Fiche méthodologique n° 12

Manipuler des matrices

1 Calculer le rang d'une matrice rectangulaire

Le rang d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est le nombre de lignes non nulles de la matrice échelonnée obtenue à partir de A en appliquant la méthode du pivot de Gauss.

Exemple 1

Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer le rang de la matrice $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$.

Solution. Pour éviter de distinguer le cas où le pivot a est nul, on permute les deux premières lignes $L_1 \leftrightarrow L_2$ (afin de prendre 1 comme pivot). Ensuite on effectue les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - aL_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$. On obtient :

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & a & 1 \\ 0 & 1-a^2 & 1-a \\ 0 & 1-a & a-1 \end{pmatrix}.$$

Si $a = 1$ alors les deux dernières lignes sont nulles et donc $\operatorname{rang}(A) = 1$. Si $a \neq 1$, on multiplie les deux dernières lignes par $\frac{1}{1-a}$: $L_2 \leftarrow \frac{1}{1-a}L_2$ et $L_3 \leftarrow \frac{1}{1-a}L_3$. Puis on les permute $L_2 \leftrightarrow L_3$ (afin de prendre 1 comme pivot). Ensuite on effectue l'opération $L_3 \leftarrow L_3 - (1+a)L_2$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & a & 1 \\ 0 & 1-a^2 & 1-a \\ 0 & 1-a & a-1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & a & 1 \\ 0 & 1+a & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & a & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1+a & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & a & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{2+a} \end{pmatrix}.$$

Si $a = -2$ alors la dernière ligne est nulle et donc $\operatorname{rang}(A) = 2$. Enfin si $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$ alors $\operatorname{rang}(A) = 3$. □

Exercice d'application 1

Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer le rang de la matrice $A = \begin{pmatrix} a & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ 1 & 1 & a & 1 \end{pmatrix}$.

2 Montrer qu'une matrice carrée est inversible

Etant donnée une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on cherche à savoir si A est inversible ou non (sans nécessairement calculer l'inverse de A).

2.1 Par calcul du déterminant dans le cas d'une matrice 2×2

$\boxed{A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \text{ est inversible si et seulement si } \det(A) = ad - bc \neq 0}$.

Exercice d'application 2

Déterminer pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}$ la matrice $\begin{pmatrix} 2a+3 & a \\ a & 3a+2 \end{pmatrix}$ est inversible.

2.2 Par calcul du rang

$\boxed{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \text{ est inversible si et seulement si } \operatorname{rang}(A) = n}$.

Exercice d'application 3

Déterminer pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}$ la matrice $\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$ est inversible.

3 Calculer l'inverse d'une matrice inversible

Etant donnée une matrice carrée $A \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$ dont on sait qu'elle est inversible, on cherche à calculer sa matrice inverse $A^{-1} \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$.

3.1 Cas des matrices 2×2

Si la matrice A est d'ordre 2, c'est-à-dire si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, alors sa matrice inverse est donnée par l'expression suivante :

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}.$$

Exercice d'application 4

Résoudre $\begin{cases} ax + a^2y = 1 + a \\ a^4x + a^3y = 3 - a \end{cases}$ d'inconnues $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ en fonction du paramètre $a \in \mathbb{R}$.

3.2 Par résolution d'un système linéaire

Pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système linéaire $AX = Y$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ admet pour unique solution $X = A^{-1}Y$. Il suffit donc de résoudre le système linéaire $AX = Y$ pour une matrice colonne Y «générique» afin de déterminer A^{-1}.

Exemple 2

Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer son inverse.

Solution. On pose $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Alors :

$$\begin{aligned}
AX = Y &\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 - y_1 \\ y_3 - 3y_1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{matrix} \\
&\iff \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_3 - 3y_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftrightarrow L_3 \\ L_3 \leftrightarrow L_2 \end{matrix} \\
&\iff \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_3 - 3y_1 \\ y_2 - 2y_3 + 5y_1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \end{matrix}
\end{aligned}$$

Le système linéaire, donc la matrice A, est de rang maximal donc A est inversible. De plus, l'unique solution du système linéaire est :

$$\begin{aligned}
AX = Y &\iff \begin{cases} x_1 = y_1 - x_2 - 2x_3 = 24y_1 + 4y_2 - 9y_3 \\ x_2 = -3y_1 + y_3 + 2x_3 = -13y_1 - 2y_2 + 5y_3 \\ x_3 = -5y_1 - y_2 + 2y_3 \end{cases} \\
&\iff \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & 4 & -9 \\ -13 & -2 & 5 \\ -5 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

On en déduit que $A^{-1} = \begin{pmatrix} 24 & 4 & -9 \\ -13 & -2 & 5 \\ -5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. □

Exercice d'application 5

Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer son inverse.

