On pose $\boxed{(a,b) = (\frac{1-x}{2}, \frac{1+x}{2})}$. Vérifions que $(a,b) \in E$, $a \leqslant 0 \leqslant b$ et $x = |a|+|b|$. On a :

$$a+b = \frac{1-x}{2} + \frac{1+x}{2} = \frac{2}{2} = 1 \quad \text{donc} \quad (a,b) \in E.$$

On sait que $x \geqslant 1$. Donc $1-x \leqslant 0$ et $1+x \geqslant 0$. Par conséquent, $a = \frac{1-x}{2} \leqslant 0$ et $b = \frac{1+x}{2} \geqslant$. On a bien vérifié que $a \leqslant 0 \leqslant b$.

N'oubliez pas de vérifier que $a \leqslant 0 \leqslant b$. C'est la seule propriété qui ne découle par directement des calculs fait en analyse.

Enfin, puisque $a \leqslant 0$ et $b \geqslant 0$, on a :

$$|a|+|b| = -a+b = -\frac{1-x}{2} + \frac{1+x}{2} = \frac{-1+x+1+x}{2} = \frac{2x}{2} = x.$$

Finalement, le couple $\boxed{(a,b) = (\frac{1-x}{2}, \frac{1+x}{2})}$ vérifie bien toutes les conditions de l'énoncé.

(b) *En déduire qu'un intervalle de $\mathbb{R}$ à déterminer est inclus dans F.*

▶ D'après le résultat de la question précédente, on a trouvé un couple $(a,b) \in E$ tel que $x = |a|+|b|$. Par définition de F, on en déduit que $x \in F$. Et ceci est vrai pour tout réel $x \geqslant 1$. Autrement dit, on a montré que :

$$\forall x \in [1,+\infty[,\ x \in F.$$

On en déduit bien que $\boxed{[1,+\infty[\subset F}$.

(c) *F est-il majoré ? Justifier.*

▶ Par l'absurde, on suppose que F est majoré. Alors il existe un majorant $M \in \mathbb{R}$ de F. D'après le résultat de la question précédente, on en déduit que M est aussi un majorant de $[1,+\infty[$, ce qui est absurde car l'intervalle $[1,+\infty[$ n'est pas majoré. Donc $\boxed{F \text{ n'est pas majoré}}$.

6. (a) *Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Prouver l'implication : $|a|+|b| < 1 \implies a+b < 1$.*

▶ On suppose que $|a|+|b| < 1$. On a d'après l'inégalité triangulaire :

$$|a+b| \leqslant |a|+|b|.$$

On en déduit que $|a+b| < 1$ par transitivité. Or $a+b \leqslant |a+b|$ par propriété de la valeur absolue. Donc $a+b < 1$ par transitivité. Finalement, on a bien montré que :

$$\boxed{|a|+|b| < 1 \implies a+b < 1.}$$

L'inégalité triangulaire permet d'aller beaucoup plus vite qu'une preuve par disjonction de cas. Pensez à utiliser votre cours pour gagner du temps.

(b) *En déduire que $F \subset [1, +\infty[$.*

▶ On fixe $x \in F$. Par définition de F, on sait qu'il existe un couple $(a, b) \in E$ tel que $x = |a| + |b|$. Puisque $(a, b) \in E$, on sait que $a + b = 1$. Or on a montré à la question précédente que :

$$|a| + |b| < 1 \implies a + b < 1.$$

Par contraposition, on a donc :

$$a + b \geqslant 1 \implies |a| + |b| \geqslant 1.$$

Puisque $a + b = 1$, on a en particulier que $a + b \geqslant 1$. Par conséquent, $x = |a| + |b| \geqslant 1$. Ainsi, on a montré que :

$$\forall x \in F, \ x \in [1, +\infty[.$$

On en déduit bien que $\boxed{F \subset [1, +\infty[}$.

7. *Conclure.*

▶ D'après les résultats des questions 5(b) et 6(b), on a montré par double inclusion que :

$$\boxed{F = [1, +\infty[}.$$

Exercice 2

Déterminer la partie entière du réel $\alpha = \sqrt{11} + 2\sqrt{5}$ en justifiant votre réponse.

▶ Par définition de la partie entière, on cherche l'entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leqslant \alpha < n + 1$. On raisonne par analyse-synthèse.

Trouver les parties entières de $\sqrt{11}$ et $\sqrt{5}$ ne suffit pas. En effet, on a :

$$\left\lfloor \sqrt{11} \right\rfloor \leqslant \sqrt{11} < \left\lfloor \sqrt{11} \right\rfloor + 1 \quad \text{et} \quad \left\lfloor \sqrt{5} \right\rfloor \leqslant \sqrt{5} < \left\lfloor \sqrt{5} \right\rfloor + 1$$

$$\text{donc} \quad \underbrace{\left\lfloor \sqrt{11} \right\rfloor + 2\left\lfloor \sqrt{5} \right\rfloor}_{=n} \leqslant \underbrace{\sqrt{11} + 2\sqrt{5}}_{=\alpha} < \underbrace{\left\lfloor \sqrt{11} \right\rfloor + 1 + 2\left\lfloor \sqrt{5} \right\rfloor + 2}_{=n+3 \neq n+1}.$$

Il faut donc chercher des encadrements de la forme :

$$n_1 \leqslant \sqrt{11} < n_1 + \varepsilon_1 \quad \text{et} \quad n_2 \leqslant \sqrt{5} < n_2 + \varepsilon_2$$

tels que $n_1 + 2n_2 = n$ et $n_1 + \varepsilon_1 + 2n_2 + 2\varepsilon_2 = n + 1$. Puisqu'on veut $\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 = 1$, il suffit par exemple de chercher des encadrements tels que $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{1}{3}$.

<u>Analyse</u>. On cherche un encadrement de $\sqrt{11}$ de la forme :

$$n_1 \leqslant \sqrt{11} < n_1 + \frac{1}{3} \quad \text{donc} \quad 3n_1 \leqslant 3\sqrt{11} < 3n_1 + 1.$$

Puisque la fonction carrée est strictement croissante sur $[0, +\infty[$, on veut que :

$$(3n_1)^2 \leqslant \underbrace{\left(3\sqrt{11}\right)^2}_{=9\times 11=99} < (3n_1 + 1)^2.$$

Or $9^2 = 81 < 99 < 100 = 10^2$. Il suffit donc de prendre $3n_1 = 9$, c'est-à-dire $n_1 = 3$. De même, on cherche un encadrement de $\sqrt{5}$ de la forme :

$$n_2 \leqslant \sqrt{5} < n_2 + \frac{1}{3} \quad \text{donc} \quad 3n_2 \leqslant 3\sqrt{5} < 3n_2 + 1 \quad \text{donc} \quad (3n_2)^2 \leqslant \underbrace{\left(3\sqrt{5}\right)^2}_{=9\times 5=45} < (3n_2+1)^2.$$

Or $6^2 = 36 < 45 < 49 = 7^2$. Il suffit donc de prendre $3n_2 = 6$, c'est-à-dire $n_2 = 2$.
Synthèse. Puisque $81 < 99 < 100$, on a d'après la stricte croissance de la fonction racine carrée :

$$9 < 3\sqrt{11} < 10 \quad \text{donc} \quad 3 < \sqrt{11} < \frac{10}{3} = 3 + \frac{1}{3}.$$

De même, puisque $36 < 45 < 49$, on a :

$$6 < 3\sqrt{5} < 7 \quad \text{donc} \quad 2 < \sqrt{5} < \frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3}.$$

Par conséquent :

$$\underbrace{3 + 2\times 2}_{=7} < \sqrt{11} + 2\sqrt{5} < \underbrace{\left(3 + \frac{1}{3}\right) + 2 \times \left(2 + \frac{1}{3}\right)}_{=7+1=8}.$$

Ainsi, on a montré que $7 \leqslant \alpha < 8$. On en déduit que $\boxed{\lfloor \alpha \rfloor = 7}$.

Exercice 3

Résoudre les équations et les inéquations suivantes d'inconnue x réelle.

(E_1) $\ln\left(2x+3\right) = 2\ln(x) + \ln(3)$

▶ Puisque la fonction ln est définie sur $]0, +\infty[$, l'équation (E_1) est bien définie pour :

$$\left(2x + 3 > 0 \iff x > -\frac{3}{2}\right) \quad \text{et} \quad x > 0$$

donc pour $x \in]0, +\infty[$. On a :

$$\begin{aligned} (E_1) &\iff \ln\left(2x+3\right) = 2\ln(x) + \ln(3) \\ &\iff \ln\left(2x+3\right) = \ln\left(x^2 \times 3\right) \quad \text{d'après les propriétés de la fonction ln} \\ &\iff 2x + 3 = 3x^2 \quad \text{en passant à la fonction exp} \\ &\iff 3x^2 - 2x - 3 = 0. \end{aligned}$$

On reconnaît une équation du second degré de discriminant $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 3 \times (-3) = 40 > 0$ qui admet pour solutions $x = (2+\sqrt{40})/6 = (2+2\sqrt{10})/6 = (1+\sqrt{10})/3$ et $x = (1-\sqrt{10})/3$. Or $\sqrt{10} > 1$ (car $10 > 1$ et la fonction racine carrée est strictement croissante), donc $(1-\sqrt{10})/3 \notin]0, +\infty[$. Finalement, l'unique solution de (E_1) est :

$$(E_1) \iff x = \boxed{\frac{1+\sqrt{10}}{3}}.$$

(E_2) $\left|x^2 + 6x + 5\right| \leqslant x + 5$

▶ L'inéquation (E_2) est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$. À gauche de l'inéquation, on reconnaît la valeur absolue d'un polynôme du second degré de discriminant $\Delta = 6^2 - 4 \times 1 \times 5 = 16 > 0$ qui admet pour racines $x_1 = (-6+\sqrt{16})/2 = -1$ et $x_2 = (-6-\sqrt{16})/2 = -5$. On obtient donc le tableau des signes suivant :

x	$-\infty$		-5		-1		$+\infty$
x^2+6x+5		$+$	0	$-$	0	$+$	

On raisonne par disjonction de cas.

- 1^er^ cas : $x \in]-\infty,-5] \cup [-1,+\infty[$. Alors $x^2+6x+5 \geqslant 0$, donc $|x^2+6x+5| = x^2+6x+5$. Par conséquent :

$$\begin{aligned}(E_2) &\iff x^2+6x+5 \leqslant x+5\\ &\iff x^2+5x \leqslant 0\\ &\iff x(x+5) \leqslant 0\end{aligned}$$

On a le tableau des signes suivant :

x	$-\infty$		-5		-1		0		$+\infty$
$x+5$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x(x+5)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	

On en déduit que dans le cas où $x \in]-\infty,-5] \cup [-1,+\infty[$:

$$(E_2) \iff x \in \{-5\} \cup [-1,0].$$

- 2^e^ cas : $x \in [-5,-1]$. Alors $x^2+6x+5 \leqslant 0$, donc $|x^2+6x+5| = -(x^2+6x+5)$. Par conséquent :

$$\begin{aligned}(E_2) &\iff -(x^2+6x+5) \leqslant x+5\\ &\iff x^2+7x+10 \geqslant 0.\end{aligned}$$

On reconnaît un polynôme du second degré de discriminant $\Delta = 7^2 - 4\times 1\times 10 = 9 > 0$ qui admet pour racines $(-7+\sqrt{9})/2 = -2$ et $(-7-\sqrt{9})/2 = -5$. On a le tableau des signes suivant :

x	$-\infty$		-5		-2		-1		$+\infty$
$x^2+7x+10$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	

On en déduit que dans le cas où $x \in [-5,-1]$:

$$(E_2) \iff x \in \{-5\} \cup [-2,-1].$$

- Conclusion. Finalement, l'ensemble des solutions de (E_2) est :

$$\big(\{-5\}\cup[-1,0]\big) \cup \big(\{-5\}\cup[-2,-1]\big) = \boxed{\{-5\}\cup[-2,0]}.$$

(E_3) $\left\lfloor 2x - \sqrt{3x-5} \right\rfloor = 4$

► Puisque la fonction racine carrée est définie sur $[0,+\infty[$, l'équation (E_3) est bien définie pour $3x-5 \geqslant 0 \iff x \geqslant \frac{5}{3}$. D'après la définition de la partie entière, on a :

$$(E_3) \iff 4 \leqslant 2x - \sqrt{3x-5} < 5 \iff \Big(\underbrace{\sqrt{3x-5} \leqslant 2x-4}_{\text{1re inéquation}} \text{ et } \underbrace{\sqrt{3x-5} > 2x-5}_{\text{2e inéquation}}\Big).$$

Attention avant d'élever au carré pour simplifier la racine : il faut d'abord isoler la racine d'un côté de l'inéquation (sinon elle ne se simplifie pas) puis vérifier que l'autre côté de l'inéquation est positif pour pouvoir utiliser la croissance de la fonction carrée sur $[0,+\infty[$.

- 1^{re} inéquation. On a : $2x-4 \geqslant 0 \iff x \geqslant 2$. On raisonne par disjonction de cas.
  - *1^{er}cas* : $x \in [2,+\infty[$. Alors :

$$\begin{aligned}\sqrt{3x-5} \leqslant 2x-4 &\iff 3x-5 \leqslant (2x-4)^2\\ &\qquad \text{car la fonction carrée est strictement croissante sur } [0,+\infty[\\ &\iff 3x-5 \leqslant 4x^2-16x+16\\ &\iff 4x^2-19x+21 \geqslant 0.\end{aligned}$$

On reconnaît un polynôme du second degré de discriminant $\Delta = (-19)^2 - 4\times 4\times 21 = 25 > 0$

N'hésitez pas à poser vos calculs au brouillon et utiliser les identités remarquables pour gagner du temps :

$$19^2 = (20-1)^2 = 400-40+1 = 361$$

$$\text{et} \quad 4\times 4\times 21 = 16(20+1) = 320+16 = 336$$

qui admet pour racines $(19+\sqrt{25})/8 = 3$ et $(19-\sqrt{25})/8 = 7/4$. On a le tableau des signes suivant :

x	$-\infty$		$\frac{5}{3}$		$\frac{7}{4}$		2		3		$+\infty$
$4x^2-19x+21$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	

On en déduit que dans le cas où $x \in [2,+\infty[$:

$$\sqrt{3x-5} \leqslant 2x-4 \iff x \in [3,+\infty[.$$

  - *2^e cas* : $x \in \left[\frac{5}{3},2\right[$. Alors la 1^{re} inéquation n'est jamais vérifiée car $\sqrt{3x-5} \geqslant 0$ et $2x-4 < 0$.
  - *Conclusion de la 1^{re} inéquation.* On en déduit que :

$$\sqrt{3x-5} \leqslant 2x-4 \iff x \in [3,+\infty[\cup\emptyset = \boxed{[3,+\infty[}.$$

- 2^{e} inéquation. On a : $2x-5 \geqslant 0 \iff x \geqslant \frac{5}{2}$. On raisonne par disjonction de cas.
  - *1^{er}cas* : $x \in \left[\frac{5}{2},+\infty\right[$. Alors :

$$\begin{aligned}\sqrt{3x-5} > 2x-5 &\iff 3x-5 > (2x-5)^2\\ &\qquad \text{car la fonction carrée est strictement croissante sur } [0,+\infty[\\ &\iff 3x-5 > 4x^2-20x+25\\ &\iff 4x^2-23x+30 < 0.\end{aligned}$$

On reconnaît un polynôme du second degré de discriminant $\Delta = (-23)^2 - 4\times 4\times 30 = 49 > 0$ qui admet pour racines $(23+\sqrt{49})/8 = 15/4$ et $(23-\sqrt{49})/8 = 2$. On a le tableau des signes suivant :

x	$-\infty$		$\frac{5}{3}$		2		$\frac{5}{2}$		$\frac{15}{4}$		$+\infty$
$4x^2-23x+30$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	

On en déduit que dans le cas où $x \in \left[\frac{5}{2}, +\infty\right[$:

$$\sqrt{3x-5} > 2x-5 \iff x \in \left[\frac{5}{2}, \frac{15}{4}\right[.$$

— *2e cas* : $x \in \left[\frac{5}{3}, \frac{5}{2}\right[$. Alors la 2e inéquation est toujours vérifiée car $\sqrt{3x-5} \geqslant 0$ et $2x-5<0$.

— *Conclusion de la 2e inéquation.* On en déduit que :

$$\sqrt{3x-5} > 2x-5 \iff x \in \left[\frac{5}{2}, \frac{15}{4}\right[\cup \left[\frac{5}{3}, \frac{5}{2}\right[= \boxed{\left[\frac{5}{3}, \frac{15}{4}\right[}.$$

- Conclusion. Finalement, l'ensemble des solutions de (E_3) est :

$$[3, +\infty[\cap \left[\frac{5}{3}, \frac{15}{4}\right[= \boxed{\left[3, \frac{15}{4}\right[}.$$

(E_4) $\dfrac{x^2-2x+m}{x-1} < m$ *en fonction du paramètre* $m \in \mathbb{R}$

▶ L'inéquation (E_4) est bien définie pour $x-1 \neq 0 \iff x \neq 1$. On a :

$$\begin{aligned}(E_4) &\iff \frac{x^2-2x+m}{x-1} - m < 0 \\ &\iff \frac{x^2-2x+m-m(x-1)}{x-1} < 0 \\ &\iff \frac{x^2-(2+m)x+2m}{x-1} < 0.\end{aligned}$$

Au numérateur, on reconnaît un polynôme du second degré de discriminant :

$$\Delta = \big(-(2+m)\big)^2 - 4\times 1\times 2m = (m+2)^2 - 8m = m^2+4m+4-8m = m^2-4m+4 = (m-2)^2.$$

On raisonne par disjonction de cas.

- 1er cas : $\Delta = 0 \iff m = 2$. Alors :

$$(E_4) \iff \frac{x^2-4x+4}{x-1} < 0 \iff \frac{(x-2)^2}{x-1} < 0.$$

Dans ce cas, on a le tableau des signes suivant :

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$(x-2)^2$		$+$		$+$	0	$+$	
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{(x-2)^2}{x-1}$		$-$	‖	$+$	0	$+$	

On en déduit que dans le cas où $m=2$:

$$(E_4) \iff]-\infty, 1[.$$

- 2e cas : $\Delta > 0 \iff m \neq 2$. Alors le numérateur admet pour racines :

$$x_1 = \frac{2+m+\sqrt{\Delta}}{2} = \frac{2+m+|m-2|}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{2+m-|m-2|}{2}.$$

  - 1er sous-cas : $m>2$. Alors $m-2>0$ donc $|m-2| = m-2$. Par conséquent :

$$x_1 = \frac{2+m+m-2}{2} = \frac{2m}{2} = m \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{2+m-(m-2)}{2} = \frac{4}{2} = 2.$$

  Dans ce cas, on a le tableau des signes suivants :

x	$-\infty$		1		2		m		$+\infty$
$x^2-(2+m)x+2m$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$\frac{x^2-(2+m)x+2m}{x-1}$		$-$	$\parallel$	$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit que dans le cas où $m > 2$:

$$(E_4) \iff]-\infty, 1[\cup]2, m[.$$

- <u>2^e sous-cas</u> : $m < 2$. Alors $m-2 < 0$ donc $|m-2| = -(m-2) = -m+2$. Par conséquent :

$$x_1 = \frac{2+m-m+2}{2} = \frac{4}{2} = 2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{2+m-(-m+2)}{2} = \frac{2m}{2} = m.$$

La racine m peut-être situé à gauche ou à droite de 1 dans le tableau des signes.

  - <u>1^{er} sous-sous-cas</u> : $m < 1$. Dans ce cas, on a le tableau des signes suivants :

x	$-\infty$		m		1		2		$+\infty$
$x^2-(2+m)x+2m$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{x^2-(2+m)x+2m}{x-1}$		$-$	0	$+$	$\parallel$	$-$	0	$+$	

On en déduit que dans le cas où $m < 1$:

$$(E_4) \iff]-\infty, m[\cup]1, 2[.$$

  - <u>2^e sous-sous-cas</u> : $m > 1$. Dans ce cas, on a le tableau des signes suivants :

x	$-\infty$		1		m		2		$+\infty$
$x^2-(2+m)x+2m$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$\frac{x^2-(2+m)x+2m}{x-1}$		$-$	$\parallel$	$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit que dans le cas où $m \in]1, 2[$:

$$(E_4) \iff]-\infty, 1[\cup]m, 2[.$$

  - <u>3^e sous-sous-cas</u> : $m = 1$. Dans ce cas, on a le tableau des signes suivants :

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$x^2-(2+m)x+2m$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{x^2-(2+m)x+2m}{x-1}$		$-$	$\parallel$	$-$	0	$+$	

On en déduit que dans le cas où $m = 1$:

$$(E_4) \iff]-\infty, 1[\cup]1, 2[.$$

- Conclusion. Finalement, l'ensemble des solutions de (E_4) est :

$$\boxed{\left\{\begin{array}{ll}]-\infty, m[\cup]1, 2[& \text{si } m < 1 \\ ]-\infty, 1[\cup]1, 2[& \text{si } m = 1 \\ ]-\infty, 1[\cup]m, 2[& \text{si } 1 < m < 2 \\ ]-\infty, 1[& \text{si } m = 2 \\ ]-\infty, 1[\cup]2, m[& \text{si } 2 < m \end{array}\right.}.$$

La résolution de cette inéquation n'est pas si compliquée, elle demande juste une bonne organisation. N'oubliez pas de cas, de sous-cas ou de sous-sous-cas. Utilisez des tableaux de signes pour clarifier les raisonnements. N'oubliez pas la conclusion.

(E_5) $x^2 + 2m(x+1) = 3$ *en fonction du paramètre* $m \in \mathbb{R}$

▶ L'équation est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$(E_5) \iff x^2 + 2mx + (2m-3) = 0.$$

On reconnaît une équation du second degré de discriminant :

$$\Delta = (2m)^2 - 4 \times 1 \times (2m-3) = 4m^2 - 8m + 12 = 4(m^2 - 2m + 3).$$

Pensez à simplifier vos expressions. Le discrimant de $4m^2 - 8m + 12$ est beaucoup plus compliqué à calculer que celui de $m^2 - 2m + 3$ alors que ces deux expressions ont même signe.

On reconnaît un polynôme du second degré de discriminant $\Delta' = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 3 = -8 < 0$. On en déduit que $\Delta > 0$ pour toutes les valeurs de m. Par conséquent :

$$(E_5) \iff \left(\begin{array}{c} x = \dfrac{-2m + \sqrt{4(m^2 - 2m + 3)}}{2} = \boxed{-m + \sqrt{m^2 - 2m + 3}} \\ \text{ou} \quad x = \boxed{-m - \sqrt{m^2 - 2m + 3}} \end{array}\right).$$

Problème 2

On considère les deux réels suivants :

$$\mu = \sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} \quad \textit{et} \quad \nu = \sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}}.$$

Le but de ce problème est de simplifier les expressions de μ et ν.

1. (a) *Calculer $\mu\nu$ et $\mu^3 + \nu^3$.*

▶ On a d'après les propriétés de la racine cubique :

$$\begin{aligned} \mu\nu &= \left(\sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}}\right)\left(\sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}}\right) \\ &= \sqrt[3]{\left(7 + 5\sqrt{2}\right)\left(7 - 5\sqrt{2}\right)} \\ &= \sqrt[3]{7^2 - \left(5\sqrt{2}\right)^2} \\ &= \sqrt[3]{49 - 50} \\ &= \sqrt[3]{-1} \\ &= \boxed{-1} \quad (\text{car } (-1)^3 = -1). \end{aligned}$$

Et :

$$\mu^3+\nu^3=\left(\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}\right)^3+\left(\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}\right)^3=\left(7+5\sqrt{2}\right)+\left(7-5\sqrt{2}\right)=\boxed{14}.$$

(b) Développer $(\mu+\nu)^3$.

▶ On a d'après les propriétés de la puissance :

$$\begin{aligned}(\mu+\nu)^3&=(\mu+\nu)^2\times(\mu+\nu)\\&=\left(\mu^2+2\mu\nu+\nu^2\right)(\mu+\nu)\\&=\mu^3+2\mu^2\nu+\mu\nu^2+\mu^2\nu+2\mu\nu^2+\nu^3\\&=\mu^3+3\mu^2\nu+3\mu\nu^2+\nu^3.\end{aligned}$$

On apprendra bientôt à développer ce type d'expression beaucoup plus rapidement (à l'aide de la formule du binôme de Newton et du triangle de Pascal).

En utilisant les résultats de la question précédente, on peut simplifier :

$$(\mu+\nu)^3=\mu^3+\nu^3+3\mu\nu(\mu+\nu)=\boxed{14-3(\mu+\nu)}.$$

2. On pose $\lambda=\mu+\nu$ et $P(x)=x^3+3x-14$ pour tout réel x.

(a) Déduire des questions précédentes que $P(\lambda)=0$.

▶ D'après le résultat de la question précédente, on a :

$$\lambda^3=(\mu+\nu)^3=14-3(\mu+\nu)=14-3\lambda.$$

Par conséquent :

$$P(\lambda)=\lambda^3+3\lambda-14=14-3\lambda+3\lambda-14=\boxed{0}.$$

(b) Vérifier que $P(2)=0$ (on dit que 2 est racine évidente) puis trouver trois réels a, b et c tels que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad P(x)=(x-2)\left(ax^2+bx+c\right).$$

▶ On a :

$$P(2)=2^3+3\times 2-14=8+6-14=\boxed{0}.$$

Pour trouver a, b et c, on raisonne par analyse-synthèse.
<u>Analyse.</u> On cherche $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tels que pour tout réel x :

$$\begin{aligned}P(x)&=(x-2)\left(ax^2+bx+c\right)\\&=ax^3+bx^2+cx-2ax^2-2bx-2c\\&=ax^3+(b-2a)x^2+(c-2b)x-2c.\end{aligned}$$

Or on sait que :

$$P(x)=x^3+3x-14=1x^3+0x^2+3x-14.$$

Par conséquent, il suffit que :

$$\begin{cases}a=1\\b-2a=0\\c-2b=3\\-2c=-14\end{cases}\quad\text{donc}\quad\begin{cases}a=1\\b=2a=2\\c=3+2b=7\\c=7.\end{cases}$$

<u>Synthèse.</u> On pose $\boxed{(a,b,c)=(1,2,7)}$. En reprenant les calculs effectués en analyse, on vérifie bien que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad P(x)=(x-2)\left(x^2+2x+7\right).$$

(c) *Résoudre l'équation $P(x)=0$ d'inconnue $x\in\mathbb{R}$ et en déduire la valeur de λ.*

▶ On a d'après le résultat de la question précédente :

$$\begin{aligned} P(x)=0 &\iff (x-2)\big(x^2+2x+7\big)=0 \\ &\iff \big(x-2=0 \quad \text{ou} \quad x^2+2x+7=0\big) \quad \text{(par intégrité)}. \end{aligned}$$

On reconnaît une équation du second degré de discriminant $\Delta=2^2-4\times 1=-24<0$ qui n'admet donc pas de solutions. Par conséquent :

$$P(x)=0 \iff x=2.$$

Ainsi, 2 est la seule solution de l'équation $P(x)=0$. Or on a montré à la question 2(a) que λ est une solution de l'équation $P(x)=0$. On en déduit que $\boxed{\lambda=2}$.

3. *On pose $Q(x)=(x-\mu)(x-\nu)$ pour tout réel x.*

(a) *Soit $x\in\mathbb{R}$. Simplifier l'expression de $Q(x)$ à l'aide des résultats précédents.*

▶ On a :

$$\begin{aligned} Q(x) &= (x-\mu)(x-\nu) \\ &= x^2-(\underbrace{\mu+\nu}_{=\lambda=2})x+\underbrace{\mu\nu}_{=-1} \\ &= \boxed{x^2-2x-1} \quad \text{d'après les résultats des questions précédentes.} \end{aligned}$$

(b) *En déduire que μ et ν sont solutions de l'équation $x^2-2x-1=0$ d'inconnue $x\in\mathbb{R}$.*

▶ On a :

$$\begin{aligned} Q(x)=0 &\iff (x-\mu)(x-\nu)=0 \\ &\iff \big(x-\mu=0 \quad \text{ou} \quad x-\nu=0\big) \quad \text{(par intégrité)} \\ &\iff \big(x=\mu \quad \text{ou} \quad x=\nu\big). \end{aligned}$$

Ainsi, μ et ν sont les solutions de l'équation $Q(x)=0$. Puisque $Q(x)=x^2-2x-1$ d'après le résultat de la question précédente, on en déduit bien que $\boxed{\mu \text{ et } \nu \text{ sont solutions de l'équation}}$ $\boxed{x^2-2x-1=0}$.

4. *Conclure.*

▶ L'équation $x^2-2x-1=0$ est du second degré, de discriminant $\Delta=(-2)^2-4\times1\times(-1)=8>0$. Elle admet donc deux solutions :

$$x_1=\frac{2+\sqrt{8}}{2}=\frac{2+2\sqrt{2}}{2}=1+\sqrt{2} \quad \text{et} \quad x_2=1-\sqrt{2}.$$

D'après le résultat de la question précédente, on sait que $(\mu,\nu)=(x_1,x_2)$ ou bien $(\mu,\nu)=(x_2,x_1)$. Or $\mu=\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}>\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}=\nu$ et $x_1=1+\sqrt{2}>1-\sqrt{2}=x_2$. On en déduit que $(\mu,\nu)=(x_1,x_2)$. Finalement, on a montré que :

$$\boxed{\mu=\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}=1+\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad \boxed{\nu=\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}=1-\sqrt{2}}.$$

Exercice 4

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par

$$u_0=0, \quad u_1=1 \quad \textit{et} \quad \forall n\geqslant 0,\ u_{n+2}=5u_{n+1}-6u_n.$$

Montrer qu'il existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_n = a \times b^n + c^n$.

▶ On cherche $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\forall n \geqslant 0,\ u_n = a \times b^n + c^n.$$

On raisonne par analyse-synthèse.
Analyse. On veut pour $n = 0$:

$$0 = u_0 = a \times b^0 + c^0 = a + 1 \quad \text{donc} \quad a = -1.$$

De même, on veut pour $n = 1$:

$$1 = u_1 = a \times b^1 + c^1 = -b + c \quad \text{donc} \quad c = b + 1.$$

De plus, la relation de récurrence donne pour $n = 0$:

$$u_2 = 5u_1 - 6u_0 = 5 \times 1 - 6 \times 0 = 5.$$

On veut donc pour $n = 2$:

$$5 = u_2 = a \times b^2 + c^2 = -b^2 + (b+1)^2 = 2b + 1 \quad \text{donc} \quad b = 2.$$

Synthèse. On pose $\boxed{a = -1,\ b = 2 \text{ et } c = 3}$. Montrons que $u_n = a \times b^n + c^n = -2^n + 3^n$ pour tout entier $n \geqslant 0$. On raisonne par récurrence double.
Initialisation. On a :

$$-2^0 + 3^0 = -1 + 1 = 0 = u_0 \quad \text{et} \quad -2^1 + 3^1 = -2 + 3 = 1 = u_1$$

donc le résultat est vrai aux rangs $n = 0$ et $n = 1$.
Hérédité. On suppose que $u_n = -2^n + 3^n$ et $u_{n+1} = -2^{n+1} + 3^{n+1}$ pour un rang $n \geqslant 0$ fixé. Alors :

$$\begin{aligned}
u_{n+2} &= 5u_{n+1} - 6u_n \quad \text{d'après la relation de récurrence de l'énoncé} \\
&= 5\left(-2^{n+1} + 3^{n+1}\right) - 6\left(-2^n + 3^n\right) \quad \text{d'après les hypothèses de récurrence} \\
&= 5\left(-2 \times 2^n + 3 \times 3^n\right) + 6 \times 2^n - 6 \times 3^n \\
&= -10 \times 2^n + 15 \times 3^n + 6 \times 2^n - 6 \times 3^n \\
&= -4 \times 2^n + 9 \times 3^n \\
&= -2^2 \times 2^n + 3^2 \times 3^n \\
&= -2^{n+2} + 3^{n+2}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, si le résultat est vrai aux rangs n et $n+1$ alors il est vrai au rang $n+2$. Et cette implication est vraie pour tout rang $n \geqslant 0$.
Conclusion. D'après le principe de récurrence double, on en déduit que

$$\boxed{\forall n \geqslant 0,\ u_n = -2^n + 3^n}.$$

Finalement, on a bien trouvé $\boxed{(a,b,c) = (-1,2,3)}$ tel que pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_n = a \times b^n + c^n$.

DS n$^{\text{o}}$ 2 de mathématiques et d'informatique

durée : 3 heures

Exercice 1

Résoudre les équations trigonométriques suivantes d'inconnue $\theta \in \mathbb{R}$.

(E_1) $\dfrac{\cos(\theta)}{3} + \dfrac{\sin(\theta)}{4} = \dfrac{1}{5}$

(E_2) $\cos(57\theta) = \cos(27\theta)$ en factorisant par l'angle moitié

(E_3) $\cos(3\theta)\sin(\theta) + 2\cos(\theta)\sin^3(\theta) = \dfrac{1}{4}$ en linéarisant

Problème 1

Le but de ce problème est de démontrer que :

$$\forall x \in]-1,1], \quad \arccos(x) = 2\arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right).$$

Pour cela, on fixe un réel $x \in]-1,1]$ et on pose $\theta = 2\arctan\left(\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\right)$.

1. Étudier les variations de la fonction $f : t \mapsto \dfrac{1-t}{1+t}$ sur son ensemble de définition.
2. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
3. Déduire des questions précédentes que θ est un réel bien défini appartenant à $[0,\pi[$.
4. Exprimer $\cos(\theta)$ en fonction de $\tan(\theta/2)$.
5. Conclure en rappelant la définition de $\arccos(x)$.

Exercice 2

Résoudre les équations suivantes d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ en écrivant les solutions sous forme algébrique.

(E_4) $\dfrac{z+i}{1+iz} = 2-3i$

(E_5) $z^4 + 2z^2 + 4 = 0$

(E_6) $|1+z+8i| = |4+z+7i|$

Problème 2

Le but de ce problème est d'étudier la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$a_0 = 4 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = \frac{4a_n}{a_n - 2}.$$

Les trois parties sont indépendantes.

Partie I - Calculs et validité de la définition

1. **[Informatique]** Écrire en Python une fonction `suite` qui prend en argument un entier naturel n et qui renvoie le réel a_n.
2. Calculer a_1, a_2 et a_3.
3. Trouver deux réels c et d tels que $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = c + \dfrac{d}{a_n - 2}$.
4. Montrer que $a_n \geqslant 4$ pour tout entier naturel n et en déduire que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.

Partie II - Monotonie et bornes

Dans cette partie, on pose la fonction $f : x \mapsto \dfrac{4x}{x-2}$.

5. Étudier les variations de f sur son ensemble de définition.
6. Déterminer le signe de $f(x) - x$ pour tout réel x dans l'ensemble de définition de f.
7. À l'aide des questions précédentes, représenter graphiquement les premiers termes de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
8. On conjecture que la suite $(a_{2k})_{k\geqslant 0}$ est croissante, minorée par 4, majorée par 6, et que la suite $(a_{2k+1})_{k\geqslant 0}$ est décroissante, minorée par 6, majorée par 8. Démontrer ces conjectures.
9. **[Informatique]** On suppose avoir écrit en Python une fonction `suite` qui prend en argument un entier naturel n et qui renvoie le réel a_n. Expliquer ce que renvoie la fonction suivante.

```
def mystere(epsilon):
    n=0
    while suite(n+1)-suite(n)>epsilon:
        n=n+2
    return n/2
```

Partie III - Terme général et limite

Dans cette partie, on pose $b_n = \dfrac{1}{a_n}$ pour tout entier naturel n.

10. **[Informatique]** On suppose avoir écrit en Python une fonction `suite` qui prend en argument un entier naturel n et qui renvoie le réel a_n. Écrire en Python une fonction `test` qui prend en argument un entier naturel n et qui renvoie `'égal à zéro'` si $a_n = 0$ et `'non nul'` sinon.
11. Prouver que s'il existe un entier naturel n tel que $a_n = 0$ alors $\forall p \geqslant 0,\ a_{n-p} = 0$.
12. En déduire que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
13. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ b_{n+1} = \dfrac{1}{4} - \dfrac{b_n}{2}$.
14. Exprimer b_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
15. En déduire une expression de a_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$ puis la valeur de $\lim_{n\to+\infty} a_n$.

Exercice 3

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par :

$$u_1 = u_2 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 1,\ u_{n+2} = 4(u_{n+1} - 2u_n).$$

Déterminer une expression de u_n en fonction de $n \geqslant 1$.

Corrigé du DS n$^\circ$ 2 de mathématiques et d'informatique

Exercice 1

Résoudre les équations trigonométriques suivantes d'inconnue $\theta \in \mathbb{R}$.

(E_1) $\dfrac{\cos(\theta)}{3} + \dfrac{\sin(\theta)}{4} = \dfrac{1}{5}$

► On commence par simplifier l'expression $\frac{1}{3}\cos(\theta) + \frac{1}{4}\sin(\theta)$ en cherchant deux réels r et φ tels que :

$$\frac{1}{3}\cos(\theta) + \frac{1}{4}\sin(\theta) = r\cos\big(\theta+\varphi\big).$$

D'après la formule d'addition du cosinus, on a :

$$r\cos\big(\theta+\varphi\big) = r\big(\cos(\theta)\cos(\varphi) - \sin(\theta)\sin(\varphi)\big) = \underbrace{r\cos(\varphi)}_{=1/3}\cos(\theta) + \underbrace{\big(-r\sin(\varphi)\big)}_{=1/4}\sin(\theta).$$

Il suffit donc que $r\cos(\varphi) = 1/3$ et $r\sin(\varphi) = -1/4$. On a d'après la formule de Pythagore :

$$\big(r\cos(\varphi)\big)^2 + \big(r\sin(\varphi)\big)^2 = r^2\big(\underbrace{\cos^2(\varphi)+\sin^2(\varphi)}_{=1}\big) = r^2$$

par conséquent :

$$r^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{9} + \frac{1}{16} = \frac{16+9}{9\times 16} = \frac{25}{3^2\times 4^2}.$$

Il suffit donc de poser :

$$r = \sqrt{\frac{25}{12^2}} = \boxed{\frac{5}{12}}.$$

On en déduit que :

$$\cos(\varphi) = \frac{1}{3r} = \frac{4}{5} \quad \text{et} \quad \sin(\varphi) = -\frac{1}{4r} = -\frac{3}{5}.$$

Puisque $\cos(\varphi) = 4/5$, on a d'après le cercle trigonométrique :

$$\exists k \in \mathbb{Z}, \quad \varphi = \arccos\left(\frac{4}{5}\right) + 2k\pi \quad \text{ou} \quad \varphi = -\arccos\left(\frac{4}{5}\right) + 2k\pi.$$

Puisque $\sin(\varphi) = -3/5 < 0$, on en déduit qu'il suffit de poser :

$$\varphi = \boxed{-\arccos\left(\frac{4}{5}\right)}.$$

Finalement, on a après simplification :

$$\begin{aligned}\frac{\cos(\theta)}{3} + \frac{\sin(\theta)}{4} = \frac{1}{5} &\iff \frac{5}{12}\cos\left(\theta - \arccos\left(\tfrac{4}{5}\right)\right) = \frac{1}{5}\\ &\iff \cos\left(\theta - \arccos\left(\tfrac{4}{5}\right)\right) = \frac{12}{25}.\end{aligned}$$

D'après le cercle trigonométrique, on a :

$$\cos\left(\theta - \arccos\left(\tfrac{4}{5}\right)\right) = \frac{12}{25} \iff \exists k \in \mathbb{Z}, \quad \begin{pmatrix} \theta - \arccos\left(\frac{4}{5}\right) = \arccos\left(\frac{12}{25}\right) + 2k\pi \\ \text{ou} \quad \theta - \arccos\left(\frac{4}{5}\right) = -\arccos\left(\frac{12}{25}\right) + 2k\pi \end{pmatrix}.$$

Finalement, l'ensemble des solutions est :

$$\boxed{\left\{\arccos\left(\frac{4}{5}\right)+\arccos\left(\frac{12}{25}\right)+2k\pi, \arccos\left(\frac{4}{5}\right)-\arccos\left(\frac{12}{25}\right)+2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}}.$$

(E_2) $\cos(57\theta)=\cos(27\theta)$ *en factorisant par l'angle moitié*

► On a :

$$\cos(57\theta)=\cos(27\theta) \iff \cos(57\theta)-\cos(27\theta)=0.$$

Or $\cos(57\theta)-\cos(27\theta)$ est la partie réelle de $e^{i57\theta}-e^{i27\theta}$. On simplifie cette expression à l'aide d'une factorisation par l'angle moitié. On a :

$$\frac{57\theta+27\theta}{2}=\frac{84\theta}{2}=42\theta.$$

Donc :

$$\begin{aligned}
e^{i57\theta}-e^{i27\theta} &= e^{i42\theta}\left(e^{i57\theta-i42\theta}-e^{i27\theta-i42\theta}\right)\\
&= e^{i42\theta}\left(e^{i15\theta}-e^{-i15\theta}\right)\\
&= e^{i42\theta}2i\sin(15\theta) \quad \text{d'après les formules d'Euler}\\
&= \big(\cos(42\theta)+i\sin(42\theta)\big)2i\sin(15\theta)\\
&= \underbrace{-2\sin(42\theta)\sin(15\theta)}_{\text{partie réelle}}+i\underbrace{2\cos(42\theta)\sin(15\theta)}_{\text{partie imaginaire}}.
\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\cos(57\theta)-\cos(27\theta)=\mathrm{Re}\left(e^{i57\theta}-e^{i27\theta}\right)=-2\sin(42\theta)\sin(15\theta).$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}
&\cos(57\theta)=\cos(27\theta)\\
\iff & -2\sin(42\theta)\sin(15\theta)=0\\
\iff & \sin(42\theta)=0 \quad \text{ou} \quad \sin(15\theta)=0 \quad \text{par intégrité}\\
\iff & \exists k\in\mathbb{Z}, \quad 42\theta=k\pi \quad \text{ou} \quad 15\theta=k\pi \quad \text{d'après le cercle trigonométrique}\\
\iff & \exists k\in\mathbb{Z}, \quad \theta=\frac{k\pi}{42} \quad \text{ou} \quad \theta=\frac{k\pi}{15}
\end{aligned}$$

Finalement, l'ensemble des solutions est :

$$\boxed{\left\{\frac{k\pi}{42},\frac{k\pi}{15} \mid k\in\mathbb{Z}\right\}}.$$

(E_3) $\cos(3\theta)\sin(\theta)+2\cos(\theta)\sin^3(\theta)=\frac{1}{4}$ *en linéarisant*

► On commence par linéariser l'expression $\cos(3\theta)\sin(\theta)+2\cos(\theta)\sin^3(\theta)$ à l'aide des formules d'Euler :

$$\begin{aligned}
&\cos(3\theta)\sin(\theta)+2\cos(\theta)\sin^3(\theta)\\
=&\left(\frac{e^{i3\theta}+e^{-i3\theta}}{2}\right)\left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)+2\left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)\left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^3\\
=&\frac{1}{4i}\left(e^{i3\theta}+e^{-i3\theta}\right)\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)+\frac{2}{-16i}\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)^3.
\end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned}\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)^3 &= \left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)^2\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)\\ &= \left(e^{i2\theta}-2+e^{-i2\theta}\right)\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)\\ &= e^{i3\theta}-2e^{i\theta}+e^{-i\theta}-e^{i\theta}+2e^{-i\theta}-e^{-i3\theta}\\ &= e^{i3\theta}-3e^{i\theta}+3e^{-i\theta}-e^{-i3\theta}.\end{aligned}$$

Nous apprendrons bientôt à calculer ce genre d'expression plus rapidement à l'aide de la formule du binôme de Newton.

Par conséquent :

$$\begin{aligned}&\cos(3\theta)\sin(\theta)+2\cos(\theta)\sin^3(\theta)\\ =&\frac{1}{4i}\left(e^{i3\theta}+e^{-i3\theta}\right)\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)-\frac{1}{8i}\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)\left(e^{i3\theta}-3e^{i\theta}+3e^{-i\theta}-e^{-i3\theta}\right)\\ =&\frac{1}{8i}\Big(2\left(e^{i4\theta}-e^{i2\theta}+e^{-i2\theta}-e^{-i4\theta}\right)-\left(e^{i4\theta}-3e^{i2\theta}+3-e^{-i2\theta}+e^{i2\theta}-3+3e^{-i2\theta}-e^{-i4\theta}\right)\Big)\\ =&\frac{1}{8i}\left(e^{i4\theta}-e^{-i4\theta}\right)\quad\text{après simplifications}\\ =&\frac{1}{8i}2i\sin(4\theta)\quad\text{d'après les formules d'Euler}\\ =&\frac{\sin(4\theta)}{4}.\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}&\cos(3\theta)\sin(\theta)+2\cos(\theta)\sin^3(\theta)=\frac{1}{4}\\ \iff&\frac{\sin(4\theta)}{4}=\frac{1}{4}\\ \iff&\sin(4\theta)=1\\ \iff&\exists k\in\mathbb{Z},\quad 4\theta=\frac{\pi}{2}+2k\pi\quad\text{d'après le cercle trigonométrique}\\ \iff&\exists k\in\mathbb{Z},\quad \theta=\frac{\pi}{8}+\frac{2k\pi}{4}.\end{aligned}$$

Finalement, l'ensemble des solutions est :

$$\boxed{\left\{\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}\ \middle|\ k\in\mathbb{Z}\right\}}.$$

Problème 1

Le but de ce problème est de démontrer que :

$$\forall x\in]-1,1],\quad \arccos(x)=2\arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right).$$

Pour cela, on fixe un réel $x\in]-1,1]$ et on pose $\theta=2\arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)$.

