Fiche méthodologique nº 1

Démontrer, prouver, raisonner

1 Prouver une implication

L'implication «$P \Longrightarrow Q$» où P et Q sont deux assertions signifie que si P est vraie alors Q est vraie.

1.1 Démonstration directe

La méthode la plus directe pour prouver l'implication «$P \Longrightarrow Q$» consiste à commencer par supposer que P est vraie puis à en déduire que Q est vraie.
Attention. Si la preuve que Q est vraie n'utilise pas l'hypothèse que P est vraie, c'est qu'on vient de démontrer que Q est toujours vraie, ce qui n'est pas l'implication qu'on cherche à prouver. Sauf en cas exceptionnel d'erreur d'énoncé, il s'agit très certainement d'une erreur de raisonnement ou bien de l'oubli de préciser que P est vraie au moment où d'utiliser cette hypothèse. Il est donc recommandé de relire et de corriger la démonstration.

Exercice d'application 1
Soient x et y deux réels non nuls. Montrer que si $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$ alors $xy = x + y$.

1.2 Démonstration par contraposition

L'implication «$P \Longrightarrow Q$» est équivalente à sa contraposée «(non Q) $\Longrightarrow$ (non P)». Ainsi, pour prouver l'implication «$P \Longrightarrow Q$» par contraposition, on commence par supposer que (non Q) est vraie, c'est-à-dire que Q est fausse, puis on cherche à en déduire que (non P) est vraie, c'est-à-dire que P est fausse.
Conseil. Cette méthode s'utilise lorsqu'il semble plus facile de supposer que Q est fausse plutôt que P est vraie, ou qu'il semble plus facile de montrer que P est fausse plutôt que Q est vraie.

Exercice d'application 2
Soit x un réel. Montrer que si $|x+1| + |x-1| \neq 2$ alors $x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$.

2 Prouver une ou plusieurs équivalences

2.1 Démonstration par double implication

Prouver l'équivalence «$P \Longleftrightarrow Q$», où P et Q sont deux assertions, revient à prouver les deux implications «$P \Longrightarrow Q$» et «$Q \Longrightarrow P$».

Conseil. Il est préférable de commencer par prouver l'implication qui semble la plus facile ; ça peut aider à avoir des idées pour démontrer sa réciproque.

Exercice d'application 3
Soient a, x deux réels et $\varepsilon > 0$. Montrer que $|x-a| \leqslant \varepsilon$ si et seulement si $x \in [a-\varepsilon, a+\varepsilon]$.

2.2 Démonstration par chaîne d'implications

Dans le cas de plusieurs équivalences, on peut réduire le nombre d'implications à prouver en utilisant la transitivité. Par exemple, pour prouver que trois assertions P, Q et R sont deux à deux équivalentes (c'est-à-dire que «$P \Longleftrightarrow Q$», «$P \Longleftrightarrow R$» et «$Q \Longleftrightarrow R$»), il suffit de prouver trois implications (en chaîne) au lieu de six. Ainsi, si on prouve les trois implications «$P \Longrightarrow Q$», «$Q \Longrightarrow R$» et «$R \Longrightarrow P$» alors on peut en déduire les trois autres par transitivité (par exemple «$Q \Longrightarrow P$» se déduit de «$Q \Longrightarrow R$» et «$R \Longrightarrow P$»).
Remarque. Les implications qu'il suffit de prouver doivent former une chaîne pour pouvoir en déduire les autres par transitivité.

Exercice d'application 4
Soient x un réel et $M > 0$. Montrer que les assertions suivantes sont deux à deux équivalentes : «$|x| < M$», «$x^2 < M^2$», «$x \in]-M, M[$» et «$\max(x, -x) < M$».

3 Raisonner par déduction

Un raisonnement par déduction consiste à prouver qu'une assertion est vraie à l'aide d'autres assertions que l'on sait être vraies (par exemple issues du cours ou démontrées dans des questions précédentes).
Conseil. Le cours doit être cité précisément (pour montrer qu'on le connaît) à chaque fois qu'il est utilisé dans un raisonnement déductif.