3.3 A l'aide d'un polynôme annulateur

On suppose qu'existe un polynôme qui annule A, c'est-à-dire qu'il existe un entier $d \geqslant 1$ et des coefficients $(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{d-1}, a_d) \in \mathbb{K}^{d+1}$ tels que :

$$a_d A^d + a_{d-1} A^{d-1} + \cdots + a_2 A^2 + a_1 A + a_0 \mathrm{I}_n = 0_n.$$

Si $a_0 \neq 0$, alors :

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_n &= -\tfrac{a_d}{a_0} A^d - \tfrac{a_{d-1}}{a_0} A^{d-1} - \cdots - \tfrac{a_2}{a_0} A^2 - \tfrac{a_1}{a_0} A \\
&= A \times \left(-\tfrac{a_d}{a_0} A^{d-1} - \tfrac{a_{d-1}}{a_0} A^{d-2} - \cdots - \tfrac{a_2}{a_0} A - \tfrac{a_1}{a_0} \mathrm{I}_n \right) \\
&= \left(-\tfrac{a_d}{a_0} A^{d-1} - \tfrac{a_{d-1}}{a_0} A^{d-2} - \cdots - \tfrac{a_2}{a_0} A - \tfrac{a_1}{a_0} \mathrm{I}_n \right) \times A.
\end{aligned}$$

Ainsi, A est inversible et $A^{-1} = -\sum_{k=0}^{d-1} \frac{a_{k+1}}{a_0} A^k$.

Exemple 3

Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & 12 & -30 \\ -9 & -19 & 45 \\ -3 & -6 & 14 \end{pmatrix}$. Calculer A^2 puis en déduire A^{-1}.

Solution. On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 7 & 12 & -30 \\ -9 & -17 & 45 \\ -3 & -6 & 16 \end{pmatrix} = A + 2\mathrm{I}_3.$$

On en déduit que $\mathrm{I}_3 = \frac{1}{2}(A^2 - A) = A \times \left(\frac{1}{2}(A - \mathrm{I}_3)\right) = \left(\frac{1}{2}(A - \mathrm{I}_3)\right) \times A$, donc A est inversible et :

$$A^{-1} = \frac{1}{2}(A - \mathrm{I}_3) = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -15 \\ -9/2 & -10 & 45/2 \\ -3/2 & -3 & 13/2 \end{pmatrix}.$$

□

Exercice d'application 6

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 & 2 \\ 4 & -1 & -2 & 2 \\ 4 & 2 & -4 & 5 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer $A + A^2$ et A^3 puis en déduire A^{-1}.

4 Calculer les puissances d'une matrice carrée

Etant donnée une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on cherche à calculer les puissances successives A^p de A en fonction de $p \in \mathbb{N}$.

4.1 Cas des matrices nilpotentes

Si on trouve un entier naturel $q \geqslant 1$ tel que $A^q = 0_n$, alors la matrice A est dite nilpotente et donc $A^p = 0_n$ pour tout entier $p \geqslant q$.
Conseil. C'est par exemple le cas pour les matrices triangulaires supérieures (ou inférieures) dont tous les coefficients diagonaux sont nuls.

Exemple 4
Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer A^p en fonction de $p \in \mathbb{N}$.

Solution. On a $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Donc $\forall p \geqslant 3,\ A^p = 0_3$. □

Exercice d'application 7
Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer A^p en fonction de $p \in \mathbb{N}$.

4.2 Par récurrence

On peut calculer les premières puissances A^2, A^3, A^4, … puis essayer de conjecturer une expression de A^p en fonction de $p \in \mathbb{N}$ qu'on démontrera par récurrence.

Exemple 5
Soit $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer U^p en fonction de $p \in \mathbb{N}$.

Solution. On a :

$$U^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} = 4U,\ U^3 = \begin{pmatrix} 16 & 16 & 16 & 16 \\ 16 & 16 & 16 & 16 \\ 16 & 16 & 16 & 16 \\ 16 & 16 & 16 & 16 \end{pmatrix} = 16U,\ U^4 = \begin{pmatrix} 64 & 64 & 64 & 64 \\ 64 & 64 & 64 & 64 \\ 64 & 64 & 64 & 64 \\ 64 & 64 & 64 & 64 \end{pmatrix} = 64U.$$

On conjecture que $U^p = 4^{p-1}U$ pour tout $p \geqslant 1$ (et $U^0 = \mathrm{I}_4$). Le résultat est vrai pour p=1. De plus, si on suppose le résultat vrai pour un certain entier $p \geqslant 1$ alors

$$U^{p+1} = U^p \times U = 4^{p-1}U \times U = 4^{p-1}U^2 = 4^{p-1} \times 4U = 4^p U = 4^{(p+1)-1}U.$$

On conclut d'après le principe de récurrence. □

Exercice d'application 8
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^p en fonction de $p \in \mathbb{N}$.