1. *Étudier les variations de la fonction $f:t\mapsto\dfrac{1-t}{1+t}$ sur son ensemble de définition.*

▶ On a $1+t=0 \iff t=-1$. Donc la fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ comme quotient de deux polynômes dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus :

$$\forall t\in\mathbb{R}\setminus\{-1\},\quad f'(t)=\frac{(-1)\times(1+t)-(1-t)\times 1}{(1+t)^2}=\frac{-2}{(1+t)^2}<0.$$

On en déduit le tableau des variations de f :

t	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	||	$-$
$f(t)$	$\searrow$	||	$\searrow$

Donc $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est strictement décroissante sur }]-\infty,-1[\text{ et sur }]-1,+\infty[}$.

Attention : la fonction f n'est pas strictement décroissante sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. Le principe de Lagrange (donnant la monotonie d'une fonction en fonction du signe de sa dérivée) est valable seulement sur des intervalles. L'ensemble $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ n'est pas un intervalle (c'est une union de deux intervalles).

2. *Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.*

▶ On a :

$$\lim_{t\to-\infty} f(t) = \underbrace{\lim_{t\to-\infty} \frac{1-t}{1+t}}_{\text{forme indéterminée}} = \lim_{t\to-\infty} \underbrace{\frac{t}{t}}_{=1} \times \frac{\overbrace{\frac{1}{t}-1}^{\to 0-1=-1}}{\underbrace{\frac{1}{t}+1}_{\to 0+1=1}} = \boxed{-1}.$$

De même :

$$\lim_{t\to+\infty} f(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{\frac{1}{t}-1}{\frac{1}{t}+1} = \boxed{-1}.$$

De plus :

$$\lim_{t\to-1^-} f(t) = \lim_{t\to-1^-} \frac{\overbrace{1-t}^{\to 1-(-1)=2}}{\underbrace{1+t}_{1+(-1)^-=0^-}} = \boxed{-\infty} \quad \text{et} \quad \lim_{t\to-1^+} f(t) = \lim_{t\to-1^+} \frac{\overbrace{1-t}^{\to 1-(-1)=2}}{\underbrace{1+t}_{1+(-1)^+=0^+}} = \boxed{+\infty}.$$

On peut donc compléter le tableau des variations de f :

t	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	||	$-$
$f(t)$	$-1 \searrow -\infty$	||	$+\infty \searrow -1$

3. *Déduire des questions précédentes que θ est un réel bien défini appartenant à $[0,\pi[$.*

▶ On sait que $\theta = 2\arctan\left(\sqrt{f(x)}\right)$. Puique $x \in]-1,1]$, on place la valeur $t=1$ dans le tableau des variations de f. On a $f(1)=0$ donc :

t	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	$\Vert$	$-$			
$f(t)$	-1	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	-1

Puisque $x \in]-1,1]$, on en déduit que $f(x) \in [0,+\infty[$. Par conséquent $\sqrt{f(x)}$ est bien définie. Par définition, $\arctan\left(\sqrt{f(x)}\right)$ est l'unique angle appartenant à $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ dont la tangente est égale à $\sqrt{f(x)}$. D'après le cercle trigonométrique, on en déduit que $\arctan\left(\sqrt{f(x)}\right) \in [0,\frac{\pi}{2}[$ car $\sqrt{f(x)} \geqslant 0$. Ainsi :

$$0 \leqslant \arctan\left(\sqrt{f(x)}\right) < \frac{\pi}{2} \quad \text{donc} \quad \underbrace{2\times 0}_{=0} \leqslant \underbrace{2\arctan\left(\sqrt{f(x)}\right)}_{=\theta} < \underbrace{2\times\frac{\pi}{2}}_{=\pi}.$$

Finalement, on a bien montré que $\boxed{\theta \text{ est bien défini}}$ (car $f(x) \geqslant 0$) et que $\boxed{\theta \in [0,\pi[}$.

4. *Exprimer $\cos(\theta)$ en fonction de $\tan(\theta/2)$.*

▶ On a :

$$\cos(\theta) = \cos\left(2\frac{\theta}{2}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1 \quad \text{d'après la formule de duplication du cosinus.}$$

De plus, on a :

$$1+\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = 1 + \frac{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

donc :

$$\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{1+\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}.$$

En reportant dans l'expression de $\cos(\theta)$, on obtient :

$$\cos(\theta) = 2\frac{1}{1+\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} - 1 = \frac{2-\left(1+\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)}{1+\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \boxed{\frac{1-\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}}.$$

5. *Conclure en rappelant la définition de $\arccos(x)$.*

▶ Par définition, $\boxed{\arccos(x) \text{ est l'unique angle appartenant à } [0,\pi] \text{ dont le cosinus est égal à } x}$. À la question 3, on a montré que $\theta \in [0,\pi[$ donc en particulier $\theta \in [0,\pi]$. Ainsi, il suffit de montrer que $\cos(\theta) = x$ pour en déduire que $\theta = \arccos(x)$. Or on a :

$$\begin{aligned}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) &= \tan\left(\arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)\right) \quad \text{car } \theta = 2\arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)\\ &= \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \quad \text{par définition de l'arctangente.}\end{aligned}$$

Donc :

$$\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right) = \frac{1-x}{1+x}.$$

En réinjectant cette expression dans le résultat de la question précédente, on obtient :

$$\begin{aligned}\cos(\theta) &= \frac{1-\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \\ &= \frac{1-\frac{1-x}{1+x}}{1+\frac{1-x}{1+x}} \\ &= \frac{(1+x)-(1-x)}{(1+x)+(1-x)} \quad \text{en multipliant le numérateur et le dénominateur par } 1+x \\ &= \frac{2x}{2} = x.\end{aligned}$$

Par conséquent, on a montré que $\cos(\theta) = x$ et que $\theta \in [0, \pi]$ à la question 3. Par définition de l'arccosinus, on en déduit que $\theta = \arccos(x)$. Finalement, puisque $\theta = 2\arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)$, on a démontré que :

$$\boxed{\arccos(x) = 2\arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)}.$$

Exercice 2

Résoudre les équations suivantes d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ en écrivant les solutions sous forme algébrique.

(E_4) $\dfrac{z+i}{1+iz} = 2-3i$

▶ On a :

$$\begin{aligned}\frac{z+i}{1+iz} = 2-3i &\iff z+i = \underbrace{(1+iz)(2-3i)}_{=2-3i+2iz+3z} \\ &\iff z+i = 2-3i+(3+2i)z \\ &\iff z-(3+2i)z = 2-3i-i \\ &\iff (-2-2i)z = 2-4i \\ &\iff z = \frac{2-4i}{-2-2i} \quad \text{car } -2-2i \neq 0.\end{aligned}$$

Or :

$$\frac{2-4i}{-2-2i} = \frac{(2-4i)(-2+2i)}{\underbrace{(-2-2i)(-2+2i)}_{=z\times\overline{z}=|z|^2}} = \frac{-4+4i+8i+8}{(-2)^2+(-2)^2} = \frac{4+12i}{8} = \frac{1+3i}{2}.$$

Finalement, on obtient une unique solution égale à $\boxed{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i}$.

(E_5) $z^4+2z^2+4=0$

▶ On pose $w = z^2$. Alors :

$$z^4+2z^2+4=0 \iff w^2+2w+4=0.$$

On reconnaît une équation du second degré à coefficients réels. Son discriminant est égal à :

$$\Delta = 2^2 - 4\times 1\times 4 = -12 < 0.$$

L'équation admet donc deux solutions complexes conjuguées qui sont égales à :

$$w_1 = \frac{-2+i\sqrt{12}}{2} = \frac{-2+i2\sqrt{3}}{2} = -1+i\sqrt{3} \quad \text{et} \quad w_2 = -1-i\sqrt{3}.$$

Ainsi $z^2 = w_1$ ou $z^2 = w_2$. Pour résoudre ces équations, on écrit w_1 et w_2 sous forme exponentielle. On a :

$$|w_1| = \left|-1 + i\sqrt{3}\right| = \sqrt{(-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2.$$

On cherche un argument $\theta \in \mathbb{R}$ de $w_1 = -1 + i\sqrt{3}$ qui vérifie $w_1 = 2e^{i\theta}$ donc :

$$-1 + i\sqrt{3} = 2\big(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\big) = \underbrace{2\cos(\theta)}_{=-1} + i\underbrace{2\sin(\theta)}_{=\sqrt{3}}.$$

On veut donc que $\cos(\theta) = -\frac{1}{2}$ et $\sin(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. D'après le cercle trigonométrique, il suffit par exemple de choisir $\theta = \frac{2\pi}{3}$. Ainsi, on a :

$$w_1 = 2e^{i2\pi/3} \quad \text{et} \quad w_2 = \overline{w_1} = \overline{2e^{i2\pi/3}} = 2e^{-i2\pi/3}.$$

Puisque $z = 0$ n'est pas solution des équations $z^2 = w_1$ et $z_2 = w_2$ (car $w_1 \neq 0$ et $w_2 \neq 0$), on peut aussi écrire z sous forme exponentielle : $z = re^{i\theta}$ où $r = |z|$ et $\theta \in \mathbb{R}$ est un argument de z. Ainsi on a :

$$\begin{aligned}
z^2 = w_1 &\iff \left(re^{i\theta}\right)^2 = 2e^{i2\pi/3} \\
&\iff r^2e^{i2\theta} = 2e^{i2\pi/3} \\
&\iff \begin{cases} r^2 = 2 \\ \exists k \in \mathbb{Z},\ 2\theta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} r = \sqrt{2} \quad \text{car } r > 0 \\ \exists k \in \mathbb{Z},\ \theta = \frac{\pi}{3} + k\pi. \end{cases}
\end{aligned}$$

On obtient une infinité d'arguments possibles, mais d'après le cercle trigonométrique on obtient seulement deux solutions complexes différentes :

$$z^2 = w_1 \iff \left(z = \sqrt{2}e^{i\pi/3} \quad \text{ou} \quad z = \sqrt{2}e^{i(\pi/3+\pi)}\right).$$

Puis on écrit ces deux solutions sous forme algébrique :

$$\sqrt{2}e^{i\pi/3} = \sqrt{2}\left(\cos\left(\tfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\tfrac{\pi}{3}\right)\right) = \sqrt{2}\left(\tfrac{1}{2} + i\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \tfrac{\sqrt{2}}{2} + i\tfrac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\text{et} \quad \sqrt{2}e^{i(\pi/3+\pi)} = \sqrt{2}\left(\cos\left(\tfrac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\tfrac{4\pi}{3}\right)\right) = -\tfrac{\sqrt{2}}{2} - i\tfrac{\sqrt{6}}{2}.$$

On procède de même avec la deuxième équation :

$$\begin{aligned}
z^2 = w_2 &\iff \left(re^{i\theta}\right)^2 = 2e^{-i2\pi/3} \\
&\iff \begin{cases} r = \sqrt{2} \\ \exists k \in \mathbb{Z},\ \theta = -\frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases} \\
&\iff \left(z = \sqrt{2}e^{-i\pi/3} \quad \text{ou} \quad z = \sqrt{2}e^{i(-\pi/3+\pi)}\right) \\
&\iff \left(z = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\tfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\tfrac{\pi}{3}\right)\right) = \tfrac{\sqrt{2}}{2} - i\tfrac{\sqrt{6}}{2} \quad \text{ou} \quad z = \tfrac{-\sqrt{2}}{2} + i\tfrac{\sqrt{6}}{2}\right).
\end{aligned}$$

Finalement, on obtient un ensemble de quatre solutions :

$$\boxed{\left\{\tfrac{\sqrt{2}}{2} + i\tfrac{\sqrt{6}}{2}, -\tfrac{\sqrt{2}}{2} - i\tfrac{\sqrt{6}}{2}, \tfrac{\sqrt{2}}{2} - i\tfrac{\sqrt{6}}{2}, -\tfrac{\sqrt{2}}{2} + i\tfrac{\sqrt{6}}{2}\right\}}.$$

(E_6) $\left|1+z+8i\right| = \left|4+z+7i\right|$

▶ On écrit l'inconnue sous forme algébrique : $z = a+ib$ où a est la partie réelle de z et b sa partie imaginaire. Alors :

$$\begin{aligned}
\left|1+z+8i\right| = \left|4+z+7i\right| &\iff \left|1+a+ib+8i\right| = \left|4+a+ib+7i\right| \\
&\iff \left|(1+a)+i(b+8)\right| = \left|(4+a)+i(b+7)\right| \\
&\iff \sqrt{(1+a)^2+(b+8)^2} = \sqrt{(4+a)^2+(b+7)^2} \\
&\iff 1+2a+a^2+b^2+16b+64 = 16+8a+a^2+b^2+14b+49 \\
&\qquad \text{en élevant chaque membre au carré} \\
&\iff 2a+16b+65 = 8a+14b+65 \\
&\qquad \text{en simplifiant par } a^2+b^2 \\
&\iff 16b-14b = 8a-2a \iff 2b = 6a \iff b = 3a.
\end{aligned}$$

Finalement, on obtient une infinité de solutions. L'ensemble des solutions est :

$$\boxed{\{z = a+ib \in \mathbb{C} \mid b = 3a\}}.$$

On peut également écrire l'ensemble des solutions à l'aide du paramètre a :

$$\{a+ib \in \mathbb{C} \mid b = 3a\} = \{a+i3a \mid a \in \mathbb{R}\}.$$

Problème 2

Le but de ce problème est d'étudier la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$a_0 = 4 \quad \textit{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = \frac{4a_n}{a_n-2}.$$

Les trois parties sont indépendantes.

Partie I - Calculs et validité de la définition

1. ***[Informatique]*** *Écrire en Python une fonction* `suite` *qui prend en argument un entier naturel n et qui renvoie le réel a_n.*

   ▶ Par exemple :

```
def suite(n):
    a=4
    for i in range(n):
        a=4*a/(a-2)
    return a
```

2. *Calculer a_1, a_2 et a_3.*

   ▶ On a :

$$a_1 = \frac{4a_0}{a_0-2} = \frac{4\times 4}{4-2} = \frac{16}{2} = 8, \quad a_2 = \frac{4a_1}{a_1-2} = \frac{4\times 8}{8-2} = \frac{32}{6} = \frac{16}{3}$$

$$\text{et} \quad a_3 = \frac{4a_2}{a_2-2} = \frac{4\times\frac{16}{3}}{\frac{16}{3}-2} = \frac{64/3}{10/3} = \frac{64}{10} = \frac{32}{5}.$$

Donc $\boxed{a_1 = 8}$, $\boxed{a_2 = \frac{16}{3}}$ et $\boxed{a_3 = \frac{32}{5}}$.

3. *Trouver deux réels c et d tels que $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = c + \dfrac{d}{a_n - 2}$.*

▶ On raisonne par analyse-synthèse.
Analyse. On cherche deux réels c et d tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = c + \frac{d}{a_n - 2}.$$

On fixe $n \in \mathbb{N}$. On veut donc que :

$$a_{n+1} = c + \frac{d}{a_n - 2} = \frac{c(a_n - 2) + d}{a_n - 2} = \frac{ca_n + (d - 2c)}{a_n - 2}.$$

Or on sait que :

$$a_{n+1} = \frac{4a_n}{a_n - 2}.$$

Il suffit donc que $c = 4$ et que $d - 2c = 0 \iff d = 2c = 8$.
Synthèse. On pose $\boxed{c = 4}$ et $\boxed{d = 8}$. En reprenant les calculs de l'analyse, on a bien montré que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = c + \frac{d}{a_n - 2} = \boxed{4 + \frac{8}{a_n - 2}}.$$

4. *Montrer que $a_n \geqslant 4$ pour tout entier naturel n et en déduire que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.*

▶ On raisonne par récurrence. On pose l'assertion P_n : «$a_n \geqslant 4$» pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Initialisation. Pour $n = 0$, on a $a_0 = 4$ donc en particulier $a_0 \geqslant 4$. On a bien vérifié que P_0 est vraie.
Hérédité. On fixe $n \in \mathbb{N}$ et on suppose que P_n est vraie, donc que $a_n \geqslant 4$. Montrons que P_{n+1} est vraie, donc que $a_{n+1} \geqslant 4$. D'après le résultat de la question précédente, on a :

$$a_{n+1} = 4 + \frac{8}{a_n - 2}.$$

Or $a_n \geqslant 4$ d'après l'hypothèse de récurrence. On en déduit que $\frac{8}{a_n-2}$ est positif et donc que :

$$a_{n+1} = 4 + \underbrace{\frac{8}{a_n - 2}}_{\geqslant 0} \geqslant 4.$$

On a bien montré que P_{n+1} est vraie. Finalement, on a démontré que $\forall n \in \mathbb{N},\ P_n \implies P_{n+1}$.
Conclusion. D'après le principe de récurrence, on en déduit que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \geqslant 4}.$$

En particulier, on en déduit que $a_n - 2 \neq 0$ (car $a_n - 2 \geqslant 2$) pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc le dénominateur de la relation de récurrence définissant la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule jamais. Par conséquent, $\boxed{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bien définie}}$.

Partie II - Monotonie et bornes

Dans cette partie, on pose la fonction $f : x \mapsto \dfrac{4x}{x - 2}$.

5. *Étudier les variations de f sur son ensemble de définition.*

▶ On a $x - 2 = 0 \iff x = 2$. Donc la fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ comme quotient de deux polynômes dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}, \quad f'(x) = \frac{4 \times (x - 2) - 4x \times 1}{(x - 2)^2} = \frac{-8}{(x - 2)^2} < 0.$$

On en déduit le tableau des variations de f :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	||	$-$
$f(x)$	$\searrow$	||	$\searrow$

Donc $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est strictement décroissante sur }]-\infty,2[\text{ et sur }]2,+\infty[}$.

Attention : la fonction f n'est pas strictement décroissante sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$. Le principe de Lagrange (donnant la monotonie d'une fonction en fonction du signe de sa dérivée) est valable seulement sur des intervalles. L'ensemble $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ n'est pas un intervalle (c'est une union de deux intervalles).

6. *Déterminer le signe de $f(x)-x$ pour tout réel x dans l'ensemble de définition de f.*

► Soit $x \in \mathbb{R}\setminus\{2\}$. On a :

$$f(x)-x = \frac{4x}{x-2} - x = \frac{4x - x(x-2)}{x-2} = \frac{-x^2+6x}{x-2} = \frac{x(6-x)}{x-2}.$$

On utilise un tableau de signes pour étudier le signe de $f(x)-x$.

x	$-\infty$		0		2		6		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$6-x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)-x$		$+$	0	$-$	||	$+$	0	$-$	

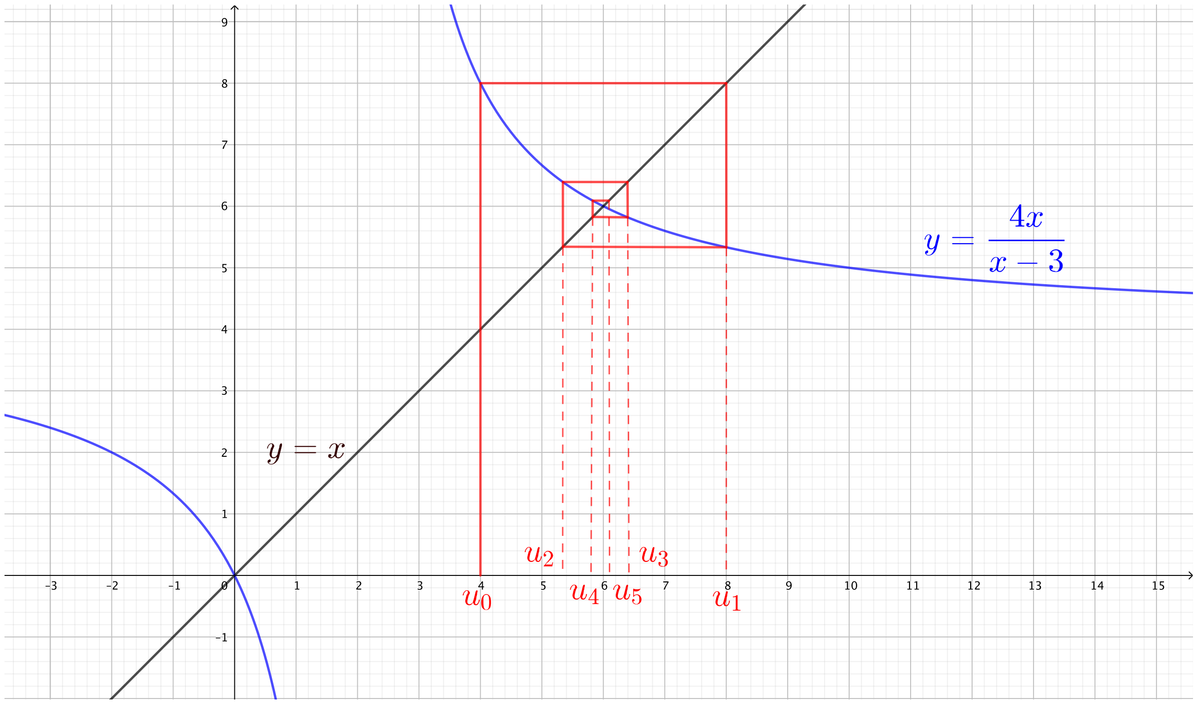
Donc $\boxed{\text{la courbe représentative de } f \text{ est au-dessus de la droite d'équation } y=x \text{ sur }]-\infty,0]\cup]2,6]}$ et $\boxed{\text{en-dessous sur } [0,2[\cup[6,+\infty[}$.

7. *À l'aide des questions précédentes, représenter graphiquement les premiers termes de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

► D'après la définition de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{4a_n}{a_n-2} = f(a_n).$$

On peut donc représenter graphiquement les premiers termes de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à l'aide de la courbe représentative de la fonction f et de la droite d'équation $y=x$.



8. *On conjecture que la suite $(a_{2k})_{k\geqslant 0}$ est croissante, minorée par 4, majorée par 6, et que la suite $(a_{2k+1})_{k\geqslant 0}$ est décroissante, minorée par 6, majorée par 8. Démontrer ces conjectures.*

► On raisonne par récurrence. Pour tout $k \geqslant 0$, on pose l'assertion :

$$P(k) : \text{«}4 \leqslant a_{2k} \leqslant a_{2(k+1)} \leqslant 6 \leqslant a_{2(k+1)+1} \leqslant a_{2k+1} \leqslant 8\text{»}.$$

Écrivez une assertion qui contient toutes les propriétés que vous devez démontrer afin d'éviter de perdre du temps à rédiger plusieurs récurrences.

Initialisation. Pour $k = 0$, on a d'après les résultats de la qestion 2 :

$$a_{2\times 0} = a_0 = 4, \quad a_{2(0+1)} = a_2 = \frac{16}{3}, \quad a_{2(0+1)+1} = a_3 = \frac{32}{5} \quad \text{et} \quad a_{2\times 0+1} = a_1 = 8.$$

Or $4 < \frac{16}{3}$ (car $4 \times 3 = 12 < 16$), $\frac{16}{3} < 6$ (car $3 \times 6 = 18 > 16$), $6 < \frac{32}{5}$ (car $5 \times 6 = 30 > 32$) et $\frac{32}{5} < 8$ (car $5 \times 8 = 40 > 32$). On en déduit bien que :

$$4 \leqslant a_0 \leqslant a_2 \leqslant 6 \leqslant a_3 \leqslant a_1 \leqslant 8.$$

Donc $P(0)$ est vérifiée.

Hérédité. On fixe $k \geqslant 0$ et on suppose que $P(k)$ est vraie. Montrons que $P(k+1)$ est vraie. D'après l'hypothèse de récurrence $P(k)$, on sait que :

$$4 \leqslant a_{2k} \leqslant \underbrace{a_{2(k+1)}}_{=a_{2k+2}} \leqslant 6 \leqslant \underbrace{a_{2(k+1)+1}}_{a_{2k+3}} \leqslant a_{2k+1} \leqslant 8.$$

Et on veut montrer $P(k+1)$, c'est-à-dire :

$$4 \leqslant \underbrace{a_{2(k+1)}}_{=a_{2k+2}} \leqslant \underbrace{a_{2(k+1+1)}}_{=a_{2k+4}} \leqslant 6 \leqslant \underbrace{a_{2(k+1+1)+1}}_{a_{2k+5}} \leqslant \underbrace{a_{2(k+1)+1}}_{=a_{2k+3}} \leqslant 8.$$

D'après le tableau des variation de la f dressé à la question 5, on sait que f est décroissante sur $[4, 8]$. En appliquant f à l'hypothèse de récurrence $P(k)$, on en déduit que :

$$\underbrace{f(4)}_{=8} \geqslant \underbrace{f(a_{2k})}_{=a_{2k+1}} \geqslant \underbrace{f(a_{2k+2})}_{=a_{2k+3}} \geqslant \underbrace{f(6)}_{=6} \geqslant \underbrace{f(a_{2k+3})}_{a_{2k+4}} \geqslant \underbrace{f(a_{2k+1})}_{a_{2k+2}} \geqslant \underbrace{f(8)}_{=16/3>4}.$$

En réordonnant ces inégalités, on a :

$$4 \leqslant a_{2k+2} \leqslant a_{2k+4} \leqslant 6 \leqslant a_{2k+3} \leqslant a_{2k+1} \leqslant 8.$$

En appliquant une nouvelle fois f (qui est décroissante sur $[4,8]$), on obtient :

$$\underbrace{f(4)}_{=8} \geqslant \underbrace{f(a_{2k+2})}_{=a_{2k+3}} \geqslant \underbrace{f(a_{2k+4})}_{=a_{2k+5}} \geqslant \underbrace{f(6)}_{=6} \geqslant \underbrace{f(a_{2k+3})}_{a_{2k+4}} \geqslant \underbrace{f(a_{2k+1})}_{a_{2k+2}} \geqslant \underbrace{f(8)}_{=16/3>4}.$$

En réordonnant ces inégalités, on a :

$$4 \leqslant a_{2k+2} \leqslant a_{2k+4} \leqslant 6 \leqslant a_{2k+5} \leqslant a_{2k+3} \leqslant 8.$$

Ainsi, on a bien montré que $P(k+1)$ est vraie. Finalement, on a prouvé que $P(k) \implies P(k+1)$ pour tout $k \geqslant 0$.
Conclusion. D'après le principe de récurrence, on en déduit que $P(k)$ est vraie pour tout $k \geqslant 0$, c'est-à-dire que :

$$\forall k \geqslant 0, \quad 4 \leqslant a_{2k} \leqslant a_{2(k+1)} \leqslant 6 \leqslant a_{2(k+1)+1} \leqslant a_{2k+1} \leqslant 8.$$

Par conséquent, on a démontré que $\boxed{\text{la suite } (a_{2k})_{k\geqslant 0} \text{ est croissante, minorée par 4, majorée par 6}}$, et que $\boxed{\text{la suite } (a_{2k+1})_{k\geqslant 0} \text{ est décroissante, minorée par 6, majorée par 8}}$.

9. *[Informatique] On suppose avoir écrit en Python une fonction* `suite` *qui prend en argument un entier naturel n et qui renvoie le réel a_n. Expliquer ce que renvoie la fonction suivante.*

```
def mystere(epsilon):
    n=0
    while suite(n+1)-suite(n)>epsilon:
        n=n+2
    return n/2
```

► La variable `n` dans la fonction `mystere` décrit les entiers naturels pairs. Après la boucle `while`, elle sera égale au plus petit entier naturel pair n tel que $a_{n+1} - a_n \leqslant$ `epsilon`. La fonction `suite` renvoie alors $\frac{n}{2}$. Si on note $n = 2k$, la fonction renvoie donc $\frac{n}{2} = k$ qui est égal au plus petit entier naturel tel que $a_{2k+1} - a_{2k} \leqslant$ `epsilon`. D'après le résultat de la question précédente, on sait que la suite $(a_{2k+1})_{k\geqslant 0}$ est minorée par 6 et que la suite $(a_{2k})_{k\geqslant 0}$ est majorée par 6. Donc $a_{2k+1} - a_{2k}$ représente la distance entre les termes a_{2k} et a_{2k+1} (car $a_{2k} \leqslant a_{2k+1}$). Finalement, étant donnée un réel `epsilon`, $\boxed{\text{la fonction mystere renvoie le plus petit entier naturel } k \text{ tel que la distance entre } a_{2k} \text{ et } a_{2k+1} \text{ soit plus petite que epsilon}}$.

D'après la représentation graphique obtenue à la question 7, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ semble tendre vers 6, donc les termes a_{2k} et a_{2k+1} semblent se rapprocher l'un de l'autre lorsque k augmente. La fonction `mystere` *sert à confirmer cette impression : pour chaque valeur arbitrairement petite de* `epsilon` > 0*, la fonction* `mystere` *trouvera un rang k à partir duquel les termes a_{2k} et a_{2k+1} sont à une distance inférieure à* `epsilon`.

Partie III - Terme général et limite

Dans cette partie, on pose $b_n = \dfrac{1}{a_n}$ pour tout entier naturel n.

10. *[Informatique] On suppose avoir écrit en Python une fonction* `suite` *qui prend en argument un entier naturel n et qui renvoie le réel a_n. Écrire en Python une fonction* `test` *qui prend en argument un entier naturel n et qui renvoie* `'égal à zéro'` *si $a_n = 0$ et* `'non nul'` *sinon.*

► Par exemple :

```
def test(n):
    if suite(n)==0:
        return 'égal à zéro'
    else:
        return 'non nul'
```

11. Prouver que s'il existe un entier naturel n tel que $a_n = 0$ alors $\forall p \geqslant 0,\ a_{n-p} = 0$.

► On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $a_n = 0$. On raisonne par récurrence.
Initialisation. Pour $p = 0$, on a $a_{n-0} = a_n = 0$ d'après l'hypothèse. Donc le résultat est vérifié pour $p = 0$.
Hérédité. On fixe $p \geqslant 0$ et on suppose que $a_{n-p} = 0$. Montrons que le résultat est vrai au rang $p+1$, c'est-à-dire que $a_{n-(p+1)} = 0$. On a $a_{n-(p+1)} = a_{n-p-1}$ et d'après la relation de récurrence définissant la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\underbrace{a_{n-p-1+1}}_{=a_{n-p}=0} = \frac{4a_{n-p-1}}{a_{n-p-1}-2} \quad \text{donc} \quad 4a_{n-p-1} = 0 \times (a_{n-p-1} - 2) = 0.$$

On en déduit que $a_{n-p-1} = 0$. On a bien montré que le résultat est vrai au rang $p+1$ lorsqu'il est vrai au rang p, et cette implication est vraie pour tout $p \geqslant 0$.
Conclusion. D'après le principe de récurrence, on en déduit que :

$$\boxed{\forall p \geqslant 0, \quad a_{n-p} = 0}.$$

12. En déduire que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.

► On déduit du résultat de la question précédente pour $p = n$ que : $a_{n-n} = 0$. Ce qui est absurde car $a_{n-n} = a_0 = 4$. Par conséquent, on a montré par l'absurde que l'hypothèse «$\exists n \in \mathbb{N},\ a_n = 0$» est fausse et donc que la négation «$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \neq 0$» est vraie. On en déduit que $b_n = 1/a_n$ est bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc que $\boxed{\text{la suite } (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bien définie}}$.

13. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ b_{n+1} = \dfrac{1}{4} - \dfrac{b_n}{2}$.

► On fixe $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}
b_{n+1} &= \frac{1}{a_{n+1}} \quad \text{par définition de la suite } (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \\
&= \frac{1}{\frac{4a_n}{a_n-2}} \quad \text{d'après la relation de récurrence de la suite } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \\
&= \frac{a_n - 2}{4a_n} \\
&= \frac{\frac{1}{b_n} - 2}{\frac{4}{b_n}} \quad \text{car } b_n = \frac{1}{a_n} \text{ par définition donc } a_n = \frac{1}{b_n} \\
&= \frac{1 - 2b_n}{4} \quad \text{en multipliant le numérateur et le dénominateur par } b_n \\
&= \boxed{\frac{1}{4} - \frac{b_n}{2}}.
\end{aligned}$$

14. Exprimer b_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

► D'après le résultat de la question précédente, on reconnaît une suite arithmético-géométrique. On commence par résoudre l'équation caractéristique associée :

$$\alpha = \frac{1}{4} - \frac{\alpha}{2} \iff \underbrace{\alpha + \frac{\alpha}{2}}_{=3\alpha/2} = \frac{1}{4} \iff \alpha = \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{6}.$$

Ensuite on pose la suite auxiliaire $\left(u_n = b_n - \alpha = b_n - \frac{1}{6}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= b_{n+1} - \frac{1}{6} \quad \text{par définition de la suite auxiliaire } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \\
&= \frac{1}{4} - \frac{b_n}{2} - \frac{1}{6} = \frac{3-2}{12} - \frac{b_n}{2} = \frac{1}{12} - \frac{b_n}{2} = -\frac{1}{2}\left(b_n - \frac{1}{6}\right) \\
&= -\frac{1}{2}u_n \quad \text{par définition de la suite auxiliaire } (u_n)_{n\in\mathbb{N}}.
\end{aligned}$$

On reconnaît une suite géométrique de raison $-1/2$. On en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 \left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

Or :

$$u_0 = b_0 - \frac{1}{6} = \frac{1}{a_0} - \frac{1}{6} = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{3-2}{12} = \frac{1}{12}.$$

Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n - \frac{1}{6} = u_n = \frac{1}{12}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

et finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n = \frac{1}{12}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{6}}.$$

15. En déduire une expression de a_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$ puis la valeur de $\lim_{n\to+\infty} a_n$.

▶ D'après le résultat de la question précédente, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n = \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\frac{1}{12}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{6}} = \boxed{\frac{12}{\left(-\frac{1}{2}\right)^n + 2}}.$$

Puisque $-\frac{1}{2} \in]-1, 1[$, on a $\lim_{n\to+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$ et donc :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{12}{0+2} = 6}.$$

Exercice 3

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par :

$$u_1 = u_2 = 1 \quad \textit{et} \quad \forall n \geqslant 1, \ u_{n+2} = 4(u_{n+1} - 2u_n).$$

Déterminer une expression de u_n en fonction de $n \geqslant 1$.

▶ On a :

$$\forall n \geqslant 1, \quad u_{n+2} = 4(u_{n+1} - 2u_n) = 4u_{n+1} - 8u_n.$$

On reconnaît une suite récurrente linéaire d'ordre 2. On commence par résoudre l'équation caractéristique associée :

$$q^2 = 4q - 8 \iff q^2 - 4q + 8 = 0.$$

On reconnaît une équation du second degré à coefficients réels. Son discriminant est égal à :

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 8 = -16 < 0.$$

L'équation admet donc deux solutions complexes conjuguées qui sont égales à :

$$q_1 = \frac{4 + i\sqrt{16}}{2} = 2 + 2i \quad \text{et} \quad q_2 = \overline{q_1} = 2 - 2i.$$

On écrit ces solutions sous forme exponentielle. On a :

$$\left|q_1\right| = \left|2+2i\right| = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

On cherche un argument $\theta \in \mathbb{R}$ de $q_1 = 2+2i$ qui vérifie $q_1 = 2\sqrt{2}e^{i\theta}$ donc :

$$2+2i = 2\sqrt{2}\big(\cos(\theta)+i\sin(\theta)\big) = \underbrace{2\sqrt{2}\cos(\theta)}_{=2} + i\,\underbrace{2\sqrt{2}\sin(\theta)}_{=2}.$$

On veut donc que $\cos(\theta) = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. D'après le cercle trigonométrique, il suffit par exemple de choisir $\theta = \frac{\pi}{4}$. Ainsi, on a :

$$q_1 = 2\sqrt{2}e^{i\pi/4} \quad \text{et} \quad q_2 = \overline{q_1} = \overline{2\sqrt{2}e^{i\pi/4}} = 2\sqrt{2}e^{-i\pi/4}.$$

D'après le théorème sur la forme du terme général d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 dans le cas où $\Delta < 0$, on sait qu'il existe deux constantes $(A,B) \in \mathbb{R}^2$ telles que :

$$\forall n \geqslant 1, \quad u_n = \left(2\sqrt{2}\right)^{n-1}\left(A\cos\left((n-1)\tfrac{\pi}{4}\right) + B\sin\left((n-1)\tfrac{\pi}{4}\right)\right).$$

Attention à l'ordre des quantificateurs ! A et B sont deux constantes, c'est-à-dire deux réels qui ne dépendent pas du rang n.

Pour trouver les constantes A et B, on utilise les premiers termes de la suite.
Pour $n=1$. On a $u_1 = 1$ et :

$$u_1 = \underbrace{\left(2\sqrt{2}\right)^{1-1}}_{=1}\left(A\underbrace{\cos\left((1-1)\tfrac{\pi}{4}\right)}_{=1} + B\underbrace{\sin\left((1-1)\tfrac{\pi}{4}\right)}_{=0}\right) = A.$$

On en déduit que $A = 1$.
Pour $n=2$. On a $u_2 = 1$ et :

$$u_2 = \underbrace{\left(2\sqrt{2}\right)^{2-1}}_{=2\sqrt{2}}\left(\underbrace{A}_{=1}\underbrace{\cos\left((2-1)\tfrac{\pi}{4}\right)}_{=\sqrt{2}/2} + B\underbrace{\sin\left((2-1)\tfrac{\pi}{4}\right)}_{=\sqrt{2}/2}\right) = 2\sqrt{2}\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2} + B\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2(1+B).$$

On en déduit que $1 = 2+2B$ donc $B = -1/2$.
Conclusion. Finalement, on obtient :

$$\boxed{\forall n \geqslant 1, \quad u_n = \left(2\sqrt{2}\right)^{n-1}\left(\cos\left((n-1)\tfrac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2}\sin\left((n-1)\tfrac{\pi}{4}\right)\right)}.$$

DS n° 3 de mathématiques et d'informatique

durée : 3 heures

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}$. Simplifier les sommes :

1. $S_n = \displaystyle\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} (j-i)$ 2. $T_n = \displaystyle\sum_{1 \leq i,j \leq n} i \cdot j^2$ 3. $U_n = \displaystyle\sum_{0 \leq j \leq k \leq n} \binom{k}{j} 2^{k-2j}$.

Exercice 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{1 \leq k \leq 2n} (-1)^k k^3$ et on cherche à simplifier cette expression.

1. (INFO) Écrire une fonction Python `somme(n)` prenant en argument un entier naturel n et qui renvoie la valeur de S_n.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $S_n = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (2k)^3 \right) - \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^3 \right)$.
3. Soient a, b des réels. Développer $(a+b)^3$.
4. En déduire une expression simplifiée de S_n.

Exercice 3

Soit un paramètre réel a. On considère la fonction $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in D_{f_a}, f_a(x) = \frac{x^2 - a^2}{x^2 + 2ax + a}.$$

1. Déterminer le domaine de définition de f_a. On pourra procéder par disjonction de cas. Dans quel cas f_a est-elle une application ?
2. Déterminer l'ensemble des antécédents de 0 par f_a. On veillera à vérifier que les éléments trouvés appartiennent à D_{f_a}.
3. Étude de la fonction f_1.
   (a) (INFO) Écrire une fonction `trace(n)` prenant en argument un entier naturel n et qui trace le graphe de la fonction f_1 sur le segment $[1, 2]$ en considérant $n+1$ points équirépartis de ce segment.
   (b) La fonction f_1 est-elle injective ? Surjective ? Justifier vos réponses.

Exercice 4

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 1, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2 + u_n}.$$

1. (INFO) Écrire une fonction Python `suite(n)` prenant en argument un entier naturel n et qui renvoie la valeur u_n.
2. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n > 0$.
3. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle monotone ? Justifier votre réponse.
4. Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 1, | u_n - u_{n-1} | \leq \frac{|u_1 - u_0|}{4^{n-1}}$.
5. (INFO) En déduire une fonction `petit_intervalle(a)` prenant en argument un réel strictement positif, et qui renvoie une liste $[u_n, u_{n+1}]$ vérifiant $| u_{n+1} - u_n | < a$.

Exercice 5

Résoudre l'équation d'inconnue $\theta \in \mathbb{R}$ suivante :

$$\cos(10\theta) + \cos(11\theta) + \cos(12\theta) + \cdots + \cos(98\theta) + \cos(99\theta) = 0.$$

Indication : montrer que le membre de gauche est égale à $\dfrac{\cos\left(\frac{109\theta}{2}\right)\sin(45\theta)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$ lorsque $\theta \notin \left\{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Exercice 6

Dans cet exercice, on fixe un entier $n \geqslant 2$ et on souhaite calculer le produit suivant :

$$P = \prod_{k=2}^{n} \frac{k^3+1}{k^3-1}.$$

1. **[Informatique]** Écrire en Python une fonction `produit` qui prend en argument l'entier n et qui renvoie la valeur de P.
2. Résoudre l'équation $z^2 + z + 1 = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Dans la suite de l'exercice, on note j l'unique solution de $z^2 + z + 1 = 0$ de partie imaginaire positive.

3. Écrire j sous forme exponentielle et calculer j^3.
4. Montrer que pour tout $Z \in \mathbb{C}$:

$$Z^3 + 1 = \big(Z+1\big)\big(Z+j\big)\big(Z+j^2\big) \quad \text{et} \quad Z^3 - 1 = \big(Z-1\big)\big(Z-j\big)\big(Z-j^2\big).$$

5. En déduire que :

$$P = \frac{\prod_{k=2}^{n}(k+1)}{\prod_{k=2}^{n}(k-1)} \left(\prod_{k=2}^{n} \frac{j+k}{j+k+1}\right) \left(\prod_{k=2}^{n} \frac{-j+k-1}{-j+k}\right)$$

.

6. Conclure en déterminant une expression simplifiée de P.

Exercice 7

On considère l'ensemble E des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} - 3u_{n+1} + 2u_n = 0.$$

Les trois questions de cet exercice sont indépendantes.

1. **[Informatique]** Écrire en Python une fonction `suite(u0,u1,u2,n)` qui prend en arguments trois réels et un entier $n \geqslant 3$ puis qui renvoie la valeur de u_n où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite de E de termes initiaux $u_0 =$ `u0`, $u_1 =$ `u1` et $u_2 =$ `u2`.
2. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartenant à E telle que $a_0 = 4$, $a_1 = -5$ et $a_2 = 13$. On considère la suite auxiliaire $(a'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $a'_n = a_{n+1} + 2a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Calculer a'_0, a'_1 et a'_2.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer a'_{n+2} en fonction de a'_{n+1} et a'_n.
   (c) Montrer par récurrence que $(a'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = -2a_n + 3$.
   (d) Déterminer le terme général de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartenant à E telle que $b_0 = 2$, $b_1 = -2$ et $b_2 = 3$. On considère la suite auxiliaire $(b'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $b'_n = b_n - (-2)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ b'_{n+2} - 2b'_{n+1} + b'_n = 0$.
   (b) Déterminer le terme général de $(b'_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (c) En déduire le terme général de $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 8

On pose :

$$z = \frac{2+i}{2-i}.$$

Le but de cet exercice est de montrer que le complexe z n'est pas une racine de l'unité, c'est-à-dire que $z^n = 1$ pour aucune valeur de $n \in \mathbb{N}^*$. Pour cela, on raisonne par l'absurde en supposant l'existence d'un $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $z^n = 1$, c'est-à-dire tel que $(2+i)^n = (2-i)^n$. De plus, on pose :

$$S = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} (2-i)^{k-1} (2i)^{n-k}.$$

1. On considère l'ensemble :
$$\mathbb{L} = \left\{ a + ib \in \mathbb{C} \mid (a,b) \in \mathbb{Z}^2 \right\}.$$
   (a) Soient $(z_1, z_2) \in \mathbb{L}^2$. Montrer que $z_1 + z_2 \in \mathbb{L}$ et $z_1 z_2 \in \mathbb{L}$.
   (b) En déduire que $S \in \mathbb{L}$ puis que $|S|^2 \in \mathbb{Z}$.
2. Montrer que $S = \dfrac{(2i)^n}{i-2}$ puis calculer $|S|^2$.
3. Conclure.