Exercice d'application 5
Montrer que $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \in \left]\frac{3}{2}, 2\right[$.

4 Raisonner par l'absurde

Pour prouver qu'une assertion P est vraie, il suffit de montrer que l'assertion (non P) est fausse (d'après le principe de double négation). Le raisonnement par l'absurde consiste à commencer par supposer que (non P) est vraie, c'est-à-dire que P est fausse, puis d'en déduire une absurdité. Cette absurdité prouve alors que l'hypothèse est fausse, c'est-à-dire que P est vraie.
Conseil. Cette méthode s'utilise lorsqu'il semble plus facile de supposer que P est fausse plutôt que de montrer que P est vraie.

Exercice d'application 6
On fixe un entier $n \geqslant 1$ et on suppose que $3n+1$ paires de chaussettes sont rangées dans n tiroirs. Montrer qu'il existe un tiroir contenant au moins 4 paires de chaussettes.

Exercice d'application 7
Soient x et y deux réels positifs. Montrer que si $\frac{x}{y+1} = \frac{y}{x+1}$ alors $x = y$.

5 Prouver une proposition commençant par $\forall$

Prouver une proposition du type «$\forall x \in E,\ P(x)$» où $P(x)$ est une assertion dépendant d'un paramètre x appartenant à un ensemble E, consiste à prouver que $P(x)$ est vraie pour chaque élément x de E.

5.1 Cas général

On commence par fixer un élément générique x de E pour lequel on ne fait aucune autre hypothèse que $x \in E$. Puis on démontre que $P(x)$ est vraie pour cet élément générique, ce qui prouve en généralisant que $P(x)$ est vraie pour tout $x \in E$.

Exemple 1
Démontrer l'inégalité triangulaire : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ |x+y| \leqslant |x| + |y|$.

Solution. Soient x et y deux réels quelconques fixés. On a :

$$|x+y|^2 = (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = |x|^2 + 2xy + |y|^2.$$

Or $2xy \leqslant |2xy| = 2|x||y|$ donc :

$$|x+y|^2 \leqslant |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2.$$

Puisque la fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit que $|x+y| \leqslant |x|+|y|$. On a montré que l'inégalité triangulaire est vraie pour n'importe quels réels x et y, donc pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. □

Exercice d'application 8
Démontrer l'inégalité suivante : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ ||x| - |y|| \leqslant |x+y|$.

Exemple 2
Montrer que : $\forall (a, b) \in]0, +\infty[^2,\ \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.

Solution. Soit $a \in]0, +\infty[$ un réel quelconque fixé. On pose $f : x \mapsto \ln(ax) - \ln(a) - \ln(x)$. La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$, de dérivée $f' : x \mapsto \frac{a}{ax} - 0 - \frac{1}{x} = 0$, donc f est constante sur $]0, +\infty[$. Or $f(1) = \ln(a) - \ln(a) - 0 = 0$ donc f est constante égale à 0 sur $]0, +\infty[$. Ainsi $\ln(ax) = \ln(a) + \ln(x)$ pour tout $x > 0$. Puisque cette égalité est vraie pour n'importe quel réel $a > 0$, on en déduit bien que $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$ pour tout $(a, b) \in]0, +\infty[^2$. □

Exercice d'application 9
Montrer que : $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ \exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$.

5.2 Raisonnement par disjonction de cas

Il est parfois possible de subdiviser le cas général en plusieurs cas particuliers, c'est-à-dire d'écrire $E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$ où $E_1, E_2, \ldots, E_n$ sont $n \geqslant 2$ parties de E. Après avoir fixé un élément générique x de E, il suffit alors de prouver que $P(x)$ est vraie dans chacun des n cas $x \in E_i$ où $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.
Attention. L'union des cas considérés doit couvrir tous les cas possibles ! Par contre, il n'est pas nécessaire que les cas soient disjoints deux à deux.

