Fiche méthodologique n° 11

Dériver, primitiver et intégrer

1 Calculer des dérivées

1.1 Utilisation des dérivées usuelles

Les ensembles de dérivabilité et les dérivées des fonctions usuelles sont à connaître.

Exercice d'application 1
Déterminer l'ensemble de dérivabilité et calculer la dérivée des fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto 2^x + 3\tan(x), \quad g : t \mapsto \sqrt{t}\sin(t) \quad \text{et} \quad h : x \mapsto \frac{x^3}{\ln(x)}.$$

Exercice d'application 2
Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer la somme $\sum_{k=0}^{n} k\cos(k\theta)$ pour tout $\theta \in]0, 2\pi[$ à l'aide de la dérivée de la fonction $\theta \mapsto \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$.

1.2 Dérivée d'une composée

Si g et f sont deux fonctions réelles alors la composée $g \circ f$ est dérivable en $x \in \mathbb{R}$ si et seulement si f est dérivable en x et g est dérivable en $f(x)$, de plus on a dans ce cas :

$$\boxed{(g \circ f)'(x) = f'(x)g'(f(x))}.$$

Exercice d'application 3
Déterminer l'ensemble de dérivabilité et calculer la dérivée des fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto \ln(e^x - 2), \quad g : t \mapsto \arctan^4\left(\sqrt[4]{t}\right) \quad \text{et} \quad h : x \mapsto (2x+1)^{\cos(x)}.$$

1.3 Dérivée d'une bijection réciproque

Si $f : A \to B$ est une fonction réelle bijective alors la bijection réciproque $f^{-1} : B \to A$ est dérivable en $y \in B$ si et seulement si f est dérivable en $f^{-1}(y)$ et $f'(f^{-1}(y)) \neq 0$. De plus on a dans ce cas :

$$\boxed{(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}}.$$

Conseil. Cette formule se retrouve en dérivant la composée $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_{f(I)} : y \mapsto y$.
Conseil. Pour ne pas oublier la condition $f'(f^{-1}(y)) \neq 0$, il suffit de remarquer que si $f'(f^{-1}(y)) = 0$ alors la courbe représentative de f admet une tangente horizontale au point $(f^{-1}(y), f(f^{-1}(y))) = (f^{-1}(y), y)$ ce qui correspond à une tangente verticale à la courbe représentative de f^{-1} au point $(y, f^{-1}(y))$ (par symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$).
Remarque. En particulier, si f est dérivable sur un intervalle I avec $f' > 0$ (ou bien $f' < 0$) sur I alors $f : I \to f(I)$ est bijective d'après le théorème de la bijection et f^{-1} est dérivable sur l'intervalle $f(I)$.

Exemple 1
Déterminer l'ensemble de dérivabilité et calculer la dérivée de la fonction arccos.

Solution. La fonction arccos : $[-1, 1] \to [0, \pi]$ est la bijection réciproque de la restriction $\cos|_{[0,\pi]}^{[-1,1]} : [0, \pi] \to [-1, 1]$ qui est bien bijective d'après le théorème de la bijection. Puisque cos est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $\cos' = -\sin$, arccos est dérivable en $x \in [-1, 1]$ si et seulement si $-\sin(\arccos(x)) \neq 0$. Or, pour tout $x \in [-1, 1]$, $\arccos(x) \in [0, \pi]$ donc $\sin(\arccos(x)) \geqslant 0$ et par conséquent :

$$\sin(\arccos(x)) = \sqrt{\sin^2(\arccos(x))} = \sqrt{1 - \cos^2(\arccos(x))} = \sqrt{1 - x^2}.$$

Ainsi : $-\sin(\arccos(x)) = 0 \iff 1 - x^2 = 0 \iff x \in \{-1, 1\}$. On en déduit que arccos est dérivable sur $]-1, 1[$ et que

$$\forall x \in]-1, 1[,\ \arccos'(x) = \frac{1}{-\sin(\arccos(x))} = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

□

Exercice d'application 4
Déterminer l'ensemble de dérivabilité et calculer la dérivée de la fonction arcsin.

1.4 Dérivées partielles

Dans le cas d'une fonction réelle de plusieurs variables, pour calculer la dérivée partielle par rapport à une variable il suffit de dériver par rapport à cette variable en considérant toutes les autres variables comme des constantes.

Exercice d'application 5
Calculer les dérivées partielles de la fonction $f : (x, y, z) \mapsto \dfrac{xy + z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.

2 Calculer des primitives

2.1 Utilisation des primitives usuelles

Les primitives usuelles sont à connaître.