Corrigé du DS n° 3 de mathématiques et d'informatique

Exercice 1
Énoncé et corrigé de V. Vong

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. On a

$$\begin{aligned}
S_n &= \textstyle\sum_{1\leq i\leq j\leq n}(j-i)\\
&= \textstyle\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}(j-i)\\
&= \textstyle\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=0}^{j-1}(l) && \text{par le changement de variable } l=j-i\\
&= \textstyle\sum_{j=1}^{n}\frac{j(j-1)}{2}\\
&= \tfrac{1}{2}\left(\textstyle\sum_{j=1}^{n}(j^2-j)\right)\\
&= \tfrac{1}{2}\left(\textstyle\sum_{j=1}^{n}j^2-\sum_{j=1}^{n}j\right)\\
&= \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\tfrac{n(n+1)}{2}\right) && \text{d'après les formules usuelles}\\
&= \tfrac{n(n+1)}{12}(2n+1-3)\\
&= \boxed{\frac{n(n+1)(n-1)}{6}.}
\end{aligned}$$

2. On a

$$\begin{aligned}
T_n &= \textstyle\sum_{1\leq i,j\leq n} ij^2\\
&= \textstyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} ij^2\\
&= \textstyle\sum_{i=1}^{n} i\left(\sum_{j=1}^{n}j^2\right)\\
&= \textstyle\sum_{i=1}^{n} i\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\\
&= \left(\tfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)\textstyle\sum_{i=1}^{n} i\\
&= \left(\tfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)\cdot\tfrac{n(n+1)}{2}\\
&= \boxed{\frac{n^2(n+1)^2(2n+1)}{12}}
\end{aligned}$$

3. On a

$$\begin{aligned}
U_n &= \textstyle\sum_{0\leq j\leq k\leq n} \binom{k}{j} 2^{k-2j} \\
&= \textstyle\sum_{k=0} \left(\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} 2^{k-2j}\right) \\
&= \textstyle\sum_{k=0} 2^k \left(\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{4}\right)^j\right) \\
&= \textstyle\sum_{k=0}^{n} 2^k \left(1+\frac{1}{4}\right)^k && \text{d'après la formule du binôme} \\
&= \textstyle\sum_{k=0}^{n} 2^k \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^k \\
&= \textstyle\sum_{k=0}^{n} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^k
\end{aligned}$$

on reconnaît une somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $\frac{5}{2} \neq 1$. Donc

$$U_n = \frac{1-\left(\frac{5}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{5}{2}}.$$

Donc

$$\boxed{U_n = \frac{2}{3} \cdot \left(\left(\frac{5}{2}\right)^{n+1} - 1\right)}.$$

Exercice 2
Énoncé et corrigé de V. Vong

1. Voici la fonction demandée :

```
def somme(n) :
    S = 0
    for k in range(1,2*n+1) :
        S = S + (k**3)*(-1)**k
    return S
```

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$S_n = \left(\sum_{\substack{1\leq k\leq 2n \\ \text{k pair}}} (-1)^k k^3\right) + \left(\sum_{\substack{1\leq k\leq 2n \\ \text{k impair}}} (-1)^k k^3\right)$$

On effectue le changement de variable $k = 2p$ dans la première somme. On a alors $1 \leq k \leq 2n \iff 1 \leq p \leq n$. car p est un entier. Donc

$$S_n = \left(\sum_{p=1}^{n} (-1)^{2p} (2p)^3\right) + \left(\sum_{\substack{1\leq k\leq 2n \\ \text{k impair}}} (-1)^k k^3\right)$$

On effectue le changement de variable $k=2p-1$ dans la deuxième somme. On a alors : $1 \leq 2p-1 \leq 2n \iff 1 \leq p \leq n$ car p est un entier.
Donc
$$S_n = \left(\sum_{p=1}^{n} (-1)^{2p} (2p)^3\right) + \left(\sum_{p=1}^{n} (-1)^{2p-1} (2p-1)^3\right)$$
D'où
$$\boxed{S_n = \left(\sum_{p=1}^{n} (2p)^3\right) - \left(\sum_{p=1}^{n} (2p-1)^3\right)}$$

3. Soient a, b des réels. D'après la formule du binôme et le triangle de Pascal, on obtient :
$$\boxed{(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$$
.

4. On a d'après la question 1,
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (2k)^3 - \sum_{k=1}^{n} (2k-1)^3 .$$
En développant à l'aide de la formule trouvée dans la question 2, on trouve
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (2k)^3 - \sum_{k=1}^{n} \left((2k)^3 - 12k^2 + 6k - 1\right).$$
Donc en simplifiant :
$$S_n = 12\sum_{k=1}^{n} k^2 - 6\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1$$
En appliquant les formules usuelles, on trouve
$$S_n = 2n(n+1)(2n+1) - 3n(n+1) + n$$
En factorisant :
$$S_n = n(2(n+1)(2n+1) - 3(n+1) + 1).$$
Donc :
$$S_n = n((n+1)(4n+2-3) + 1)$$
Donc :
$$S_n = n((n+1)(4n-1) + 1).$$
D'où
$$S_n = n(4n^2 + 3n)$$
Donc
$$\boxed{S_n = n^2(4n+3)}.$$

Exercice 3
Énoncé et corrigé de V. Vong

Soit un paramètre réel a. On considère la fonction $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :
$$\forall x \in D_{f_a}, f_a(x) = \frac{x^2 - a^2}{x^2 + 2ax + a}.$$

1. Déterminons le domaine de définition de f_a. Pour cela, déterminons d'abord les solutions d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ suivante :
$$x^2 + 2ax + a = 0.$$
On reconnaît une équation du second degré de discriminant $\Delta = 4a^2 - 4a = 4a\,(a-1)$.
   - Cas 1 : $a \in]0,1[$.
     Le discriminant est alors strictement négatif. Donc l'équation n'a pas de solution réelle.
     Dans ce cas, $D_{f_a} = \mathbb{R}$.
   - Cas 2 : $a \in]-\infty, 0[\cup]1,+\infty[$.
     Le discriminant est alors strictement positif. L'équation admet donc exactement deux solutions :
     $$x_1 = \frac{-2a + 2\sqrt{a(a-1)}}{2}, x_2 = \frac{-2a - 2\sqrt{a(a-1)}}{2}.$$
     Donc
     $$x_1 = -a + \sqrt{a(a-1)}, x_2 = -a - \sqrt{a(a-1)}.$$
     On en déduit que $D_{f_a} = \mathbb{R}\backslash\{-a + \sqrt{a(a-1)}, -a - \sqrt{a(a-1)}\}$
   - Cas 3 : $a = 0$ L'unique solution de l'équation est donnée par $x_1 = 0$.
     On a alors $D_{f_a} = \mathbb{R}\backslash\{0\}$.
   - Cas 4 : $a = 1$. L'unique solution de l'équation est donnée par $x = -1$.
     On a alors $D_{f_a} = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$

   De l'étude précédente, on en déduit que f_a est une application si et seulement si $a \in]0,1[$.
2. Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit $x \in D_{f_a}$ Raisonnons par équivalence :
$$f_a\,(x) = 0 \iff x^2 - a^2 = 0 \iff x = a \text{ ou } x = -a.$$
Vérifions si a et $-a$ sont bien des éléments de D_{f_a}. On se place dans le cas où $a \in \mathbb{R}\backslash]0,1[$. Raisonnons par équivalence :
$$-a = -a + \sqrt{a(a-1)} \iff \sqrt{a(a-1)} = 0 \iff a = 0 \text{ ou } a = 1.$$
De plus,
$$-a = -a - \sqrt{a(a-1)} \iff a = 0 \text{ ou } a = 1.$$
On en déduit que $-a$ est solution si et seulement si $a \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$. De même :
$$\begin{aligned} a = -a + \sqrt{a(a-1)} &\iff 2a = \sqrt{a(a-1)} \\ &\iff (4a^2 = a^2 - a) \wedge (a \geq 0) \\ &\iff (3a^2 + a = 0) \wedge (a \geq 0) \\ &\iff a = 0 \end{aligned}.$$
De plus,
$$\begin{aligned} a = -a - \sqrt{a(a-1)} &\iff 2a = -\sqrt{a(a-1)} \\ &\iff (4a^2 = a^2 - a) \wedge (a \leq 0) \\ &\iff (3a^2 + a = 0) \wedge (a \leq 0) \\ &\iff a = 0 \text{ ou } a = \tfrac{-1}{3} \end{aligned}.$$
On en déduit que a est solution si et seulement si $a \in \mathbb{R}\backslash\{0, -\frac{1}{3}\}$
En résumé,

— Pour tout $a \in \mathbb{R} \backslash \{-\frac{1}{3}, 0, 1\}$ les antécédents de 0 par f_a sont exactement a et $-a$,

— l'unique antécédent de 0 par f_1 est la valeur 1,

— l'unique antécédent de 0 par $f_{-\frac{1}{3}}$ est la valeur $\frac{1}{3}$,

— 0 n'a pas d'antécédent par f_0.

3. Étude de la fonction f_1.

(a) Voici la fonction demandée :

```
import matplotlib.pyplot as mpl
def trace(n) :
    L = [1+i/n for i in range(n+1)]
    M = [(x**2-1)/(x**2+2*x+1) for x in L]
    mpl.plot(L,M)
```

(b) Soit $x \in \mathbb{R} \backslash \{-1\}$, soit $y \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} f_1(x) = y &\iff \tfrac{x^2-1}{x^2+2x+1} = y \\ &\iff \tfrac{(x-1)(x+1)}{(x+1)^2} = y \\ &\iff \tfrac{x-1}{x+1} = y \\ &\iff x - 1 = y(x+1) \\ &\iff x(1-y) = 1 + y \end{aligned}.$$

On remarque alors pour $y = 1$, cette équation n'a pas de solution. Donc f n'est pas surjective. En supposant que $y \neq 1$, on a alors

$$f_1(x) = y \iff x = \frac{1+y}{1-y}.$$

On remarque alors pour tout $y \in \mathbb{R} \backslash \{1\}$, cette équation admet une unique solution. 0n en déduit que pour tout $y \in \mathbb{R}$, l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R} \backslash \{-1\}$ $f(x) = y$ admet au plus une unique solution. Donc f est injective.

Exercice 4
Énoncé et corrigé de V. Vong

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 1, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2+u_n}.$$

1. Voici la fonction demandée :

```
def suite(n) :
    u = 1
    for _ in range(n) :
        u = 1/(2+u)
    return u
```

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n) : u_n > 0$. Démontrons P par récurrence.
   — Initialisation : on a $u_0 = 1 > 0$.
   Donc $P(0)$ est vraie.
   — Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie. Montrons que $P(n+1)$ est vraie.
   D'après $P(n)$, on a $u_n > 0$. Donc $2 + u_n > 0$. Or l'inverse d'un nombre stricement positif est strictement positif. Autrement dit,
   $$\frac{1}{2+u_n} > 0.$$
   Donc $u_{n+1} > 0$. $P(n+1)$ est bien vérifiée.
   — Conclusion : d'après le principe de récurrence, on en conlut que
   $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0}.$$

3. Remarquons que $u_0 = 1, u_1 = \frac{1}{3}, u_2 = \frac{3}{7}$. On a $u_0 > u_1$. Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas croissante. De plus, $u_1 < u_2$. Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas décroissante. Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas monotone.

4. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $P(n) : \mid u_n - u_{n-1} \mid \leq \frac{|u_1-u_0|}{4^{n-1}}$.
   — Initialisation : On a $\mid u_1 - u_0 \mid = \frac{|u_1-u_0|}{4^0}$
   Donc $P(1)$ est vraie.
   — Hérédité : soit n un entier supérieur à 1. Supposons que $P(n)$ est vraie. Montrons que $P(n+1)$ est vraie. On a :
   $$\mid u_{n+1} - u_n \mid = \mid \frac{1}{2+u_n} - \frac{1}{2+u_{n-1}} \mid .$$
   En réduisant au même dénominateur, on obtient
   $$\mid u_{n+1} - u_n \mid = \mid \frac{u_{n-1} - u_n}{(2+u_n)(2+u_{n-1})} \mid .$$
   Or $u_n > 0$ et $u_{n-1} > 0$. Donc $(2+u_n)(2+u_{n-1}) \geq 4$. D'où
   $$\mid u_{n+1} - u_n \mid \leq \mid \frac{u_{n-1} - u_n}{4} \mid .$$
   D'après $P(n)$, on en déduit que
   $$\mid u_{n+1} - u_n \mid \leq \mid \frac{u_{n-1} - u_n}{4} \mid \leq \frac{\mid u_1 - u_0 \mid}{4^n}.$$
   $P(n+1)$ est bien vérifiée.
   — Conclusion : d'après le principe de récurrence, on en déduit que
   $$\boxed{\forall n \geq 1, \mid u_n - u_{n-1} \mid \leq \frac{\mid u_1 - u_0 \mid}{4^{n-1}}}.$$

5. Voici la fonction demandée :

```
def petit_intervalle(a) :
    u0 = 1
    u1 = 1/3
    while abs(u1-u0) > a :
        u0 = u1
        u1 = 1/(2+u1)
    return [u0,u1]
```

Autre possibilité :

```
def petit_intervalle(a) :
    n = 1
    while (2/3)*(1/(4**(n-1))) > a :
        n = n+1
    return [suite(n-1),suite(n)]
```

Exercice 5

Résoudre l'équation d'inconnue $\theta \in \mathbb{R}$ suivante :

$$\cos(10\theta) + \cos(11\theta) + \cos(12\theta) + \cdots + \cos(98\theta) + \cos(99\theta) = 0.$$

Indication : montrer que le membre de gauche est égale à $\dfrac{\cos\left(\frac{109\theta}{2}\right)\sin(45\theta)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$ *lorsque* $\theta \notin \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

▶ Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
&\cos(10\theta) + \cos(11\theta) + \cos(12\theta) + \cdots + \cos(98\theta) + \cos(99\theta) \\
=& \sum_{n=10}^{99} \cos(n\theta) \\
=& \sum_{n=10}^{99} \mathrm{Re}\big(e^{in\theta}\big) \quad \text{car } e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta) \\
=& \mathrm{Re}\left(\sum_{n=10}^{99} \left(e^{i\theta}\right)^n\right).
\end{aligned}$$

On reconnaît la somme d'une progression géométrique de raison $e^{i\theta}$. On raisonne par disjonction de cas.
<u>1^er cas : $e^{i\theta} = 1$</u>, c'est-à-dire $\theta \in \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ d'après le cercle unité. Dans ce cas :

$$\cos(10\theta) + \cos(11\theta) + \cdots + \cos(99\theta) = \mathrm{Re}\left(\sum_{n=10}^{99} 1^n\right) = \mathrm{Re}\big(\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{99-10+1=90 \text{ fois}}\big) = 90 \neq 0.$$

Donc l'équation n'a pas de solutions dans $\{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

> *N'oubliez pas de distinguer le cas où $e^{i\theta} = 1$ puisque la formule de la somme d'une progression géométrique n'est pas valable dans le cas où la raison est égale à 1.*

<u>2^e cas : $e^{i\theta} \neq 1$</u>, c'est-à-dire $\theta \notin \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ d'après le cercle unité. Dans ce cas :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=10}^{99} \left(e^{i\theta}\right)^n &= \sum_{m=0}^{89} \left(e^{i\theta}\right)^{m+10} \quad \text{à l'aide du décalage d'indice } m = n - 10 \iff n = m + 10 \\
&= \left(e^{i\theta}\right)^{10} \sum_{m=0}^{89} \left(e^{i\theta}\right)^m \quad \text{par linéarité car } \left(e^{i\theta}\right)^{m+10} = \left(e^{i\theta}\right)^m \left(e^{i\theta}\right)^{10} \\
&= e^{i10\theta} \frac{1 - \left(e^{i\theta}\right)^{90}}{1 - e^{i\theta}} \quad \text{d'après la formule de la somme d'une progression géométrique car } e^{i\theta} \neq 1 \\
&= e^{i10\theta} \frac{e^{i0} - e^{i90\theta}}{e^{i0} - e^{i\theta}} \quad \text{car } e^{i0} = 1.
\end{aligned}$$

De plus, on a par factorisation par l'angle moitié et d'après les formules d'Euler :

$$e^{i0} - e^{i90\theta} = e^{i45\theta}\left(e^{-i45\theta} - e^{i45\theta}\right) = e^{i45\theta} 2i \sin(-45\theta) = -2i\sin(45\theta) e^{i45\theta}$$

$$\text{et de même} \quad e^{i0} - e^{i\theta} = -2i\sin(\theta/2)e^{i\theta/2}.$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\cos(10\theta)+\cos(11\theta)+\cdots+\cos(99\theta) &= \mathrm{Re}\left(e^{i10\theta}\frac{-2i\sin(45\theta)e^{i45\theta}}{-2i\sin(\theta/2)e^{i\theta/2}}\right)\\
&= \mathrm{Re}\left(e^{i(10+45-1/2)\theta}\frac{\sin(45\theta)}{\sin(\theta/2)}\right)\\
&= \mathrm{Re}\left(e^{i109\theta/2}\frac{\sin(45\theta)}{\sin(\theta/2)}\right)\\
&= \mathrm{Re}\left(\left(\cos(\tfrac{109\theta}{2})+i\sin(\tfrac{109\theta}{2})\right)\frac{\sin(45\theta)}{\sin(\theta/2)}\right)\\
&= \cos\left(\tfrac{109\theta}{2}\right)\frac{\sin(45\theta)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}.
\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}
&\cos(10\theta)+\cos(11\theta)+\cos(12\theta)+\cdots+\cos(98\theta)+\cos(99\theta)=0\\
\iff\ &\cos\left(\tfrac{109\theta}{2}\right)\frac{\sin(45\theta)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}=0\\
\iff\ &\cos\left(\tfrac{109\theta}{2}\right)=0 \quad \text{ou} \quad \sin(45\theta)=0\\
\iff\ &\exists k\in\mathbb{Z},\quad \tfrac{109\theta}{2}=\tfrac{\pi}{2}+k\pi \quad \text{ou} \quad 45\theta=k\pi\\
\iff\ &\exists k\in\mathbb{Z},\quad \theta=\tfrac{\pi}{109}+\tfrac{2k\pi}{109} \quad \text{ou} \quad \theta=\tfrac{k\pi}{45}.
\end{aligned}$$

Finalement, l'ensemble des solutions est :

$$\boxed{\left\{\tfrac{\pi}{109}+\tfrac{2k\pi}{109}\mid k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\tfrac{k\pi}{45}\mid k\in\mathbb{Z}\right\}\setminus\left\{2k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\right\}}.$$

N'oubliez pas de retirer les valeurs de θ du 1er cas.

Exercice 6

Dans cet exercice, on fixe un entier $n \geqslant 2$ et on souhaite calculer le produit suivant :

$$P=\prod_{k=2}^{n}\frac{k^3+1}{k^3-1}.$$

1. ***[Informatique]*** *Écrire en Python une fonction* `produit` *qui prend en argument l'entier n et qui renvoie la valeur de P.*

   ► Par exemple :

```
def produit(n):
    P=1
    for k in range(2,n+1):
        P=P*((k**3+1)/(k**3-1))
    return P
```

2. *Résoudre l'équation $z^2+z+1=0$ d'inconnue $z\in\mathbb{C}$.*

   ► On reconnaît une équation du second degré à coefficients réels. Son discriminant est égal à :

$$\Delta = 1^2-4\times1\times1=-3<0.$$

L'équation admet donc deux solutions complexes conjuguées :

$$z=\boxed{\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}} \quad \text{ou} \quad z=\boxed{\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}}.$$

Dans la suite de l'exercice, on note j l'unique solution de $z^2+z+1=0$ de partie imaginaire positive.

3. *Écrire j sous forme exponentielle et calculer j^3.*

   ▶ D'après le résultat de la question précédente, on a $j = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$. Donc :
$$|j| = \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = 1.$$
   On cherche un argument θ de j. On a $j = |j|e^{i\theta} = e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$, donc :
$$\cos(\theta) = \frac{-1}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$
   D'après le cercle trigonométrique, on en déduit qu'on peut choisir par exemple $\theta = \frac{2\pi}{3}$, ainsi :
$$\boxed{j = e^{i2\pi/3}}.$$
   Et donc :
$$j^3 = \left(e^{i2\pi/3}\right)^3 = e^{i2\pi} = \boxed{1}.$$

4. *Montrer que pour tout $Z \in \mathbb{C}$:*
$$Z^3+1 = (Z+1)(Z+j)(Z+j^2) \quad \textit{et} \quad Z^3-1 = (Z-1)(Z-j)(Z-j^2).$$

   ▶ Soit $Z \in \mathbb{C}$. On a :
$$\begin{aligned}(Z+1)(Z+j)(Z+j^2) &= (Z^2+jZ+Z+j)(Z+j^2)\\ &= Z^3+j^2Z^2+jZ^2+j^3Z+Z^2+j^2Z+jZ+j^3\\ &= Z^3+(j^2+j+1)Z^2+j(j^2+j+1)Z+j^3.\end{aligned}$$
   Or $j^3=1$ d'après le résultat de la question précédente et $j^2+j+1=0$ car j est une solution de l'équation $z^2+z+1=0$ d'après le résultat de la question 2. Par conséquent :
$$\boxed{(Z+1)(Z+j)(Z+j^2) = Z^3+1}.$$
   De même, on a :
$$(Z-1)(Z-j)(Z-j^2) = Z^3-(j^2+j+1)Z^2+j(j^2+j+1)Z-j^3 = \boxed{Z^3-1}.$$

5. *En déduire que :*
$$P = \frac{\prod_{k=2}^n (k+1)}{\prod_{k=2}^n (k-1)} \left(\prod_{k=2}^n \frac{j+k}{j+k+1}\right)\left(\prod_{k=2}^n \frac{-j+k-1}{-j+k}\right)$$
   .

   ▶ On a :
$$\begin{aligned}P &= \prod_{k=2}^n \frac{k^3+1}{k^3-1}\\ &= \prod_{k=2}^n \frac{(k+1)(k+j)(k+j^2)}{(k-1)(k-j)(k-j^2)} \quad \text{d'après le résultat de la question précédente.}\end{aligned}$$

De plus, $j^2+j+1=0$ donc $j^2=-j-1$ car j est une solution de l'équation $z^2+z+1=0$ d'après le résultat de la question 2. Donc :

$$\begin{aligned} P &= \prod_{k=2}^{n} \frac{(k+1)(k+j)(k-j-1)}{(k-1)(k-j)(k-(-j-1))} \\ &= \prod_{k=2}^{n} \frac{(k+1)(j+k)(-j+k-1)}{(k-1)(-j+k)(j+k+1)} \\ &= \boxed{\frac{\prod_{k=2}^{n}(k+1)}{\prod_{k=2}^{n}(k-1)} \left(\prod_{k=2}^{n} \frac{j+k}{j+k+1}\right)\left(\prod_{k=2}^{n} \frac{-j+k-1}{-j+k}\right)} \quad \text{par multiplicativité du produit.} \end{aligned}$$

6. *Conclure en déterminant une expression simplifiée de P.*

▶ On a :

$$\begin{aligned} \prod_{k=2}^{n}(k+1) &= \prod_{\ell=3}^{n+1} \ell \quad \text{à l'aide du décalage d'indice } \ell = k+1 \\ &= \frac{\prod_{\ell=1}^{n+1}\ell}{\prod_{\ell=1}^{2}\ell} \quad \text{par associativité} \\ &= \frac{(n+1)!}{1\times 2} \quad \text{en reconnaissant la définition de la factorielle} \\ &= \frac{(n+1)!}{2}. \end{aligned}$$

De même :

$$\prod_{k=2}^{n}(k-1) = \prod_{\ell=1}^{n-1} \ell = (n-1)!.$$

D'autre part :

$$\prod_{k=2}^{n} \frac{j+k}{j+k+1} = \frac{j+2}{j+n+1} \quad \text{en reconnaissant un produit télescopique.}$$

De même :

$$\prod_{k=2}^{n} \frac{-j+k-1}{-j+k} = \frac{-j+1}{-j+n}.$$

D'après le résultat de la question précédente, on en déduit que :

$$\begin{aligned} P &= \frac{\prod_{k=2}^{n}(k+1)}{\prod_{k=2}^{n}(k-1)} \left(\prod_{k=2}^{n} \frac{j+k}{j+k+1}\right)\left(\prod_{k=2}^{n} \frac{-j+k-1}{-j+k}\right) \\ &= \frac{\frac{(n+1)!}{2}}{(n-1)!} \left(\frac{j+2}{j+n+1}\right)\left(\frac{-j+1}{-j+n}\right) \\ &= \frac{\overbrace{(n+1)!}^{=(n-1)!\times n\times(n+1)}}{2(n-1!)} \times \frac{(j+2)(-j+1)}{(j+n+1)(-j+n)} \\ &= \frac{n(n+1)}{2} \times \frac{-j^2-j+2}{-j^2-j+n(n+1)} \\ &= \frac{n(n+1)}{2} \times \frac{j+1-j+2}{j+1-j+n(n+1)} \quad \text{car } j^2+j+1=0 \text{ donc } -j^2=j+1 \\ &= \frac{n(n+1)}{2} \times \frac{3}{n^2+n+1} \\ &= \boxed{\frac{3n(n+1)}{2(n^2+n+1)}}. \end{aligned}$$

N'oubliez pas de simplifier l'expression finale qui ne doit plus contenir le nombre complexe j puisque P est réel comme produit de nombres réels.

Exercice 7

On considère l'ensemble E des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} - 3u_{n+1} + 2u_n = 0.$$

Les trois questions de cet exercice sont indépendantes.

1. ***[Informatique]** Écrire en Python une fonction `suite(u0,u1,u2,n)` qui prend en arguments trois réels et un entier $n \geqslant 3$ puis qui renvoie la valeur de u_n où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite de E de termes initiaux $u_0 =$ `u0`, $u_1 =$ `u1` et $u_2 =$ `u2`.*

   ▶ Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de E, on a :

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} = 3u_{n+1} - 2u_n.$$

   Donc :

```
def suite(u0,u1,u2,n):
    for k in range(3,n+1):
        u=3*u1-2*u0
        u0=u1
        u1=u2
        u2=u
    return u
```

2. *Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartenant à E telle que $a_0 = 4$, $a_1 = -5$ et $a_2 = 13$. On considère la suite auxiliaire $(a'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $a'_n = a_{n+1} + 2a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

   (a) *Calculer a'_0, a'_1 et a'_2.*

   ▶ On a :

   $$\begin{aligned} a'_0 &= a_1 + 2a_0 = -5 + 2\times 4 = \boxed{3}, \\ a'_1 &= a_2 + 2a_1 = 13 + 2\times(-5) = \boxed{3}, \\ a'_2 &= a_3 + 2a_2. \end{aligned}$$

   Or, puisque $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à E, on a :

   $$a_3 - 3a_1 + 2a_0 \quad \text{donc} \quad a_3 = 3a_1 - 2a_0 = 3\times(-5) - 2\times 4 = -23.$$

   Donc :

   $$a'_2 = a_3 + 2a_2 = -23 + 2\times 13 = \boxed{3}.$$

   (b) *Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer a'_{n+2} en fonction de a'_{n+1} et a'_n.*

   ▶ Puisque $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à E, on a :

   $$a_{n+3} - 3a_{n+1} + 2a_n \quad \text{donc} \quad a_{n+3} = 3a_{n+1} - 2a_n.$$

   On a :

   $$\begin{aligned} a'_{n+2} &= a_{n+3} + 2a_{n+2} \\ &= 3a_{n+1} - 2a_n + 2a_{n+2} \\ &= 2\big(\underbrace{a_{n+2} + 2a_{n+1}}_{=a'_{n+1}}\big) - 4a_{n+1} + 3a_{n+1} - 2a_n \\ &= 2a'_{n+1} - \big(\underbrace{a_{n+1} + 2a_n}_{=a'_n}\big) \\ &= \boxed{2a'_{n+1} - a'_n}. \end{aligned}$$

(c) *Montrer par récurrence que $(a'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = -2a_n + 3$.*

▶ On raisonne par récurrence double pour montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ a'_n = 3$.
Initialisation. Pour $n = 0$ et $n = 1$ on a d'après le résultat de la question 2(a) : $a'_0 = a'_1 = 3$.
Hérédité. On fixe $n \in \mathbb{N}$ et on suppose que $a'_n = a'_{n+1} = 3$. On a :

$$\begin{aligned} a'_{n+2} &= 2a'_{n+1} - a'_n \quad \text{d'après le résultat de la question précédente} \\ &= 2\times 3 - 3 \quad \text{par hypothèses de récurrence} \\ &= 3. \end{aligned}$$

Donc le résultat est vrai au rang $n+2$ s'il est vrai aux rangs n et $n+1$, et cette implication est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Conclusion. D'après le principe de récurrence double, on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N},\ a'_n = 3$. En particulier, la suite $\boxed{(a'_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est constante}}$. Par conséquent, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ d'après la définition de la suite $(a'_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$a_{n+1} + 2a_n = a'_n = 3 \quad \text{donc} \quad \boxed{a_{n+1} = -2a_n + 3}.$$

(d) *Déterminer le terme général de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

▶ D'après le résultat de la question précédente, on reconnaît une suite arithmético-géométrique. On commence par résoudre l'équation suivante d'inconnue $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\alpha = -2\alpha + 3 \iff 3\alpha = 3 \iff \alpha = 1.$$

Puis on pose la suite auxiliaire $(a''_n = a_n - \alpha = a_n - 1)_{n\in\mathbb{N}}$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$ d'après le résultat de la question précédente :

$$a''_{n+1} = a_{n+1} - 1 = -2a_n + 3 - 1 = -2a_n + 2 = -2(a_n - 1) = -2a''_n.$$

On reconnaît une suite géométrique de raison -2. Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a''_n = (-2)^n a''_0 = (-2)^n(a_0 - 1) = (-2)^n(4-1) = 3(-2)^n.$$

Par conséquent :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = a''_n + 1 = \boxed{3(-2)^n + 1}.$$

3. *Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartenant à E telle que $b_0 = 2$, $b_1 = -2$ et $b_2 = 3$. On considère la suite auxiliaire $(b'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $b'_n = b_n - (-2)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

(a) *Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ b'_{n+2} - 2b'_{n+1} + b'_n = 0$.*

▶ Initialisation. On a :

$$\begin{aligned} b'_0 &= b_0 - (-2)^0 = 2 - 1 = 1, \\ b'_1 &= b_1 - (-2)^1 = -2 + 2 = 0, \\ b'_2 &= b_2 - (-2)^2 = 3 - 4 = -1. \end{aligned}$$

Donc :

$$b'_2 - 2b'_1 + b'_0 = -1 - 2\times 0 + 1 = 0.$$

Donc la relation est vraie au rang $n = 0$.

Hérédité. On fixe $n \in \mathbb{N}$ et on suppose que $b'_{n+2} - 2b'_{n+1} + b'_n = 0$. On a :

$$\begin{aligned}
& b'_{n+3} - 2b'_{n+2} + b'_{n+1} \\
=& b_{n+3} - (-2)^{n+3} - 2\big(b_{n+2} - (-2)^{n+2}\big) + b_{n+1} - (-2)^{n+1} \quad \text{par définition de } (b'_n)_{n\in\mathbb{N}} \\
=& b_{n+3} - 2b_{n+2} + b_{n+1} - (-2)^n\big((-2)^3 - 2(-2)^2 + (-2)\big) \\
=& \big(\underbrace{b_{n+3} - 3b_{n+1} + 2b_n}_{=0}\big) + 3b_{n+1} - 2b_n - 2b_{n+2} + b_{n+1} - (-2)^n(-8-8-2) \\
=& -2b_{n+2} + 4b_{n+1} - 2b_n + 18(-2)^n \quad \text{car } (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ appartient à } E \\
=& -2\big(\underbrace{b_{n+2} - (-2)^{n+2}}_{=b'_{n+2}}\big) - 2(-2)^{n+2} + 4\big(\underbrace{b_{n+1} - (-2)^{n+1}}_{=b'_{n+1}}\big) + 4(-2)^{n+1} \\
& \qquad - 2\big(\underbrace{b_n - (-2)^n}_{=b'_n}\big) - 2(-2)^n + 18(-2)^n \\
=& -2b'_{n+2} + 4b'_{n+1} - 2b'_n + (-2)^n\big(-2(-2)^2 + 4(-2) - 2\big) \\
& \qquad + 18(-2)^n \quad \text{par définition de } (b'_n)_{n\in\mathbb{N}} \\
=& -2\big(\underbrace{b'_{n+2} - 2b'_{n+1} + b'_n}_{=0}\big) + (-2)^n(-8-8-2) + 18(-2)^n \\
=& -18(-2)^n + 18(-2)^n \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\
=& 0.
\end{aligned}$$

Donc la relation est vraie au rang $n+1$ si elle est vraie au rang n, et cette implication est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Conclusion. D'après le principe de récurrence, on en déduit que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ b'_{n+2} - 2b'_{n+1} + b'_n = 0}$.

(b) *Déterminer le terme général de $(b'_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*
▶ D'après le résultat de la question précédente, on reconnaît une suite récurrente linéaire d'ordre deux. On commence par résoudre l'équation suivante d'inconnue $q \in \mathbb{C}$:

$$q^2 - 2q + 1 = 0 \iff (q-1)^2 = 0 \iff q - 1 = 0 \iff q = 1 \quad \text{en reconnaissant une identité remarquable.}$$

Puisque cette équation du second degré à coefficients réels admet une unique solution, on en déduit que son discriminant est égal à zéro et qu'il existe deux constantes $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad b'_n = (\lambda + \mu n)1^n = \lambda + \mu n.$$

Pour déterminer les constantes λ et μ, on utilise les premiers termes $b'_0 = 1$ et $b'_1 = 0$ calculés à la question précédente (initialisation de la récurrence) :

$$1 = b'_0 = \lambda + \mu \times 0 = \lambda \quad \text{et} \quad 0 = b'_1 = \lambda + \mu \times 1 = \lambda + \mu \quad \text{donc} \quad \begin{cases} \lambda = 1 \\ \mu = -\lambda = -1. \end{cases}$$

Finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \boxed{b'_n = 1 - n}.$$

(c) *En déduire le terme général de $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*
▶ D'après le résultat de la question précédente et la définition de $(b'_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n = b'_n + (-2)^n = \boxed{1 - n + (-2)^n}.$$

Exercice 8

On pose :

$$z = \frac{2+i}{2-i}.$$

Le but de cet exercice est de montrer que le complexe z n'est pas une racine de l'unité, c'est-à-dire que $z^n = 1$ pour aucune valeur de $n \in \mathbb{N}^*$. Pour cela, on raisonne par l'absurde en supposant l'existence d'un $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $z^n = 1$, c'est-à-dire tel que $(2+i)^n = (2-i)^n$. De plus, on pose :

$$S = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} (2-i)^{k-1}(2i)^{n-k}.$$

1. *On considère l'ensemble :*

$$\mathbb{L} = \left\{ a + ib \in \mathbb{C} \mid (a,b) \in \mathbb{Z}^2 \right\}.$$

(a) *Soient $(z_1, z_2) \in \mathbb{L}^2$. Montrer que $z_1 + z_2 \in \mathbb{L}$ et $z_1 z_2 \in \mathbb{L}$.*

▶ Puisque z_1 et z_2 appartiennent à $\mathbb{L}$, on peut poser $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$ où $(a_1, b_1) \in \mathbb{Z}^2$ et $(a_2, b_2) \in \mathbb{Z}^2$. On a :

$$z_1 + z_2 = (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = \underbrace{(a_1 + a_2)}_{=a} + i \underbrace{(b_1 + b_2)}_{=b}.$$

Or $a_1 + a_2$ et $b_1 + b_2$ sont des entiers comme sommes d'entiers, donc $(a_1 + a_2, b_1 + b_2) \in \mathbb{Z}^2$. Par conséquent, $\boxed{z_1 + z_2 \in \mathbb{L}}$. De même :

$$z_1 z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = \underbrace{(a_1 a_2 - b_1 b_2)}_{=a} + i \underbrace{(a_1 b_2 + a_2 b_1)}_{=b}.$$

Donc $(a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1) \in \mathbb{Z}^2$ comme sommes et produits d'entiers. Par conséquent, $\boxed{z_1 z_2 \in \mathbb{L}}$.

En généralisant, on a donc démontré que toute somme et tout produit d'éléments quelconques de $\mathbb{L}$ appartient à $\mathbb{L}$.

(b) *En déduire que $S \in \mathbb{L}$ puis que $|S|^2 \in \mathbb{Z}$.*

▶ On a $2 - i \in \mathbb{L}$ car $(2, -1) \in \mathbb{Z}^2$ et $2i \in \mathbb{L}$ car $(0, 2) \in \mathbb{Z}^2$. Donc pour tout $k \in \{1, 2 \dots, n-1\}$:

$$(2-i)^{k-1} = \underbrace{\underbrace{(2-i)}_{\in \mathbb{L}} \times \underbrace{(2-i)}_{\in \mathbb{L}} \times \cdots \times \underbrace{(2-i)}_{\in \mathbb{L}}}_{k-1 \text{ fois}} \in \mathbb{L} \quad \text{d'après le résultat de la question précédente}$$

$$\text{et de même} \quad (2i)^{n-k} = \underbrace{\underbrace{2i}_{\in \mathbb{L}} \times \underbrace{2i}_{\in \mathbb{L}} \times \cdots \times \underbrace{2i}_{\in \mathbb{L}}}_{n-k \text{ fois}} \in \mathbb{L}.$$

Par conséquent :

$$\underbrace{(2-i)^{k-1}}_{\in \mathbb{L}} \times \underbrace{(2i)^{n-k}}_{\in \mathbb{L}} \in \mathbb{L} \quad \text{d'après le résultat de la question précédente.}$$

De plus, on sait que $\binom{n}{k} \in \mathbb{Z}$, donc les parties réelle et imaginaire de $\binom{n}{k}(2-i)^{k-1}(2i)^{n-k}$ sont des entiers comme produits d'entiers. Donc $\binom{n}{k}(2-i)^{k-1}(2i)^{n-k} \in \mathbb{L}$ pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$. On en déduit que :

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} (2-i)^{k-1}(2i)^{n-k} \\ &= \underbrace{\binom{n}{1}(2-i)^{1-1}(2i)^{n-1}}_{\in \mathbb{L}} + \underbrace{\binom{n}{2}(2-i)^{2-1}(2i)^{n-2}}_{\in \mathbb{L}} + \cdots + \underbrace{\binom{n}{n-1}(2-i)^{n-1-1}(2i)^{n-(n-1)}}_{\in \mathbb{L}} \\ &\in \mathbb{L} \quad \text{d'après le résultat de la question précédente.} \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{S \in \mathbb{L}}$. On peut donc poser $S = a + ib$ où $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$. Par définition du module, on a :

$$|S|^2 = \left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)^2 = a^2 + b^2.$$

Donc $\boxed{|S|^2 \in \mathbb{Z}}$ comme somme de carrés d'entiers.

2. *Montrer que* $S = \dfrac{(2i)^n}{i-2}$ *puis calculer* $|S|^2$.

► On a :

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} (2-i)^{k-1} (2i)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (2-i)^{k-1} (2i)^{n-k} - \binom{n}{0} (2-i)^{0-1} (2i)^{n-0} - \binom{n}{n} (2-i)^{n-1} (2i)^{n-n} \quad \text{par associativité} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(2-i)^k}{2-i} (2i)^{n-k} - \frac{(2i)^n}{2-i} - \frac{(2-i)^n}{2-i} \quad \text{car } \tbinom{n}{0} = \tbinom{n}{n} = 1 \text{ et par propriétés des puissances} \\
&= \frac{1}{2-i} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (2-i)^k (2i)^{n-k} + \frac{(2i)^n}{i-2} - \frac{(2-i)^n}{2-i} \quad \text{par linéarité} \\
&= \frac{1}{2-i} \big((2-i) + (2i)\big)^n + \frac{(2i)^n}{i-2} - \frac{(2-i)^n}{2-i} \quad \text{d'après la formule du binôme de Newton} \\
&= \frac{(2+i)^n}{2-i} + \frac{(2i)^n}{i-2} - \frac{(2-i)^n}{2-i} \\
&= \frac{(2i)^n}{i-2} + \frac{1}{2-i} \big((2+i)^n - (2-i)^n\big).
\end{aligned}$$

Or, on a supposé dans l'énoncé que $(2+i)^n = (2-i)^n$, donc $(2+i)^n - (2-i)^n = 0$. Par conséquent :

$$\boxed{S = \frac{(2i)^n}{i-2}}.$$

D'après les propriétés du module, on en déduit que :

$$|S|^2 = \left|\frac{(2i)^n}{i-2}\right|^2 = \frac{(|2i|^2)^n}{|i-2|^2} = \frac{(0^2+2^2)^n}{(-2)^2+1^2} = \boxed{\frac{4^n}{5}}.$$

3. *Conclure.*

► Puisque 4 est un entier pair, 4^n aussi. Puisque 5 est un entier impair, on en déduit que $|S|^2 = 4^n/5$ n'est pas un entier d'après le résultat de la question précédente. Or on a montré que $|S|^2 \in \mathbb{Z}$ à la question 1(b), donc c'est absurde. Par conséquent, on vient de démontrer par l'absurde qu'il n'existe pas de $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $z^n = 1$. Autrement dit, $\boxed{z = (2+i)/(2-i) \text{ n'est pas une racine de l'unité}}$.

DS n$^{\text{o}}$ 4 de mathématiques et d'informatique

durée : 3 heures

Exercice 1

On considère des grilles de mots croisés ayant 7 lignes, 6 colonnes et 10 cases noires (toutes les autres cases sont vides). Il est demandé de justifier chaque réponse mais les résultats n'ont pas besoin d'être simplifiés.

1. Combien peut-on former de telles grilles différentes ?
2. Parmi ces grilles, combien d'entre-elles ont :
   (a) aucune case noire dans la première ligne ?
   (b) au moins une case noire dans un coin ?
   (c) au plus deux cases noires dans la première colonne ?
   (d) une seule case noire dans la dernière ligne et une seule case noire dans la dernière colonne ?
3. Combien y a-t-il de façons différentes de remplir une telle grille (avec l'alphabet latin) ?

Exercice 2

On considère l'application suivante :

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto \varphi(x, y, z) = \big(z - y - x, -2x + z, -2y + 3z - 4x\big).$$

Pour chaque $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose $\varphi_\lambda = \varphi - \lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$ l'application définie par :

$$\varphi_\lambda : (x, y, z) \mapsto \big(z - y - x - \lambda x, -2x + z - \lambda y, -2y + 3z - 4x - \lambda z\big).$$

1. Dans cette question, on fixe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Échelonner le système $\varphi_\lambda(x, y, z) = (a, b, c)$ d'inconnues $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et déterminer son rang en fonction des valeurs de λ.
2. Dans cette question, on suppose que $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Justifier que l'application $\varphi_\lambda : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ est bijective et déterminer sa bijection réciproque.
3. En exhibant des contre-exemples, justifier que les applications $\varphi = \varphi_0$ et φ_1 sont ni injectives, ni surjectives.

Exercice 3

On considère la fonction réelle suivante :

$$f : x \mapsto f(x) = \big(x^2 - 1\big) \ln\left(\left|\frac{1 + x}{1 - x}\right|\right).$$

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de f.
2. Étudier la parité de f sur $\mathscr{D}$. Dans la suite de l'exercice, on pose $\mathscr{D}_+ = \mathscr{D} \cap [0, +\infty[$.
3. Justifier que f est dérivable sur $\mathscr{D}_+$ et calculer f' sur cet ensemble.
4. On pose la fonction auxiliaire $g : x \mapsto \dfrac{f'(x)}{2x} = \ln\left(\left|\dfrac{1 + x}{1 - x}\right|\right) - \dfrac{1}{x}$ définie sur $\mathscr{D}_+^* = \mathscr{D}_+ \setminus \{0\}$.
   (a) Justifier que g est dérivable sur $\mathscr{D}_+^*$ et calculer g' sur cet ensemble.
   (b) Dresser le tableau des variations de g sur $\mathscr{D}_+^*$.
   (c) Montrer que $\lim_{x\to 0^+} g(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 1^-} g(x) = \lim_{x\to 1^+} g(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$.
   (d) Justifier que g s'annule une unique fois sur $\mathscr{D}_+^*$. Dans la suite, on note α l'unique réel positif tel que $g(\alpha) = 0$.
5. Dresser le tableau des variations de f sur $\mathscr{D}$. Les limites au bord de $\mathscr{D}$ ne sont pas demandées ni les valeurs en α et $-\alpha$.