Exemple 3
Démontrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \max\{x, y\} = \dfrac{x + y + |x-y|}{2}$.

Solution. On fixe deux réels x et y.
1^er^ cas : $x \geqslant y$ alors $\max\{x, y\} = x$. De plus, $x - y \geqslant 0$ donc $|x-y| = x - y$ et par conséquent :

$$\frac{x+y+|x-y|}{2} = \frac{x+y+x-y}{2} = \frac{2x}{2} = x = \max\{x, y\}.$$

Ainsi $\max\{x, y\} = \frac{x+y+|x-y|}{2}$ dans le cas où $x \geqslant y$.
2^e^ cas : $x \leqslant y$ alors $\max\{x, y\} = y$. De plus, $x - y \leqslant 0$ donc $|x-y| = -(x-y) = -x+y$ et par conséquent :

$$\frac{x+y+|x-y|}{2} = \frac{x+y-x+y}{2} = \frac{2y}{2} = y = \max\{x, y\}.$$

Ainsi $\max\{x, y\} = \frac{x+y+|x-y|}{2}$ dans le cas où $x \leqslant y$.
Conclusion : dans tous les cas, on a montré que $\max\{x, y\} = \frac{x+y+|x-y|}{2}$. Donc cette égalité est vraie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. □

Exercice d'application 10
Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ |x-1| \leqslant x^2 - x + 1$.

6 Prouver une proposition commençant par $\exists$

Prouver une proposition du type «$\exists x \in E,\ P(x)$» où $P(x)$ est une assertion dépendant d'un paramètre xu appartenant à un ensemble E, consiste à prouver que $P(x)$ est vraie pour au moins un élément x de E. C'est souvent un problème difficile.

6.1 Démonstration constructive : analyse-synthèse

Il suffit de trouver explicitement (au moins) un élément particulier $x \in E$ tel que $P(x)$ est vraie. Le travail de recherche de ce x s'appelle l'analyse. Une fois qu'on a trouvé un élément x qui convient, il suffit de vérifier que $P(x)$ est vraie : c'est la synthèse.
Conseil. D'un point de vue logique, la synthèse est suffisante pour conclure, l'analyse peut seulement se faire au brouillon. Cependant, il est préférable de rédiger la synthèse au propre pour expliquer le travail de recherche qui a permis de trouver x.

Exemple 4
Montrer qu'il existe une fonction polynomiale f de degré 2 telle que $f(x+1)-f(x)=x$ pour tout réel x.

Solution. Analyse. On cherche f de la forme $f : x \mapsto ax^2+bx+c$ avec $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Il faut donc que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$x = f(x+1)-f(x) = \big(a(x+1)^2+b(x+1)+c\big)-\big(ax^2+bx+c\big) = 2ax+a+b.$$

Il suffit par exemple que $2a=1$ et $a+b=0$. Ainsi $a=\frac{1}{2}$, $b=-\frac{1}{2}$ et on peut choisir n'importe quelle valeur pour c.
Synthèse. On pose $f : x \mapsto \frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x$. Alors $f(x+1)-f(x)=x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ en reprenant les mêmes calculs que dans l'analyse. Finalement, on a bien trouvé une fonction polynomiale f de degré 2 telle que $f(x+1)-f(x)=x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. ☐

Exercice d'application 11
Montrer qu'il existe une fonction polynomiale f de degré 3 telle que $f(x+1)-f(x-1)=x^2$ pour tout réel x.

6.2 Démonstration non-constructive

Il n'est pas nécessaire de trouver explicitement un élément particulier $x \in E$ tel que $P(x)$ soit vraie pour prouver que cet élément existe (de plus, ce n'est parfois pas possible). Certains théorèmes du cours permettent de justifier l'existence de x sans trouver sa valeur.
Conseil. Le cours doit être cité précisément (pour montrer qu'on le connaît) et chaque hypothèse du théorème utilisé doivent être vérifiée avant de pouvoir l'appliquer.