4.3 À l'aide d'un polynôme annulateur

On suppose qu'existe un polynôme qui annule A, c'est-à-dire qu'il existe un entier $d \geqslant 1$ et des coefficients $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_{d-1}, a_d) \in \mathbb{K}^{d+1}$ tels que :

$$a_d A^d + a_{d-1}A^{d-1} + a_{d-2}A^{d-2} + \dots + a_2A^2 + a_1A + a_0\mathrm{I}_n = 0_n.$$

Si $a_d \neq 0$, alors :

$$\begin{aligned}
A^d &= -\tfrac{a_{d-1}}{a_d}A^{d-1} - \tfrac{a_{d-2}}{a_d}A^{d-2} - \dots - \tfrac{a_2}{a_d}A^2 - \tfrac{a_1}{a_d}A - \tfrac{a_0}{a_d}\mathrm{I}_n \\
A^{d+1} &= -\tfrac{a_{d-1}}{a_d}A^{d} - \tfrac{a_{d-2}}{a_d}A^{d-1} - \dots - \tfrac{a_2}{a_d}A^3 - \tfrac{a_1}{a_d}A^2 - \tfrac{a_0}{a_d}A \\
&= \left(\tfrac{(a_{d-1})^2}{a_d^2} - \tfrac{a_{d-2}}{a_d}\right)A^{d-1} + \left(\tfrac{a_{d-1}a_{d-2}}{a_d^2} - \tfrac{a_{d-3}}{a_d}\right)A^{d-2} + \ldots + \left(\tfrac{a_{d-1}a_1}{a_d^2} - \tfrac{a_0}{a_1}\right)A + \left(\tfrac{a_{d-1}a_0}{a_d^2}\right)\mathrm{I}_n \\
A^{d+2} &= -\tfrac{a_{d-1}}{a_d}A^{d+1} - \tfrac{a_{d-2}}{a_d}A^{d} - \dots - \tfrac{a_2}{a_d}A^4 - \tfrac{a_1}{a_d}A^3 - \tfrac{a_0}{a_d}A^2 \\
&= (\dots)A^{d-1} + (\dots)A^{d-2} + \dots + (\dots)A + (\dots)\mathrm{I}_n \\
A^{d+3} &= \dots = (\dots)A^{d-1} + (\dots)A^{d-2} + \dots + (\dots)A + (\dots)\mathrm{I}_n
\end{aligned}$$

Ainsi, on peut trouver par récurrence des suites de coefficients $(b_{0,p})_{p\in\mathbb{N}}$, $(b_{1,p})_{p\in\mathbb{N}}$, $(b_{2,p})_{p\in\mathbb{N}}$, …, $(b_{d-1,p})_{p\in\mathbb{N}}$ telles que $A^p = \sum_{k=0}^{d-1} b_{k,p}A^k$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Exemple 6
Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & 12 & -30 \\ -9 & -19 & 45 \\ -3 & -6 & 14 \end{pmatrix}$. Déterminer deux suites $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$ et $(b_p)_{p\in\mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall p \in \mathbb{N},\ A^p = a_pA + b_p\mathrm{I}_3.$$

Solution. Analyse. On a $A^0 = \mathrm{I}_3 = 0A + 1\mathrm{I}_3$ donc on pose $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$. De même $A^1 = A$ donc $a_1 = 1$ et $b_1 = 0$, $A^2 = A + 2\mathrm{I}_3$ (d'après l'exemple 3) donc $a_2 = 1$ et $b_2 = 2$, etc. Si on suppose qu'on a trouvé a_p et b_p pour un entier $p \in \mathbb{N}$ fixé alors :

$$A^{p+1} = A^pA = (a_pA + b_p\mathrm{I}_3)A = a_pA^2 + b_pA = a_p(A + 2\mathrm{I}_3) + b_pA = (a_p + b_p)A + 2a_p\mathrm{I}_3$$

donc il suffit de poser $a_{p+1} = a_p + b_p$ et $b_{p+1} = 2a_p$.
Synthèse. On définit par récurrence les suites $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$ et $(b_p)_{p\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ b_0 = 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall p \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_{p+1} = a_p + b_p \\ b_{p+1} = 2a_p \end{cases}.$$

Alors on peut démontrer par récurrence que $A^p = a_pA + b_p\mathrm{I}_3$ pour tout $p \in \mathbb{N}$ à l'aide du même calcul que celui utilisé dans l'analyse. De plus, on a pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$a_{p+2} = a_{p+1} + b_{p+1} = a_{p+1} + 2a_p.$$

On reconnaît une suite récurrente linéaire d'ordre deux. Après calculs, on obtient pour tout $p \in \mathbb{N}$: $a_p = (2^p - (-1)^p)/3$ et $b_p = a_{p+1} - a_p = (2^p + 2(-1)^p)/3$. □

Exercice d'application 9
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$. Déterminer $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$ et $(b_p)_{p\in\mathbb{N}}$ telles que $\forall p \in \mathbb{N},\ A^p = a_pA + b_p\mathrm{I}_2$.