Exercice 4

On souhaite calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \quad \text{où} \quad f : x \mapsto \frac{x}{x^3+8}.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f puis justifier que I est bien définie.
2. Trouver trois constantes reélles a_1, a_2 et a_3 telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\},\ f(x) = \frac{a_1}{x+2} + \frac{a_2(x-1)}{x^2-2x+4} + \frac{a_3}{x^2-2x+4}.$$

3. Déterminer une primitive sur $[0,1]$ des fonctions $f_1 : x \mapsto \dfrac{1}{x+2}$ et $f_2 : x \mapsto \dfrac{x-1}{x^2-2x+4}$.
4. On pose $f_3 : x \mapsto \dfrac{1}{x^2-2x+4}$. À l'aide du changement de variable $t = \dfrac{1-x}{\sqrt{3}}$, montrer que :

$$\int_0^1 f_3(x)\mathrm{d}x = C \int_0^{\sqrt{3}/3} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} \quad \text{où } C \text{ est une constante réelle à déterminer.}$$

5. Conclure en calculant une valeur simplifiée de I.

Exercice 5

Soit $\alpha > 0$. Trouver une valeur $\beta > 0$ vérifiant :

$$\forall x > 0, (x^\alpha)^{\ln\left(x^\beta\right)} = e^{\ln(x)^2}.$$

Exercice 6

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0,n]\!]$ on pose

$$I_k(n) = \binom{n}{k} \int_0^1 x^k (1-x)^{n-k}\, dx.$$

1. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0,n-1]\!]$, on a $I_{k+1}(n) = I_k(n)$.
   On pourra effectuer une intégration par parties en la justifiant et en considérant les fonctions

$$u : x \mapsto x^k, v : x \mapsto (1-x)^{n-k}.$$

2. En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0,n]\!]$ la valeur de $I_k(n)$.
3. En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0,n]\!]$ la valeur de $\int_0^1 x^k (1-x)^{n-k}\, dx$.
4. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0,n]\!]$. En déduire à l'aide de la question 3 une simplification de

$$\sum_{\ell=0}^{n-k} \binom{n-k}{\ell} \frac{(-1)^\ell}{\ell+k+1}.$$

Exercice 7

Étant donné un mot M sur l'alphabet latin, on dit que M est un palindrome s'il se lit indifféremment de gauche à droite et de droite à gauche. Par exemple, les mots "kayak" et "abba" sont des palindromes. De manière formelle, pour $M = a_1a_2\dots a_n$, le mot M est un palindrome si :

$$\forall k \in [\![1,n]\!], a_k = a_{n+1-k}.$$

Dans la suite, les mots considérés sont écrits à l'aide de l'alphabet latin et comportent au moins une lettre.

1. Pour chacun des mots suivants, indiquer s'il s'agit oui ou non d'un palindrome.

(a) yoyo (b) radar (c) otto (d) aaha.

2. Déterminer le nombre de palindromes ayant exactement 3 lettres.
3. Déterminer le nombre de palindromes ayant exactement 4 lettres.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^{\star}$, déterminer le nombre de mots ayant exactement n lettres et qui sont des palindromes. On pourra procéder par disjonction de cas sur la parité de l'entier n.
5. Soit $N \geq 1$. En déduire le nombre de palindromes ayant au plus $2N$ lettres et comportant au moins une lettre. On donnera une expression simplifiée.
6. Soit $N \geq 1$.
   (a) Déterminer le nombre de palindromes ayant au plus $2N$ lettres, comportant au moins une lettre et n'ayant aucune voyelle. On pourra s'inspirer de ce qui a été fait précédemment.
   (b) En déduire le nombre de palindromes ayant au plus $2N$ lettres et comportant au moins une voyelle.

Exercice 8

Écrire les fonctions demandées en Python.

1. Écrire une fonction `plus_petit(L,p)` prenant en arguments une liste de nombre `L` et un nombre `p` et qui retourne la liste des éléments de `L` qui sont plus petits ou égaux à `p`.
2. (a) Écrire une fonction `produit(L)` prenant en argument une liste de nombres et qui retourne le produit des valeurs de la liste `L`. Par exemple, `produit([3,1,5,6])` est égal à 90.
   (b) On considère la fonction `mystere(L)` suivante :

```
def mystere(L) :
    M = []
    for k in range(len(L)) :
        M.append(produit(L[k]))
    return M
```

   i. "En éxécutant `mystere([3,4,1])`, on obtient une erreur." Justifier cette affirmation.
   ii. Expliciter la liste `mystere([[3,1,5,2],[2,4,1,0],[7,6]])`.

3. Écrire une fonction `est_triee_sans_repet(L)` prenant en argument une liste de nombres et qui retourne `True` si la liste est triée dans l'ordre croissant et ne contient pas de répétition et `False` sinon.
4. Écrire une fonction `approx(erreur)` prenant en argument un réel `erreur` et qui retourne un liste `[a,b]` vérifiant

$$\texttt{a<}\sqrt{5}\texttt{<b} \text{ et } \texttt{b-a<erreur}.$$

Corrigé du DS n^{o} 4 de mathématiques et d'informatique

Exercice 1

On considère des grilles de mots croisés ayant 7 lignes, 6 colonnes et 10 cases noires (toutes les autres cases sont vides). Il est demandé de justifier chaque réponse mais les résultats n'ont pas besoin d'être simplifiés.

1. *Combien peut-on former de telles grilles différentes ?*

   ► Chaque grille contient $7 \times 6 = 42$ cases. Dénombrer les grilles différentes revient à compter les façons de placer les 10 cases noires parmi les 42 cases. Le nombre de grilles différentes est donc égal au nombre de 10-combinaisons d'un ensemble à 42 éléments, c'est-à-dire :

$$\boxed{\binom{42}{10}}.$$

2. *Parmi ces grilles, combien d'entre-elles ont :*

   (a) *aucune case noire dans la première ligne ?*

   ► La première ligne contient 6 cases. Il y a donc $42 - 6 = 36$ cases qui ne sont pas dans la première ligne. En raisonnant comme à la question précédente, le nombre de grilles différentes ayant aucune case noire dans la première ligne est égal à :

$$\boxed{\binom{36}{10}}.$$

   (b) *au moins une case noire dans un coin ?*

   ► Le complémentaire de l'ensemble des grilles ayant au moins une case noire dans un coin est l'ensemble des grilles n'ayant aucune case noire dans un coin. Puisqu'il y a $42 - 4 = 38$ cases qui ne sont pas dans un coin, le nombre de grilles différentes ayant au moins une case noire dans un coin est égal à :

$$\boxed{\binom{42}{10} - \binom{38}{10}}.$$

On peut aussi partitionner en quatre cas disjoints :

- *un seul coin occupé par une case noire ;*
- *deux coins occupés par une case noire ;*
- *trois coins occupés par une case noire ;*
- *tous les coins occupés par une case noire.*

On obtient :

$$\binom{4}{1}\binom{38}{9} + \binom{4}{2}\binom{38}{8} + \binom{4}{3}\binom{38}{7} + \binom{4}{4}\binom{38}{6}.$$

Les deux résultats sont bien égaux d'après la formule de Vandermonde :

$$\binom{42}{10} = \sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}\binom{38}{10-k}.$$

(c) *au plus deux cases noires dans la première colonne ?*

► Avoir au plus deux cases noires dans la première colonne revient à avoir l'un des trois cas suivants :

— aucune case noire dans la première colonne ;

— ou bien une seule case noire dans la première colonne ;

— ou bien exactement deux cases noires dans la première colonne.

Le nombre de grilles différentes ayant au plus deux cases noires dans la première colonne est donc égal à :

$$\underbrace{\binom{42-7}{10}}_{\substack{\text{choix de 10 cases}\\ \text{pas dans la } 1^{\text{re}} \text{ colonne}}} \overbrace{+}^{\text{ou bien}} \underbrace{\binom{7}{1}}_{\substack{\text{choix de 1 case}\\ \text{dans la } 1^{\text{re}} \text{ colonne}}} \overbrace{\times}^{\text{et puis}} \underbrace{\binom{42-7}{9}}_{\substack{\text{choix de 9 cases}\\ \text{pas dans la } 1^{\text{re}} \text{ colonne}}} \overbrace{+}^{\text{ou bien}} \underbrace{\binom{7}{2}}_{\substack{\text{choix de 2 cases}\\ \text{dans la } 1^{\text{re}} \text{ colonne}}} \overbrace{\times}^{\text{et puis}} \underbrace{\binom{42-7}{8}}_{\substack{\text{choix de 8 cases}\\ \text{pas dans la } 1^{\text{re}} \text{ colonne}}}$$

$$= \boxed{\binom{35}{10} + 7\binom{35}{9} + 21\binom{35}{8}}.$$

On peut également passer au complémentaire en dénombrant les grilles ayant au moins trois cases noires dans la première colonne, c'est-à-dire :

$$\binom{42}{10} - \binom{7}{3}\binom{35}{7} - \binom{7}{4}\binom{35}{6} - \binom{7}{5}\binom{35}{5} - \binom{7}{6}\binom{35}{4} - \binom{7}{7}\binom{35}{3}.$$

Les deux résultats sont bien égaux d'après la formule de Vandermonde :

$$\binom{42}{10} = \sum_{k=0}^{8} \binom{7}{k}\binom{35}{10-k}.$$

(d) *une seule case noire dans la dernière ligne et une seule case noire dans la dernière colonne ?*

► Avoir une seule case noire dans la dernière ligne et une seule case noire dans la dernière colonne revient à avoir l'un des deux cas suivants :

— une case noire à l'intersection de la dernière ligne et de la dernière colonne, et puis les neuf autres cases noires dans le reste de la grille (qui contient $(7-1)\times(6-1) = 30$ cases) ;

— ou bien une case noire dans la dernière ligne mais pas dans la dernière colonne, et puis une case noire dans la dernière colonne mais pas dans la dernière ligne, et puis les huit autres cases noires dans le reste de la grille.

Le nombre de grilles différentes ayant une seule case noire dans la dernière ligne et une seule case noire dans la dernière colonne est donc égal à :

$$\underbrace{\binom{30}{9}}_{\substack{\text{choix de 9 cases}\\ \text{dans le reste de la grille}}} \overbrace{+}^{\text{ou bien}} \underbrace{\binom{6-1}{1}}_{\substack{\text{choix de 1 case}\\ \text{dans la dernière ligne}}} \overbrace{\times}^{\text{et puis}} \underbrace{\binom{7-1}{1}}_{\substack{\text{choix de 1 case}\\ \text{dans la dernière colonne}}} \overbrace{\times}^{\text{et puis}} \underbrace{\binom{30}{8}}_{\substack{\text{choix de 8 cases}\\ \text{dans le reste de la grille}}}$$

$$= \boxed{\binom{30}{9} + 30\binom{30}{8}}.$$

3. *Combien y a-t-il de façons différentes de remplir une telle grille (avec l'alphabet latin) ?*

► Chaque grille contient $42 - 10 = 32$ cases à remplir (qui ne sont pas noires). Dénombrer les façons différentes de remplir une grille revient à compter les façons de placer une des 26 lettres de l'alphabet latin dans chaque case. Le nombre de façons différentes de remplir une grille est donc égal au nombre de 32-listes avec répétition d'un ensemble à 26 éléments, c'est-à-dire :

$$\boxed{26^{32}}.$$

Exercice 2

On considère l'application suivante :

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x,y,z) \mapsto \varphi(x,y,z) = \big(z - y - x, -2x + z, -2y + 3z - 4x\big).$$

Pour chaque $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose $\varphi_\lambda = \varphi - \lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$ l'application définie par :

$$\varphi_\lambda : (x,y,z) \mapsto \big(z - y - x - \lambda x, -2x + z - \lambda y, -2y + 3z - 4x - \lambda z\big).$$

1. *Dans cette question, on fixe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Échelonner le système $\varphi_\lambda(x,y,z) = (a,b,c)$ d'inconnues $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ et déterminer son rang en fonction des valeurs de λ.*

▶ On utilise la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{aligned}
\varphi_\lambda(x,y,z) = (a,b,c) &\iff \big(z - y - x - \lambda x, -2x + z - \lambda y, -2y + 3z - 4x - \lambda z\big) = (a,b,c) \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} (-1-\lambda)x & - & y & + & z & = & a & L_1 \leftrightarrow L_2 \\ -2x & - & \lambda y & + & z & = & b & L_2 \leftrightarrow L_1 \\ -4x & - & 2y & + & (3-\lambda)z & = & c & \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} \boxed{-2}x & - & \lambda y & + & z & = & b & \\ (-1-\lambda)x & - & y & + & z & = & a & L_2 \leftarrow 2L_2 + (-1-\lambda)L_1 \\ -4x & - & 2y & + & (3-\lambda)z & = & c & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} \boxed{-2}x & - & \lambda y & + & z & = & b & \\ & & (-2+\lambda+\lambda^2)y & + & (1-\lambda)z & = & 2a + (-1-\lambda)b & L_2 \leftrightarrow L_3 \\ & & (-2+2\lambda)y & + & (1-\lambda)z & = & c - 2b & L_3 \leftrightarrow L_2 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \boxed{-2}x & - & \lambda y & + & z & = & b \\ & & (-2+2\lambda)y & + & (1-\lambda)z & = & c - 2b \\ & & (-2+\lambda+\lambda^2)y & + & (1-\lambda)z & = & 2a + (-1-\lambda)b. \end{array}\right.
\end{aligned}$$

<u>1^er^ cas</u> : $-2 + 2\lambda = 0 \iff \boxed{\lambda = 1}$. Alors :

$$\varphi_\lambda(x,y,z) = (a,b,c) \iff \left\{\begin{array}{rcl} \boxed{-2}x - y + z & = & b \\ 0 & = & c - 2b \\ 0 & = & 2a - 2b. \end{array}\right.$$

On obtient un système échelonné de rang 1 dans ce cas.
<u>2^e^ cas</u> : $-2 + 2\lambda \neq 0 \iff \boxed{\lambda \neq 1}$. On a $-2 + 2\lambda = 2(-1+\lambda) \neq 0$ et $-2 + \lambda + \lambda^2$ est un polynôme de degré 2 en λ qui admet pour racines évidente $\lambda = 1$ et $\lambda = -2$ donc :

$$-2 + \lambda + \lambda^2 = (-1+\lambda)(2+\lambda).$$

Pensez à simplifier vos calculs en utilisant les relations coefficients-racines pour factoriser les polynômes de degré 2. Puisque $\lambda_1 = 1$ est une racine de $-2+\lambda+\lambda^2$, la deuxième racine vérifie $\lambda_1 + \lambda_2 = -1$ et $\lambda_1\lambda_2 = -2$, donc $\lambda_2 = -2$.

Ainsi :

$$\begin{aligned}
&\varphi_\lambda(x,y,z)=(a,b,c)\\
\iff &\begin{cases} \boxed{-2}x - \lambda y + z = b \\ \boxed{2(-1+\lambda)}y + (1-\lambda)z = c-2b \\ (-1+\lambda)(2+\lambda)y + (1-\lambda)z = 2a+(-1-\lambda)b & L_3 \leftarrow 2L_3-(2+\lambda)L_2 \end{cases}\\
\iff &\begin{cases} \boxed{-2}x - \lambda y + z = b \\ \boxed{2(-1+\lambda)}y + (1-\lambda)z = c-2b \\ *z = 4a+2(-1-\lambda)b-(2+\lambda)(c-2b) \end{cases}\\
&\text{où}\quad * = 2(1-\lambda)-(2+\lambda)(1-\lambda) = 2-2\lambda-2+\lambda+\lambda^2 = -\lambda+\lambda^2 = \lambda(-1+\lambda).
\end{aligned}$$

De plus :

$$\lambda(-1+\lambda)=0 \iff \big(\lambda=0 \text{ ou } \lambda=1\big) \iff \lambda=0 \quad \text{car } \lambda\neq 1 \text{ dans le } 2^{\text{e}} \text{ cas.}$$

<u>1er sous-cas</u> : $\boxed{\lambda=0}$. Alors :

$$\varphi_\lambda(x,y,z)=(a,b,c) \iff \begin{cases} \boxed{-2}x + z = b \\ \boxed{-2}y + z = c-2b \\ 0 = 4a-2b-2(c-2b). \end{cases}$$

On obtient un système échelonné de rang 2 dans ce sous-cas.
<u>2e sous-cas</u> : $\boxed{\lambda\neq 0}$. Alors :

$$\begin{aligned}
&\varphi_\lambda(x,y,z)=(a,b,c)\\
\iff &\begin{cases} \boxed{-2}x - \lambda y + z = b \\ \boxed{2(-1+\lambda)}y + (1-\lambda)z = c-2b \\ \boxed{\lambda(-1+\lambda)}z = 4a+2(-1-\lambda)b-(2+\lambda)(c-2b). \end{cases}
\end{aligned}$$

On obtient un système échelonné de rang 3 dans ce sous-cas.
<u>Conclusion</u> : le rang du système $\varphi_\lambda(x,y,z)=(a,b,c)$ est égal à :

$$\boxed{\begin{cases} 1 \text{ si } \lambda=1 \\ 2 \text{ si } \lambda=0 \\ 3 \text{ si } \lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}. \end{cases}}$$

2. *Dans cette question, on suppose que $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$. Justifier que l'application $\varphi_\lambda:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ est bijective et déterminer sa bijection réciproque.*

► D'après résultat de la question précédente, le système linéaire $\varphi_\lambda(x,y,z)=(a,b,c)$ est de rang maximal et admet donc une unique solution. Autrement dit, tout $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ admet un unique antécédent $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ par φ_λ. On en déduit que $\boxed{\text{l'application } \varphi_\lambda:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3 \text{ est bijective}}$. De plus, on a en reprenant les calculs pour résoudre le système :

$$\begin{aligned}
&\varphi_\lambda(x,y,z)=(a,b,c)\\
\iff &\left\{\begin{array}{rcrcrcl}
\boxed{-2}x & - & \lambda y & + & z & = & b\\
 & & \boxed{2(-1+\lambda)}y & + & (1-\lambda)z & = & c-2b\\
 & & & & \boxed{\lambda(-1+\lambda)}z & = & 4a+2(-1-\lambda)b-(2+\lambda)(c-2b)
\end{array}\right.\\
\iff &\left\{\begin{aligned}
z &= \frac{1}{\lambda(-1+\lambda)}\big(4a+(-2-2\lambda+4+2\lambda)b-(2+\lambda)c\big)\\
&= \frac{1}{\lambda(-1+\lambda)}\big(4a+2b-(2+\lambda)c\big)\\
y &= \frac{1}{2(-1+\lambda)}\left(c-2b-\frac{(1-\lambda)}{\lambda(-1+\lambda)}\big(4a+2b-(2+\lambda)c\big)\right)\\
&= \frac{1}{2(-1+\lambda)}\left(\frac{1}{\lambda}\big(4a+2b-(2+\lambda)c\big)-2b+c\right)\\
&= \frac{1}{2\lambda(-1+\lambda)}\big(4a+(2-2\lambda)b+(-2-\lambda+\lambda)c\big)\\
&= \frac{1}{\lambda(-1+\lambda)}\big(2a+(1-\lambda)b-c\big)\\
x &= \frac{1}{-2}\left(b+\frac{\lambda}{\lambda(-1+\lambda)}\big(2a+(1-\lambda)b-c\big)-\frac{1}{\lambda(-1+\lambda)}\big(4a+2b-(2+\lambda)c\big)\right)\\
&= \frac{-1}{2\lambda(-1+\lambda)}\big((2\lambda-4)a+(-\lambda+\lambda^2+\lambda-\lambda^2-2)b+(-\lambda+2+\lambda)c\big)\\
&= \frac{1}{\lambda(-1+\lambda)}\big((2-\lambda)a+b-c\big).
\end{aligned}\right.
\end{aligned}$$

Soyez extrêmement soigneux et vigilant pour mener ce type de calculs. Simplifiez dès que vous pouvez et organisez vos expressions.

Par conséquent, l'unique antécédent (x,y,z) de (a,b,c) par φ_λ est égal à :

$$\begin{aligned}
&(x,y,z)\\
=&\left(\frac{1}{\lambda(-1+\lambda)}\big((2-\lambda)a+b-c\big),\frac{1}{\lambda(-1+\lambda)}\big(2a+(1-\lambda)b-c\big),\frac{1}{\lambda(-1+\lambda)}\big(4a+2b-(2+\lambda)c\big)\right)\\
=&\frac{1}{\lambda(-1+\lambda)}\big((2-\lambda)a+b-c,2a+(1-\lambda)b-c,4a+2b-(2+\lambda)c\big).
\end{aligned}$$

Par définition de la bijection réciproque $\varphi_\lambda^{-1}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3,(a,b,c)\mapsto\varphi_\lambda^{-1}(a,b,c)=(x,y,z)$, on en déduit que :

$$\boxed{\varphi_\lambda^{-1}:(a,b,c)\mapsto\frac{1}{\lambda(-1+\lambda)}\big((2-\lambda)a+b-c,2a+(1-\lambda)b-c,4a+2b-(2+\lambda)c\big)}.$$

3. *En exhibant des contre-exemples, justifier que les applications $\varphi=\varphi_0$ et φ_1 sont ni injectives, ni surjectives.*

► 1[er] cas : $\boxed{\lambda=0}$. En reprenant le système obtenu dans la question 1, on a :

$$\varphi_0(x,y,z)=(a,b,c)\iff\left\{\begin{array}{rcrcrcl}
\boxed{-2}x & & & + & z & = & b\\
 & & \boxed{-2}y & + & z & = & c-2b\\
 & & & & 0 & = & 4a-2b-2(c-2b).
\end{array}\right.$$

Pour prouver que φ_0 n'est pas injective, il suffit de trouver un exemple $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ qui admet au moins deux antécédents. Par exemple, pour $(a,b,c)=(0,0,0)$, on a :

$$\varphi_0(x,y,z)=(0,0,0)\iff\left\{\begin{array}{rcrcrcl}
\boxed{-2}x & & & + & z & = & 0\\
 & & \boxed{-2}y & + & z & = & 0\\
 & & & & 0 & = & 0.
\end{array}\right.$$

On obtient un système échelonné de rang 2 avec une équation auxiliaire compatible et une inconnue auxiliaire. Le système admet donc une infinité de solutions (par exemple $(0,0,0)$ et $(1,1,2)$ sont des antécédents de $(0,0,0)$). On en déduit que $\boxed{\varphi_0 \text{ n'est pas injective}}$. D'autre part, pour prouver que φ_0 n'est pas surjective, il suffit de trouver un exemple $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ qui n'admet pas d'antécédents. Par exemple, pour $(a,b,c) = (1,0,0)$, on a :

$$\varphi_0(x,y,z) = (1,0,0) \iff \begin{cases} \boxed{-2}x \qquad\quad + z = 0 \\ \qquad\quad \boxed{-2}y + z = 0 \\ \qquad\qquad\quad 0 = 4. \end{cases}$$

On obtient un système échelonné de rang 2 avec une équation auxiliaire incompatible. Le système n'admet donc pas de solutions (donc $(1,0,0)$ n'admet pas d'antécédents). On en déduit que $\boxed{\varphi_0 \text{ n'est pas surjective}}$.

Il suffit de considérer seulement le second membre de l'équation auxiliaire :

$$4a - 2b - 2(c - 2b) = 4a + 2b - 2c = 2(2a + b - c).$$

Si $2a + b - c = 0$ alors (a,b,c) admet une infinité d'antécédents, sinon il en admet aucun.

<u>2e cas</u> : $\boxed{\lambda = 1}$. En reprenant le système obtenu dans la question 1, on a :

$$\varphi_1(x,y,z) = (a,b,c) \iff \begin{cases} \boxed{-2}x - y + z = b \\ \qquad\qquad 0 = c - 2b \\ \qquad\qquad 0 = 2a - 2b. \end{cases}$$

Par exemple, pour $(a,b,c) = (0,0,0)$, on obtient un système échelonné de rang 1 avec deux équations auxiliaires compatibles et deux inconnues auxiliaires. On en déduit que $(0,0,0)$ admet une infinité d'antécédents et donc que $\boxed{\varphi_1 \text{ n'est pas injective}}$. D'autre part, pour $(a,b,c) = (0,1,0)$, on obtient un système échelonné de rang 1 avec deux équations auxiliaires incompatibles. On en déduit que $(0,1,0)$ n'admet pas d'antécédents et donc que $\boxed{\varphi_1 \text{ n'est pas surjective}}$.

Plus généralement, il suffit de prendre n'importe quel exemple (a,b,c) vérifiant $c - 2b = 0$ et $2a - 2b = 0$ pour justifier que φ_1 n'est pas injective ; et n'importe quel exemple (a,b,c) tel que $c - 2b \neq 0$ ou $2a - 2b \neq 0$ pour justifier que φ_1 n'est pas surjective.

Exercice 3

On considère la fonction réelle suivante :

$$f : x \mapsto f(x) = \left(x^2 - 1\right) \ln\left(\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right).$$

1. *Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de f.*

▶ Le polynôme $x^2 - 1$ est défini pour tout $x \in \mathbb{R}$. Le quotient $\dfrac{1+x}{1-x}$ est défini si et seulement si $1 - x \neq 0 \iff x \neq 1$. Enfin, la fonction ln est définie sur $]0, +\infty[$ et :

$$\left|\frac{1+x}{1-x}\right| > 0 \iff \frac{1+x}{1-x} \neq 0 \iff 1 + x \neq 0 \iff x \neq -1.$$

Finalement, par produit, quotient et composée de fonctions usuelles, f est définie sur :

$$\boxed{\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{1, -1\} =]-\infty, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, +\infty[}.$$

2. *Étudier la parité de f sur $\mathscr{D}$. Dans la suite de l'exercice, on pose $\mathscr{D}_+ = \mathscr{D} \cap [0, +\infty[$.*

► On a pour tout $x \in \mathscr{D}$:

$$\begin{aligned}
f(-x) &= \left((-x)^2 - 1\right) \ln\left(\left|\frac{1+(-x)}{1-(-x)}\right|\right) \\
&= \left(x^2 - 1\right) \ln\left(\frac{|1-x|}{|1+x|}\right) \\
&= \left(x^2 - 1\right) \ln\left(\frac{1}{\frac{|1+x|}{|1-x|}}\right) \\
&= \left(x^2 - 1\right)\left(-\ln\left(\frac{|1+x|}{|1-x|}\right)\right) \quad \text{par propriété de la fonction ln} \\
&= -\left(x^2 - 1\right) \ln\left(\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right) \\
&= -f(x).
\end{aligned}$$

On en déduit que $\boxed{f \text{ est impaire sur } \mathscr{D}}$.

Il suffit donc d'étudier f sur $\boxed{\mathscr{D}_+ = \mathscr{D} \cap [0, +\infty[= [0, 1[\cup]1, +\infty[}$ d'après le résultat de la question précédente.

3. *Justifier que f est dérivable sur $\mathscr{D}_+$ et calculer f' sur cet ensemble.*

► En raisonnant comme à la question 1, $\boxed{f \text{ est dérivable sur } \mathscr{D}_+}$ comme produit, quotient et composée de fonctions dérivables. On a le tableau des signes suivant :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1+x$		$-$	0	$+$		$+$	
$1-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$\dfrac{1+x}{1-x}$		$-$	0	$+$	||	$-$	

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathscr{D}_+ = [0, 1[\cup]1, +\infty[, \quad f(x) &= \left(x^2 - 1\right) \ln\left(\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right) \\
&= \begin{cases} (x^2-1)\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) & \text{si } x \in [0, 1[\\ (x^2-1)\ln\left(-\frac{1+x}{1-x}\right) & \text{si } x \in]1, +\infty[\end{cases} \\
&= \begin{cases} (x^2-1)\big(\ln(1+x) - \ln(1-x)\big) & \text{si } x \in [0, 1[\\ (x^2-1)\big(\ln(1+x) - \ln(x-1)\big) & \text{si } x \in]1, +\infty[. \end{cases}
\end{aligned}$$

Simplifiez vos expressions avant de les dériver. En particulier, débarrassez-vous des valeurs absolues en distinguant plusieurs cas.

On en déduit que :

$$\begin{aligned}\forall x \in [0,1[, \quad f'(x) &= 2x\big(\ln(1+x)-\ln(1-x)\big)+(x^2-1)\left(\frac{1}{1+x}-\frac{-1}{1-x}\right)\\ &= 2x\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)+(x^2-1)\frac{2}{1-x^2}\\ &= 2x\ln\left(\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right)-2\end{aligned}$$

et de même :

$$\begin{aligned}\forall x \in]1,+\infty[, \quad f'(x) &= 2x\big(\ln(1+x)-\ln(x-1)\big)+(x^2-1)\left(\frac{1}{1+x}-\frac{1}{x-1}\right)\\ &= 2x\ln\left(-\frac{1+x}{x-1}\right)+(x^2-1)\frac{-2}{x^2-1}\\ &= 2x\ln\left(\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right)-2.\end{aligned}$$

Finalement, on a :

$$\boxed{\forall x \in \mathscr{D}_+ = [0,1[\cup]1,+\infty[, \quad f'(x) = 2x\ln\left(\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right)-2}.$$

4. On pose la fonction auxiliaire $g : x \mapsto \dfrac{f'(x)}{2x} = \ln\left(\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|\right) - \dfrac{1}{x}$ définie sur $\mathscr{D}_+^* = \mathscr{D}_+ \setminus \{0\}$.

(a) Justifier que g est dérivable sur $\mathscr{D}_+^*$ et calculer g' sur cet ensemble.

► $\boxed{g \text{ est dérivable sur } \mathscr{D}_+^*}$ comme somme, quotient et composée de fonctions dérivables. D'après le tableau des signes obtenu à la question précédente, on a :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathscr{D}_+^* =]0,1[\cup]1,+\infty[, \quad g(x) &= \ln\left(\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right)-\frac{1}{x}\\ &= \begin{cases}\ln(1+x)-\ln(1-x)-\frac{1}{x} & \text{si } x \in]0,1[\\ \ln(1+x)-\ln(x-1)-\frac{1}{x} & \text{si } x \in]1,+\infty[.\end{cases}\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}\forall x \in]0,1[, \quad g'(x) &= \frac{1}{1+x}-\frac{-1}{1-x}-\frac{-1}{x^2}\\ &= \frac{2}{1-x^2}+\frac{1}{x^2}\\ &= \frac{1+x^2}{(1-x^2)x^2}\end{aligned}$$

et de même :

$$\begin{aligned}\forall x \in]1,+\infty[, \quad g'(x) &= \frac{1}{1+x}-\frac{1}{x-1}-\frac{-1}{x^2}\\ &= \frac{-2}{x^2-1}+\frac{1}{x^2}\\ &= \frac{-x^2-1}{(x^2-1)x^2} = \frac{x^2+1}{(1-x^2)x^2}\end{aligned}$$

Finalement, on a :

$$\boxed{\forall x \in \mathscr{D}_+^* =]0,1[\cup]1,+\infty[, \quad g'(x) = \frac{1+x^2}{(1-x^2)x^2}}.$$

(b) Dresser le tableau des variations de g sur $\mathscr{D}_+^*$.

▶ On a d'après la courbe représentative de la fonction carrée :

$$1-x^2>0 \iff x^2<1 \iff x\in]-1,1[.$$

On déduit du résultat de la question précédente le tableau des signes de g' sur $\mathscr{D}_+^*$:

x	0		1		$+\infty$
$1+x^2$		$+$		$+$	
$1-x^2$		$+$	0	$-$	
x^2	0	$+$		$+$	
$g'(x)=\dfrac{1+x^2}{(1-x^2)x^2}$	||	$+$	||	$-$	

D'où le tableau des variations de g sur $\mathscr{D}_+^*$:

x	0		α		1		$+\infty$
$g(x)$	|| $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$ || $+\infty$	↘	0

(c) Montrer que $\lim_{x\to0^+}g(x)=-\infty$, $\lim_{x\to1^-}g(x)=\lim_{x\to1^+}g(x)=+\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}g(x)=0$.

▶ On a :

$$\lim_{x\to0^+}\frac{1+x}{1-x}=\frac{1+0}{1-0}=1 \quad\text{donc}\quad \lim_{x\to0^+}g(x)=\lim_{x\to0^+}\underbrace{\ln\left(\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right)}_{\to\ln(|1|)=0}-\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to+\infty}=\boxed{-\infty}.$$

D'autre part :

$$\lim_{x\to1^-}\frac{\overbrace{1+x}^{\to2}}{\underbrace{1-x}_{\to0^+}}=+\infty \quad\text{et}\quad \lim_{x\to1^+}\frac{\overbrace{1+x}^{\to2}}{\underbrace{1-x}_{\to0^-}}=-\infty.$$

Par conséquent :

$$\lim_{x\to1^-}g(x)=\lim_{x\to1^-}\underbrace{\ln\left(\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right)}_{\to+\infty}-\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to0}=\boxed{+\infty}\quad\text{et de même}\quad\lim_{x\to1^+}g(x)=\boxed{+\infty}.$$

Enfin :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1+x}{1-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}+1}{\frac{1}{x}-1}=\frac{0+1}{0-1}=-1$$

$$\text{donc}\quad\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}\underbrace{\ln\left(\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right)}_{\to\ln(|-1|)=0}-\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to0}=\boxed{-\infty}.$$

(d) *Justifier que g s'annule une unique fois sur $\mathscr{D}_+^*$. Dans la suite, on note α l'unique réel positif tel que $g(\alpha) = 0$.*

▶ D'après les résultats précédents, la fonction g est continue (car dérivable) et strictement croissante sur l'intervalle $]0,1[$. D'après le théorème de la bijection, on en déduit que g réalise une bijection de $]0,1[$ vers $g(]0,1[) =]-\infty,+\infty[$. En particulier, $0 \in]-\infty,+\infty[$ admet un unique antécédent par g dans $]0,1[$. Autrement dit, g s'annule une unique fois sur $]0,1[$. De plus, $g(]1,+\infty[) =]0,+\infty[$ et $0 \notin]0,+\infty[$ donc g ne s'annule pas sur $]1,+\infty[$. Finalement, $\boxed{g \text{ s'annule une unique fois sur } \mathscr{D}_+^* =]0,1[\cup]1,+\infty[}$.

N'oubliez pas de citer les hypothèses du théorème de la bijection (et de tout théorème que vous appliquez). Attention : il n'est pas suffisant de montrer que g s'annule une unique fois sur $]0,1[$ pour pouvoir conclure. Lisez attentivement l'énoncé.

5. *Dresser le tableau des variations de f sur $\mathscr{D}$. Les limites au bord de $\mathscr{D}$ ne sont pas demandées.*

▶ D'après les résultats précédents, on a le tableau des signes de g sur $\mathscr{D}_+^*$:

x	0		α		1		$+\infty$
$g(x)$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	

Par définition de la fonction auxiliaire g, on a :

$$\forall x \in \mathscr{D}_+^* =]0,1[\cup]1,+\infty[, \quad f'(x) = 2xg(x).$$

On en déduit le tableau des signes de f' sur $\mathscr{D}_+^*$:

x	0		α		1		$+\infty$
$2x$	0	$+$		$+$		$+$	
$g(x)$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	

D'où le tableau des variations de f sur $\mathscr{D} =]-\infty,-1[\cup]-1,1[\cup]1,+\infty[$ en utilisant que f est impaire d'après le résultat de la question 2 :

x	$-\infty$		-1		$-\alpha$		0		α		1		$+\infty$
$f(x)$		↗	‖	↗		↘	0	↘		↗	‖	↗	

Exercice 4

On souhaite calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \quad \text{où} \quad f : x \mapsto \frac{x}{x^3+8}.$$

1. *Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f puis justifier que I est bien définie.*

   ► Le quotient $f(x) = x/(x^3+8)$ est défini si et seulement si le dénominateur est non nul. Or :

   $$x^3 + 8 = 0 \iff x^3 = -8 \iff x = \sqrt[3]{-8} = -2.$$

   Donc $\boxed{f \text{ est définie sur } \mathbb{R} \setminus \{-2\}}$ comme quotient de fonctions usuelles. De même, f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ comme quotient de fonctions continues. En particulier, f est continue sur $[1, 2]$. On en déduit que f admet des primitives sur $[1, 2]$ et donc que $\boxed{\text{l'intégrale } I \text{ de } f \text{ sur } [1,2] \text{ est bien définie}}$.

2. *Trouver trois constantes reélles a_1, a_2 et a_3 telles que :*

   $$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\},\ f(x) = \frac{a_1}{x+2} + \frac{a_2(x-1)}{x^2-2x+4} + \frac{a_3}{x^2-2x+4}.$$

   ► On raisonne par analyse-synthèse.
   Analyse. On cherche trois constantes réelles a_1, a_2 et a_3 telles que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$:

   $$f(x) = \frac{a_1}{x+2} + \frac{a_2(x-1)}{x^2-2x+4} + \frac{a_3}{x^2-2x+4}.$$

   Or $f(x) = \dfrac{x}{x^3+8}$ et :

   $$\begin{aligned} \frac{a_1}{x+2} + \frac{a_2(x-1)}{x^2-2x+4} + \frac{a_3}{x^2-2x+4} &= \frac{a_1(x^2-2x+4) + a_2(x-1)(x+2) + a_3(x+2)}{(x+2)(x^2-2x+4)} \\ &= \frac{a_1x^2 - 2a_1x + 4a_1 + a_2x^2 + a_2x - 2a_2 + a_3x + 2a_3}{x^3 - 2x_2 + 4x + 2x^2 - 4x + 8} \\ &= \frac{(a_1+a_2)x^2 + (-2a_1+a_2+a_3)x + (4a_1 - 2a_2 + 2a_3)}{x^3+8}. \end{aligned}$$

   Donc on veut que :

   $$x = (a_1+a_2)x^2 + (-2a_1+a_2+a_3)x + (4a_1 - 2a_2 + 2a_3).$$

   Il suffit que :

   $$a_1 + a_2 = 0, \quad -2a_1 + a_2 + a_3 = 1 \quad \text{et} \quad 4a_1 - 2a_2 + 2a_3 = 0.$$

   On reconnaît un système linéaire d'inconnues $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$:

   $$\begin{cases} \boxed{1}a_1 + a_2 = 0 \\ -2a_1 + a_2 + a_3 = 1 & L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ 4a_1 - 2a_2 + 2a_3 = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1 \end{cases}$$

   $$\iff \begin{cases} \boxed{1}a_1 + a_2 = 0 \\ \boxed{3}a_2 + a_3 = 1 \\ -6a_2 + 2a_3 = 0 & L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \end{cases}$$

   $$\iff \begin{cases} \boxed{1}a_1 + a_2 = 0 \\ \boxed{3}a_2 + a_3 = 1 \\ \boxed{4}a_3 = 2. \end{cases}$$

On obtient un système échelonné de rang maximal. Il admet donc une seule solution égale à :

$$\begin{cases} a_3 = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2} \\ a_2 = \dfrac{1-a_3}{3} = \dfrac{1}{6} \\ a_1 = -a_2 = -\dfrac{1}{6}. \end{cases}$$

<u>Synthèse</u>. On pose $\boxed{a_1 = -\frac{1}{6}}$, $\boxed{a_2 = \frac{1}{6}}$ et $\boxed{a_3 = \frac{1}{2}}$. D'après les calculs effectués en analyse, on a bien :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\},\ f(x) = \frac{-\frac{1}{6}}{x+2} + \frac{\frac{1}{6}(x-1)}{x^2-2x+4} + \frac{\frac{1}{2}}{x^2-2x+4}.$$

3. *Déterminer une primitive sur $[0,1]$ des fonctions $f_1 : x \mapsto \dfrac{1}{x+2}$ et $f_2 : x \mapsto \dfrac{x-1}{x^2-2x+4}$.*

▶ On a :

$$\forall x \in [0,1], \quad f_1(x) = \frac{1}{x+2} = \frac{u'(x)}{u(x)} \quad \text{en posant } u(x) = x+2.$$

Donc une primitive de f_1 sur $[0,1]$ est :

$$\forall x \in [0,1], \quad F_1 = \ln\big(|u(x)|\big) = \ln\big(|x+2|\big).$$

Or si $x \in [0,1]$ alors $x+2 \in [2,3]$, en particulier $x+2 > 0$ donc $|x+2| = x+2$. D'où :

$$\forall x \in [0,1], \quad \boxed{F_1(x) = \ln(x+2)}.$$

De même :

$$\forall x \in [0,1], \quad f_2(x) = \frac{x-1}{x^2-2x+4} = \frac{1}{2} \times \frac{2x-2}{x^2-2x+4} = \frac{1}{2} \times \frac{u'(x)}{u(x)} \quad \text{en posant } u(x) = x^2-2x+4.$$

Donc une primitive de f_2 sur $[0,1]$ est :

$$\forall x \in [0,1], \quad F_2 = \frac{1}{2} \times \ln\big(|u(x)|\big) = \frac{1}{2}\ln\big(|x^2-2x+4|\big).$$

Or le discriminant de x^2-2x+4 est égal à $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 4 = -12 < 0$. On en déduit que $x^2 - 2x + 4 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc que $|x^2-2x+4| = x^2-2x+4$. D'où :

$$\forall x \in [0,1], \quad \boxed{F_2(x) = \frac{1}{2}\ln\big(x^2-2x+4\big)}.$$

Attention : une primitive de u'/u est $\ln(|u|)$. Il est donc nécessaire de vérifier que $u > 0$ pour se débarrasser des valeurs absolues.

4. *On pose $f_3 : x \mapsto \dfrac{1}{x^2-2x+4}$. À l'aide du changement de variable $t = \dfrac{1-x}{\sqrt{3}}$, montrer que :*

$$\int_0^1 f_3(x)\mathrm{d}x = C \int_0^{\sqrt{3}/3} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} \quad \textit{où } C \textit{ est une constante réelle à déterminer.}$$

▶ On a :

$$t = \frac{1-x}{\sqrt{3}} \iff x = 1 - \sqrt{3}t.$$

On effectue le changement de variable $x = \varphi(t)$ en posant la fonction $\varphi : t \mapsto 1 - \sqrt{3}t$. On vérifie les hypothèses du théorème de changement de variable dans une intégrale :

— φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction affine,
— $\varphi' : t \mapsto -\sqrt{3}$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme fonction constante,
— $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}\varphi(t)}{\mathrm{d}t} = \varphi'(t) = -\sqrt{3}$ donc $\mathrm{d}x = -\sqrt{3}\mathrm{d}t$,
— $\varphi(0) = 1 - \sqrt{3} \times 0 = 1$ et $\varphi(\sqrt{3}/3) = 1 - \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 0$.

N'oubliez pas de vérifier les hypothèses d'un théorème avant de l'appliquer.

On peut donc bien appliquer le théorème de changement de variable dans une intégrale. On obtient :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f_3(x)\mathrm{d}x &= \int_0^1 \frac{1}{x^2 - 2x + 4}\mathrm{d}x \\
&= \int_{\sqrt{3}/3}^0 \frac{1}{\left(1 - \sqrt{3}t\right)^2 - 2\left(1 - \sqrt{3}t\right) + 4}\left(-\sqrt{3}\mathrm{d}t\right) \quad \text{en posant } x = 1 - \sqrt{3}t \\
&= -\sqrt{3}\int_{\sqrt{3}/3}^0 \frac{1}{1 - 2\sqrt{3}t + 3t^2 - 2 + 2\sqrt{3}t + 4}\mathrm{d}t \quad \text{par linéarité} \\
&= \sqrt{3}\int_0^{\sqrt{3}/3} \frac{1}{3 + 3t^2}\mathrm{d}t \quad \text{d'après la relation de Chasles} \\
&= \boxed{\frac{\sqrt{3}}{3}\int_0^{\sqrt{3}/3} \frac{\mathrm{d}t}{1 + t^2}} \quad \text{par linéarité.}
\end{aligned}$$

D'où le résultat en posant la constante $\boxed{C = \dfrac{\sqrt{3}}{3}}$.