Exercice d'application 12
Montrer qu'il existe un réel x tel que $x^3=x^2+x+1$.

6.3 Cas d'une existence-unicité

Dans le cas où on doit prouver qu'il existe un unique $x \in E$ tel que $P(x)$ est vraie, la démonstration doit contenir deux parties : l'unicité où on prouve que $P(x)$ est vraie pour au plus un élément x de E et l'existence où on prouve que $P(x)$ est vraie pour au moins un élément x de E. Pour l'unicité, il suffit de raisonner par l'absurde : on suppose qu'il existe au moins deux éléments $x_1 \in E$ et $x_2 \in E$ tels que $P(x_1)$ et $P(x_2)$ sont vraies, puis on cherche à montrer que $x_1=x_2$.
Conseil. Il est préférable de commencer par prouver l'unicité qui est souvent plus facile que l'existence.

Exemple 5
Soit une f une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une unique fonction p paire (c'est-à-dire telle que $p(-x)=p(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$) et une unique fonction i impaire (c'est-à-dire telle que $i(-x)=-i(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$) telles que $f=p+i$.

Solution. Unicité. On suppose qu'il existe deux fonctions paires p_1, p_2 et deux fonctions impaires i_1, i_2 telles que $f=p_1+i_1=p_2+i_2$. On a alors pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x)+f(-x) = \big(p_1(x)+i_1(x)\big)+\big(p_1(-x)+i_1(-x)\big) = p_1(x)+i_1(x)+p_1(x)-i_1(x) = 2p_1(x)$$

et de même $f(x)+f(-x)=2p_2(x)$. On en déduit que $2p_1(x)=2p_2(x)$ donc que $p_1=p_2$. Par conséquent $i_1=f-p_1=f-p_2=i_2$. Finalement, on a montré que $(p_1,i_1)=(p_2,i_2)$ ce qui prouve bien qu'il existe au plus une fonction p paire et au plus une fonction i impaire telles que $f=p+i$.
Existence. On raisonne par analyse-synthèse pour chercher une fonction p paire et une fonction i impaire telles que $f=p+i$.
Analyse. En reprenant les mêmes calculs que dans l'unicité, il faut que $f(x)+f(-x)=2p(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc que $p(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}$. Puisque $f=p+i$, il faut aussi que $i(x)=f(x)-p(x)=f(x)-\frac{f(x)+f(-x)}{2}=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$.
Synthèse. On pose $p : x \mapsto \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ et $i : x \mapsto \frac{f(x)-f(-x)}{2}$. Vérifions que p est paire, i est impaire et $f=p+i$. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} p(-x) &= \tfrac{f(-x)+f(x)}{2} = \tfrac{f(x)+f(-x)}{2} = p(x) \\ i(-x) &= \tfrac{f(-x)-f(x)}{2} = -\tfrac{f(x)-f(-x)}{2} = -i(x) \\ \text{et}\quad p(x)+i(x) &= \tfrac{f(x)+f(-x)}{2} + \tfrac{f(x)-f(-x)}{2} = \tfrac{2f(x)}{2} = f(x). \end{aligned}$$

On a bien montré qu'il existe il existe au moins une fonction p paire et au moins une fonction i impaire telles que $f=p+i$.
Conclusion. Finalement, on a démontré qu'il existe une unique fonction p paire et une unique fonction i impaire telles que $f=p+i$. ☐

Exercice d'application 13
Montrer qu'il existe au plus une fonction réelle f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0)=1$ et $f'(x)=\sqrt{x^2+1}$ pour tout réel x.

7 Prouver une inclusion

L'inclusion $A \subset B$ où A et B sont deux ensembles signifie que «$\forall x \in A,\ x \in B$». Pour prouver l'inclusion $A \subset B$, on commence donc par fixer un élément générique x de A puis on démontre que x appartient à B.