4.4 À l'aide de la formule du binôme de Newton

Si on peut écrire A sous la forme $A = B + C$ où B et C sont deux matrices qui commutent ($BC = CB$), alors on peut appliquer la formule du binôme de Newton :

$$\forall p \in \mathbb{N},\ A^p = (B+C)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} B^k C^{p-k}.$$

Attention. Il faut bien vérifier que B et C commutent ! !
Conseil. Cette méthode est utile si on sait déjà calculer les puissances successives de B et C qui apparaissent dans la formule du binôme de Newton. C'est par exemple le cas si on peut écrire A sous la forme $A = M + \lambda \mathrm{I}_n$ où $\lambda \in \mathbb{K}$ et M est une matrice dont on peut facilement conjecturer l'expression de M^k en fonction de $k \in \mathbb{N}$.

Exemple 7
Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer A^p en fonction de $p \in \mathbb{N}$.

Solution. On a $A = \mathrm{I}_4 + U$ où U est la matrice de l'exemple 5. Les matrices I_4 et U commutent car $\mathrm{I}_4 U = U \mathrm{I}_4 = U$. D'après la formule du binôme de Newton, on obtient donc pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
A^p = \left(U + \mathrm{I}_4\right)^p &= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} U^k \mathrm{I}_4^{p-k} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} U^k \\
&= \binom{p}{0} U^0 + \sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} 4^{k-1} U \quad (\text{car } U^k = 4^{k-1}U \text{ pour tout } k \geqslant 1 \text{ d'après l'exemple 5}) \\
&= \mathrm{I}_4 + \frac{1}{4}\left(\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} 4^k\right) U - \frac{1}{4}\binom{p}{0} 4^0 U \\
&= \mathrm{I}_4 + \frac{1}{4}(4+1)^p U - \frac{1}{4} U \quad (\text{d'après la formule du binôme de Newton}) \\
&= \mathrm{I}_4 + \frac{1}{4}(5^p - 1)U.
\end{aligned}$$

□

Exercice d'application 10
Soient $a \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$. Calculer A^p en fonction de $p \in \mathbb{N}$.

Exercice d'application 11
Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer A^p en fonction de $p \in \mathbb{N}$.

4.5 À l'aide d'une matrice semblable

Une matrice semblable à A est une matrice $B = P^{-1}AP \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ où $P \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$. Dans ce cas, on peut montrer par récurrence que $A^p = PB^pP^{-1}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. Ainsi, pour calculer les puissances successives de A, il suffit de calculer les puissances successives de B.
Conseil. Pour certaines matrices A, on peut trouver P afin que la matrice B soit diagonale (on dit alors qu'on a «diagonalisé» A). Le calcul des puissances successives de B, et donc ceux de A, sont alors très simples.

Exemple 8
Soient $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible, calculer $P^{-1}AP$, puis en déduire A^p en fonction de $p \in \mathbb{N}$.

Solution. On a $\det(P) = -2 \neq 0$ donc P est inversible avec $P^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$. Donc $P^{-1}AP = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 12 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. On pose $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.
Montrons par récurrence que $A^p = PD^pP^{-1}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. Le résultat est vrai pour $p = 0$ car $A^0 = \mathrm{I}_2 = PP^{-1} = P\mathrm{I}_2P^{-1} = PD^0P^{-1}$. Si on suppose le résultat vrai pour un certain entier $p \in \mathbb{N}$, alors :

$$A^{p+1} = A^pA = PD^pP^{-1} \times \underbrace{PDP^{-1}}_{\text{car } P^{-1}AP = D} = PD^p\mathrm{I}_2DP^{-1} = PD^pDP^{-1} = PD^{p+1}P^{-1}.$$

On conclut d'après le principe de récurrence. On en déduit que pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$A^p = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^p & 0 \\ 0 & 3^p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \times 2^p + 3 \times 3^p & 2^p - 3^p \\ -6 \times 2^p + 6 \times 3^p & 3 \times 2^p - 2 \times 3^p \end{pmatrix}.$$

□

Exercice d'application 12
Soient $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible, calculer $P^{-1}AP$, puis en déduire A^p en fonction de $p \in \mathbb{N}$.