5. *Conclure en calculant une valeur simplifiée de I.*

► On a d'après les résultats précédents :

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left(\frac{-\frac{1}{6}}{x+2} + \frac{\frac{1}{6}(x-1)}{x^2 - 2x + 4} + \frac{\frac{1}{2}}{x^2 - 2x + 4}\right)\mathrm{d}x \quad \text{d'après le résultat de la question 2} \\
&= -\frac{1}{6}\int_0^1 \underbrace{\frac{1}{x+2}}_{=f_1(x)}\mathrm{d}x + \frac{1}{6}\int_0^1 \underbrace{\frac{x-1}{x^2 - 2x + 4}}_{=f_2(x)}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^1 \underbrace{\frac{1}{x^2 - 2x + 4}}_{=f_3(x)}\mathrm{d}x \quad \text{par linéarité} \\
&= -\frac{1}{6}\int_0^1 f_1(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{6}\int_0^1 f_2(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^1 f_3(x)\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{6}\big[F_1(x)\big]_0^1 + \frac{1}{6}\big[F_2(x)\big]_0^1 + \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{3}\int_0^{\sqrt{3}/3} \frac{\mathrm{d}t}{1 + t^2} \\
&\qquad \text{d'après le théorème fondamental de l'analyse et le résultat de la question 4} \\
&= -\frac{1}{6}\big[\ln(x+2)\big]_0^1 + \frac{1}{6}\left[\frac{1}{2}\ln\left(x^2 - 2x + 4\right)\right]_0^1 + \frac{\sqrt{3}}{6}\big[\arctan(t)\big]_0^{\sqrt{3}/3} \\
&\qquad \text{d'après les résultats de la question 3 et en reconnaissant la dérivée de l'arctangente} \\
&= \frac{-1}{6}\big(\ln(3) - \ln(2)\big) + \frac{1}{12}\big(\ln(3) - \ln(4)\big) + \frac{\sqrt{3}}{6}\left(\arctan\left(\tfrac{\sqrt{3}}{3}\right) - \arctan(0)\right).
\end{aligned}$$

Or :

$$\ln(4) = \ln\left(2^2\right) = 2\ln(2), \quad \arctan(0) = 0 \quad \text{et} \quad \arctan\left(\tfrac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{6} \ (\text{car } \tan(\pi/6) = \sqrt{3}/3).$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}I &= -\frac{1}{6}\ln(3) + \frac{1}{6}\ln(2) + \frac{1}{12}\ln(3) - \frac{1}{6}\ln(2) + \frac{\sqrt{3}}{6} \times \frac{\pi}{6} \\ &= \boxed{-\frac{1}{12}\ln(3) + \frac{\pi\sqrt{3}}{36}}.\end{aligned}$$

Exercice 5
Énoncé et corrigé de V. Vong

Soient $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. On a

$$\forall x > 0, (x^\alpha)^{\ln\left(x^\beta\right)} = e^{\alpha \ln(x) \ln\left(x^\beta\right)}.$$

Donc

$$\forall x > 0, (x^\alpha)^{\ln\left(x^\beta\right)} = e^{\alpha\beta \ln(x)^2}.$$

Posons $\beta = \frac{1}{\alpha}$. On a alors :

$$\forall x > 0, (x^\alpha)^{\ln\left(x^\beta\right)} = e^{\ln(x)^2}.$$

Le nombre $\frac{1}{\alpha}$ est donc une valeur qui convient.

Exercice 6
Énoncé et corrigé de V. Vong

1. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0, n-1]\!]$.
   On définit les fonctions $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, u(x) = \frac{x^{k+1}}{k+1}, v(x) = (1-x)^{n-k-1}.$$

   Les fonctions u et v étant des polynônmes, elles sont donc C^1 sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur $[0,1]$. De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}, u'(x) = x^k, v'(x) = -(n-k)(1-x)^{n-k}.$$

   En intégrant par partie et par linéarité de l'intégrale, on a

$$\int_0^1 x^k (1-x)^{n-k}\,dx = \left[\tfrac{x^{k+1}}{k+1}(1-x)^{n-k}\right]_0^1 + \tfrac{n-k}{k+1}\int_0^1 x^{k+1}(1-x)^{n-(k+1)}\,dx\,.$$

   Or $n-k > 0$. Donc $(1-1)^{n-k} = 0$. D'où

$$\int_0^1 x^k (1-x)^{n-k}\,dx = \tfrac{n-k}{k+1}\int_0^1 x^{k+1}(1-x)^{n-(k+1)}\,dx\,.$$

   En multipliant par $\binom{n}{k}$, on obtient

$$I_k(n) = \binom{n}{k}\left(\frac{n-k}{k+1}\right)\int_0^1 x^{k+1}(1-x)^{n-(k+1)}\,dx.$$

   Donc

$$I_k(n) = \frac{n!\,(n-k)}{k!\,(n-k)!(k+1)}\int_0^1 x^{k+1}(1-x)^{n-(k+1)}\,dx.$$

   D'où

$$I_k(n) = \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}\int_0^1 x^{k+1}(1-x)^{n-(k+1)}\,dx$$

Donc

$$I_k(n) = \frac{n!}{(k+1)!\,(n-(k+1)!)} \int_0^1 x^{k+1} (1-x)^{n-(k+1)}\, dx.$$

Donc

$$I_k(n) = \binom{n}{k+1} \int_0^1 x^{k+1} (1-x)^{n-(k+1)}\, dx.$$

Donc

$$\underline{I_k(n) = I_{k+1}(n).}$$

Cette démonstration étant valide pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a bien

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in [\![0, n-1]\!], I_k(n) = I_{k+1}(n)}.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question 1, on en déduit que la suite finie $(I_k(n))_{0 \leq k \leq n}$ est constante. Autrement dit,

$$\forall k \in [\![0, n]\!], I_k(n) = I_0(n).$$

De plus,

$$\begin{aligned} I_0(n) &= \tbinom{n}{0} \textstyle\int_0^1 x^0 (1-x)^{n-0}\, dx \\ &= \textstyle\int_0^1 (1-x)^n\, dx \\ &= \left[-\tfrac{(1-x)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \\ &= \underline{\tfrac{1}{n+1}} \end{aligned}$$

On en conclut que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in [\![0, n]\!], I_k(n) = \frac{1}{n+1}.}$$

3. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0, n]\!]$. D'après la question 2, on a

$$I_{k(n)} = \frac{1}{n+1}.$$

Donc

$$\binom{n}{k} \int_0^1 x^k (1-x)^{n-k}\, dx = \frac{1}{n+1}.$$

D'où

$$\int_0^1 x^k (1-x)^{n-k}\, dx = \frac{1}{(n+1)\binom{n}{k}}.$$

Cette démonstration étant valide pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0, n]\!]$, on en conclut que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in [\![0, n]\!], \int_0^1 x^k (1-x)^{n-k}\, dx = \frac{1}{(n+1)\binom{n}{k}}}.$$

4. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0, n]\!]$. D'après la formule du binôme et par linéarité, on en déduit que

$$\begin{aligned} \textstyle\int_0^1 x^k (1-x)^{n-k}\, dx &= \textstyle\int_0^1 x^k \left(\sum_{\ell=0}^{n-k} (-1)^\ell \binom{n-k}{\ell}\right) dx \\ &= \textstyle\sum_{\ell=0}^{n-k} (-1)^\ell \binom{n-k}{\ell} \int_0^1 x^{k+\ell} dx \end{aligned}$$

Donc

$$\int_0^1 x^k (1-x)^{n-k}\, dx = \sum_{\ell=0}^{n-k} \binom{n-k}{\ell} \frac{(-1)^\ell}{k+\ell+1}.$$

D'après la question 3, on a

$$\int_0^1 x^k (1-x)^{n-k}\, dx = \frac{1}{(n+1)\binom{n}{k}}.$$

On en déduit que

$$\boxed{\sum_{\ell=0}^{n-k} \binom{n-k}{\ell} \frac{(-1)^\ell}{k+\ell+1} = \frac{1}{(n+1)\binom{n}{k}}}.$$

Exercice 7
Énoncé et corrigé de V. Vong

1. Le mot "yoyo" n'est pas un palindrome car la première lettre est un "y" et la dernière lettre est un "o". Les mots "radar" et "otto" sont bien des palindromes. Le mot "aaha" n'est pas un palindrome car le mot lu de droite à gauche est "ahaa".
2. Tout palindrome à trois lettres est de la forme $a_1a_2a_1$, où a_1 et a_2 sont des lettres de l'alphabet latin quelconques. Réciproquement, tout mot de la forme $a_1a_2a_1$ où a_1 et a_2 sont des lettres de l'alphabet latin quelconques sont des palindromes. Ainsi, compter le nombre de palindromes revient à compter le nombre de façons de choisir a_1 et a_2.
   On en déduit que le nombre de palindromes à trois lettres est égal à :
   $$\boxed{26 \times 26 = 26^2}.$$
3. Les palindromes à quatre lettres sont exactement les mots de la forme $a_1a_2a_2a_1$, où a_1 et a_2 sont des lettres quelconques. Compter le nombre de palindromes à quatre lettres revient alor à compter le nombre de façons de choisir les lettres a_1 et a_2. Donc le nombre de palindromes à quatre lettres est égal à
   $$\boxed{26 \times 26 = 26^2}$$
4. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.
   - Cas 1 : n est pair.
     Il existe donc un entier $p \in \mathbb{N}$ vérfiant $n = 2p$.
     Un palindrome ayant exactement n lettres est exactement de la forme
     $$a_1a_2 \dots a_pa_pa_{p-1} \dots a_2a_1,$$
     où $a_1, \dots, a_p$ sont des lettres quelconques. Ainsi, compter le nombre de palindromes ayant exactement n lettres revient à compter le nombre de façons de choisir les lettres $a_1, \dots, a_p$. On en déduit que le nombre de palindromes ayant exactement n lettres est égal à :
     $$26^p = 26^{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor}.$$
   - Cas 2 : n est impair. Il existe donc un entier $p \in \mathbb{N}$ vérfiant $n = 2p+1$.
     Un palindrome ayant exactement n lettres est exactement de la forme
     $$a_1a_2 \dots a_{p-1}a_pa_{p+1}a_pa_{p-1} \dots a_2a_1,$$
     où $a_1, \dots, a_p, a_{p+1}$ sont des lettres quelconques. Ainsi, compter le nombre de palindromes ayant exactement n lettres revient à compter le nombre de façons de choisir les lettres $a_1, \dots, a_p, a_{p+1}$. On en déduit que le nombre de palindromes ayant exactement n lettres est égal à :
     $$26^{p+1} = 26^{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor}.$$

Par disjonction de cas, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre palindromes ayant exactement n lettres est égal à :

$$\boxed{26^{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor}}.$$

5. Soit $N \geq 1$.
Tout mot ayant un nombre de lettres fixés et ce nombre étant unique, on en déduit que

$$\begin{aligned}&\text{(nombre de palindromes ayant au plus } 2N \text{ lettres)}\\ &= \sum_{k=1}^{2N} \text{(nombre de palindromes ayant exactement } k \text{ lettres)}\end{aligned}$$

D'après la question 4, on en déduit que

$$\text{(nombre de palindromes ayant au plus } 2N \text{ lettres)} = \sum_{k=1}^{2N} 26^{\left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor}.$$

En séparant par parité l'ensemble des indices, on obtient :

$$\text{(nombre de palindromes ayant au plus } 2N \text{ lettres)} = \left(\sum_{\substack{1 \leq k \leq 2N \\ k \text{ pair}}} 26^{\left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor} \right) + \left(\sum_{\substack{1 \leq k \leq 2N \\ k \text{ impair}}} 26^{\left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor}. \right)$$

En effectuant respectivement les changements de variables $k = 2p$ et $k = 2p + 1$ dans la première et deuxième somme, on trouve

$$\text{(nombre de palindromes ayant au plus } 2N \text{ lettres)} = \left(\sum_{p=1}^{N} 26^p \right) + \left(\sum_{p=1}^{N} 26^p. \right)$$

Donc

$$\text{(nombre de palindromes ayant au plus } 2N \text{ lettres)} = 2 \left(\sum_{p=1}^{N} 26^p \right).$$

On reconnaît une somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $26 \neq 1$. Donc

$$\boxed{\text{(nombre de palindromes ayant au plus } 2N \text{ lettres)} = 2 \cdot \frac{26^{N+1} - 26}{25}}.$$

6. Soit $N \geq 1$.
   (a) La démonstration est similaire à la démonstration de la question 5 : il suffit de remplacer le nombre de lettres de l'alphabet latin (26) par le nombre de consonnes (20). Ainsi, le nombre de palindromes ayant au plus $2N$ lettres est égal à

$$\boxed{2 \cdot \frac{20^{N+1} - 20}{19}}.$$

   (b) On remarque qu'on a :

$$\begin{aligned}&\text{(nombre de palindromes ayant au moins une voyelle)}\\ &= \text{(nombre de palindromes)} - \text{(nombre de palindromes sans voyelle)}.\end{aligned}$$

On en déduit que le nombre de palindromes ayant au plus $2N$ lettres et comportant au moins une voyelle est égal à

$$\boxed{2 \cdot \left(\frac{26^{N+1} - 26}{25} - \frac{20^{N+1} - 20}{19} \right)}.$$

Exercice 8
Énoncé et corrigé de V. Vong

1.
```
def plus_petit(L,p) :
    M = []
    for i in range(len(L)) :
        if L[i] <= p :
            M.append(L[i])
    return M
```

2. (a) Voici la fonction `produit` demandée :

```
def produit(L) :
    P = 1
    for i in range(len(L)) :
        P = P*L[i]
    return P
```

(b) i. La fonction `produit` s'applique à des listes de nombres. La fonction `mystere` prend donc en argument une liste de listes de nombres. Or $[3,4,1]$ est une liste d'entiers. On en déduit que `mystere([3,4,1])` renvoie une erreur.

ii. On a :

`mystere([[3,1,5,2],[2,4,1,0],[7,6]])=[30,0,42]`.

3. Voici la fonction demandée :

```
def est_triee_sans_repet(L) :
    for i in range(len(L)-1) :
        if L[i+1] <= L[i] :
            return False
    return True
```

4. Voici la fonction demandée :

```
def approx(erreur) :
    a = 2
    b = 3
    while (b-a)>=erreur :
        c = (a+b)/2
        if c**2 > 5 :
            b = c
        else :
            a = c
    return [a,b]
```

DS n° 5 de mathématiques et d'informatique

durée : 3 heures

Exercice 1

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose :

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k^2}.$$

1. Montrer que les suites $(a_{2n})_{n\geqslant 1}$ et $(a_{2n+1})_{n\geqslant 1}$ sont adjacentes.
2. En déduire que la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente.

Dans la suite de l'exercice, on propose de calculer $\lim_{n\to+\infty} a_n$. Pour cela, on pose pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \quad \text{et} \quad c_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)^2}.$$

De plus, on admet que la suite $(b_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers $\pi^2/6$.

3. (a) Montrer que $b_{2n} = \frac{1}{4}b_n + c_n$ pour tout entier $n \geqslant 1$.
   (b) En déduire que la suite $(c_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers $\pi^2/8$.
4. (a) Montrer que $a_{2n} = \frac{1}{4}b_n - c_n$ pour tout entier $n \geqslant 1$.
   (b) En déduire la valeur de $\lim_{n\to+\infty} a_n$.

Exercice 2

Soient $x : t \mapsto x(t)$ et $y : t \mapsto y(t)$ deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant le système d'équations différentielles suivant :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x'(t) = x(t) + 2y(t) + 5t^2 \\ y'(t) = 3y(t) - x(t) + e^{2t}\sin(t). \end{cases} \tag{S}$$

1. Justifier que x est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie une équation différentielle de la forme :

   $$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x''(t) - 4x'(t) + 5x(t) = P(t) + 2e^{2t}\sin(t) \tag{E}$$

   où P est une fonction polynomiale à déterminer.
2. Résoudre l'équation différentielle linéaire homogène associée à (E).
3. Chercher une solution particulière polynomiale, qu'on notera x_1, de l'équation différentielle :

   $$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x''(t) - 4x'(t) + 5x(t) = P(t). \tag{E1}$$

4. Dans cette question, on cherche une solution particulière de l'équation différentielle :

   $$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x''(t) - 4x'(t) + 5x(t) = 2e^{2t}\sin(t). \tag{E2}$$

   de la forme $x_2 : t \mapsto e^{2t}\lambda(t)\cos(t)$ où λ est une fonction à déterminer qu'on suppose deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
   (a) Montrer que λ' est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à déterminer.
   (b) Trouver une solution évidente de l'équation différentielle obtenue à la question précédente, et en déduire x_2.
5. Déduire des questions précédentes la forme de x, puis celle de y.

Exercice 3

Le but de cet exercice est d'étudier la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par :

$$u_0 = a \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 0,\ u_{n+1} = \frac{2u_n^2}{u_n+1}$$

en fonction d'un paramètre réel $a > 0$.

1. On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x^2}{x+1}$.
   (a) Dresser le tableau des variations de f en précisant les limites aux bornes de l'ensemble de définition de f.
   (b) Étudier le signe de la fonction $x \mapsto f(x) - x$.
   (c) Sur un même graphique restreint aux abscisses $x > -1$, représenter la courbe représentative de f et la droite d'équation $y = x$.
2. Dans cette question, on suppose que $a \in]0, 1[$.
   (a) Quelles conjectures peut-on formuler pour la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$? Illustrer ces conjectures sur le graphique de la question 1(c).
   (b) Montrer que $0 < u_{n+1} < u_n < 1$ pour tout entier $n \geqslant 0$.
   (c) En déduire la nature de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et déterminer sa limite si elle existe.
3. Dans cette question, on suppose que $a = 1$. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est constante.
4. Dans cette question, on suppose que $a > 1$.
   (a) Quelles conjectures peut-on formuler pour la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$? Illustrer ces conjectures sur le graphique de la question 1(c).
   (b) Montrer que $u_{n+1} > u_n > 1$ pour tout entier $n \geqslant 0$.
   (c) En raisonnant par l'absurde, montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ diverge vers $+\infty$.

Exercice 4

On considère les matrices :

$$M = \begin{pmatrix} 7 & -5 & -7 \\ 0 & 10 & 6 \\ 3 & -7 & -5 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & -5 \\ -3 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Le but de cet exercice est de calculer les puissances de la matrice M à l'aide des matrices N et P. On note 0_3 la matrice nulle de taille 3×3 et I_3 la matrice identité de taille 3×3.

1. Dans cette question, on propose de montrer que P est inversible et de calculer P^{-1} avec deux méthodes différentes. Les questions 1(a) et 1(b) sont indépendantes.
   (a) Échelonner la matrice P et montrer que P est inversible, puis calculer son inverse.
   (b) Trouver une fonction polynomiale f de degré 2 telle que $f(P) = 0_3$. En déduire que P est inversible et déterminer son inverse.
2. Montrer que $P^{-1}MP = \alpha \mathrm{I}_3 + \beta N$ où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ sont deux constantes à déterminer.
3. Calculer N^k pour toute puissance $k \in \mathbb{N}$.
4. Soit un entier $n \geqslant 2$. Écrire $(2\mathrm{I}_3 + N)^n$ sous la forme $a_n\mathrm{I}_3 + b_nN + c_nN^2$ où a_n, b_n et c_n sont trois réels à exprimer en fonction de n.
5. En déduire que pour toute puissance $n \geqslant 2$:

$$M^n = 2^{2n-3}\left(8\mathrm{I}_3 + 4nPNP^{-1} + n(n-1)PN^2P^{-1}\right).$$

Problème

Écrire les fonctions demandées en Python. On pourra faire appel aux fonctions des questions précédentes même si elles n'ont pas été écrites.

1. Écrire une fonction `matrice_identite(n)` qui prend en argument un entier $n \geqslant 1$, puis qui renvoie la matrice identité de taille $n \times n$.
2. Une matrice carrée M est dite magique si les sommes de ses coefficients sur chaque ligne et sur chaque colonne sont égales. Par exemple, les matrices suivantes sont magiques :

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 7 & 6 \\ 9 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 8 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 14 & 14 & 4 \\ 11 & 7 & 6 & 9 \\ 8 & 10 & 10 & 5 \\ 13 & 2 & 3 & 15 \end{pmatrix}.$$

   (a) Écrire une fonction `somme_lignes(M)` qui prend en argument une matrice M supposée carrée, puis qui renvoie la liste des sommes des coefficients de M sur chaque ligne. Par exemple, `somme_lignes([[1,2,3],[4,5,6],[7,8,9]])` renvoie la liste `[6,15,24]`.

   (b) Écrire une fonction `somme_colonnes(M)` qui prend en argument une matrice M supposée carrée, puis qui renvoie la liste des sommes des coefficients de M sur chaque colonne. Par exemple, `somme_colonnes([[1,2,3],[4,5,6],[7,8,9]])` renvoie la liste `[12,15,18]`.

   (c) Écrire une fonction `est_magique(M)` qui prend en argument une matrice M supposée carrée, puis qui renvoie `True` si M est magique et `False` sinon.

   (d) Que renvoie `est_magique(matrice_identite(42))` ?

3. Soient M une matrice carrée de taille $n \times n$ et X une matrice colonne de taille $n \times 1$. On dit que X est un vecteur propre de M si X est non nulle (c'est-à-dire qu'au moins l'un de ses coefficients est non nul) et s'il existe une constante $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que $MX = \lambda X$. Par exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{est un vecteur propre de} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{car} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

   (a) Écrire une fonction `est_nulle(X)` qui prend en argument une matrice X supposée colonne, puis qui renvoie `True` si tous ses coefficients sont nuls et `False` sinon.

   (b) Écrire une fonction `produit(M,X)` qui prend en arguments une matrice M supposée carrée et une matrice X supposée colonne du même nombre de lignes que M, puis qui renvoie la matrice colonne produit MX.

   (c) Écrire une fonction `lambda(Y,X)` qui prend en arguments une matrice $Y = (y_{i,1})_{1 \leqslant i \leqslant n}$ supposée colonne et une matrice $X = (x_{i,1})_{1 \leqslant i \leqslant n}$ supposée colonne non nulle du même nombre de ligne que Y, puis qui renvoie le réel $y_{k,1}/x_{k,1}$ où k est le plus petit indice i tel que $x_{i,1} \neq 0$.

   (d) Écrire une fonction `est_vecteur_propre(M,X)` qui prend en arguments une matrice M supposée carrée et une matrice X supposée colonne du même nombre de lignes que M, puis qui renvoie `True` si X est un vecteur propre de M et `False` sinon.

4. Soit M une matrice magique de taille $n \times n$ et X la matrice colonne de taille $n \times 1$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Que renvoie `est_vecteur_propre(M,X)` ? Justifier votre réponse.

Corrigé du DS n° 5 de mathématiques et d'informatique

Exercice 1

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose :

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k^2}.$$

1. *Montrer que les suites $(a_{2n})_{n\geqslant 1}$ et $(a_{2n+1})_{n\geqslant 1}$ sont adjacentes.*

   ► Soit $n \geqslant 1$. On a :

$$\begin{aligned}
a_{2(n+1)} - a_{2n} &= a_{2n+2} - a_{2n} \\
&= \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^k}{k^2} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k^2} \\
&= \frac{(-1)^{2n+1}}{(2n+1)^2} + \frac{(-1)^{2n+2}}{(2n+2)^2} \quad \text{après simplifications télescopiques} \\
&= \frac{-1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{(2n+2)^2} \quad \text{car } 2n+1 \text{ est impair et } 2n+2 \text{ est pair} \\
&= \frac{(2n+1)^2 - (2n+2)^2}{(2n+1)^2(2n+2)^2} \\
&= \frac{(2n+1-2n-2)(2n+1+2n+2)}{(2n+1)^2(2n+2)^2} \\
&= \frac{-(4n+3)}{(2n+1)^2(2n+2)^2} < 0 \\
\text{et} \quad a_{2(n+1)+1} - a_{2n+1} &= a_{2n+3} - a_{2n+1} \\
&= \sum_{k=1}^{2n+3} \frac{(-1)^k}{k^2} - \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k^2} \\
&= \frac{(-1)^{2n+2}}{(2n+2)^2} + \frac{(-1)^{2n+3}}{(2n+3)^2} \quad \text{après simplifications télescopiques} \\
&= \frac{1}{(2n+2)^2} + \frac{-1}{(2n+3)^2} \quad \text{car } 2n+2 \text{ est pair et } 2n+3 \text{ est impair} \\
&= \frac{(2n+3)^2 - (2n+2)^2}{(2n+2)^2(2n+3)^2} \\
&= \frac{(2n+3-2n-2)(2n+3+2n+2)}{(2n+2)^2(2n+3)^2} \\
&= \frac{4n+5}{(2n+1)^2(2n+2)^2} > 0.
\end{aligned}$$

On en déduit que $\boxed{(a_{2n})_{n\geqslant 1} \text{ est décroissante}}$ et $\boxed{(a_{2n+1})_{n\geqslant 1} \text{ est croissante}}$. De plus :

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} a_{2n} - a_{2n+1} &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k^2} - \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k^2} \\
&= \lim_{n\to+\infty} -\frac{(-1)^{2n+1}}{(2n+1)^2} \quad \text{après simplifications télescopiques} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \quad \text{car } 2n+1 \text{ est impair} \\
&= \boxed{0} \quad \text{d'après les opérations usuelles sur les limites.}
\end{aligned}$$

On a bien montré que les suites $\boxed{(a_{2n})_{n\geqslant 1} \text{ et } (a_{2n+1})_{n\geqslant 1} \text{ sont adjacentes}}$.

2. *En déduire que la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente.*

   ▶ D'après le théorème des suites adjacentes, on déduit du résultat de la question précédentes que les suites $(a_{2n})_{n\geqslant 1}$ et $(a_{2n+1})_{n\geqslant 1}$ sont convergentes et convergent vers la même limite. Donc la suite $\boxed{(a_n)_{n\geqslant 1} \text{ est convergente}}$ et converge vers la même limite d'après le théorème des suites extraites.

Dans la suite de l'exercice, on propose de calculer $\lim_{n\to+\infty} a_n$. Pour cela, on pose pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \quad \text{et} \quad c_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)^2}.$$

De plus, on admet que la suite $(b_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers $\pi^2/6$.

3. (a) *Montrer que $b_{2n} = \frac{1}{4}b_n + c_n$ pour tout entier $n \geqslant 1$.*

   ▶ Soit $n \geqslant 1$. On a :

$$\begin{aligned}
b_{2n} &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k^2} \\
&= \sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{(2\ell)^2} + \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{1}{(2\ell+1)^2} \quad \text{en séparant les indices pairs et impairs} \\
&= \frac{1}{4} \sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{\ell^2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2(k-1)+1)^2} \quad \text{par linéarité et en posant } k = \ell+1 \text{ (décalage d'indice)} \\
&= \frac{1}{4} \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}}_{=b_n} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)^2}}_{=c_n} \quad \text{en posant } k = \ell \text{ (variables muettes)} \\
&= \boxed{\frac{1}{4} b_n + c_n}.
\end{aligned}$$

   (b) *En déduire que la suite $(c_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers $\pi^2/8$.*

   ▶ On a d'après le résultat précédent :

$$\forall n \geqslant 1, \quad c_n = b_{2n} - \frac{1}{4} b_n.$$

   Or on sait que $\lim_{n\to+\infty} b_n = \frac{\pi^2}{6}$. De plus, d'après le théorème des suites extraites, les suites $(b_{2n})_{n\geqslant 1}$ et $(b_{2n+1})_{n\geqslant 1}$ convergent aussi vers $\pi^2/6$, en particulier $\lim_{n\to+\infty} b_{2n} = \frac{\pi^2}{6}$. En passant à la limite quand n tend vers $+\infty$ dans l'égalité précédente, on obtient d'après les opérations usuelles sur les limites :

$$\lim_{n\to+\infty} c_n = \lim_{n\to+\infty} b_{2n} - \frac{1}{4} \lim_{n\to+\infty} b_n = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{4} \times \frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{4}\right)\pi^2 = \boxed{\frac{\pi^2}{8}}.$$

4. (a) *Montrer que $a_{2n}=\frac{1}{4}b_n-c_n$ pour tout entier $n\geqslant 1$.*

▶ Soit $n\geqslant 1$. On a :

$$\begin{aligned}
a_{2n} &= \sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^k}{k^2}\\
&= \sum_{\ell=1}^{n}\frac{(-1)^{2\ell}}{(2\ell)^2}+\sum_{\ell=0}^{n-1}\frac{(-1)^{2\ell+1}}{(2\ell+1)^2} &&\text{en séparant les indices pairs et impairs}\\
&= \frac{1}{4}\sum_{\ell=1}^{n}\frac{1}{\ell^2}+\sum_{\ell=0}^{n-1}\frac{-1}{(2\ell+1)^2} &&\text{par linéarité et car } 2\ell \text{ est pair et } 2\ell+1 \text{ est impair}\\
&= \frac{1}{4}\sum_{\ell=1}^{n}\frac{1}{\ell^2}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2(k-1)+1)^2} &&\text{par linéarité et en posant } k=\ell+1 \text{ (décalage d'indice)}\\
&= \frac{1}{4}\underbrace{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}}_{=b_n}-\underbrace{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)^2}}_{=c_n} &&\text{en posant } k=\ell \text{ (variables muettes)}\\
&= \boxed{\frac{1}{4}b_n-c_n}.
\end{aligned}$$

(b) *En déduire la valeur de $\lim_{n\to+\infty}a_n$.*

▶ On note $a=\lim_{n\to+\infty}a_n$. D'après le théorème des suites extraites, les suites $(a_{2n})_{n\geqslant1}$ et $(a_{2n+1})_{n\geqslant1}$ convergent aussi vers a, en particulier $\lim_{n\to+\infty}a_{2n}=a$. En passant à la limite quand n tend vers $+\infty$ dans le résultat de la question précédente, on obtient d'après les opérations usuelles sur les limites :

$$a=\lim_{n\to+\infty}a_{2n}=\frac{1}{4}\lim_{n\to+\infty}b_n-\lim_{n\to+\infty}c_n=\frac{1}{4}\times\frac{\pi^2}{6}-\frac{\pi^2}{8}=\frac{1}{8}\left(\frac{1}{3}-1\right)\pi^2=\boxed{-\frac{\pi^2}{12}}.$$

Exercice 2

Soient $x : t\mapsto x(t)$ et $y : t\mapsto y(t)$ deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant le système d'équations différentielles suivant :

$$\forall t\in\mathbb{R},\quad \begin{cases} x'(t)=x(t)+2y(t)+5t^2\\ y'(t)=3y(t)-x(t)+e^{2t}\sin(t).\end{cases}\tag{S}$$

1. *Justifier que x est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie une équation différentielle de la forme :*

$$\forall t\in\mathbb{R},\quad x''(t)-4x'(t)+5x(t)=P(t)+2e^{2t}\sin(t)\tag{E}$$

où P est une fonction polynomiale à déterminer.

▶ Soit $t\in\mathbb{R}$. D'après la première équation de (S), on a :

$$x'(t)=x(t)+2y(t)+5t^2.$$

Puisque x et y sont dérivables sur $\mathbb{R}$, x' est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Donc $\boxed{x \text{ est deux fois dérivable sur } \mathbb{R}}$. De plus on a , toujours d'après la première équation de (S) :

$$\begin{aligned}
y(t)&=\frac{1}{2}\big(x'(t)-x(t)-5t^2\big)\\
\text{donc}\quad y'(t)&=\frac{1}{2}\big(x''(t)-x'(t)-10t\big).
\end{aligned}$$

En réinjectant ces expressions dans la deuxième équation de (S), on obtient :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\big(x''(t) - x'(t) - 10t\big) = \frac{3}{2}\big(x'(t) - x(t) - 5t^2\big) - x(t) + e^{2t}\sin(t)\\
\text{donc}\quad & x''(t) - x'(t) - 10t = 3x'(t) - 3x(t) - 15t^2 - 2x(t) + 2e^{2t}\sin(t)\\
\text{donc}\quad & \boxed{x''(t) - 4x'(t) + 5x(t) = 10t - 15t^2 + 2e^{2t}\sin(t)}.
\end{aligned}$$

On a bien trouvé (E) en posant $\boxed{P : t \mapsto 10t - 15t^2}$.

2. *Résoudre l'équation différentielle linéaire homogène associée à (E).*

▶ On cherche à résoudre l'équation différentielle linéaire homogène suivante :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x''(t) - 4x'(t) + 5x(t) = 0.$$

On reconnaît une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants. Son équation caractéristique d'inconnue $r \in \mathbb{C}$ est :

$$r^2 - 4r + 5 = 0.$$

On reconnaît une équation du second degré à coefficients réels. Sont discriminant est égal à :

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 = -4 < 0.$$

Donc l'équation caractéristique admet deux solutions complexes conjuguées qu'on note $\alpha \pm i\beta$:

$$\alpha + i\beta = \frac{-(-4) + i\sqrt{|-4|}}{2 \times 1} = 2 + i \quad \text{et} \quad \alpha - i\beta = 2 - i.$$

On en déduit que les solutions de l'équation différentielle linéaire homogène associée à (E) sont de la forme :

$$\boxed{x_H : t \mapsto e^{\alpha t}\big(A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t)\big) = e^{2t}\big(A\cos(t) + B\sin(t)\big)}$$

où $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ sont deux constantes réelles quelconques.

3. *Chercher une solution particulière polynomiale, qu'on notera x_1, de l'équation différentielle :*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x''(t) - 4x'(t) + 5x(t) = P(t). \tag{E1}$$

▶ On raisonne par analyse-synthèse.

On remarque que si x_1 est de degré d alors x_1' est de degré $d-1$ et x_1'' est de degré $d-2$, donc $x_1'' - 4x_1' + 5x_1$ est de degré d. Puisque $P : t \mapsto 10t - 15t^2$ est de degré 2, on cherche une fonction polynomiale x_1 de degré $d = 2$.

Analyse. On cherche une solution particulière polynomiale de la forme :

$$x_1 : t \mapsto at^2 + bt + c$$

où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ sont trois constantes réelles à déterminer. La fonction x_1 est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction usuelle et on a :

$$x_1' : t \mapsto 2at + b \quad \text{et} \quad x_1'' : t \mapsto 2a.$$

En réinjectant ces expressions dans (E1), on obtient d'après le résultat de la question 1 :

$$\begin{aligned}
&\forall t \in \mathbb{R}, \quad 2a - 4(2at + b) + 5(at^2 + bt + c) = 10t - 15t^2\\
\text{donc}\quad &\forall t \in \mathbb{R}, \quad 5at^2 + (-8a + 5b)t + (2a - 4b + 5c) = -15t^2 + 10t + 0.
\end{aligned}$$

En identifiant les coefficients de polynômes, on obtient le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} 5a = -15 \\ -8a + 5b = 10 \\ 2a - 4b + 5c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -15/5 = -3 \\ b = (10 + 8a)/5 = -14/5 \\ c = (-2a + 4b)/5 = -26/25. \end{cases}$$

<u>Synthèse</u>. On pose :

$$\boxed{x_1 : t \mapsto -3t^2 - \frac{14}{5}t - \frac{26}{25}}.$$

D'après les calculs de l'analyse, x_1 est bien une solution particulière de (E1).

4. *Dans cette question, on cherche une solution particulière de l'équation différentielle :*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x''(t) - 4x'(t) + 5x(t) = 2e^{2t}\sin(t). \tag{E2}$$

de la forme $x_2 : t \mapsto e^{2t}\lambda(t)\cos(t)$ où λ est une fonction à déterminer qu'on suppose deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

(a) *Montrer que λ' est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à déterminer.*

► La fonction x_2 est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$, et on a :

$$\begin{aligned} x_2' : t \mapsto & 2e^{2t}\lambda(t)\cos(t) + e^{2t}\lambda'(t)\cos(t) - e^{2t}\lambda(t)\sin(t) \\ = & e^{2t}\big([2\lambda(t) + \lambda'(t)]\cos(t) - \lambda(t)\sin(t)\big) \\ \text{et} \quad x_2'' : t \mapsto & 2e^{2t}\big([2\lambda(t) + \lambda'(t)]\cos(t) - \lambda(t)\sin(t)\big) \\ & + e^{2t}\big([2\lambda'(t) + \lambda''(t)]\cos(t) - [2\lambda(t) + \lambda'(t)]\sin(t) - \lambda'(t)\sin(t) - \lambda(t)\cos(t)\big) \\ = & e^{2t}\begin{pmatrix} [4\lambda(t) + 2\lambda'(t) + 2\lambda'(t) + \lambda''(t) - \lambda(t)]\cos(t) \\ +[-2\lambda(t) - 2\lambda(t) - \lambda'(t) - \lambda'(t)]\sin(t) \end{pmatrix} \\ = & e^{2t}\big([3\lambda(t) + 4\lambda'(t) + \lambda''(t)]\cos(t) + [-4\lambda(t) - 2\lambda'(t)]\sin(t)\big). \end{aligned}$$

En réinjectant ces expressions dans (E2), on obtient :

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, \quad 2e^{2t}\sin(t) &= x_2''(t) - 4x_2'(t) + 5x_2(t) \\ &= e^{2t}\begin{pmatrix} [3\lambda(t) + 4\lambda'(t) + \lambda''(t) - 8\lambda(t) - 4\lambda'(t) + 5\lambda(t)]\cos(t) \\ +[-4\lambda(t) - 2\lambda'(t) + 4\lambda(t)]\sin(t) \end{pmatrix} \\ &= e^{2t}\big(\lambda''(t)\cos(t) - 2\lambda'(t)\sin(t)\big). \end{aligned}$$

En simplifiant par e^{2t}, on obtient que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \boxed{\cos(t)\lambda''(t) - 2\sin(t)\lambda'(t) = 2\sin(t)}.$$

Ainsi, $\lambda' = \mu$ est solution de l'équation différentielle suivante :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \cos(t)\mu'(t) - 2\sin(t)\mu(t) = 2\sin(t).$$

On reconnaît bien une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

(b) *Trouver une solution évidente de l'équation différentielle obtenue à la question précédente, et en déduire x_2.*

► On remarque que $\lambda' : t \mapsto -1$ est solution évidente de l'équation différentielle obtenue à la question précédente. En effet, si $\mu : t \mapsto -1$ alors $\mu' : t \mapsto 0$ et :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \cos(t)\underbrace{\mu'(t)}_{=0} - 2\sin(t)\underbrace{\mu(t)}_{=-1} = 2\sin(t).$$

Il suffit donc de choisir une primitive λ de $\lambda' : t \mapsto -1$. Par exemple, $\lambda : t \mapsto -t$. On en déduit que :

$$\boxed{x_2 : t \mapsto e^{2t}\lambda(t)\cos(t) = -te^{2t}\cos(t)}.$$

5. *Déduire des questions précédentes la forme de x, puis celle de y.*

▶ D'après le principe de superposition, on déduit des résultats précédents que :

$$\begin{aligned} x : t \mapsto & x_H(t) + x_1(t) + x_2(t) \\ =& e^{2t}\big(A\cos(t) + B\sin(t)\big) - 3t^2 - \frac{14}{5}t - \frac{26}{25} - te^{2t}\cos(t) \\ =& \boxed{e^{2t}\big([A-t]\cos(t) + B\sin(t)\big) - 3t^2 - \frac{14}{5}t - \frac{26}{25}} \end{aligned}$$

où $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ sont deux constantes réelles quelconques.

De plus, on a d'après la première équation (S) :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = \frac{1}{2}\big(x'(t) - x(t) - 5t^2\big) = \frac{1}{2}x'(t) - \frac{1}{2}x(t) - \frac{5}{2}t^2.$$

Or :

$$\begin{aligned} x' : t \mapsto & 2e^{2t}\big([A-t]\cos(t) + B\sin(t)\big) + e^{2t}\big(-\cos(t) - [A-t]\sin(t) + B\cos(t)\big) - 6t - \frac{14}{5} \\ =& e^{2t}\big([2A - 2t - 1 + B]\cos(t) + [2B - A + t]\sin(t)\big) - 6t - \frac{14}{5}. \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} y : t \mapsto & \frac{1}{2}e^{2t}\big([2A - 2t - 1 + B]\cos(t) + [2B - A + t]\sin(t)\big) - 3t - \frac{7}{5} \\ & - \frac{1}{2}e^{2t}\big([A-t]\cos(t) + B\sin(t)\big) + \frac{3}{2}t^2 + \frac{7}{5}t + \frac{13}{25} \\ & - \frac{5}{2}t^2 \\ =& \frac{1}{2}e^{2t}\big([2A - 2t - 1 + B - A + t]\cos(t) + [2B - A + t - B]\sin(t)\big) - t^2 - \frac{8}{5}t - \frac{22}{25} \\ =& \boxed{\frac{1}{2}e^{2t}\big([A + B - t - 1]\cos(t) + [B - A + t]\sin(t)\big) - t^2 - \frac{8}{5}t - \frac{22}{25}}. \end{aligned}$$

Exercice 3

Le but de cet exercice est d'étudier la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par :

$$u_0 = a \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 0,\ u_{n+1} = \frac{2u_n^2}{u_n + 1}$$

en fonction d'un paramètre réel $a > 0$.

1. *On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x^2}{x+1}$.*

   (a) *Dresser le tableau des variations de f en précisant les limites aux bornes de l'ensemble de définition de f.*

   ▶ La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ comme quotient de fonctions usuelles. On a :

   $$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \quad f'(x) = \frac{4x(x+1) - 2x^2}{(x+1)^2} = \frac{2x^2 + 4x}{(x+1)^2} = \frac{2x(x+2)}{\underbrace{(x+1)^2}_{>0}}.$$

   On en déduit le tableau des variations de f :

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
$2x$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-8	$\searrow$	$-\infty \,\|\|\, +\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

car :

$$f(-2) = \frac{2(-2)^2}{-2+1} = -8 \quad \text{et} \quad f(0) = \frac{2 \times 0^2}{0+1} = 0,$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{\overbrace{2x^2}^{\to +\infty}}{\underbrace{x+1}_{\to -\infty}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\overbrace{2x}^{\to -\infty}}{\underbrace{1+\frac{1}{x}}_{\to 1}} = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\overbrace{2x}^{\to +\infty}}{\underbrace{1+\frac{1}{x}}_{\to 1}} = +\infty,$$

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} \frac{\overbrace{2x^2}^{\to 2}}{\underbrace{x+1}_{\to 0^-}} = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} \frac{\overbrace{2x^2}^{\to 2}}{\underbrace{x+1}_{\to 0^+}} = +\infty.$$

(b) *Étudier le signe de la fonction $x \mapsto f(x) - x$.*

▶ On a :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \quad f(x) - x = \frac{2x^2}{x+1} - x = \frac{2x^2 - x(x+1)}{x+1} = \frac{x^2 - x}{x+1} = \frac{x(x-1)}{x+1}.$$

On en déduit le tableau de signe de $x \mapsto f(x) - x$:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f(x)-x$		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	0	$+$	

(c) *Sur un même graphique restreint aux abscisses $x > -1$, représenter la courbe représentative de f et la droite d'équation $y = x$.*

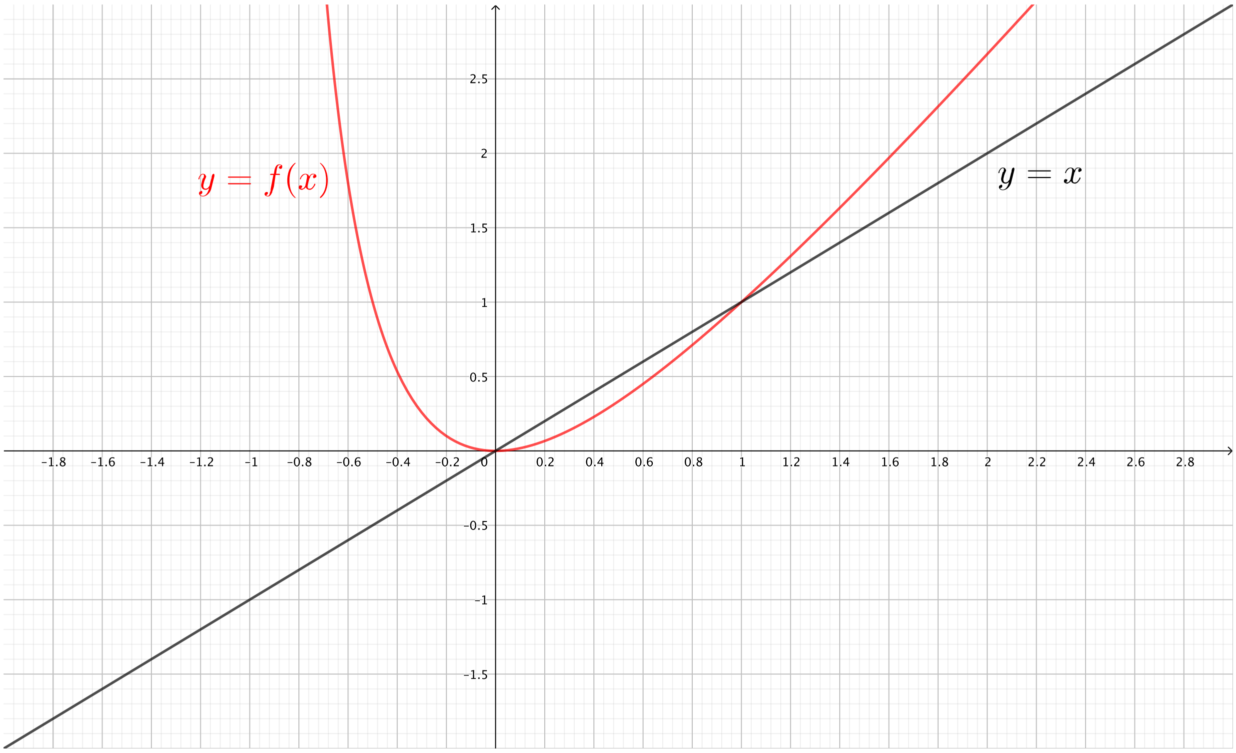
▶ D'après les résultats des questions précédentes, on a :

— sur $]-1, 0[$, la courbe représentative de f est décroissante et au-dessus de la droite $y = x$;

— en 0, la courbe représentative de f coupe la droite $y = x$;

— puis sur $]0,1[$, la courbe représentative de f est croissante et en-dessous de la droite $y = x$;
— en 1, la courbe représentative de f coupe la droite $y = x$;
— enfin sur $]1,+\infty[$, la courbe représentative de f reste croissante mais est au-dessus de la droite $y = x$.