Exercice d'application 14
Montrer que $\big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x=y=z\big\} \subset \big\{(2a+3b, 3a+4b, 4a+5b) \,|\, (a,b) \in \mathbb{R}^2\big\}$.

8 Prouver une égalité d'ensembles

Prouver l'égalité $A=B$ où A et B sont deux ensembles, revient à prouver les deux inclusions $A \subset B$ et $B \subset A$.

Conseil. Il est préférable de commencer par prouver l'inclusion qui semble la plus facile ; ça peut aider à avoir des idées pour démontrer la deuxième inclusion.

Exercice d'application 15
Soient A et B deux ensembles. Montrer que si $A \cap B = A \cup B$ alors $A = B$.

Exercice d'application 16
Montrer que $\big\{(5-3t, -2+2t) \mid t \in \mathbb{R}\big\} = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + 3y = 4\big\}$.

9 Raisonner par récurrence

On utilise un raisonnement par récurrence lorsqu'on connaît le résultat à démontrer qui est de la forme « $\forall n \geqslant n_0, P_n$ » où P_n est une assertion qui dépend d'un entier $n \geqslant n_0$ et qu'on connaît une relation de récurrence (faisant le lien entre des rangs successifs).

9.1 Récurrence simple

Dans une récurrence simple, on commence par montrer que P_{n_0} est vrai : c'est l'<u>initialisation</u>. Puis on prouve l'assertion « $\forall n \geqslant n_0,\ P_n \Longrightarrow P_{n+1}$ » : c'est l'<u>hérédité</u>. Enfin on conclut d'après le principe de récurrence.

Exemple 6
Démontrer l'inégalité de Bernoulli : $\forall n \geqslant 2,\ \forall x > 0,\ (1+x)^n > 1 + nx$.

Solution. On fixe un réel $x > 0$ et on raisonne par récurrence.
<u>Initialisation</u>. Pour $n = 2$, on a $(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2 > 1 + 2x$ car $x^2 > 0$. Donc l'inégalité est vraie pour $n = 2$.
<u>Hérédité</u>. On fixe un entier $n \geqslant 2$ et on suppose que l'inégalité $(1+x)^n > 1 + nx$ est vraie. Alors on a :

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)(1+x)^n \quad \text{(relation de récurrence)}\\ &> (1+x)(1+nx) \quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence car } (1+x) > 0\\ &= 1 + (n+1)x + nx^2\\ &> 1 + (n+1)x \quad \text{car } nx^2 > 0.\end{aligned}$$

Ainsi, si l'inégalité est vraie au rang n alors elle est vraie au rang $n+1$, et cette implication est vraie pour tout entier $n \geqslant 2$.
<u>Conclusion</u>. D'après le principe de récurrence, on en déduit que $(1+x)^n > 1 + nx$ pour tout entier $n \geqslant 2$. Et ceci est vrai pour tout réel $x > 0$. □

Exercice d'application 17
Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \geqslant 0,\ u_{n+1} = 2u_n + 3$. Montrer que $u_n = 4 \times 2^n - 3$ pour tout entier $n \geqslant 0$.

Exercice d'application 18
Prouver qu'il existe un entier $p \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant p,\ 2^n \geqslant n^2$.

9.2 Récurrence double

On utilise une récurrence double lorsque la relation de récurrence fait le lien entre un rang et les deux rangs précédents.
Attention. Pour une récurrence double, il faut vérifier que les <u>deux premières assertions</u> sont vraies dans l'initialisation, et l'hérédité consiste à supposer que <u>deux assertions consécutives</u> sont vraies (hypothèse de récurrence) pour montrer que la suivante est vraie.

Exercice d'application 19
Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par $u_0 = -1$, $u_1 = 0$ et $\forall n \geqslant 0,\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$. Montrer que $u_n = 2 \times 3^n - 3 \times 2^n$ pour tout entier $n \geqslant 0$.

Exercice d'application 20
Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 5$ et $\forall n \geqslant 0,\ u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$. Montrer qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall n \geqslant 0,\ u_n = a + 2^n b$.