Exercice d'application 6
Déterminer des intervalles où les fonctions suivantes sont continues et calculer leurs primitives :

$$f : x \mapsto \sin(2x)\cos(3x), \quad g : t \mapsto \frac{\ln(t)}{t} \quad \text{et} \quad h : x \mapsto \frac{1+x}{1+x^2}.$$

Exercice d'application 7
Calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_{7\pi/6}^{4\pi/3} \tan(x)\mathrm{d}x, \quad J = \int_0^1 \sqrt{2t+1}\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad K = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{2-3x}.$$

2.2 Intégration par parties

Si une fonction à intégrer sur $[a,b]$ peut s'écrire sous la forme uv' où u et v sont deux fonctions dérivables (donc continues) sur $[a,b]$ avec u' et v' continues sur $[a,b]$ alors

$$\boxed{\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x}.$$

Ainsi, pour calculer une primitive de uv' il suffit de calculer une primitive de $u'v$.
Conseil. La difficulté est de bien choisir les fonctions u et v' pour que le calcul d'une primitive de $u'v$ soit plus simple que celui d'une primitive de uv'. Si ce n'est pas le cas, on peut essayer d'inverser le choix de u et v'.

Exemple 2
Déterminer la forme des primitives de la fonction ln.

Solution. La fonction ln est continue sur $]0,+\infty[$ et on a :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \ \int_1^x \ln(t)\mathrm{d}t = \int_1^x \Big(\ln(t)\times 1\Big)\mathrm{d}t = \Big[\ln(t)\times t\Big]_1^x - \int_1^x \Big(\frac{1}{t}\times t\Big)\mathrm{d}t$$
$$\text{en posant } \begin{cases} u(t) = \ln(t) \\ v'(t) = 1 \end{cases} \text{ et donc } \begin{cases} u'(t) = 1/t \\ v(t) = t \end{cases}$$
$$= x\ln(x) - 0 - \int_1^x 1\mathrm{d}t = x\ln(x) - x.$$

Donc les primitives de ln sont de la forme $x \mapsto x\ln(x) - x + C$ avec $C \in \mathbb{R}$. □

Exercice d'application 8
Calculer l'intégrale $I = \int_1^2 x\ln(x)\mathrm{d}x$.

Exercice d'application 9
Déterminer la forme des primitives de la fonction $f : x \mapsto x^2 2^x$.

Exercice d'application 10
Calculer l'intégrale $I = \int_0^\pi \sin(t)e^t\mathrm{d}t$.

2.3 Changement de variable

Soit φ une fonction réelle définie sur un intervalle I vérifiant

(i) φ est dérivable (donc continue) sur I et φ' est continue sur I,

(ii) il existe $(\alpha,\beta) \in I^2$ tels que $\varphi(\alpha) = a$ et $\varphi(\beta) = b$.

Si f est continue sur $[a,b]$ alors

$$\boxed{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t}$$

en posant $\boxed{x = \varphi(t)}$ et donc $\boxed{\mathrm{d}x = \varphi'(t)\mathrm{d}t}$.

Exemple 3
Déterminer la forme des primitives de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ en posant $x = \cos(t)$.

Solution. La fonction $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ est continue sur $[-1,1]$ et on a :

$$\forall x \in [-1,1], \ \int_0^x \sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t = \int_{\pi/2}^{\arccos(x)} \sqrt{1-\cos^2(s)} \times (-\sin(s))\mathrm{d}s$$
$$\text{en posant } t = \cos(s) \text{ et donc } \mathrm{d}t = -\sin(s)\mathrm{d}s$$
$$= -\int_{\pi/2}^{\arccos(x)} \sqrt{\sin^2(s)}\sin(s)\mathrm{d}s = -\int_{\pi/2}^{\arccos(x)} \sin^2(s)\mathrm{d}s$$
$$\text{car } \arccos(x) \in [0,\pi] \text{ et } \sin \geqslant 0 \text{ sur } [0,\pi].$$

Or $\forall s \in \mathbb{R}, \ \sin^2(s) = \left(\frac{e^{is}-e^{-is}}{2i}\right)^2 = \frac{e^{2is}-2+e^{-2is}}{-4} = \frac{2\cos(2s)-2}{-4} = \frac{1-\cos(2s)}{2}$ donc :

$$\forall x \in [-1,1], \ \int_0^x \sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t = -\int_{\pi/2}^{\arccos(x)} \left(\frac{1-\cos(2s)}{2}\right)\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\left[s - \frac{\sin(2s)}{2}\right]_{\pi/2}^{\arccos(x)}$$
$$= -\frac{1}{2}\arccos(x) + \frac{1}{4}\sin(2\arccos(x)) + \frac{\pi}{4}.$$

Donc les primitives de f sont de la forme $x \mapsto -\frac{1}{2}\arccos(x) + \frac{1}{4}\sin(2\arccos(x)) + C$ avec $C \in \mathbb{R}$. □

Exercice d'application 11
Déterminer la forme des primitives de la fonction $f : x \mapsto e^{\sqrt{x}}$ en posant $x = t^2$.

Exercice d'application 12
Calculer l'intégrale $I = \int_0^1 \mathrm{d}x/(x^2+4)$ à l'aide d'un changement de variable à déterminer.

Exercice d'application 13
Déterminer la forme des primitives de $f : \theta \mapsto 1/\sin(\theta)$ sur $]0,\pi[$ en posant $t = \tan(\frac{\theta}{2})$.