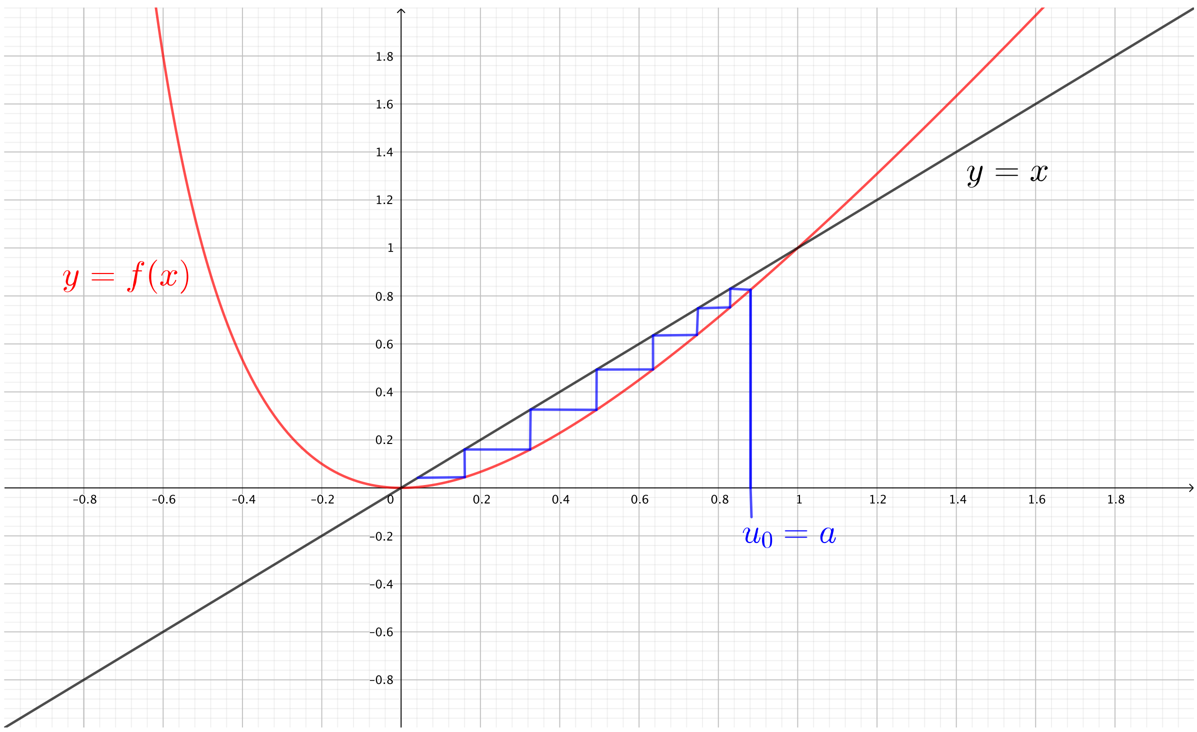
On en déduit le graphique sur $]-1,+\infty[$ de la courbe représentative de f et la droite $y = x$.



2. Dans cette question, on suppose que $a \in]0,1[$.

(a) Quelles conjectures peut-on formuler pour la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$? Illustrer ces conjectures sur le graphique de la question 1(c).

► En représentant graphiquement les premiers termes de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$, on conjecture que $\boxed{(u_n)_{n\geqslant 0} \text{ est décroissante, minorée par 0, majorée par 1 et convergente de limite égale à 0}}$.



(b) *Montrer que $0 < u_{n+1} < u_n < 1$ pour tout entier $n \geqslant 0$.*

▶ On raisonne par récurrence.
Initialisation. Pour $n = 0$, on a $u_0 = a \in]0,1[$. Donc $u_1 = f(u_0) = f(a) > 0$ d'après le tableau des variations de la question 1(a), et :

$$u_1 - u_0 = f(u_0) - u_0 = f(a) - a < 0$$

d'après le tableau de signe de la question 1(b). Finalement, on a bien $0 < u_1 < u_0 < 0$.
Hérédité. On suppose que $0 < u_{n+1} < u_n < 1$ pour un entier $n \geqslant 0$ fixé. Puisque f est strictement croissante sur $]0,1[$ d'après le tableau des variations de la question 1(a), on en déduit que :

$$\underbrace{f(0)}_{=0} < \underbrace{f(u_{n+1})}_{=u_{n+2}} < \underbrace{f(u_n)}_{=u_{n+1}} < \underbrace{f(1)}_{=1} \quad \text{donc} \quad 0 < u_{n+2} < u_{n+1} < 1.$$

Conclusion. D'après le principe de récurrence, on a bien montré que :

$$\boxed{\forall n \geqslant 0, \quad 0 < u_{n+1} < u_n < 1}.$$

Utilisez un maximum les résultats des questions précédentes pour éviter de perdre du temps à refaire les mêmes calculs.

(c) *En déduire la nature de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et déterminer sa limite si elle existe.*

▶ On a montré à la question précédente que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante et minorée. Donc $\boxed{(u_n)_{n\geqslant 0} \text{ est convergente}}$ d'après le théorème de la limite monotone. On pose $\ell = \lim_{n\to+\infty} u_n$. En passant à la limite quand n tend vers $+\infty$ dans le résultat de la question précédente, on obtient que $\ell \in [0,1]$. De plus, on sait que :

$$\forall n \geqslant 0, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

Par conséquent, en passant à la limite quand n tend vers $+\infty$, on obtient que :

$$\begin{aligned} & \ell = f(\ell) \quad \text{car } f \text{ est continue sur } [0,1] \\ \iff & f(\ell) - \ell = 0 \\ \iff & \ell = 0 \text{ ou } \ell = 1 \quad \text{d'après le tableau de signe de la question 1(b).} \end{aligned}$$

Or $\ell = 1$ est absurde car $\ell \leqslant u_0 = a < 1$ puisque la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante. On en déduit que $\ell = 0$, c'est-à-dire que $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0}$.

N'oubliez pas de préciser que f est continue en ℓ pour justifier que $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell)$.

3. *Dans cette question, on suppose que $a = 1$. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est constante.*

▶ Montrons par récurrence que $u_n = 1$ pour tout entier $n \geqslant 0$.
Initialisation. Pour $n = 0$, on a $u_0 = a = 1$.
Hérédité. On suppose que $u_n = 1$ pour un entier $n \geqslant 0$ fixé. Alors :

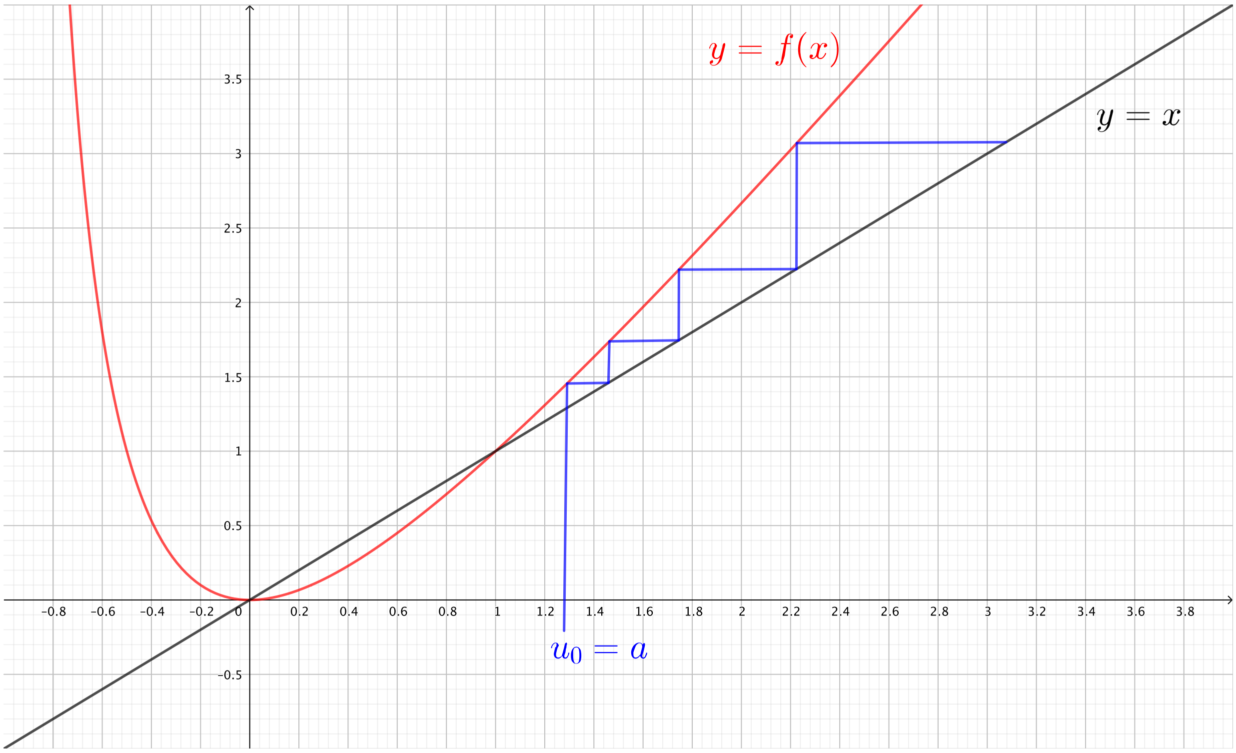
$$u_{n+1} = f(u_n) = f(1) = 1.$$

Conclusion. D'après le principe de récurrence, on a déduit que $u_n = 1$ pour tout entier $n \geqslant 0$. On a bien montré que la suite $\boxed{(u_n)_{n\geqslant 0} \text{ est constante}}$.

4. *Dans cette question, on suppose que $a > 1$.*

(a) *Quelles conjectures peut-on formuler pour la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$? Illustrer ces conjectures sur le graphique de la question 1(c).*

▶ En représentant graphiquement les premiers termes de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$, on conjecture que $\boxed{(u_n)_{n\geqslant 0} \text{ est croissante, minorée par 1, non majorée et divergente vers } +\infty}$.



(b) Montrer que $u_{n+1} > u_n > 1$ pour tout entier $n \geqslant 0$.

► On raisonne par récurrence.

Initialisation. Pour $n = 0$, on a $u_0 = a > 1$. De plus :

$$u_1 - u_0 = f(u_0) - u_0 = f(a) - a > 0$$

d'après le tableau de signe de la question 1(b). Donc, on a bien $u_1 > u_0 > 1$.

Hérédité. On suppose que $u_{n+1} > u_n > 1$ pour un entier $n \geqslant 0$ fixé. Puisque f est strictement croissante sur $]1, +\infty[$ d'après le tableau des variations de la question 1(a), on en déduit que :

$$\underbrace{f(u_{n+1})}_{=u_{n+2}} > \underbrace{f(u_n)}_{=u_{n+1}} > \underbrace{f(1)}_{=1} \quad \text{donc} \quad u_{n+2} > u_{n+1} > 1.$$

Conclusion. D'après le principe de récurrence, on a bien montré que :

$$\boxed{\forall n \geqslant 0, \quad u_{n+1} > u_n > 1}.$$

(c) En raisonnant par l'absurde, montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ diverge vers $+\infty$.

► On a montré à la question précédente que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante. Par l'absurde, on suppose que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est majorée. Donc $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente d'après le théorème de la limite monotone. On pose $\ell = \lim_{n\to+\infty} u_n$. En passant à la limite quand n tend vers $+\infty$ dans le résultat de la question précédente, on obtient que $\ell \geqslant 1$. De plus, on sait que :

$$\forall n \geqslant 0, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

Par conséquent, en passant à la limite quand n tend vers $+\infty$, on obtient que :

$$\begin{aligned} & \ell = f(\ell) \quad \text{car } f \text{ est continue sur } [1, +\infty[\\ \iff & f(\ell) - \ell = 0 \\ \iff & \ell = 0 \text{ ou } \ell = 1 \quad \text{d'après le tableau de signe de la question 1(b)} \\ \iff & \ell = 1 \quad \text{car } \ell \geqslant 1. \end{aligned}$$

Or $\ell = 1$ est absurde car $\ell \geqslant u_0 = a > 1$ puisque la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante. Par l'absurde, on a donc montré que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ n'est pas majorée. Puisque $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante, on en déduit que $\boxed{(u_n)_{n\geqslant 0} \text{ diverge vers } +\infty}$ d'après le théorème de la limite monotone.

Exercice 4

On considère les matrices :

$$M=\begin{pmatrix}7&-5&-7\\0&10&6\\3&-7&-5\end{pmatrix},\quad N=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\quad \text{et}\quad P=\begin{pmatrix}-2&1&5\\3&0&-5\\-3&1&6\end{pmatrix}.$$

Le but de cet exercice est de calculer les puissances de la matrice M à l'aide des matrices N et P. On note 0_3 la matrice nulle de taille 3×3 et I_3 la matrice identité de taille 3×3.

1. *Dans cette question, on propose de montrer que P est inversible et de calculer P^{-1} avec deux méthodes différentes. Les questions 1(a) et 1(b) sont indépendantes.*

   (a) *Échelonner la matrice P et montrer que P est inversible, puis calculer son inverse.*

   ▶ On fixe $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ et on considère le système linéaire suivant d'inconnues $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix}-2&1&5\\3&0&-5\\-3&1&6\end{pmatrix}}_{=P}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}.$$

On échelonne ce système linéaire à l'aide de la méthode du pivot de Gauss.

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix}-2&1&5\\3&0&-5\\-3&1&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\quad L_1\leftarrow L_1+L_2\\
\iff&\begin{pmatrix}\boxed{1}&1&0\\3&0&-5\\-3&1&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+b\\b\\c\end{pmatrix}\quad \begin{matrix}L_2\leftarrow L_2-3L_1\\L_3\leftarrow L_3+3L_1\end{matrix}\\
\iff&\begin{pmatrix}\boxed{1}&1&0\\0&-3&-5\\0&4&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+b\\-3a-2b\\3a+3b+c\end{pmatrix}\quad L_2\leftarrow L_2+L_3\\
\iff&\begin{pmatrix}\boxed{1}&1&0\\0&\boxed{1}&1\\0&4&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+b\\b+c\\3a+3b+c\end{pmatrix}\quad L_3\leftarrow L_3-4L_2\\
\iff&\begin{pmatrix}\boxed{1}&1&0\\0&\boxed{1}&1\\0&0&\boxed{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+b\\b+c\\3a-b-3c\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

On obtient une matrice échelonnée de rang maximal donc $\boxed{P \text{ est inversible}}$. Le système linéaire admet une unique solution qu'on obtient en «remontant» les équations du système linéaire échelonné :

$$\begin{cases}2z=3a-b-3c\iff z=\frac32a-\frac12b-\frac32c\\ y+z=b+c\iff y=b+c-z=b+c-\frac32a+\frac12b+\frac32c=-\frac32a+\frac32b+\frac52c\\ x+y=a+b\iff x=a+b-y=a+b+\frac32a-\frac32b-\frac52c=\frac52a-\frac12b-\frac52c.\end{cases}$$

Ainsi :

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac52a-\frac12b-\frac52c\\-\frac32a+\frac32b+\frac52c\\\frac32a-\frac12b-\frac32c\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}\frac52&-\frac12&-\frac52\\-\frac32&\frac32&\frac52\\\frac32&-\frac12&-\frac32\end{pmatrix}}_{=P^{-1}}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}.$$

Finalement, on en déduit que :

$$\boxed{P^{-1}=\frac12\begin{pmatrix}5&-1&-5\\-3&3&5\\3&-1&-3\end{pmatrix}}.$$

(b) *Trouver une fonction polynomiale f de degré 2 telle que $f(P) = 0_3$. En déduire que P est inversible et déterminer son inverse.*

▶ On raisonne par analyse-synthèse.

Analyse. On cherche une fonction polynomiale f de degré 2 telle que $f(P) = 0_3$. On sait que f est de la forme $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ sont trois constantes réelles à déterminer. Donc $f(P) = aP^2 + bP + c\mathrm{I}_3$. Or on a :

$$P^2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & -5 \\ -3 & 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & -5 \\ -3 & 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 15 \\ 9 & -2 & -15 \\ -9 & 3 & 16 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & -5 \\ -3 & 1 & 6 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3P - 2\mathrm{I}_3.$$

Synthèse. On pose $\boxed{f : x \mapsto x^2 - 3x + 2}$. D'après les calculs de l'analyse, on a bien $f(P) = 0_3$, c'est-à-dire $P^2 - 3P + 2\mathrm{I}_3 = 0_3$. En isolant I_3, on obtient que :

$$\mathrm{I}_3 = \frac{1}{2}(3P - P^2) = P \times \frac{1}{2}(3\mathrm{I}_3 - P) = \frac{1}{2}(3\mathrm{I}_3 - P) \times P.$$

On en déduit que $\boxed{P \text{ est inversible}}$ et que $\boxed{P^{-1} = \frac{1}{2}(3\mathrm{I}_3 - P)}$, c'est-à-dire :

$$\boxed{P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & -1 & -5 \\ -3 & 3 & 5 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix}}.$$

2. *Montrer que $P^{-1}MP = \alpha\mathrm{I}_3 + \beta N$ où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ sont deux constantes à déterminer.*

▶ On a d'après le résultat de la question précédente :

$$\begin{aligned} P^{-1}MP &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & -1 & -5 \\ -3 & 3 & 5 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -5 & -7 \\ 0 & 10 & 6 \\ 3 & -7 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & -5 \\ -3 & 1 & 6 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & -1 & -5 \\ -3 & 3 & 5 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -8 & 0 & 18 \\ 12 & 6 & -14 \\ -12 & -2 & 20 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 8 & 4 & 4 \\ 0 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{4\mathrm{I}_3 + 2N}. \end{aligned}$$

D'où le résultat en posant $\boxed{\alpha = 4}$ et $\boxed{\beta = 2}$.

3. *Calculer N^k pour toute puissance $k \in \mathbb{N}$.*

▶ On a :

$$\boxed{N^0 = \mathrm{I}_3}, \quad \boxed{N^1 = N}, \quad N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}},$$

$$N^3 = N^2 \times N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3.$$

Montrons par récurrence que $N^k = 0_3$ pour toute puissance $k \geqslant 3$.

Initialisation. Pour $k = 3$, on vient de montrer que $N^3 = 0_3$.

Hérédité. On suppose que $N^k = 0_3$ pour une puissance $k \geqslant 3$ fixée. Alors :

$$N^{k+1} = N^k \times N = 0_3 \times N = 0_3.$$

Conclusion. D'après le principe de récurrence, on a montré que :

$$\boxed{\forall k \geqslant 3, \quad N^k = 0_3}.$$

4. *Soit un entier $n \geqslant 2$. Écrire $(2I_3+N)^n$ sous la forme $a_nI_3+b_nN+c_nN^2$ où a_n, b_n et c_n sont trois réels à exprimer en fonction de n.*

▶ On a $2I_3 \times N = 2N = N \times 2I_3$ donc les matrices $2I_3$ et N commutent.

N'oubliez pas de vérifier que des matrices commutent avant de pouvoir appliquer la formule du binôme de Newton.

D'après la formule du binôme de Newton, on en déduit que :

$$\begin{aligned}
(2I_3+N)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(2I_3)^{n-k}N^k \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{n-k}N^k \quad \text{par propriétés de la matrice identité } I_3 \\
&= \sum_{k=0}^{2}\binom{n}{k}2^{n-k}N^k + \sum_{k=3}^{n}\binom{n}{k}2^{n-k}\underbrace{N^k}_{=0_3} \quad \text{par associativité} \\
&= \sum_{k=0}^{2}\binom{n}{k}2^{n-k}N^k \quad \text{d'après le résultat de la question précédente} \\
&= \underbrace{\binom{n}{0}}_{=1}2^{n-0}\underbrace{N^0}_{=I_3} + \underbrace{\binom{n}{1}}_{=n}2^{n-1}\underbrace{N^1}_{=N} + \underbrace{\binom{n}{2}}_{=\frac{n(n-1)}{2}}2^{n-2}N^2 \\
&= \boxed{2^nI_3 + n2^{n-1}N + \frac{n(n-1)}{2}2^{n-2}N^2}.
\end{aligned}$$

D'où le résultat en posant $\boxed{a_n = 2^n}$, $\boxed{b_n = n2^{n-1}}$ et $\boxed{c_n = \frac{n(n-1)}{2}2^{n-2} = n(n-1)2^{n-3}}$.

5. *En déduire que pour toute puissance $n \geqslant 2$:*

$$M^n = 2^{2n-3}\left(8I_3 + 4nPNP^{-1} + n(n-1)PN^2P^{-1}\right).$$

▶ Soit $n \geqslant 2$. On a d'après le résultat de la question 2 :

$$P^{-1}MP = 4I_3 + 2N = 2(2I_3+N) \quad \text{donc} \quad M = 2P(2I_3+N)P^{-1}.$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}
M^n &= \underbrace{M \times M \times \cdots \times M}_{n \text{ fois}} \\
&= \underbrace{2P(2I_3+N)P^{-1} \times 2P(2I_3+N)P^{-1} \times \cdots \times 2P(2I_3+N)P^{-1}}_{n \text{ fois}} \\
&= \underbrace{2 \times 2 \times \cdots \times 2}_{n \text{ fois}} \times P(2I_3+N)\underbrace{P^{-1}P}_{=I_3}(2I_3+N)\underbrace{P^{-1}P}_{=I_3}\dots\underbrace{P^{-1}P}_{=I_3}(2I_3+N)P^{-1} \\
&= 2^nP\underbrace{(2I_3+N)(2I_3+N)\dots(2I_3+N)}_{n \text{ fois}}P^{-1} \\
&= 2^nP(2I_3+N)^nP^{-1} \\
&= 2^nP\big(2^nI_3 + n2^{n-1}N + n(n-1)2^{n-3}N^2\big)P^{-1} \quad \text{d'après le résultat de la question précédente} \\
&= 2^{n+n-3}P\big(2^3I_3 + n2^2N + n(n-1)N^2\big)P^{-1} \\
&= 2^{2n-3}\big(8\underbrace{PI_3P^{-1}}_{=PP^{-1}=I_3} + 4nPNP^{-1} + n(n-1)PN^2P^{-1}\big) \\
&= \boxed{2^{2n-3}\big(8I_3 + 4nPNP^{-1} + n(n-1)PN^2P^{-1}\big)}.
\end{aligned}$$

Problème

Écrire les fonctions demandées en Python. On pourra faire appel aux fonctions des questions précédentes même si elles n'ont pas été écrites.

1. *Écrire une fonction* `matrice_identite(n)` *qui prend en argument un entier $n \geqslant 1$, puis qui renvoie la matrice identité de taille $n \times n$.*

   ▶ Par exemple :

```
def matrice_identite(n):
    I=[[0 for j in range(n)] for i in range(n)]
    for k in range(n):
        I[k][k]=1
    return I
```

2. *Une matrice carrée M est dite magique si les sommes de ses coefficients sur chaque ligne et sur chaque colonne sont égales. Par exemple, les matrices suivantes sont magiques :*

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 7 & 6 \\ 9 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 8 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 14 & 14 & 4 \\ 11 & 7 & 6 & 9 \\ 8 & 10 & 10 & 5 \\ 13 & 2 & 3 & 15 \end{pmatrix}.$$

   (a) *Écrire une fonction* `somme_lignes(M)` *qui prend en argument une matrice M supposée carrée, puis qui renvoie la liste des sommes des coefficients de M sur chaque ligne. Par exemple,* `somme_lignes([[1,2,3],[4,5,6],[7,8,9]])` *renvoie la liste* `[6,15,24]`.

   ▶ Par exemple :

```
def somme_lignes(M):
    n=len(M)
    L=[]
    for i in range(n):
        S=0
        for j in range(n):
            S=S+M[i][j]
        L=L+[S]
    return L
```

   (b) *Écrire une fonction* `somme_colonnes(M)` *qui prend en argument une matrice M supposée carrée, puis qui renvoie la liste des sommes des coefficients de M sur chaque colonne. Par exemple,* `somme_colonnes([[1,2,3],[4,5,6],[7,8,9]])` *renvoie la liste* `[12,15,18]`.

   ▶ Par exemple :

```
def somme_colonnes(M):
    n=len(M)
    L=[]
    for j in range(n):
        S=0
        for i in range(n):
            S=S+M[i][j]
        L=L+[S]
    return L
```

   (c) *Écrire une fonction* `est_magique(M)` *qui prend en argument une matrice M supposée carrée, puis qui renvoie* `True` *si M est magique et* `False` *sinon.*

   ▶ Par exemple :

```
def est_magique(M):
    n=len(M)
    Llignes=somme_lignes(M)
    Lcolonnes=somme_colonnes(M)
    S=Llignes[0]
    for k in range(n):
        if Llignes[k]!=S or Lcolonnes[k]!=S:
            return False
    return True
```

(d) *Que renvoie* `est_magique(matrice_identite(42))` *?*

▶ Les coefficients de la matrice identité (de taille carrée quelconque) sont tous égaux à 0 sauf ceux sur la diagonale égaux à 1. Ainsi, les sommes de ses coefficients sur chaque ligne et sur chaque colonne sont égales à 1. On en déduit que la matrice identité est magique et donc que `est_magique(matrice_identite(42))` renvoie $\boxed{\texttt{True}}$.

3. *Soient M une matrice carrée de taille $n \times n$ et X une matrice colonne de taille $n \times 1$. On dit que X est un vecteur propre de M si X est non nulle (c'est-à-dire qu'au moins l'un de ses coefficients est non nul) et s'il existe une constante $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que $MX = \lambda X$. Par exemple :*

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \quad \textit{est un vecteur propre de} \quad \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\1&1&1\end{pmatrix} \quad \textit{car} \quad \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}.$$

(a) *Écrire une fonction* `est_nulle(X)` *qui prend en argument une matrice X supposée colonne, puis qui renvoie* `True` *si tous ses coefficients sont nuls et* `False` *sinon.*

▶ Par exemple :

```
def est_nulle(X):
    n=len(X)
    for i in range(n):
        if X[i][0]!=0:
            return False
    return True
```

(b) *Écrire une fonction* `produit(M,X)` *qui prend en arguments une matrice M supposée carrée et une matrice X supposée colonne du même nombre de lignes que M, puis qui renvoie la matrice colonne produit MX.*

▶ Par exemple :

```
def produit(M,X):
    n=len(M)
    Y=[[0] for i in range(n)]
    for i in range(n):
        S=0
        for j in range(n):
            S=S+M[i][j]*X[j][0]
        Y[i][0]=S
    return Y
```

(c) *Écrire une fonction* `lambda(Y,X)` *qui prend en arguments une matrice $Y = (y_{i,1})_{1 \leqslant i \leqslant n}$ supposée colonne et une matrice $X = (x_{i,1})_{1 \leqslant i \leqslant n}$ supposée colonne non nulle du même nombre de ligne que Y, puis qui renvoie le réel $y_{k,1}/x_{k,1}$ où k est le plus petit indice i tel que $x_{i,1} \neq 0$.*

▶ Par exemple :

```
def lambda(Y,X):
    n=len(Y)
    i=0
    while X[i][0]==0:
        i=i+1
    return Y[i][0]/X[i][0]
```

En pratique, cette fonction renvoie une erreur car `lambda` *est un mot clef en Python qui ne peut donc pas être utilisé comme nom de fonction. Ce problème n'a pas d'importance à l'écrit (et il faut respecter les notations de l'énoncé). Mais en pratique, il est nécessaire de modifier le nom de cette fonction pour l'utiliser (par exemple* `lambdaa` *ou* `lamdba`*).*

(d) *Écrire une fonction* `est_vecteur_propre(M,X)` *qui prend en arguments une matrice M supposée carrée et une matrice X supposée colonne du même nombre de lignes que M, puis qui renvoie* `True` *si X est un vecteur propre de M et* `False` *sinon.*

▶ Par exemple :

```
def est_vecteur_propre(M,X):
    if est_nulle(X):
        return False
    n=len(M)
    Y=produit(M,X)
    constante=lambda(Y,X)
    for i in range(n):
        if Y[i][0]!=constante*X[i][0]:
            return False
    return True
```

N'oubliez pas de vérifier que la matrice colonne X est non nulle à l'aide de la fonction `est_nulle` *car un vecteur propre doit être non nul d'après l'énoncé.*

4. *Soit M une matrice magique de taille $n \times n$ et X la matrice colonne de taille $n \times 1$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Que renvoie* `est_vecteur_propre(M,X)` *? Justifier votre réponse.*

▶ Si X est la matrice colonne dont tous les coefficients sont égaux à 1 alors les coefficients de la matrice colonne produit MX sont égaux aux sommes des coefficients de M sur chaque ligne. En particulier, si M est une matrice magique dont les sommes de ses coefficients sur chaque ligne sont égales à $\sigma \in \mathbb{R}$, alors MX est la matrice colonne dont tous les coefficients sont égaux à σ. On en déduit que $MX = \sigma X$. Autrement dit, puisque X est non nulle, X est un vecteur propre de M. Par conséquent, `est_vecteur_propre(M,X)` renvoie $\boxed{\texttt{True}}$.

DS n° 7 de mathématiques et d'informatique

durée : 3 heures

Problème 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère un sac contenant $2n+1$ boules numérotées de 0 à $2n$ et indiscernables au toucher. On vide progressivement le sac jusqu'à n'y laisser qu'une seule boule de la manière suivante :

— on tire simultanément trois boules ;

— on note $a < b < c$ les numéros dans l'ordre croissant des trois boules tirées ;

— on replace dans le sac la boule de numéro b alors qu'on élimine les boules de numéros a et c ;

— on réitère les opérations précédentes.

Au bout de n tirages, il ne reste plus qu'une seule boule dans le sac, et on note D_n son numéro.

Par exemple, pour $n = 1$, le sac contient initialement trois boules numérotées 0, 1 et 2 qui sont toutes tirées au premier tirage. Seule la boule de numéro 1 est replacée dans le sac, donc $D_1 = 1$.

On note Ω_n l'ensemble de toutes les configurations possibles des n tirages (ainsi $\mathrm{card}(\Omega_1) = 1$) et $\mathrm{P}(A)$ la probabilité de tout événement $A \subset \Omega_n$. De plus, si $\mathrm{P}(A) \neq 0$, on note $\mathrm{P}_A(B)$ la probabilité conditionnelle sachant A de tout événement $B \subset \Omega_n$.

Chaque partie du problème peut être traitée indépendamment des autres.

Partie I - Quelques cas particuliers

1. Dans cette question, on considère le cas $n = 2$.
   (a) Montrer que $\mathrm{card}(\Omega_2) = 10$ à l'aide d'un coefficient binomial.
   (b) En listant toutes les configurations possibles des deux tirages, déterminer la probabilité de l'événement «$D_2 = i$» pour chaque numéro $i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.
2. Dans cette question, on considère le cas $n = 3$. Montrer que $\mathrm{P}(D_3 = 1) = 1/35$.

On revient au cas général où $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Que valent les probabilités des événements «$D_n = 0$» et «$D_n = 2n$» ? Justifier votre réponse.

Partie II - Simulation informatique

Écrire les fonctions demandées en Python. On pourra appeler les fonctions des questions précédentes même si elles n'ont pas été écrites. Pour rappel :

— `min(L)` (et `max(L)`) renvoie le plus petit (respectivement le plus grand) élément de la liste `L` ;

— `L.append(e)` ajoute l'élément `e` à la fin de la liste `L` ;

— `L.remove(e)` retire une fois l'élément `e` de la liste `L` ;

— `L.pop(i)` renvoie l'élément `L[i]` d'indice `i` de la liste `L` et le retire de la liste `L` ;

— `randint(a,b)` de la bibliothèque `random` renvoie un entier aléatoire entre `a` inclus et `b` inclus.

4. Écrire une fonction `tirage` qui prend en argument une liste `Lsac` (qu'on suppose contenir au moins trois éléments), qui retire au hasard trois éléments (d'indices différents) de `Lsac` puis qui renvoie ces trois éléments (dans n'importe quel ordre) sous la forme d'une autre liste `Ltirage`.

5. Écrire une fonction `milieu` qui prend en argument une liste `Ltirage` qu'on suppose contenir exactement trois éléments distincts, et qui renvoie l'élément qui n'est ni le plus petit, ni le plus grand. Par exemple, `milieu([5,2,3])` renvoie `3` et `milieu([4,5,0])` renvoie `4`.
6. Écrire une fonction `experience` qui prend en argument l'entier n, et qui renvoie la valeur de D_n après avoir simulé les n tirages de l'expérience aléatoire décrite au début du problème.
7. Écrire une fonction `frequences(n,nbSimul)` qui simule `nbSimul` fois l'expérience aléatoire décrite au début du problème, et qui renvoie une liste `Lfreq` de $2n+1$ éléments dont l'élément `Lfreq[i]` d'indice `i` est égal à la fréquence empirique de l'événement «$D_n =$ `i`», c'est-à-dire le rapport du nombre d'apparition de cet événement par le nombre de simulations `nbSimul`.

Partie III - Calcul de $\mathrm{P}(D_n = 1)$ - 1re méthode

Dans cette partie, on propose de calculer la probabilité que la dernière boule dans le sac soit celle de numéro 1. On sait déjà que $\mathrm{P}(D_1 = 1) = 1$ et on suppose avoir calculé $\mathrm{P}(D_2 = 1)$ et $\mathrm{P}(D_3 = 1)$ dans la partie I. On fixe donc un entier $n \geqslant 4$ dans les question suivantes et on note A_k l'événement «ni la boule de numéro 0 ni celle de numéro 1 ne sont tirées au k-ième tirage».

8. Justifier que les événements «$D_n = 1$» et $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}$ sont égaux.
9. Montrer que $\mathrm{P}(A_1) = \binom{2n-1}{3}/\binom{2n+1}{3}$ et déterminer une expression similaire pour $\mathrm{P}_{A_1}(A_2)$.
10. Soit $k \in \{1, 2, \ldots, n-2\}$. En vous inspirant de la question précédente, exprimer $\mathrm{P}_{A_1\cap\cdots\cap A_k}(A_{k+1})$ comme un quotient de deux coefficients binomiaux qui dépendent de k et n.
11. Déduire des résultats précédents que $\mathrm{P}(D_n = 1) = 1/c_n$ où c_n est un coefficient binomial à déterminer.

Partie IV - Calcul de $\mathrm{P}(D_n = 1)$ - 2e méthode

On souhaite retrouver le résultat de la partie précédente par récurrence. Pour cela, on fixe un entier $n \geqslant 2$ dans les questions suivantes et on note B_i l'événement «la boule de numéro i est tirée au premier tirage», $\overline{B_i}$ l'événement contraire. De plus, on pose :

$$E_0 = B_0, \quad E_1 = \overline{B_0} \cap B_1 \quad \text{et} \quad E_2 = \overline{B_0} \cap \overline{B_1}.$$

12. Vérifier que E_0, E_1 et E_2 forment un système complet d'événements.
13. Exprimer $\mathrm{P}(E_0)$, $\mathrm{P}(E_1)$ et $\mathrm{P}(E_2)$ comme des quotients de coefficients binomiaux qui dépendent de n.
14. (a) Justifier brièvement que $\mathrm{P}_{E_0}(D_n = 1) = 0$. Que vaut $\mathrm{P}_{E_1}(D_n = 1)$?
    (b) Justifier brièvement que $\mathrm{P}_{E_2}(D_n = 1) = \mathrm{P}(D_{n-1} = 1)$.
15. Déduire des résultats précédents que :

$$\forall n \geqslant 2, \quad \mathrm{P}(D_n = 1) = \frac{\binom{2n-1}{3}}{\binom{2n+1}{3}}\mathrm{P}(D_{n-1} = 1).$$

16. Conjecturer que $\mathrm{P}(D_n = 1)$ est de la forme $1/c_n$ où c_n est un coefficient binomial à déterminer, puis démontrer cette conjecture pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Problème 2 : étude d'une famille de polynômes

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, la fonction polynômiale $P_n : [0; +\infty[\to \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in [0; +\infty[$, par :

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k x^k}{k} = -x + x^2 + .. + \frac{-x^{2n-1}}{2n-1} + \frac{x^{2n}}{2n}.$$

I. Étude des fonctions polynômiales P_n

1. (INFO) Écrire une fonction Python `calcul_P(n,x)` prenant en arguments un entier naturel non nul n et un réel positif x et qui renvoie la valeur $P_n(x)$.
2. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ et tout $x \in [0; +\infty[$: $P_n'(x) = \dfrac{x^{2n} - 1}{x + 1}$, où P_n' désigne la dérivée de P_n.
3. Étudier, pour $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, les variations de P_n sur $[0; +\infty[$ et dresser le tableau de variations de P_n en plaçant uniquement comme valeurs explicites les limites en 0 et en $+\infty$.
4. Justifier sans calcul que pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$: $P_n(1) < 0$.
5. (a) Vérifier, pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ et tout $x \in [0; +\infty[$: $P_{n+1}(x) = P_n(x) + x^{2n+1}(-\dfrac{1}{2n+1} + \dfrac{x}{2n+2})$.

   (b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$: $P_n(2) \geqslant 2$.
6. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, l'équation $P_n(x) = 0$, d'inconnue $x \in [1; +\infty[$, admet une solution et une seule, notée x_n, et que :
$$1 < x_n \leqslant 2.$$
7. (INFO) Écrire une fonction Python `approx(n,epsilon)` prenant en argument un entier $n \in \mathbb{N}^\star$ et un réel **epsilon** > 0 et qui renvoie une liste $[a, b]$ vérifiant $|b - a| \leq$ **epsilon** et $x_n \in [a, b]$.

II. Limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}\backslash\{0\}}$

8. Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ et tout $x \in [0; +\infty[$: $P_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{t^{2n} - 1}{t + 1}\, dt$.
9. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$: $\displaystyle\int_1^{x_n} \frac{t^{2n} - 1}{t + 1}\, dt = \int_0^1 \frac{1 - t^{2n}}{t + 1} dt$.
10. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$: $\ln(2) \geq \displaystyle\int_0^1 \frac{1 - t^{2n}}{1 + t} dt$.
11. Démontrer pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ et tout $t \in [1; +\infty[$: $t^{2n} - 1 \geqslant n(t^2 - 1)$. On pourra démontrer cette proposition par récurrence sur n.
12. En déduire, à l'aide de questions précédentes que pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$: $\displaystyle\int_1^{x_n} \frac{t^{2n} - 1}{t + 1}\, dt \geqslant \frac{n}{2}(x_n - 1)^2$,

    puis que $0 < x_n - 1 \leqslant \dfrac{\sqrt{2 \ln 2}}{\sqrt{n}}$.
13. Conclure quant à la convergence et à la limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}\backslash\{0\}}$.

Corrigé du DS n° 7 de mathématiques et d'informatique

Problème 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère un sac contenant $2n+1$ boules numérotées de 0 à $2n$ et indiscernables au toucher. On vide progressivement le sac jusqu'à n'y laisser qu'une seule boule de la manière suivante :

- *on tire simultanément trois boules ;*
- *on note $a < b < c$ les numéros dans l'ordre croissant des trois boules tirées ;*
- *on replace dans le sac la boule de numéro b alors qu'on élimine les boules de numéros a et c ;*
- *on réitère les opérations précédentes.*

Au bout de n tirages, il ne reste plus qu'une seule boule dans le sac, et on note D_n son numéro.

Par exemple, pour $n = 1$, le sac contient initialement trois boules numérotées 0, 1 et 2 qui sont toutes tirées au premier tirage. Seule la boule de numéro 1 est replacée dans le sac, donc $D_1 = 1$.

On note Ω_n l'ensemble de toutes les configurations possibles des n tirages (ainsi $\operatorname{card}(\Omega_1) = 1$) et $\mathrm{P}(A)$ la probabilité de tout événement $A \subset \Omega_n$. De plus, si $\mathrm{P}(A) \neq 0$, on note $\mathrm{P}_A(B)$ la probabilité conditionnelle sachant A de tout événement $B \subset \Omega_n$.

Chaque partie du problème peut être traitée indépendamment des autres.

Partie I - Quelques cas particuliers

1. *Dans cette question, on considère le cas $n = 2$.*

   (a) *Montrer que $\operatorname{card}(\Omega_2) = 10$ à l'aide d'un coefficient binomial.*

   ▶ Pour $n = 2$, le sac contient initialement cinq boules numérotées 0, 1, 2, 3, 4 et 5. Lors du premier tirage, on en choisit trois parmi les cinq et on en replace une seule dans le sac. Il reste donc $5 - 3 + 1 = 3$ boules dans le sac. Et puis, ces trois boules sont toutes tirées au deuxième tirage et une seule boule est replacée dans le sac. Le nombre de configurations possibles des deux tirages est donc égal à :

$$\operatorname{card}(\Omega_2) = \underbrace{\binom{5}{3}}_{1^{\text{er}}\text{ tirage}} \underbrace{\times}_{\text{et puis}} \underbrace{\binom{3}{3}}_{2^{\text{e}}\text{ tirage}} = 10 \times 1 = \boxed{10}.$$

Pour calculer $\binom{5}{3}$, construisez les premières lignes du triangle de Pascal ou utilisez la définition.

$$\begin{array}{llllll} 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 10 & \boxed{10} & 5 & 1 \end{array}$$

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5}{(1 \times 2 \times 3)(1 \times 2)} = \frac{4 \times 5}{2} = 10$$

(b) En listant toutes les configurations possibles des deux tirages, déterminer la probabilité de l'événement «$D_2 = i$» pour chaque numéro $i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

▶ D'après le résultat de la question précédente, il y a dix configurations possibles des deux tirages. On dresse leur liste dans le tableau suivant.

1^{er} tirage		2^{e} tirage		D_2
n^{o} tirés	n^{o} éliminés	n^{o} tirés	n^{o} éliminés	
$0, 1, 2$	$0, 2$	$1, 3, 4$	$1, 4$	3
$0, 1, 3$	$0, 3$	$1, 2, 4$	$1, 4$	2
$0, 1, 4$	$0, 4$	$1, 2, 3$	$1, 3$	2
$0, 2, 3$	$0, 3$	$1, 2, 4$	$1, 4$	2
$0, 2, 4$	$0, 4$	$1, 2, 3$	$1, 3$	2
$0, 3, 4$	$0, 4$	$1, 2, 3$	$1, 3$	2
$1, 2, 3$	$1, 3$	$0, 2, 4$	$0, 4$	2
$1, 2, 4$	$1, 4$	$0, 2, 3$	$0, 3$	2
$1, 3, 4$	$1, 4$	$0, 2, 3$	$0, 3$	2
$2, 3, 4$	$2, 4$	$0, 1, 3$	$0, 3$	1

Puisque les boules sont indiscernables au toucher, chacune de ces dix configurations est équiprobable. On en déduit que :

$$\boxed{\mathrm{P}(D_2 = 0) = \mathrm{P}(D_2 = 4) = 0, \quad \mathrm{P}(D_2 = 1) = \mathrm{P}(D_2 = 3) = \frac{1}{10} \quad \text{et} \quad \mathrm{P}(D_2 = 2) = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}}.$$

2. Dans cette question, on considère le cas $n = 3$. Montrer que $\mathrm{P}(D_3 = 1) = 1/35$.

▶ Pour $n = 3$, le sac contient initialement $2 \times 3 + 1 = 7$ boules. En raisonnant comme à la question 1(a), on obtient que :

$$\mathrm{card}(\Omega_3) = \underbrace{\binom{7}{3}}_{1^{\text{er}}\text{ tirage}} \underbrace{\times}_{\text{et puis}} \underbrace{\binom{5}{3}}_{2^{\text{e}}\text{ tirage}} \underbrace{\times}_{\text{et puis}} \underbrace{\binom{3}{3}}_{3^{\text{e}}\text{ tirage}} = 35 \times 10 \times 1 = 350.$$

Parmi ces 350 configurations possibles, on cherche le nombre de celles qui correspondent à l'événement «$D_3 = 1$». Or, pour que la dernière boule dans le sac soit celle de numéro 1, il faut tirer au dernier tirage les boules de numéros 0 et 1 et une troisième boule de numéro $c > 1$ (ainsi les boules de numéros 0 et c sont éliminées, et il reste seulement la boule de numéro 1 dans le sac). Par conséquent, la boule de numéro 0 ne peut pas être tirée aux deux premiers tirages (sinon elle serait éliminée avant le troisième tirage), ni la boule de numéro 1 (sinon elle serait éliminée aussi puisque la boule de numéro 0 n'a pas été tirée). On en déduit qu'on choisit trois boules parmi $7 - 2 = 5$ au premier tirage, et puis trois boules parmi $7 - 2 - 2 = 3$ au deuxième tirage, et puis trois boules parmi les trois dernières au troisième tirage. Ainsi :

$$\mathrm{card}(D_3 = 1) = \underbrace{\binom{5}{3}}_{1^{\text{er}}\text{ tirage}} \underbrace{\times}_{\text{et puis}} \underbrace{\binom{3}{3}}_{2^{\text{e}}\text{ tirage}} \underbrace{\times}_{\text{et puis}} \underbrace{\binom{3}{3}}_{3^{\text{e}}\text{ tirage}} = 10 \times 1 \times 1 = 10.$$

Finalement, puisque les configurations possibles sont équiprobables, on obtient que :

$$\boxed{\mathrm{P}(D_3 = 1) = \frac{\mathrm{card}(D_3 = 1)}{\mathrm{card}(\Omega_3)} = \frac{10}{350} = \frac{1}{35}}.$$

On revient au cas général où $n \in \mathbb{N}^*$.

3. *Que valent les probabilités des événements «$D_n = 0$» et «$D_n = 2n$» ? Justifier votre réponse.*

▶ On élimine deux boules à chaque tirage. Au bout de $n-1$ tirages, il reste donc $2n+1-2(n-1) = 3$ boules dans le sac qui sont toutes tirées au dernier tirage. Ainsi, chaque boule est tirée au moins une fois. Or la boule de numéro 0 est éliminée dès qu'elle est tirée (car 0 est le plus petit numéro). Par conséquent, l'événement que la dernière boule dans le sac soit celle de numéro 0 est impossible, c'est-à-dire $\boxed{P(D_n = 0) = 0}$. De même, $\boxed{P(D_n = 2n) = 0}$ car $2n$ est le plus grand numéro.

Partie II - Simulation informatique

Écrire les fonctions demandées en Python. On pourra appeler les fonctions des questions précédentes même si elles n'ont pas été écrites. Pour rappel :

— `min(L)` *(et* `max(L)`*) renvoie le plus petit (respectivement le plus grand) élément de la liste* `L` *;*

— `L.append(e)` *ajoute l'élément* `e` *à la fin de la liste* `L` *;*

— `L.remove(e)` *retire une fois l'élément* `e` *de la liste* `L` *;*

— `L.pop(i)` *renvoie l'élément* `L[i]` *d'indice* `i` *de la liste* `L` *et le retire de la liste* `L` *;*

— `randint(a,b)` *de la bibliothèque* `random` *renvoie un entier aléatoire entre* `a` *inclus et* `b` *inclus.*

4. *Écrire une fonction* `tirage` *qui prend en argument une liste* `Lsac` *(qu'on suppose contenir au moins trois éléments), qui retire au hasard trois éléments (d'indices différents) de* `Lsac` *puis qui renvoie ces trois éléments (dans n'importe quel ordre) sous la forme d'une autre liste* `Ltirage`*.*

▶ Par exemple :

```
def tirage(Lsac):
    Ltirage=[]
    for boule in range(3):
        nb_boules=len(Lsac)
        indice_boule=rd.randint(0,nb_boules-1)
        numero_boule=Lsac.pop(indice_boule)
        Ltirage.append(numero_boule)
    return Ltirage
```

5. *Écrire une fonction* `milieu` *qui prend en argument une liste* `Ltirage` *qu'on suppose contenir exactement trois éléments distincts, et qui renvoie l'élément qui n'est ni le plus petit, ni le plus grand. Par exemple,* `milieu([5,2,3])` *renvoie* `3` *et* `milieu([4,5,0])` *renvoie* `4`*.*

▶ Par exemple :

```
def tirage(Lsac):
    def milieu(Ltirage):
    minimum=min(Ltirage)
    maximum=max(Ltirage)
    Ltirage.remove(minimum)
    Ltirage.remove(maximum)
    return Ltirage[0]
```

Attention de bien renvoyer l'élément `Ltirage[0]` *de la liste* `Ltirage` *(qui ne contient plus qu'un seul élément après avoir retiré le plus petit et le plus grand élément) et non la liste* `Ltirage`*. Par exemple* `milieu([5,2,3])` *doit renvoyer l'élément* `3` *et non la liste* `[3]`*.*

6. *Écrire une fonction* `experience` *qui prend en argument l'entier n, et qui renvoie la valeur de D_n après avoir simulé les n tirages de l'expérience aléatoire décrite au début du problème.*

▶ Par exemple :

```
def experience(n):
    Lsac=[i for i in range(0,2*n+1)]
    for k in range(n):
        Ltirage=tirage(Lsac)
        numero_remis=milieu(Ltirage)
        Lsac.append(numero_remis)
    return Lsac[0]
```

Comme à la question précédente, il faut renvoyer l'élément `Lsac[0]` *de la liste* `Lsac` *(qui ne contient plus qu'un seul élément après n tirages) et non la liste.*

7. *Écrire une fonction* `frequences(n,nbSimul)` *qui simule* `nbSimul` *fois l'expérience aléatoire décrite au début du problème, et qui renvoie une liste* `Lfreq` *de $2n+1$ éléments dont l'élément* `Lfreq[i]` *d'indice* `i` *est égal à la fréquence empirique de l'événement «$D_n =$* `i`*», c'est-à-dire le rapport du nombre d'apparition de cet événement par le nombre de simulations* `nbSimul`*.*

   ▶ Par exemple :

```
def frequences(n,nbSimul):
    Lfreq=[0 for i in range(0,2*n+1)]
    for simul in range(nbSimul):
        D=experience(n)
        Lfreq[D]=Lfreq[D]+1/nbSimul
    return Lfreq
```

Partie III - Calcul de $\mathrm{P}(D_n = 1)$ - 1re méthode

Dans cette partie, on propose de calculer la probabilité que la dernière boule dans le sac soit celle de numéro 1. On sait déjà que $\mathrm{P}(D_1 = 1) = 1$ et on suppose avoir calculé $\mathrm{P}(D_2 = 1)$ et $\mathrm{P}(D_3 = 1)$ dans la partie I. On fixe donc un entier $n \geqslant 4$ dans les question suivantes et on note A_k l'événement «ni la boule de numéro 0 ni celle de numéro 1 ne sont tirées au k-ième tirage».

8. *Justifier que les événements «$D_n = 1$» et $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}$ sont égaux.*

   ▶ On raisonne par double inclusion.

Un événement est une partie de l'univers, donc un sous-ensemble de configurations possibles des n tirages. Montrer que deux événements sont égaux consiste donc à prouver que deux ensembles sont égaux.

<u>1re inclusion</u>. On suppose que l'événement «$D_n = 1$» se produit, c'est-à-dire que la dernière boule dans le sac soit celle de numéro 1. En raisonnant comme dans la question 2, on remarque qu'il faut tirer au dernier tirage les boules de numéros 0 et 1 et une troisième boule de numéro $c > 1$. Par conséquent, la boule de numéro 0 ne peut pas être tirée aux tirages précédents, ni la boule de numéro 1. Autrement dit, les boules de numéros 0 et 1 ne sont pas tirées au premier tirage (événement A_1), ni au deuxième tirage (événement A_2), ..., ni au $(n-1)$-ième tirage (événement A_{n-1}). On en déduit bien que :

$$(D_n = 1) \subset A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}.$$

<u>2e inclusion</u>. On suppose que l'événement $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}$ se produit, c'est-à-dire que les boules de numéros 0 et 1 ne sont pas tirées lors des $n-1$ premiers tirages. Ainsi, les boules de numéros 0 et 1 sont tirées seulement au dernier tirage avec une troisième boule de numéro $c > 1$. Les boules de numéros 0 et c sont alors éliminées, et il reste seulement la boule de numéro 1 dans le sac. On en déduit bien que :

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1} \subset (D_n = 1).$$

<u>Conclusion</u>. Par double inclusion, on a bien montré que $\boxed{(D_n = 1) = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}}$.

9. *Montrer que* $\mathrm{P}(A_1) = \binom{2n-1}{3}/\binom{2n+1}{3}$ *et déterminer une expression similaire pour* $\mathrm{P}_{A_1}(A_2)$.

▶ Lors du premier tirage, on choisit trois boules parmi les $2n+1$ contenues dans le sac. Il y a donc $\binom{2n+1}{3}$ configurations possibles du premier tirage. Parmi ces configurations, il y en a $\binom{2n+1-2}{3} = \binom{2n-1}{3}$ où les boules de numéros 0 et 1 ne sont pas tirées (on choisit trois boules parmi les $2n+1-2 = 2n-1$ boules de numéros différents de 0 et 1). Puisque les boules sont indiscernables au toucher, chaque configuration du premier tirage est équiprobable. Par conséquent :

$$\boxed{\mathrm{P}(A_1) = \frac{\binom{2n-1}{3}}{\binom{2n+1}{3}}}.$$

De même au deuxième tirage, il reste $2n+1-2 = 2n-1$ dans le sac (puisqu'on en a éliminé deux au premier tirage), dont $2n-1-2 = 2n-3$ boules de numéros différents de 0 et 1 (puisque les boules de numéros 0 et 1 sont toujours dans le sac car elles n'ont pas été tirées au premier tirage). Par conséquent :

$$\boxed{\mathrm{P}_{A_1}(A_2) = \frac{\binom{2n-3}{3}}{\binom{2n-1}{3}}}.$$

10. *Soit* $k \in \{1, 2, \dots, n-2\}$. *En vous inspirant de la question précédente, exprimer* $\mathrm{P}_{A_1\cap\dots\cap A_k}(A_{k+1})$ *comme un quotient de deux coefficients binomiaux qui dépendent de* k *et* n.

▶ On suppose que l'événement $A_1 \cap \dots \cap A_k$ se produit. Donc les boules de numéros 0 et 1 sont toujours dans le sac après les k premiers tirages. Puisqu'on élimine deux boules à chaque tirage, il reste $2n+1-2k = 2(n-k)+1$ boules dans le sac pour le $(k+1)$-ième tirage, dont $2(n-k)+1-2 = 2(n-k)-1$ boules de numéros différents de 0 et 1. Par conséquent :

$$\boxed{\mathrm{P}_{A_1\cap\dots\cap A_k}(A_{k+1}) = \frac{\binom{2(n-k)-1}{3}}{\binom{2(n-k)+1}{3}}}.$$

11. *Déduire des résultats précédents que* $\mathrm{P}(D_n = 1) = 1/c_n$ *où* c_n *est un coefficient binomial à déterminer.*

▶ On a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(D_n = 1) &= \mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) \quad \text{d'après le résultat de la question 8} \\
&= \mathrm{P}(A_1) \times \mathrm{P}_{A_1}(A_2)\mathrm{P}_{A_1\cap A_2}(A_3) \times \dots \times \mathrm{P}_{A_1\cap\dots\cap A_{n-2}}(A_{n-1}) \quad \text{d'après la formule des probabilités composées} \\
&= \frac{\binom{2n-1}{3}}{\binom{2n+1}{3}} \times \underbrace{\frac{\binom{2n-3}{3}}{\binom{2n-1}{3}}}_{k=1} \times \underbrace{\frac{\binom{2n-5}{3}}{\binom{2n-3}{3}}}_{k=2} \times \dots \times \underbrace{\frac{\binom{5}{3}}{\binom{7}{3}}}_{k=n-3} \times \underbrace{\frac{\binom{3}{3}}{\binom{5}{3}}}_{k=n-2} \quad \text{d'après les résultats des questions 9 et 10} \\
&= \frac{\prod_{i=1}^{n-1}\binom{2i+1}{3}}{\prod_{i=2}^{n}\binom{2i+1}{3}} = \frac{\overbrace{\binom{3}{3}}^{i=1}}{\underbrace{\binom{2n+1}{3}}_{i=n}} \quad \text{en reconnaissant un produit télescopique} \\
&= \boxed{\frac{1}{\binom{2n+1}{3}}} \quad \text{car } \binom{3}{3} = 1.
\end{aligned}$$

On en déduit bien le résultat en posant $\boxed{c_n = \binom{2n+1}{3}}$.

Partie IV - Calcul de $\mathrm{P}(D_n = 1)$ - 2e méthode

On souhaite retrouver le résultat de la partie précédente par récurrence. Pour cela, on fixe un entier $n \geqslant 2$ *dans les questions suivantes et on note* B_i *l'événement «la boule de numéro* i *est tirée au premier tirage»,* $\overline{B_i}$ *l'événement contraire. De plus, on pose :*

$$E_0 = B_0, \quad E_1 = \overline{B_0} \cap B_1 \quad \text{et} \quad E_2 = \overline{B_0} \cap \overline{B_1}.$$

12. *Vérifier que E_0, E_1 et E_2 forment un système complet d'événements.*

▶ On a :

$$E_0 \cap E_1 = B_0 \cap \left(\overline{B_0} \cap B_1\right) = \big(\underbrace{B_0 \cap \overline{B_0}}_{=\emptyset}\big) \cap B_1 = \emptyset$$

$$E_0 \cap E_2 = B_0 \cap \left(\overline{B_0} \cap \overline{B_1}\right) = \big(\underbrace{B_0 \cap \overline{B_0}}_{=\emptyset}\big) \cap \overline{B_1} = \emptyset$$

$$\text{et} \quad E_1 \cap E_2 = \left(\overline{B_0} \cap B_1\right) \cap \left(\overline{B_0} \cap \overline{B_1}\right) = \big(\underbrace{B_0 \cap \overline{B_0}}_{=\emptyset}\big) \cap \big(\underbrace{B_1 \cap \overline{B_1}}_{=\emptyset}\big) = \emptyset.$$

Donc les événements E_0, E_1 et E_2 sont deux à deux incompatibles. De plus :

$$E_0 \cup E_1 \cup E_2 = B_0 \cup \left(\overline{B_0} \cap B_1\right) \cup \left(\overline{B_0} \cap \overline{B_1}\right) = B_0 \cup \Big(\overline{B_0} \cap \big(\underbrace{B_1 \cup \overline{B_1}}_{=\Omega_n}\big)\Big) = \underbrace{B_0 \cup \overline{B_0}}_{=\Omega_n} = \Omega_n.$$

On a bien montré que $\boxed{E_0,\ E_1 \text{ et } E_2 \text{ forment un système complet d'événements}}$.

13. *Exprimer $\mathrm{P}(E_0)$, $\mathrm{P}(E_1)$ et $\mathrm{P}(E_2)$ comme des quotients de coefficients binomiaux qui dépendent de n.*

▶ Lors du premier tirage, on choisit trois boules parmi les $2n+1$ contenues dans le sac. Il y a donc $\binom{2n+1}{3}$ configurations possibles du premier tirage. Parmi ces configurations, on cherche le nombre de celles où la boule de numéro 0 est tirée. Il y en a :

$$\underbrace{\binom{1}{1}}_{\substack{\text{choix de la boule}\\ \text{de numéro 0}}} \times \underbrace{\binom{2n+1-1}{2}}_{\substack{\text{choix des deux}\\ \text{autres boules}}} = \binom{2n}{2}.$$

On en déduit que :

$$\boxed{\mathrm{P}(E_0) = \frac{\binom{2n}{2}}{\binom{2n+1}{3}}}.$$

De même, le nombre de configurations du premier tirage où la boule de numéro 0 n'est pas tirée et la boule de numéro 1 est tirée est égal à :

$$\underbrace{\binom{1}{1}}_{\substack{\text{choix de la boule}\\ \text{de numéro 1}}} \times \underbrace{\binom{2n+1-2}{2}}_{\substack{\text{choix des deux}\\ \text{autres boules}}} = \binom{2n-1}{2} \quad \text{donc} \quad \boxed{\mathrm{P}(E_1) = \frac{\binom{2n-1}{2}}{\binom{2n+1}{3}}}.$$

De même, le nombre de configurations du premier tirage où les boules de numéros 0 et 1 ne sont pas tirées est égal à :

$$\underbrace{\binom{2n+1-2}{3}}_{\substack{\text{choix de trois}\\ \text{autres boules}}} = \binom{2n-1}{3} \quad \text{donc} \quad \boxed{\mathrm{P}(E_2) = \frac{\binom{2n-1}{3}}{\binom{2n+1}{3}}}.$$

On remarque que $E_2 = \overline{B_0} \cap \overline{B_1}$ est égal à l'événement A_1 de la partie III. On retrouve donc le résultat de la question 9 : $\mathrm{P}(E_2) = \mathrm{P}(A_1) = \binom{2n-1}{3} / \binom{2n+1}{3}$.

14. (a) *Justifier brièvement que $\mathrm{P}_{E_0}(D_n = 1) = 0$. Que vaut $\mathrm{P}_{E_1}(D_n = 1)$?*

▶ On suppose que l'événement E_0 se produit. Donc la boule de numéro 0 est éliminée au premier tirage. Ainsi, la boule de numéro 1 est désormais celle de plus petit numéro et elle sera donc éliminée dès qu'elle sera tirée. Puisqu'elle sera tirée au moins une fois, l'événement que la dernière boule dans le sac soit celle de numéro 1 est impossible, c'est-à-dire $\boxed{\mathrm{P}_{E_0}(D_n = 1) = 0}$. D'autre part, si l'événement E_1 se produit alors la boule de numéro 1 est éliminée au premier tirage et il est impossible que cette boule soit la dernière dans le sac. Donc $\boxed{\mathrm{P}_{E_1}(D_n = 1) = 0}$.

(b) *Justifier brièvement que* $\mathrm{P}_{E_2}(D_n = 1) = \mathrm{P}(D_{n-1} = 1)$.

▶ On suppose que l'événement E_2 se produit. Donc on élimine deux boules de numéros différents de 0 et 1 au premier tirage. Il reste $2n + 1 - 2 = 2n - 1 = 2(n - 1) + 1$ boules dans le sac pour les $n - 1$ tirages suivants. Si on les renumérote dans l'ordre croissant de 0 à $2(n - 1)$ (donc sans changer les numéros 0 et 1), on retrouve le même problème en remplaçant la valeur de n par $n - 1$. Par conséquent :

$$\boxed{\mathrm{P}_{E_2}(D_n = 1) = \mathrm{P}(D_{n-1} = 1)}.$$

15. *Déduire des résultats précédents que :*

$$\forall n \geqslant 2, \quad \mathrm{P}(D_n = 1) = \frac{\binom{2n-1}{3}}{\binom{2n+1}{3}} \mathrm{P}(D_{n-1} = 1).$$

▶ On fixe $n \geqslant 2$. Puisque E_0, E_1 et E_2 forment un système complet d'événements d'après le résultat de la question 12, on a d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(D_n = 1) &= \mathrm{P}(E_0)\mathrm{P}_{E_0} \times (D_n = 1) + \mathrm{P}(E_1) \times \mathrm{P}_{E_1}(D_n = 1) + \mathrm{P}(E_2) \times \mathrm{P}_{E_2}(D_n = 1) \\
&= \frac{\binom{2n}{2}}{\binom{2n+1}{3}} \times 0 + \frac{\binom{2n-1}{2}}{\binom{2n+1}{3}} \times 0 + \frac{\binom{2n-1}{3}}{\binom{2n+1}{3}} \times \mathrm{P}(D_{n-1} = 1) \quad \text{d'après les résultats des questions précédentes} \\
&= \boxed{\frac{\binom{2n-1}{3}}{\binom{2n+1}{3}} \mathrm{P}(D_{n-1} = 1)}.
\end{aligned}$$

16. *Conjecturer que* $\mathrm{P}(D_n = 1)$ *est de la forme* $1/c_n$ *où* c_n *est un coefficient binomial à déterminer, puis démontrer cette conjecture pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$.

▶ On a :

- $\mathrm{P}(D_1 = 1) = 1 = 1/\binom{3}{3}$ d'après l'énoncé,
- $\mathrm{P}(D_2 = 1) = 1/10 = 1/\binom{5}{3}$ d'après le résultat de la question 1(b),
- $\mathrm{P}(D_3 = 1) = 1/35 = 1/\binom{7}{3}$ d'après le résultat de la question 2,
- $\mathrm{P}(D_4 = 1) = \frac{\binom{7}{3}}{\binom{9}{3}} \mathrm{P}(D_3 = 1) = 1/\binom{9}{3}$ d'après le résultat de la question précédente,
- etc.

On conjecture que $\mathrm{P}(D_n = 1) = 1/\binom{2n+1}{3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et on raisonne par récurrence pour la démontrer.

Initialisation. La conjecture est vraie pour $n = 1$ car $\mathrm{P}(D_1 = 1) = 1$ d'après l'énoncé et $\binom{3}{3} = 1$.

Hérédité. On suppose que la conjecture est vraie pour un rang $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Alors :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(D_{n+1} = 1) &= \frac{\binom{2(n+1)-1}{3}}{\binom{2(n+1)+1}{3}} \mathrm{P}(D_n = 1) \quad \text{d'après le résultat de la question précédente} \\
&= \frac{\binom{2n+1}{3}}{\binom{2n+3}{3}} \times \frac{1}{\binom{2n+1}{3}} \quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\
&= \frac{1}{\binom{2n+3}{3}} = \frac{1}{\binom{2(n+1)+1}{3}}.
\end{aligned}$$

Ainsi, la conjecture est vraie au rang $n + 1$ dès qu'elle est vraie au rang n.

Conclusion. D'après le principe de récurrence, on en déduit que $\boxed{(D_n = 1) = 1/\binom{2n+1}{3}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, d'où le résultat en posant $\boxed{c_n = \binom{2n+1}{3}}$.

Problème 2 : étude d'une famille de polynômes

Énoncé et corrigé de V. Vong

I. Étude des fonctions polynômiales P_n

1. Voici la fonction demandée :

```
def calcul_P(x,n) :
    S = 0
    for i in range(1,2*n+1) :
        S = S + ((-x)**i)/i
    return S
```

2. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. P_n étant une fonction polynomiale, elle est donc dérivable sur son ensemble de définition. De plus :
$$\forall x \geq 0, P_n'(x) = \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^{k+1} x^k.$$
On a donc
$$\forall x \geq 0, P_n'(x) = -\sum_{k=0}^{2n-1} (-x)^k.$$
Soit $x \geq 0$. On a alors $-x \leq 0$ donc est différent de 1. $\sum_{k=0}^{2n-1} (-x)^k$ est alors une somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $-x \neq 1$. Donc
$$P_n'(x) = -\frac{1-x^{2n}}{1-(-x)}.$$
Donc $P_n'(x) = \frac{x^{2n}-1}{x+1}$. Cette démonstration étant valide pour tout $x \geq 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^\star$ on en déduit que
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^\star, \forall x \geq 0, P_n'(x) = \frac{x^{2n}-1}{1+x}.}.$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Pour tout $x \geq 0$, étudions le signe de $P_n'(x)$. Soit $x \geq 0$. Raisonnons par équivalence. D'après la question 2, on a
$$P_n'(x) \geq 0 \iff \frac{x^{2n-1}}{1+x} \geq 0.$$
0r $x+1 > 0$. Donc
$$P_n'(x) \geq 0 \iff x^{2n} - 1 \geq 0.$$
Donc
$$P_n'(x) \geq 0 \iff x^{2n} \geq 1.$$
Par stricte croissance de la fonction $x \mapsto x^{2n}$ sur $\mathbb{R}^+$ on en déduit que
$$P_n'(x) \geq 0 \iff x \geq 1.$$
De cette étude, on en déduit que P_n' est négative sur $[0,1]$, positive sur $[1,+\infty[$ et s'annule uniquement en 1. Ainsi, P_n est strictement décroissante sur $[0,1]$, strictement croissante sur $[1,+\infty[$. Calculons les limites en 0 et en $+\infty$.
   - En 0 : on a $P_n(0) = 0$
   - En $+\infty$: un polynôme étant équivalent à son terme de plus haut degré en $+\infty$, on a donc $P_n(x) \sim_{x\to+\infty} \frac{x^{2n}}{2n}$. Or $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{2n}}{2n} = +\infty$. On a donc $\lim_{+\infty} P_n = +\infty$.

   On en déduit le tableau de variations suivant :

x	0		1		$+\infty$
P_n	0	$\searrow$	$P_n(1)$	$\nearrow$	$+\infty$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. D'après la question 3, P_n est strictement décroissante sur $[0,1]$. Donc $P_n(0) > P_n(1)$. Donc $0 > P_n(1)$. Cette démonstration étant valide pour tout entier strictement positif, on a bien

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^\star, P_n(1) < 0.}.$$

5. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, soit $x \geq 0$. On a

$$P_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^k x^k}{k}.$$

Donc

$$P_{n+1}(x) = \left(\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k x^k}{k}\right) + \frac{(-1)^{2n+1} x^{2n+1}}{2n+1} + \frac{(-1)^{2n+2} x^{2n+2}}{2n+2}.$$

On a donc

$$\boxed{P_{n+1}(x) = P_n(x) + x^{2n+1}\left(-\frac{1}{2n+1} + \frac{x}{2n+2}\right)}.$$

(b) Démontrons par récurrence que pour tout $n \geq 3$, on a $P_n(2) \geq 2$.

— Initialisation : $P_1(2) = 0$, $P_2(2) = 0+2^3\left(-\frac{1}{3}+\frac{2}{4}\right) = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$. Donc $P_3(2) = \frac{4}{3}+2^5\left(-\frac{1}{5}+\frac{2}{6}\right) = \frac{4}{3}+32\cdot\frac{2}{15} = \frac{20+64}{15} = \frac{84}{15} > 2$ On a bien $P_3(2) \geq 2$.

— Hérédité : soit $n \geq 3$. Supposons que $P_n(2) \geq 2$. Montrons que $P_{n+1}(2) \geq 2$. On a d'après 5.a,

$$P_{n+1}(2) = P_n(2) + 2^{2n+1}\left(-\frac{1}{2n+1} + \frac{2}{2n+2}\right).$$

De plus d'après l'hypothèse de récurrence, $P_n(2) \geq 2$ Donc $P_{n+1}(2) \geq 2+2^{2n+1}\left(-\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{n+1}\right)$
D'où $P_{n+1}(2) \geq 2+2^{2n+1}\left(\frac{n}{(n+1)(2n+1)}\right) \geq 2$. La propriété est donc vraie au rang $n+1$.

— Conclusion : d'après le principe de récurrence, on a bien

$$\boxed{\forall n \geq 3, P_n(2) \geq 2}.$$

6. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On sait que :

— P_n est continue et strictement croissante sur $[1,+\infty[$

— $P_n(1) < 0$ et $\lim_{+\infty} P_n = +\infty$.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $x_n \in]1,+\infty[$ vérifiant $P_n(x_n) = 0$.
De plus, $P_n(2) \geq 0$ d'après les calculs dans la question 5.b. Donc $x_n \in]1,2]$

7. Voici la fonction demandée :

```
def approx(n,epsilon) :
    a = 1
    b = 2
    while abs(b-a)>epsilon :
        c = (a+b)/2
        if calcul_P(n,c) <0 :
            a = c
        else :
            b = c
    return [a,b]
```

II. Limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$

8. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. P_n' est une fonction continue sur $[0,+\infty[$ et admet donc comme unique primitive la fonction $x \mapsto \int_0^n P_n'(t)dt$. On a donc

$$\forall x \in [0,+\infty[, P_n(x) - P_n(0) = \int_0^x P_n'(t)\,dt.$$

Or $P_n(0) = 0$. On en déduit d'après la question 2 :

$$\boxed{\forall x \in [0,+\infty[, P_n(x) = \int_0^x \frac{t^{2n}-1}{t+1}dt}.$$

9. En remplaçant x par x_n dans l'égalité de la question 7, on obtient

$$P_n(x_n) = \int_0^{x_n} \frac{t^{2n}-1}{t+1}dt.$$

Or x_n est racine de P_n. Donc

$$0 = \int_0^{x_n} \frac{t^{2n}-1}{t+1}dt.$$

Donc, à l'aide de la relation de Chasles :

$$0 = \int_0^1 \frac{t^{2n}-1}{t+1}dt + \int_1^{x_n} \frac{t^{2n}-1}{t+1}dt.$$

D'où

$$-\int_0^1 \frac{t^{2n}-1}{t+1}dt = \int_1^{x_n} \frac{t^{2n}-1}{t+1}dt.$$

Donc

$$\boxed{\int_0^1 \frac{1-t^{2n}}{t+1}dt = \int_1^{x_n} \frac{t^{2n}-1}{t+1}dt}.$$

10. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On a

$$\int_0^1 \frac{1-t^{2n}}{1+t} = \int_0^1 \frac{1}{1+t}dt - \int_0^1 \frac{t^{2n}}{1+t}dt.$$

Donc

$$\int_0^1 \frac{1-t^{2n}}{1+t} = \ln(2) - \int_0^1 \frac{t^{2n}}{1+t}dt.$$

Or :$\forall t \in [0,1], \frac{t^{2n}}{1+t} \geq 0$. Donc $\int_0^1 \frac{t^{2n}}{1+t}dt \geq 0$. D'où

$$\ln(2) - \int_0^1 \frac{t^{2n}}{1+t}dt \leq \ln(2).$$

On en déduit que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^\star, \int_0^1 \frac{1-t^{2n}}{1+t} \leq \ln(2)}.$$

11. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, soit $t \in [1,+\infty[$. Remarquons que l'inégalité est vraie pour $t=1$. On suppose désormais que $t > 1$. On a

$$\frac{t^{2n}-1}{t^2-1} = \frac{(t^2)^n - 1}{t^2-1}.$$

On reconnaît la forme simplifiée de $\sum_{k=0}^{n-1}(t^2)^k$. Or $t>1$. Donc $\forall k \in \{0,\dots n-1\}, (t^2)^k \geq 1$. Donc

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(t^2\right)^k \geq \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n.$$

On en déduit que

$$\frac{t^{2n}-1}{t^2-1} \geq n.$$

D'où

$$t^{2n}-1 \geq n\left(t^2-1\right).$$

Cette démonstration étant valide pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ et $t \geq 1$, on a donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^\star, \forall t \geq 1, t^{2n}-1 \geq n\left(t^2-1\right)}.$$

12. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On a d'après q 10 :

$$\forall t \in [1, x_n], \frac{t^{2n}-1}{t+1} \geq n\frac{t^2-1}{t+1}.$$

Donc

$$\forall t \in [1, x_n], \frac{t^{2n}-1}{t+1} \geq n\left(t-1\right).$$

En intégrant sur $[1, x_n]$ on obtient

$$\int_1^{x_n} \frac{t^{2n}-1}{t+1}dt \geq \int_1^{x_n} n\left(t-1\right)dt.$$

D'où

$$\int_1^{x_n} \frac{t^{2n}-1}{t+1}dt \geq [\frac{n(t-1)^2}{2}]_{t=1}^{t=x_n}.$$

Donc

$$\underline{\int_1^{x_n} \frac{t^{2n}-1}{t+1}dt \geq \frac{n\left(x_n-1\right)^2}{2}}.$$

On a donc

$$\frac{2}{n}\int_1^{x_n} \frac{t^{2n}-1}{t+1}dt \geq \left(x_n-1\right)^2.$$

D'après la question 8, on obtient

$$\frac{2}{n}\int_0^{1} \frac{1-t^{2n}}{t+1}dt \geq \left(x_n-1\right)^2.$$

On en déduit d'après la question 9,

$$\frac{2}{n}\ln\left(2\right) \geq \frac{2}{n}\int_0^{1} \frac{1-t^{2n}}{t+1}dt \geq \left(x_n-1\right)^2.$$

Par stricte croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}^+$ on en déduit que

$$\sqrt{\frac{2\ln\left(2\right)}{n}} \geq \mid x_n-1 \mid.$$

Or $x_n > 1$ d'après la question 6. Donc

$$\boxed{0 < x_n - 1 \leqslant \frac{\sqrt{2\ln 2}}{\sqrt{n}}}.$$

13. On a $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{2\ln(2)}}{\sqrt{n}} = 0$. De plus, d'après la question 11, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, 0 < x_n - 1 \leqslant \frac{\sqrt{2\ln 2}}{\sqrt{n}}.$$

Donc d'après le théorème d'encadrement, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(x_n-1\right) = 0.$$

Il en résulte que la suite $\left(x_n\right)_{n>0}$ est convergente et

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} x_n = 1}.$$

DS n° 8 de mathématiques et d'informatique

durée : 3 heures

Exercice 1

On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur $[-1,1]$ par :

$$f_0 : x \mapsto x \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ f_{n+1} : x \mapsto 3f_n\left(\tfrac{x}{3}\right) - 4\left(f_n\left(\tfrac{x}{3}\right)\right)^3.$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que f_n est une fonction polynomiale impaire dont on déterminera le degré.
2. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Exprimer $\sin(3\theta)$ en fonction de $\sin(\theta)$.
3. On note P la fonction polynomiale $t \mapsto 3t - 4t^3$.
   (a) Montrer que $P(t) \in [-1,1]$ pour tout $t \in [-1,1]$.
   (b) En déduire par récurrence que $f_n(x) \in [-1,1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [-1,1]$.
   (c) À l'aide du théorème des accroissements finis, établir que $\forall (s,t) \in [-1,1]^2,\ |P(s)-P(t)| \leqslant 9|s-t|$.
4. Déduire des résultats précédents que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in [-1,1], \quad \left|f_{n+1}(x) - \sin(x)\right| \leqslant 9\left|f_n\left(\tfrac{x}{3}\right) - \sin\left(\tfrac{x}{3}\right)\right|.$$

5. Dans cette question, on fixe $x > 0$ et on pose la fonction :

$$g : y \mapsto \sin(y) - y + \lambda y^3 \quad \text{où} \quad \lambda = \frac{x - \sin(x)}{x^3}.$$

   (a) En appliquant plusieurs fois le théorème de Rolle, justifier l'existence d'un réel $c \in]0,x[$ tel que $\cos(c) = 6\lambda$.
   (b) En déduire que $\left|x - \sin(x)\right| \leqslant \dfrac{|x|^3}{6}$.
   (c) Montrer que l'inégalité précédente est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$.
6. À l'aide des résultats précédents, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in [-1,1], \quad \left|f_n(x) - \sin(x)\right| \leqslant \frac{|x|^3}{6 \times 3^n}.$$

7. Vers quoi converge la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$? Justifier.
8. **[Informatique]**
   (a) Écrire une fonction `fonction` qui prend en arguments un entier n et un réel x puis qui renvoie la valeur de $f_n(x)$.
   (b) Écrire une fonction `approximation` qui prend en arguments deux réels $x \in [-1,1]$ et `epsilon` > 0, puis qui renvoie une approximation de $\sin(x)$ à `epsilon` près.

Exercice 2

Dans le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^4 = \{\overrightarrow{u} = (z_1, z_2, z_3, z_4) \mid \forall i \in \{1,2,3,4\},\ z_i \in \mathbb{C}\}$, on considère les sous-ensembles H_1 et H_2 de représentations cartésiennes :

$$H_1 : z_1 + iz_2 + 3z_3 - 2iz_4 = 0 \quad \text{et} \quad H_2 : 2iz_1 - 4z_2 - iz_3 + 5z_4 = 0.$$

De plus, on pose $F = H_1 \cap H_2$.

1. Justifier que H_1, H_2 et F sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}^4$. Quelle est la dimension de H_1 et H_2 ?
2. Déterminer une base $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$ de F.
3. On pose $\overrightarrow{u_3} = (-i, 1, 0, 0)$. Montrer que $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$ est une base de H_1.
4. Déterminer une base de H_2 et choisir, dans cette base, un vecteur noté $\overrightarrow{u_4}$, qui n'appartient pas à H_1. Pourquoi pouvait-on être sûr d'en trouver un avant même d'avoir déterminé une base de H_2 ?
5. Montrer que $\mathscr{B} = (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}, \overrightarrow{u_4})$ est une base de $\mathbb{C}^4$.
6. Déterminer la matrice A des coordonnées de la base canonique $\mathscr{C} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_4})$ dans la base $\mathscr{B}$.
7. On pose $B = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(\mathscr{B})$. Calculer AB et BA. Que peut-on en déduire ?

Exercice 3

Une fourmi se déplace aléatoirement dans une fourmilière contenant trois salles notées A, B et C reliées entre elles par des galeries. On suppose que la fourmi se situe dans la salle A à l'instant $n = 0$ puis qu'elle se déplace de la manière suivante :

— si la fourmi se situe dans la salle A à un instant n alors, avec la même probabilité, elle reste dans la salle A ou va dans la salle B à l'instant $n+1$;

— si la fourmi se situe dans la salle B à un instant n alors, avec la même probabilité, elle va dans la salle A ou reste dans la salle B ou va dans la salle C à l'instant $n+1$;

— si la fourmi se situe dans la salle C à un instant n alors elle reste dans la salle C à l'instant $n+1$.

À chaque instant $n \in \mathbb{N}$, on note a_n, b_n et c_n les probabilités des événements A_n, B_n et C_n que la fourmi se situe dans les salles A, B et C respectivement. Ainsi $a_0 = 1$ et $b_0 = c_0 = 0$.

1. **[Informatique]** On rappelle que la fonction `randint(i,j)` de la bibliothèque `random` renvoie un entier aléatoire entre `i` inclus et `j` inclus.
   (a) Écrire une fonction `deplacement` qui prend en argument une chaîne de caractères `salle` egale à `'A'`, `'B'` ou `'C'` correspondant à la salle où se situe la fourmi à un instant donné, puis qui renvoie une chaîne de caractères correspondant à la salle où se situe la fourmi à l'instant suivant.
   (b) Écrire une fonction `experience` qui prend en argument un entier `n`, puis qui renvoie une chaîne de caractères correspondant à la salle où se situe la fourmi à l'instant `n` après avoir simulé l'expérience aléatoire.
   (c) Écrire une fonction `simulation` qui prend en arguments deux entiers `n` et `nbSimul`, puis qui renvoie une liste `L=[a,b,c]` égales aux fréquences empiriques d'apparition des événements A_n, B_n et C_n après avoir simulé `nbSimul` fois l'expérience aléatoire.
2. Calculer a_1, b_1 et c_1.
3. Calculer a_2, b_2 et c_2.
4. Justifier que $a_n + b_n + c_n = 1$ pour tout entier $n \geqslant 0$.
5. Montrer que $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}a_n + \dfrac{1}{3}b_n$ pour tout entier $n \geqslant 0$.
6. Soit $n \geqslant 0$. Établir des expressions similaires pour b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
7. Montrer que $c_{n+1} = \dfrac{1}{6} + \dfrac{5}{6}c_n$ pour tout entier $n \geqslant 1$.
8. En déduire une expression de c_n en fonction de $n \geqslant 1$.
9. Quelle est la limite de c_n quand $n \to +\infty$? Ce résultat vous semble-t-il cohérent ?

Corrigé du DS n$^{\text{o}}$ 8 de mathématiques et d'informatique

Exercice 1

On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur $[-1,1]$ par :

$$f_0 : x \mapsto x \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ f_{n+1} : x \mapsto 3f_n\left(\frac{x}{3}\right) - 4\left(f_n\left(\frac{x}{3}\right)\right)^3.$$

1. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que f_n est une fonction polynomiale impaire dont on déterminera le degré.*

▶ On raisonne par récurrence.

Initialisation. Pour $n = 0$, la fonction $f_0 : x \mapsto x$ est bien polynomiale et elle est impaire car :

$$\forall x \in [-1,1], \quad f_0(-x) = -x = -f_0(x).$$

Hérédité. On fixe $n \in \mathbb{N}$ et on suppose que f_n est une fonction polynomiale impaire. Alors la fonction $f_{n+1} : x \mapsto 3f_n\left(\frac{x}{3}\right) - 4\left(f_n\left(\frac{x}{3}\right)\right)^3$ est bien polynomiale comme composée de polynômes et elle est impaire car :

$$\begin{aligned}
\forall x \in [-1,1], \quad f_{n+1}(-x) &= 3f_n\left(\tfrac{-x}{3}\right) - 4\left(f_n\left(\tfrac{-x}{3}\right)\right)^3 \\
&= -3f_n\left(\tfrac{x}{3}\right) - 4\left(-f_n\left(\tfrac{x}{3}\right)\right)^3 \quad \text{puique } f_n \text{ est impaire} \\
&= -3f_n\left(\tfrac{x}{3}\right) + 4\left(f_n\left(\tfrac{x}{3}\right)\right)^3 \quad \text{puisque } (-1)^3 = -1 \\
&= -\left(3f_n\left(\tfrac{x}{3}\right) - 4\left(f_n\left(\tfrac{x}{3}\right)\right)^3\right) \quad \text{en factorisant par } -1 \\
&= -f_{n+1}(x).
\end{aligned}$$

Conlusion. D'après le principe de récurrence, on en déduit que $\boxed{f_n \text{ est une fonction polynomiale impaire pour tout } n \in \mathbb{N}}$. De plus, on a :

$$\deg(f_0) = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ \deg(f_{n+1}) = 3\deg(f_n)$$

car $x \mapsto f_n\left(\frac{x}{3}\right)$ est du même degré que f_n. On reconnaît une suite géométrique de raison 3. Par conséquent :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \boxed{\deg(f_n) = 3^n}.$$

2. *Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Exprimer $\sin(3\theta)$ en fonction de $\sin(\theta)$.*

▶ On a :

$$\begin{aligned}
\sin(3\theta) &= \operatorname{Im}\left(e^{i3\theta}\right) \quad \text{par définition du sinus} \\
&= \operatorname{Im}\left(\left(e^{i\theta}\right)^3\right) \quad \text{par propriété de la puissance} \\
&= \operatorname{Im}\left(\big(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\big)^3\right) \quad \text{d'après la formule de Moivre} \\
&= \operatorname{Im}\left(\cos^3(\theta) + 3\cos^2(\theta) i\sin(\theta) + 3\cos(\theta)\big(i\sin(\theta)\big)^2 + \big(i\sin(\theta)\big)^3\right) \\
&\qquad \text{d'après la formule du binôme de Newton} \\
&= \operatorname{Im}\left(\cos^3(\theta) + i3\cos^2(\theta)\sin(\theta) - 3\cos(\theta)\sin^2(\theta) - i\sin^3(\theta)\right) \quad \text{car } i^2 = -1 \\
&= 3\cos^2(\theta)\sin(\theta) - \sin^3(\theta) \quad \text{en conservant seulement la partie imaginaire} \\
&= 3\big(1 - \sin^2(\theta)\big)\sin(\theta) - \sin^3(\theta) \quad \text{d'après la formule de Pythagore} \\
&= \boxed{3\sin(\theta) - 4\sin^3(\theta)}.
\end{aligned}$$

3. On note P la fonction polynomiale $t \mapsto 3t - 4t^3$.

(a) Montrer que $P(t) \in [-1,1]$ pour tout $t \in [-1,1]$.

▶ La fonction P est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ comme polynôme. En particulier, elle est dérivable sur $[-1,1]$ et :

$$\forall t \in [-1,1], \quad P'(t) = 3 - 12t^2 = -12\left(t^2 - \frac{1}{4}\right) = -12\left(t - \frac{1}{2}\right)\left(t + \frac{1}{2}\right).$$

On en déduit les variations de la fonction P sur $[-1,1]$:

t	-1		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		1
$P'(t)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$P(t)$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	1

car $P(1) = 3 - 4 = -1$, $P(\frac{1}{2}) = \frac{3}{2} - \frac{4}{8} = 1$ et P est une fonction impaire. En particulier, on en déduit bien que $\boxed{P(t) \in [-1,1] \text{ pour tout } t \in [-1,1]}$.

(b) En déduire par récurrence que $f_n(x) \in [-1,1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [-1,1]$.

▶ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$H(n) : «\forall x \in [-1,1],\ f_n(x) \in [-1,1]».$$

Soignez bien la rédaction de l'hypothèse à démontrer par récurrence ici. Il y a deux variables, il ne faut donc pas se tromper dans les quantificateurs : le réel $x \in [-1,1]$ n'est pas fixé.

Initialisation. Pour $n = 0$, on a bien que $H(0)$ est vraie car :

$$\forall x \in [-1,1], \quad f_0(x) = x \in [-1,1].$$

Hérédité. On fixe $n \in \mathbb{N}$ et on suppose que $H(n)$ est vraie. Montrons que $H(n+1)$ est vraie. On fixe $x \in [-1,1]$. On a :

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) &= 3f_n\left(\tfrac{x}{3}\right) - 4\left(f_n\left(\tfrac{x}{3}\right)\right)^3 && \text{d'après l'énoncé} \\ &= P\Big(f_n\left(\tfrac{x}{3}\right)\Big) && \text{en reconnaissant le polynôme } P. \end{aligned}$$

Or $\frac{x}{3} \in [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}] \subset [-1,1]$ (car $x \in [-1,1]$) donc $f_n\left(\frac{x}{3}\right) \in [-1,1]$ d'après l'hypothèse de récurrence $H(n)$ qu'on a supposé vraie. On en déduit que $P\left(f_n\left(\frac{x}{3}\right)\right) \in [-1,1]$ en appliquant le résultat de la question précédente à $t = f_n\left(\frac{x}{3}\right)$, et par conséquent que $f_{n+1}(x) \in [-1,1]$ pour tout $x \in [-1,1]$. On a bien montré que $H(n) \implies H(n+1)$, et cette implication est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Conclusion. D'après le principe de récurrence, on en déduit que $H(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in [-1,1], \quad f_n(x) \in [-1,1]}.$$

(c) À l'aide du théorème des accroissements finis, établir que $\forall (s,t) \in [-1,1]^2,\ |P(s) - P(t)| \leqslant 9|s-t|$.

▶ On fixe deux réels s et t dans $[-1,1]$ et on raisonne par disjonction de cas.
1$^{\text{er}}$ cas : $s = t$. Alors on a bien $|P(s) - P(t)| \leqslant 9|s-t|$ car les deux membres de l'inégalité sont

nuls.
<u>2e cas</u> : $s < t$. La fonction P est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ comme polynôme. En particulier, elle est continue sur $[s, t]$ et dérivable sur $]s, t[$. D'après le théorème des accroissements finis, on en déduit qu'il existe un réel $c \in]s, t[$ tel que :

$$P'(c) = \frac{P(t) - P(s)}{t - s}.$$

Rappelez précisément les hypothèses des théorèmes que vous appliquez. Ici, écrire que $P \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ est suffisant mathématiquement mais ne permet pas de montrer que vous connaissez l'énoncé du théorème des accroissements finis.

Or on a vu à la question 3(a) que $P' : t \mapsto 3 - 12t^2$. On reconnaît un polynôme de degré 2 dont les variations sur $[-1, 1]$ sont :

t	-1		0		1
$P'(t)$	-9	$\nearrow$	3	$\searrow$	-9

En particulier, on en déduit que $|P'(c)| \leqslant 9$ car $c \in]s, t[\subset [-1, 1]$. Par conséquent :

$$\frac{|P(s) - P(t)|}{|s - t|} = \left|\frac{P(s) - P(t)}{s - t}\right| = \left|\frac{P(t) - P(s)}{t - s}\right| = \left|P'(c)\right| \leqslant 9$$

donc $|P(s) - P(t)| \leqslant 9|s - t|$ car $|s - t| > 0$.
<u>3e cas</u> : s>t. On raisonne comme dans le 2e cas en inversant les variables s et t. On obtient que $|P(t) - P(s)| \leqslant 9|t - s|$. Puis on en déduit que $|P(s) - P(t)| \leqslant 9|s - t|$ car $|P(t) - P(s)| = |-(P(s) - P(t))| = |P(s) - P(t)|$ et de même $|t - s| = |-(s - t)| = |s - t|$.
<u>Conclusion</u>. Dans tous les cas, on a bien montré que :

$$\boxed{\forall (s, t) \in [-1, 1]^2, \quad |P(s) - P(t)| \leqslant 9|s - t|}$$

4. Déduire des résultats précédents que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in [-1, 1], \quad \left|f_{n+1}(x) - \sin(x)\right| \leqslant 9 \left|f_n\left(\tfrac{x}{3}\right) - \sin\left(\tfrac{x}{3}\right)\right|.$$

►

Cette question propose de démontrer une relation de récurrence. Cette relation sera probablement utilisée dans un raisonnement par récurrence (cf. la question 6), mais elle n'a aucune raison d'être elle-même démontrée par récurrence (puisqu'aucune question précédente n'a pour résultat une autre relation de récurrence permettant de la démontrer).

On fixe $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [-1, 1]$. On a :

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) &= 3f_n\left(\tfrac{x}{3}\right) - 4\left(f_n\left(\tfrac{x}{3}\right)\right)^3 \quad \text{d'après l'énoncé} \\ &= P\Big(f_n\left(\tfrac{x}{3}\right)\Big) \quad \text{en reconnaissant le polynôme } P, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{et}\quad \sin(x) &= \sin\left(3\times\tfrac{x}{3}\right)\\ &= 3\sin\left(\tfrac{x}{3}\right)-4\sin^3\left(\tfrac{x}{3}\right) \quad \text{d'après le résultat de la question 2 en posant } \theta=\tfrac{x}{3}\\ &= P\Big(\sin\left(\tfrac{x}{3}\right)\Big) \quad \text{en reconnaissant le polynôme } P.\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\boxed{\left|f_{n+1}(x)-\sin(x)\right| = \left|P\Big(f_n\left(\tfrac{x}{3}\right)\Big)-P\Big(\sin\left(\tfrac{x}{3}\right)\Big)\right| \leqslant 9\left|f_n\left(\tfrac{x}{3}\right)-\sin\left(\tfrac{x}{3}\right)\right|}$$

en appliquant le résultat de la question précédente à $s=f_n\left(\frac{x}{3}\right)$ et $t=\sin\left(\frac{x}{3}\right)$ car $s\in[-1,1]$ d'après le résultat de la question 3(b) (puisque $\frac{x}{3}\in[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}]\subset[-1,1]$) et $t\in[-1,1]$ puisque la fonction sinus est à valeurs dans $[-1,1]$.

> *N'oubliez pas de vérifier que $(s,t)\in[-1,1]^2$ pour pouvoir appliquer le résultat de la question précédente.*

5. *Dans cette question, on fixe $x>0$ et on pose la fonction :*

$$g: y\mapsto \sin(y)-y+\lambda y^3 \quad \text{où} \quad \lambda=\frac{x-\sin(x)}{x^3}.$$

(a) *En appliquant plusieurs fois le théorème de Rolle, justifier l'existence d'un réel $c\in]0,x[$ tel que $\cos(c)=6\lambda$.*

▶ La fonction g est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions usuelles. En particulier, elle est continue sur $[0,x]$ et dérivable sur $]0,x[$. De plus :

$$g(0)=\sin(0)-0+\lambda\times 0^3=0 \quad \text{et} \quad g(x)=\sin(x)-x+\lambda x^3=0 \quad \text{car } \lambda=\frac{x-\sin(x)}{x^3}.$$

On peut donc appliquer le théorème de Rolle : il existe un réel $a\in]0,x[$ tel que $g'(a)=0$.

> *Comme à la question 3(c), rappelez précisément les hypothèses des théorèmes que vous appliquez.*

Or on a :

$$g': y\mapsto \cos(y)-1+3\lambda y^2 \quad \text{donc} \quad g'(0)=\cos(0)-1+3\times 0^2=0.$$

Puisque g' est continue sur $[0,a]$ et dérivable sur $]0,a[$ (car $g\in\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$) et que $g'(0)=g'(a)=0$, on sait d'après le théorème de Rolle qu'il existe un réel $b\in]0,a[$ tel que $g''(b)=0$.
Or on a :

$$g'': y\mapsto -\sin(y)+0+6\lambda y \quad \text{donc} \quad g''(0)=-\sin(0)+0+6\times 0=0.$$

Puisque g'' est continue sur $[0,b]$ et dérivable sur $]0,b[$ (car $g\in\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$) et que $g''(0)=g''(b)=0$, on sait d'après le théorème de Rolle qu'il existe un réel $c\in]0,b[$ tel que $g'''(c)=0$.
Or on a :

$$g''': y\mapsto -\cos(y)+6\lambda.$$

On en déduit que :

$$g'''(c)=-\cos(c)+6\lambda=0 \quad \text{donc que} \quad \cos(c)=6\lambda.$$

De plus, $c\in]0,x[$ car $0<c<b<a<x$. Ainsi, on a bien prouvé que $\boxed{\exists c\in]0,x[,\ \cos(c)=6\lambda}$.

(b) *En déduire que $\left|x-\sin(x)\right|\leqslant\dfrac{|x|^3}{6}$.*

▶ D'après le résultat de la question précédente, on a :

$$6|\lambda|=|6\lambda|=|\cos(c)|\leqslant 1 \quad \text{car la fonction cosinus est à valeurs dans } [-1,1].$$

En remplaçant λ par son expression de l'énoncé, on obtient :

$$\frac{|x-\sin(x)|}{|x|^3} = \left|\frac{x-\sin(x)}{x^3}\right| = |\lambda| \leqslant \frac{1}{6}$$

donc $\boxed{\left|x-\sin(x)\right| \leqslant \dfrac{|x|^3}{6}}$ car $|x|^3 > 0$.

(c) Montrer que l'inégalité précédente est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$.

▶ On a démontré le résultat de la question précédente pour tout $x > 0$. Pour $x = 0$, l'inégalité est vraie car les deux membres sont nuls. Il suffit donc de démontrer l'inégalité pour $x < 0$. Dans ce cas, on reprend le raisonnement de la question 5(a) en appliquant une première fois le théorème de Rolle sur l'intervalle $]x, 0[$, puis sur l'intervalle $]a, 0[$ et enfin sur l'intervalle $]b, 0[$. On obtient l'existence d'un réel $c \in]x, 0[$ tel que $\cos(c) = 6\lambda$. Puis le raisonnement de la question 5(b) est identique car $|x|^3 > 0$ même lorsque $x < 0$. Finalement, l'inégalité précédente est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left|x-\sin(x)\right| \leqslant \frac{|x|^3}{6}}.$$

6. À l'aide des résultats précédents, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in [-1, 1], \quad \left|f_n(x)-\sin(x)\right| \leqslant \frac{|x|^3}{6 \times 3^n}.$$

▶ On raisonne par récurrence en posant pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$H'(n) : \text{«}\forall x \in [-1, 1],\ \left|f_n(x)-\sin(x)\right| \leqslant \frac{|x|^3}{6 \times 3^n}\text{»}.$$

Comme à la question 3(b), rédigez proprement l'hypothèse à démontrer par récurrence : le réel $x \in [-1, 1]$ n'est pas fixé.

Initialisation. Pour $n = 0$, on a d'après le résultat de la question précédente :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left|f_0(x)-\sin(x)\right| = \left|x-\sin(x)\right| \leqslant \frac{|x|^3}{6} = \frac{|x|^3}{6 \times 3^0}.$$

Puisque cette inégalité est vraie en particulier pour tout $x \in [-1, 1]$, on a bien montré que $H'(0)$ est vraie.

Hérédité. On fixe $n \in \mathbb{N}$ et on suppose que $H'(n)$ est vraie. Montrons que $H'(n+1)$ est vraie. On fixe $x \in [-1, 1]$. On a :

$$\begin{aligned}
\left|f_{n+1}(x)-\sin(x)\right| &\leqslant 9\left|f_n\left(\tfrac{x}{3}\right)-\sin\left(\tfrac{x}{3}\right)\right| && \text{d'après le résultat de la question 4} \\
&\leqslant 9 \times \frac{\left|\frac{x}{3}\right|^3}{6 \times 3^n} && \text{d'après l'hypothèse de récurrence } H'(n) \text{ qu'on a supposé vraie et car } \tfrac{x}{3} \in [-\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}] \subset [-1, 1] \\
&= 9 \times \frac{\frac{|x|^3}{27}}{6 \times 3^n} = \frac{1}{3} \times \frac{|x|^3}{6 \times 3^n} = \frac{|x|^3}{6 \times 3^{n+1}}.
\end{aligned}$$

On a bien montré que $H'(n) \implies H'(n+1)$, et cette implication est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Conclusion. D'après le principe de récurrence, on en déduit que $H'(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in [-1, 1], \quad \left|f_n(x)-\sin(x)\right| \leqslant \frac{|x|^3}{6 \times 3^n}}.$$

7. *Vers quoi converge la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$? Justifier.*

▶ Pour tout $x \in [-1,1]$, on a $\lim_{n\to+\infty} \frac{|x|^3}{6\times 3^n} = 0$. D'après le théorème de la limite par encadrement, on déduit du résultat de la question précédente que pour tout $x \in [-1,1]$:

$$\lim_{n\to+\infty} \left|f_n(x) - \sin(x)\right| = 0 \quad \text{donc} \quad \boxed{\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \sin(x)}.$$

Par conséquent, $\boxed{\text{la suite de fonctions } (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers la fonction sinus}}$.

8. ***[Informatique]***

(a) *Écrire une fonction* `fonction` *qui prend en arguments un entier n et un réel x puis qui renvoie la valeur de $f_n(x)$.*

▶ Par exemple :

```
def fonction(n,x):
    if n==0:
        return x
    else:
        precedent=fonction(n-1,x/3)
        return 3*precedent-4*(precedent**3)
```

Le plus simple est d'utiliser une fonction récursive pour calculer $f_n(x)$. La variable intermédiaire `precedent` *n'est pas nécessaire, elle sert seulement à éviter que l'ordinateur calcule deux fois* `fonction(n-1,x/3)` *(ce qui appellerait 2^n fois* `fonction` *par récursivité) et donc à gagner en temps de calcul (avec* `precedent`, `fonction` *est appelée seulement n fois par récursivité).*

(b) *Écrire une fonction* `approximation` *qui prend en arguments deux réels $x \in [-1,1]$ et* `epsilon` > 0, *puis qui renvoie une approximation de $\sin(x)$ à* `epsilon` *près.*

▶ Par exemple :

```
def valeurabsolue(x):
    if x>0:
        return x
    else:
        return -x

def approximation(x,epsilon):
    n=0
    while valeurabsolue(x)**3/(6*(3**n))>epsilon:
        n=n+1
    return fonction(n,x)
```

On peut également utiliser la fonction `abs` *de la bibliothèque* `numpy` *pour calculer des valeurs absolues.*

Exercice 2

Dans le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^4 = \{\overrightarrow{u} = (z_1, z_2, z_3, z_4) \mid \forall i \in \{1,2,3,4\},\ z_i \in \mathbb{C}\}$, on considère les sous-ensembles H_1 et H_2 de représentations cartésiennes :

$$H_1 : z_1 + iz_2 + 3z_3 - 2iz_4 = 0 \quad \text{et} \quad H_2 : 2iz_1 - 4z_2 - iz_3 + 5z_4 = 0.$$

De plus, on pose $F = H_1 \cap H_2$.

1. *Justifier que H_1, H_2 et F sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}^4$. Quelle est la dimension de H_1 et H_2 ?*

▶ On a $\overrightarrow{0} = (0,0,0,0) \in H_1$ car $0+i\times 0+3\times 0-2i\times 0 = 0$. De plus, si on fixe $\overrightarrow{u} = (z_1,z_2,z_3,z_4) \in H_1$, $\overrightarrow{v} = (w_1,w_2,w_3,w_4) \in H_1$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, on a :

$$\lambda\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \big(\lambda z_1 + w_1, \lambda z_2 + w_2, \lambda z_3 + w_3, \lambda z_4 + w_4\big)$$

$$\begin{aligned}
\text{et}\quad & (\lambda z_1 + w_1) + i(\lambda z_2 + w_2) + 3(\lambda z_3 + w_3) - 2i(\lambda z_4 + w_4) \\
=&\lambda\big(\underbrace{z_1 + iz_2 + 3z_3 - 2iz_4}_{=0 \quad \text{car } \overrightarrow{u}\in H_1}\big) + \big(\underbrace{w_1 + iw_2 + 3w_3 - 2iw_4}_{=0 \quad \text{car } \overrightarrow{v}\in H_1}\big) \\
=&\lambda \times 0 + 0 = 0.
\end{aligned}$$

On a bien montré que $\boxed{H_1 \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{C}^4}$. On raisonne de même pour montrer que $\boxed{H_2 \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{C}^4}$. Par conséquent, $\boxed{F = H_1 \cap H_2 \text{ est aussi un sous-espace vectoriel de } \mathbb{C}^4}$ comme intersection de sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}^4$.

On peut également reconnaître pour H_1 et H_2 des représentations cartésiennes d'hyperplans de $\mathbb{C}^4$. C'est plus rapide, mais ça ne permet pas de montrer qu'on connaît la définition d'un sous-espace vectoriel.

De plus, on a une représentation paramétrique de H_1 :

$$H_1 : z_1 + iz_2 + 3z_3 - 2iz_4 = 0 \iff \begin{cases} z_1 = -iz_2 - 3z_3 + 2iz_4 \\ z_2 = z_2 \\ z_3 = z_3 \\ z_4 = z_4 \end{cases}, (z_2,z_3,z_4) \in \mathbb{C}^3$$

en reconnaissant un système linéaire d'une équation à quatre inconnues de rang 1 qui admet donc une infinité de solutions. Par conséquent :

$$\begin{aligned}
H_1 &= \big\{\overrightarrow{u} = (z_1,z_2,z_3,z_4) \in \mathbb{C}^4 \mid z_1 + iz_2 + 3z_3 - 2iz_4 = 0\big\} \\
&= \big\{\overrightarrow{u} = (-iz_2 - 3z_3 + 2iz_4, z_2, z_3, z_4) \mid (z_2,z_3,z_4) \in \mathbb{C}^3\big\} \\
&= \big\{\overrightarrow{u} = z_2\underbrace{(-i,1,0,0)}_{=\overrightarrow{v_1}} + z_3\underbrace{(-3,0,1,0)}_{=\overrightarrow{v_2}} + z_4\underbrace{(2i,0,0,1)}_{=\overrightarrow{v_3}} \mid (z_2,z_3,z_4) \in \mathbb{C}^3\big\} \\
&= \mathrm{Vect}\big(\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{v_3}\big) \quad \text{par définition du sous-espace vectoriel engendré.}
\end{aligned}$$

Donc $(\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{v_3})$ est une famille génératrice de H_1. De plus :

$$\begin{aligned}
\mathrm{rang}\big(\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{v_3}\big) &= \mathrm{rang}\begin{pmatrix} -i & -3 & 2i \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} && \text{à l'aide de la matrice des coordonnées de } (\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{v_3}) \text{ dans la base canonique} \\
&= \mathrm{rang}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -i & -3 & 2i \end{pmatrix} && \text{en échangeant les lignes à l'aide des opérations } L_1 \leftarrow L_2,\ L_2 \leftarrow L_3,\ L_3 \leftarrow L_4 \text{ et } L_4 \leftarrow L_1 \\
&= \mathrm{rang}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} && \text{en manipulant la dernière ligne à l'aide des opérations } L_4 \leftarrow L_4 + iL_1,\ L_4 \leftarrow L_4 + 3L_2 \text{ et } L_4 \leftarrow L_4 - 2iL_3 \\
&= 3.
\end{aligned}$$

Donc $(\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{v_3})$ est une famille libre. On en déduit que $(\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{v_3})$ est une base de H_1 et donc que $\boxed{\dim(H_1) = 3}$. On raisonne de même pour montrer que $\boxed{\dim(H_2) = 3}$.

2. *Déterminer une base $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$ de F.*

▶ Puisque $F = H_1 \cap H_2$, on a comme représentation cartésienne de F :

$$F : \begin{cases} z_1 + iz_2 + 3z_3 - 2iz_4 = 0 \\ 2iz_1 - 4z_2 - iz_3 + 5z_4 = 0 \end{cases}$$

On reconnaît un système linéaire de deux équations à quatre inconnues qu'on échelonne à l'aide de la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & i & 3 & -2i \\ 2i & -4 & -i & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2iL_1$$

$$\iff \begin{pmatrix} \boxed{1} & i & 3 & -2i \\ 0 & \boxed{-2} & -7i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On obtient un système linéaire échelonné de rang 2 qui admet donc une infinité de solutions qu'on peut exprimer en fonction des inconnues auxiliaires z_3 et z_4 :

$$\begin{cases} z_2 = \frac{7iz_3 - z_4}{-2} = -\frac{7i}{2}z_3 + \frac{1}{2}z_4 \\ z_1 = -iz_2 - 3z_3 + 2iz_4 = -i\left(-\frac{7i}{2}z_3 + \frac{1}{2}z_4\right) - 3z_3 + 2iz_4 = -\frac{7}{2}z_3 - \frac{i}{2}z_4 - 3z_3 + 2iz_4 = -\frac{13}{2}z_3 + \frac{3i}{2}z_4 \end{cases}$$

D'où une représentation paramétrique de F :

$$F : \begin{cases} z_1 = -\frac{13}{2}z_3 + \frac{3i}{2}z_4 \\ z_2 = -\frac{7i}{2}z_3 + \frac{1}{2}z_4 \\ z_3 = z_3 \\ z_4 = z_4 \end{cases}, (z_3, z_4) \in \mathbb{C}^2.$$

En raisonnant comme dans la question 1, on peut écrire F comme un ensemble de combinaisons linéaires, c'est-à-dire comme un sous-espace vectoriel engendré :

$$\begin{aligned} F &= \left\{ z_3\left(-\tfrac{13}{2}, -\tfrac{7i}{2}, 1, 0\right) + z_4\left(\tfrac{3i}{2}, \tfrac{1}{2}, 0, 1\right) \mid (z_3, z_4) \in \mathbb{C}^2 \right\} \\ &= \mathrm{Vect}\Big(\left(-\tfrac{13}{2}, -\tfrac{7i}{2}, 1, 0\right), \left(\tfrac{3i}{2}, \tfrac{1}{2}, 0, 1\right) \Big) \\ &= \mathrm{Vect}\Big(\underbrace{(-13, -7i, 2, 0)}_{=\overrightarrow{u_1}}, \underbrace{(3i, 1, 0, 2)}_{=\overrightarrow{u_2}} \Big). \end{aligned}$$

Donc $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$ est une famille génératrice de F.

Il existe bien sûr une infinité de solutions à cette question. Pour en choisir une simple (en particulier sans fractions parmi les composantes) afin de gagner du temps dans les calculs suivants, pensez à utiliser les propriétés des sous-espaces vectoriels engendrés. Par exemple, pour se débarrasser des dénominateurs dans les composantes de $\overrightarrow{u_1}$:

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}^*, \quad \mathrm{Vect}\big(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\big) = \mathrm{Vect}\big(\lambda\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\big).$$

De plus :

$$\begin{aligned}
\operatorname{rang}\big(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\big) &= \operatorname{rang}\begin{pmatrix} -13 & 3i \\ -7i & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} && \text{à l'aide de la matrice des coordonnées de } (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}) \text{ dans la base canonique} \\
&= \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ -13i & 3i \\ -7i & 1 \end{pmatrix} && \text{en échangeant les lignes à l'aide des opérations } L_1 \leftarrow L_3,\ L_2 \leftarrow L_4,\ L_3 \leftarrow L_1 \text{ et } L_4 \leftarrow L_2 \\
&= \operatorname{rang}\begin{pmatrix} \boxed{2} & 0 \\ 0 & \boxed{2} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} && \text{en manipulant les deux dernières lignes à l'aide des opérations } L_3 \leftarrow 2L_3 + 13iL_1,\ L_3 \leftarrow 2L_3 - 3iL_2,\ L_4 \leftarrow 2L_4 + 7iL_1 \text{ et } L_4 \leftarrow 2L_4 - L_2. \\
&= 2.
\end{aligned}$$

Donc $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$ est une famille libre. On en déduit que $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$ est une base de F en posant :

$$\boxed{\overrightarrow{u_1} = (-13, -7i, 2, 0)} \quad \text{et} \quad \boxed{\overrightarrow{u_2} = (3i, 1, 0, 2)}.$$

3. *On pose $\overrightarrow{u_3} = (-i, 1, 0, 0)$. Montrer que $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$ est une base de H_1.*

► Puisque $\dim(H_1) = 3$ d'après le résultat de la question 1, il suffit de montrer que $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$ est une famille libre de vecteurs de H_1.

Pensez à utiliser la dimension pour gagner du temps (ça permet d'éviter la moitié du travail). On peut aussi seulement montrer que $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$ est une famille génératrice de H_1, mais c'est souvent plus long que de prouver la liberté.

On sait déjà que $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ appartiennent à F d'après le résultat de la question précédente, donc qu'ils appartiennent à H_1 car $F = H_1 \cap H_2 \subset H_1$. Et $\overrightarrow{u_3} \in H_1$ car :

$$-i + i \times 1 + 3 \times 0 - 2i \times 0.$$

De plus :

$$\begin{aligned}
\operatorname{rang}\big(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\big) &= \operatorname{rang}\begin{pmatrix} -13 & 3i & -i \\ -7i & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} && \text{à l'aide de la matrice des coordonnées de } (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}) \text{ dans la base canonique} \\
&= \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -13i & 3i & -i \\ -7i & 1 & 1 \end{pmatrix} && \text{en échangeant les lignes à l'aide des opérations } L_1 \leftarrow L_3,\ L_2 \leftarrow L_4,\ L_3 \leftarrow L_1 \text{ et } L_4 \leftarrow L_2 \\
&= \operatorname{rang}\begin{pmatrix} \boxed{2} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} && \text{en manipulant les deux dernières lignes à l'aide des opérations } L_3 \leftarrow 2L_3 + 13iL_1,\ L_3 \leftarrow 2L_3 - 3iL_2,\ L_4 \leftarrow 2L_4 + 7iL_1 \text{ et } L_4 \leftarrow 2L_4 - L_2. \\
&= \operatorname{rang}\begin{pmatrix} \boxed{2} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-i} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} && \text{à l'aide de l'opération } L_4 \leftarrow iL_4 + L_3 \\
&= 3.
\end{aligned}$$

Donc $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$ est une famille libre de vecteurs de H_1, qui est maximale car $\dim(H_1) = 3$. On en déduit que $\boxed{(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}) \text{ est une base de } H_1}$.

4. Déterminer une base de H_2 et choisir, dans cette base, un vecteur noté $\overrightarrow{u_4}$, qui n'appartient pas à H_1. Pourquoi pouvait-on être sûr d'en trouver un avant même d'avoir déterminé une base de H_2 ?

▶ En raisonnant comme dans les questions 1 et 2, on a une représentation paramétrique de H_2 :

$$H_2 : 2iz_1 - 4z_2 - iz_3 + 5z_4 = 0 \iff \begin{cases} z_1 = \dfrac{4z_2 + iz_3 - 5z_4}{2i} = -2iz_2 + \frac{1}{2}z_3 + \frac{5}{2}iz_4 \\ z_2 = z_2 \\ z_3 = z_3 \\ z_4 = z_4 \end{cases}, (z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{C}^3$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} H_2 &= \left\{ z_2 (-2i, 1, 0, 0) + z_3 \left(\tfrac{1}{2}, 0, 1, 0\right) + z_4 \left(\tfrac{5}{2}i, 0, 0, 1\right) \mid (z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{C}^3 \right\} \\ &= \mathrm{Vect}\big((-2i, 1, 0, 0), \left(\tfrac{1}{2}, 0, 1, 0\right), \left(\tfrac{5}{2}i, 0, 0, 1\right) \big) \\ &= \mathrm{Vect}\big((-2i, 1, 0, 0), (1, 0, 2, 0), (5i, 0, 0, 2) \big). \end{aligned}$$

De plus :

$$\begin{aligned} \mathrm{rang}\big((-2i, 1, 0, 0), (1, 0, 2, 0), (5i, 0, 0, 2) \big) &= \mathrm{rang} \begin{pmatrix} -2i & 1 & 5i \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_2 \\ L_2 \leftarrow L_3 \\ L_3 \leftarrow L_4 \\ L_4 \leftarrow L_1 \end{matrix} \\ &= \mathrm{rang} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -2i & 1 & 5i \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ L_4 \leftarrow L_4 + 2iL_1 - \frac{1}{2}L_2 - \frac{5i}{2}L_3 \end{matrix} \\ &= \mathrm{rang} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= 3. \end{aligned}$$

On en déduit que $\boxed{((-2i, 1, 0, 0), (1, 0, 2, 0), (5i, 0, 0, 2)) \text{ est une base de } H_2}$. De plus :

$$-2i + i \times 1 + 3 \times 0 - 2i \times 0 = -i \neq 0 \quad \text{donc} \quad (-2i, 1, 0, 0) \notin H_1.$$

Il suffit par exemple de poser $\boxed{\overrightarrow{u_4} = (-2i, 1, 0, 0)}$.

On aurait aussi pu poser $\overrightarrow{u_4} = (1, 0, 2, 0)$ ou $\overrightarrow{u_4} = (5i, 0, 0, 2)$ car :

$$1 + i \times 0 + 3 \times 2 - 2i \times 0 = 7 \neq 0 \quad \textit{et} \quad 5i + i \times 0 + 3 \times 0 - 2i \times 2 = i \neq 0.$$

Il existe une infinité d'autres solutions puisqu'il existe une infinité de base de H_2 et que chacune contient au moins un vecteur n'appartenant pas à H_1 d'après le raisonnement suivant.

Par l'absurde, si tous les vecteurs d'une base de H_2 appartiennent à H_1 alors on obtiendrait en particulier une famille libre de $\dim(H_2) = 3$ vecteurs de H_1, qui est maximale car $\dim(H_1) = 3$, donc une base de H_1. Ainsi, on aurait que $H_1 = H_2$ ce qui est absurde puisque les équations cartésiennes de H_1 et H_2 ne sont pas proportionnelles. Par conséquent, $\boxed{\text{au moins un vecteur de toute base de } H_2 \text{ n'appartient pas à } H_1}$.

On peut également dire que si tous les vecteurs d'une base de H_2 appartiennent à H_1 alors $H_2 \subset H_1$, puis que $H_1 = H_2$ car $\dim(H_1) = \dim(H_2)$, ce qui est absurde pour les mêmes raisons que précédemment.

5. *Montrer que $\mathscr{B} = (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}, \overrightarrow{u_4})$ est une base de $\mathbb{C}^4$.*

▶ Puisque $\dim(\mathbb{C}^4) = 4$, il suffit de montrer que $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}, \overrightarrow{u_4})$ est une famille libre. On a :

$$\begin{aligned}
\operatorname{rang}(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}, \overrightarrow{u_4}) &= \operatorname{rang}\begin{pmatrix} -13 & 3i & -i & -2i \\ -7i & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_3 \\ L_2 \leftarrow L_4 \\ L_3 \leftarrow L_1 \\ L_4 \leftarrow L_2 \end{matrix} \\
&= \operatorname{rang}\begin{pmatrix} \boxed{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -13 & 3i & -i & -2i \\ -7i & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 \leftarrow 2L_3 + 13L_1 \\ L_4 \leftarrow 2L_4 + 7iL_1 \end{matrix} \\
&= \operatorname{rang}\begin{pmatrix} \boxed{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 0 & 0 \\ 0 & 6i & -2i & -4i \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3iL_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_2 \end{matrix} \\
&= \operatorname{rang}\begin{pmatrix} \boxed{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-2i} & -4i \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ L_4 \leftarrow iL_4 + L_3 \end{matrix} \\
&= \operatorname{rang}\begin{pmatrix} \boxed{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-2i} & -4i \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-2i} \end{pmatrix} \\
&= 4.
\end{aligned}$$

On en déduit bien que $\boxed{\mathscr{B} = (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}, \overrightarrow{u_4}) \text{ est une base de } \mathbb{C}^4}$.

6. *Déterminer la matrice A des coordonnées de la base canonique $\mathscr{C} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_4})$ dans la base $\mathscr{B}$.*

▶ On fixe un vecteur $\overrightarrow{u} = (z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{C}^4$ et on note $(w_1, w_2, w_3, w_4) \in \mathbb{C}^4$ ses coordonnées dans la base $\mathscr{B}$, c'est-à-dire l'unique solution du système linéaire suivant :

$$\begin{aligned}
& \overrightarrow{u} = w_1\overrightarrow{u_1} + w_2\overrightarrow{u_2} + w_3\overrightarrow{u_3} + w_4\overrightarrow{u_4} \\
\iff & \begin{pmatrix} -13 & 3i & -i & -2i \\ -7i & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_3 \\ L_2 \leftarrow L_4 \\ L_3 \leftarrow L_1 \\ L_4 \leftarrow L_2 \end{matrix} \\
\iff & \begin{pmatrix} \boxed{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -13 & 3i & -i & -2i \\ -7i & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_3 \\ z_4 \\ z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 \leftarrow 2L_3 + 13L_1 \\ L_4 \leftarrow 2L_4 + 7iL_1 \end{matrix} \\
\iff & \begin{pmatrix} \boxed{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 0 & 0 \\ 0 & 6i & -2i & -4i \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_3 \\ z_4 \\ 2z_1 + 13z_3 \\ 2z_2 + 7iz_3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3iL_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_2 \end{matrix} \\
\iff & \begin{pmatrix} \boxed{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-2i} & -4i \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_3 \\ z_4 \\ 2z_1 + 13z_3 - 3iz_4 \\ 2z_2 + 7iz_3 - z_4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ L_4 \leftarrow iL_4 + L_3 \end{matrix}
\end{aligned}$$

$$\iff \begin{pmatrix} \boxed{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-2i} & -4i \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-2i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_3 \\ z_4 \\ 2z_1 + 13z_3 - 3iz_4 \\ * \end{pmatrix}$$

où $\quad * = i\,(2z_2 + 7iz_3 - z_4) + 2z_1 + 13z_3 - 3iz_4 = 2z_1 + 2iz_2 + 6z_3 - 4iz_4.$

On «remonte» le système linéaire pour obtenir l'unique solution :

$$\begin{cases} w_4 = \frac{1}{-2i}\,(2z_1 + 2iz_2 + 6z_3 - 4iz_4) = iz_1 - z_2 + 3iz_3 + 2z_4 \\ w_3 = \frac{1}{-2i}\,(2z_1 + 13z_3 - 3iz_4 + 4iw_4) = \frac{1}{-2i}\,(-2z_1 - 4iz_2 + z_3 + 5iz_4) = -iz_1 + 2z_2 + \frac{i}{2}z_3 - \frac{5}{2}z_4 \\ w_2 = \frac{1}{2}z_4 \\ w_1 = \frac{1}{2}z_3 \end{cases}$$

En particulier, pour $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{e_1}$, on a $(z_1, z_2, z_3, z_4) = (1, 0, 0, 0)$ donc $(w_1, w_2, w_3, w_4) = (0, 0, -i, i)$. D'où les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{e_1}$ dans la base $\mathscr{B}$:

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}\,(\overrightarrow{e_1}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -i \\ i \end{pmatrix}.$$

On raisonne de même pour $\overrightarrow{e_2} = (0, 1, 0, 0)$, $\overrightarrow{e_3} = (0, 0, 1, 0)$ et $\overrightarrow{e_4} = (0, 0, 0, 1)$:

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}\,(\overrightarrow{e_2}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}\,(\overrightarrow{e_3}) = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ i/2 \\ 3i \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}\,(\overrightarrow{e_4}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ -5/2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Finalement, on obtient que :

$$\boxed{A = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{C}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ -i & 2 & i/2 & -5/2 \\ i & -1 & 3i & 2 \end{pmatrix}}.$$

7. *On pose $B = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(\mathscr{B})$. Calculer AB et BA. Que peut-on en déduire ?*

► Puisque les coordonnées dans la base canonique $\mathscr{C}$ sont égaux aux composantes des vecteurs dans $\mathbb{C}^4$, on a d'après le résultat de la question 2, l'énoncé et le résultat de la question 4 :

$$B = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(\mathscr{B}) = \begin{pmatrix} -13 & 3i & -i & -2i \\ -7i & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent :

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ -i & 2 & i/2 & -5/2 \\ i & -1 & 3i & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -13 & 3i & -i & -2i \\ -7i & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}},$$

$$\text{et} \quad BA = \begin{pmatrix} -13 & 3i & -i & -2i \\ -7i & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ -i & 2 & i/2 & -5/2 \\ i & -1 & 3i & 2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}.$$

On reconnaît la matrice identité de $\mathscr{M}_4(\mathbb{C})$. On en déduit que $\boxed{\text{la matrice des coordonnées de la base canonique dans la base } \mathscr{B} \text{ est inversible et que son inverse est la matrice des coordonnées de la base } \mathscr{B} \text{ dans la base canonique}}$.

Exercice 3

Une fourmi se déplace aléatoirement dans une fourmilière contenant trois salles notées A, B et C reliées entre elles par des galeries. On suppose que la fourmi se situe dans la salle A à l'instant $n = 0$ puis qu'elle se déplace de la manière suivante :

- *si la fourmi se situe dans la salle A à un instant n alors, avec la même probabilité, elle reste dans la salle A ou va dans la salle B à l'instant $n+1$;*
- *si la fourmi se situe dans la salle B à un instant n alors, avec la même probabilité, elle va dans la salle A ou reste dans la salle B ou va dans la salle C à l'instant $n+1$;*
- *si la fourmi se situe dans la salle C à un instant n alors elle reste dans la salle C à l'instant $n+1$.*

À chaque instant $n \in \mathbb{N}$, on note a_n, b_n et c_n les probabilités des événements A_n, B_n et C_n que la fourmi se situe dans les salles A, B et C respectivement. Ainsi $a_0 = 1$ et $b_0 = c_0 = 0$.

1. ***[Informatique]** On rappelle que la fonction `randint(i,j)` de la bibliothèque `random` renvoie un entier aléatoire entre `i` inclus et `j` inclus.*

   (a) *Écrire une fonction `deplacement` qui prend en argument une chaîne de caractères `salle` egale à `'A'`, `'B'` ou `'C'` correspondant à la salle où se situe la fourmi à un instant donné, puis qui renvoie une chaîne de caractères correspondant à la salle où se situe la fourmi à l'instant suivant.*

   ▶ Par exemple :

```
import random
def deplacement(salle):
    if salle=='A':
        destination=['A','B']
        aleatoire=random.randint(0,1)
        return destination[aleatoire]
    elif salle=='B':
        destination=['A','B','C']
        aleatoire=random.randint(0,2)
        return destination[aleatoire]
    elif salle=='C':
        return 'C'
```

   (b) *Écrire une fonction `experience` qui prend en argument un entier `n`, puis qui renvoie une chaîne de caractères correspondant à la salle où se situe la fourmi à l'instant `n` après avoir simulé l'expérience aléatoire.*

   ▶ Par exemple :

```
def experience(n):
    salle='A'
    for i in range(n):
        salle=deplacement(salle)
    return salle
```

   (c) *Écrire une fonction `simulation` qui prend en arguments deux entiers `n` et `nbSimul`, puis qui renvoie une liste `L=[a,b,c]` égales aux fréquences empiriques d'apparition des événements A_n, B_n et C_n après avoir simulé `nbSimul` fois l'expérience aléatoire.*

   ▶ Par exemple :

```
def simulation(n,nbSimul):
    freq=[0,0,0]
    for i in range(nbSimul):
        salle=experience(n)
        if salle=='A':
            freq[0]=freq[0]+1
        elif salle=='B':
            freq[1]=freq[1]+1
        elif salle=='C':
            freq[2]=freq[2]+1
    for i in range(3):
        freq[i]=freq[i]/nbSimul
    return freq
```

2. *Calculer a_1, b_1 et c_1.*

   ▶ D'après l'énoncé, la fourmi se situe dans la salle A à l'instant $n=0$ puis, équiprobablement, reste dans la salle A ou va dans la salle B à l'instant $n=1$. Donc $\boxed{a_1=b_1=\frac{1}{2}}$ et $\boxed{c_1=0}$.

3. *Calculer a_2, b_2 et c_2.*

   ▶ D'après le résultat de la question précédente, la fourmi se situe dans la salle A ou bien dans la salle B à l'instant $n=1$. Par conséquent, les événements A_1 et B_1 forment un système complet. D'après la formule des probabilités totales, on en déduit que :

$$a_2=P(A_2)=P(A_1)P_{A_1}(A_2)+P(B_1)P_{B_1}(A_2).$$

   Or $P(A_1)=a_1=\frac{1}{2}$ et $P(B_1)=b_1=\frac{1}{2}$ d'après le résultat de la question précédente, $P_{A_1}(A_2)=\frac{1}{2}$ et $P_{B_1}(A_2)=\frac{1}{3}$ d'après l'énoncé. Donc :

$$a_2=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\boxed{\frac{5}{12}}.$$

   En raisonnant de même, on obtient :

$$b_2=P(B_2)=P(A_1)P_{A_1}(B_2)+P(B_1)P_{B_1}(B_2)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\boxed{\frac{5}{12}},$$

$$\text{et}\quad c_2=P(C_2)=P(A_1)P_{A_1}(C_2)+P(B_1)P_{B_1}(C_2)=\frac{1}{2}\times 0+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\boxed{\frac{1}{6}}.$$

4. *Justifier que $a_n+b_n+c_n=1$ pour tout entier $n\geqslant 0$.*

   ▶ Soit $n\geqslant 0$. Puisque la fourmi ne peut pas se situer dans deux salles en même temps, les événements A_n, B_n et C_n sont deux à deux incompatibles (c'est-à-dire $A_n\cap B_n=\emptyset$, $A_n\cap C_n=\emptyset$ et $B_n\cap C_n=\emptyset$). De plus, puisqu'il n'y a que trois salles dans la fourmilière, l'union des événements A_n, B_n et C_n est égale à l'univers. Par conséquent, $\boxed{A_n,\ B_n \text{ et } C_n \text{ forment un système complet d'événements}}$ et :

$$\boxed{a_n+b_n+c_n=P(A_n)+P(B_n)+P(C_n)=P(A_n\cup B_n\cup C_n)=1}.$$

5. *Montrer que $a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{1}{3}b_n$ pour tout entier $n\geqslant 0$.*

   ▶ Soit $n\geqslant 0$. Puisque A_n, B_n et C_n forment un système complet d'événements d'après le résultat de la question précédente, on a d'après la formule des probabilités totales :

$$a_{n+1}=P(A_{n+1})=\underbrace{P(A_n)}_{=a_n}P_{A_n}(A_{n+1})+\underbrace{P(B_n)}_{=b_n}P_{B_n}(A_{n+1})+\underbrace{P(C_n)}_{=c_n}P_{C_n}(A_{n+1}).$$

Or $P_{A_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{2}$, $P_{B_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{3}$ et $P_{C_n}(A_{n+1}) = 0$ d'après l'énoncé. Donc :

$$a_{n+1} = a_n \times \frac{1}{2} + b_n \times \frac{1}{3} + c_n \times 0 = \boxed{\frac{1}{2}a_n + \frac{1}{3}b_n}.$$

6. *Soit $n \geqslant 0$. Établir des expressions similaires pour b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.*

▶ En raisonnant comme à la question précédente, on d'après la formule des probabilités totales :

$$b_{n+1} = P(B_{n+1}) = \underbrace{P(A_n)}_{=a_n}\underbrace{P_{A_n}(B_{n+1})}_{=1/2} + \underbrace{P(B_n)}_{=b_n}\underbrace{P_{B_n}(B_{n+1})}_{=1/3} + \underbrace{P(C_n)}_{=c_n}\underbrace{P_{C_n}(B_{n+1})}_{=0} = \boxed{\frac{1}{2}a_n + \frac{1}{3}b_n},$$

$$\text{et} \quad c_{n+1} = P(C_{n+1}) = \underbrace{P(A_n)}_{=a_n}\underbrace{P_{A_n}(C_{n+1})}_{=0} + \underbrace{P(B_n)}_{=b_n}\underbrace{P_{B_n}(C_{n+1})}_{=1/3} + \underbrace{P(C_n)}_{=c_n}\underbrace{P_{C_n}(C_{n+1})}_{=1} = \boxed{\frac{1}{3}b_n + c_n}.$$

7. *Montrer que $c_{n+1} = \dfrac{1}{6} + \dfrac{5}{6}c_n$ pour tout entier $n \geqslant 1$.*

▶ Soit $n \geqslant 1$. D'après le résultat des deux questions précédentes, on remarque que :

$$a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} + \frac{1}{3}b_{n-1} = b_n.$$

Or on a d'après le résultat de la question 4 :

$$\underbrace{a_n}_{=b_n} + b_n + c_n = 1 \quad \text{donc} \quad 2b_n = \frac{1-c_n}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}c_n.$$

En réinjectant dans l'expression de c_{n+1} obtenue à la question précédente, on obtient que :

$$c_{n+1} = \frac{1}{3}b_n + c_n = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}c_n\right) + c_n = \boxed{\frac{1}{6} + \frac{5}{6}c_n}.$$

8. *En déduire une expression de c_n en fonction de $n \geqslant 1$.*

▶ D'après le résultat de la question précédente, on reconnaît que la suite $(c_n)_{n\geqslant 1}$ est arithmético-géométrique. Pour déterminer son terme général, on commence par résoudre l'équation suivante d'inconnue $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\alpha = \frac{1}{6} + \frac{5}{6}\alpha \iff \alpha = 1.$$

Puis on remarque que la suite $(c_n - 1)_{n\geqslant 1}$ est géométrique car :

$$\forall n \geqslant 1, \quad c_{n+1} - 1 = \frac{1}{6} + \frac{5}{6}c_n - 1 = -\frac{5}{6} + \frac{5}{6}c_n = \frac{5}{6}(c_n - 1).$$

On en déduit que :

$$\forall n \geqslant 1, \quad c_n - 1 = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}(c_1 - 1).$$

Or $c_1 = 0$ d'après le résultat de la question 2. Finalement, on obtient que :

$$\forall n \geqslant 1, \quad \boxed{c_n = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}}.$$

On peut vérifier l'expression à l'aide du résultat de la question 3 :

$$c_2 = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{2-1} = \frac{1}{6}.$$

9. *Quelle est la limite de c_n quand $n \to +\infty$? Ce résultat vous semble-t-il cohérent ?*

▶ Puisque $\frac{5}{6} \in]-1,1[$, on a $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} = 0$ et donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty} c_n = 1}$ d'après le résultat de la question précédente. Ce résultat est cohérent puisque la fourmi se déplace aléatoirement dans la fourmilière jusqu'à arriver dans la salle C dans laquelle elle restera piégée d'après l'énoncé.