Fiche méthodologique n° 13

Résoudre des équations différentielles linéaires simples

1 Résoudre des EDL homogènes

1.1 Cas d'une EDL homogène d'ordre 1

Soit $a : t \mapsto a(t)$ une fonction continue sur un intervalle I. Les solutions de l'équation différentielle :

$$\boxed{y'(t) + a(t)y(t) = 0}$$

sont toutes de la forme :

$$\boxed{y : t \mapsto \lambda e^{-A(t)}}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ est une constante quelconque et $A : t \mapsto A(t)$ est une primitive fixée de a sur I.

Exercice d'application 1
Résoudre l'équation différentielle $2y + 3y' = 0$.

Exercice d'application 2
Trouver toutes les fonctions f dérivables sur $]0, +\infty[$ qui sont telles que $f(1) = 1$ et $\forall x > 0,\ f(x) = x^2 f'(x)$.

1.2 Cas d'une EDL homogène d'ordre 2 à coefficients constants

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Pour résoudre l'équation différentielle :

$$\boxed{y'' + ay' + by = 0}$$

on commence par résoudre l'équation caractéristique associée d'inconnue $r \in \mathbb{C}$:

$$\boxed{r^2 + ar + b = 0}.$$

On reconnaît une équation du second degré à coefficients réels. Il y a trois cas selon le signe du discriminant Δ.

— Si $\Delta > 0$: l'équation caractéristiques admet deux solutions réelles (distinctes) qu'on note r_1 et r_2. Alors les solutions de l'équation différentielle sont toutes de la forme :

$$\boxed{y : t \mapsto \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t}} \quad \text{où } (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ sont des constantes.}$$

— Si $\Delta = 0$: l'équation caractéristique admet une seule solution réelle (double) qu'on note r_0. Alors les solutions de l'équation différentielle sont toutes de la forme :

$$\boxed{y : t \mapsto (\lambda + \mu t)e^{r_0 t}} \quad \text{où } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \text{ sont des constantes.}$$

Si $\Delta < 0$: l'équation caractéristique admet deux solutions complexes conjuguées (distinctes) qu'on note $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$. Alors les solutions de l'équation différentielle sont toutes de la forme :

$$\boxed{y : t \mapsto e^{\alpha t}(A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t))} \quad \text{où } (A, B) \in \mathbb{R}^2 \text{ sont des constantes.}$$

Exercice d'application 3
Résoudre l'équation différentielle $f'' + 5f = 4f'$ de conditions initiales $f'(0) = f(0) = 1$.

Exercice d'application 4
Résoudre $\alpha y'' + 2y' + y = 0$ en fonction des valeurs du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice d'application 5
L'étude d'un système oscillant sans amortissement (un mobile de masse m accroché à un ressort fixé au plafond) conduit à l'équation différentielle $mx'' = -kx$ où $x(t)$ est la position verticale du mobile à l'instant t à partir du point d'équilibre $x = 0$ et $k > 0$ est la constante de raideur du ressort. Le système étant au repos, on tire le mobile d'une longueur $\ell > 0$ et on le lâche à l'instant $t = 0$. Calculer la période d'une oscillation en fonction des paramètres m, k et ℓ.

2 Déterminer une solution particulière d'une EDL

Toutes les solutions d'une équation différentielle linéaire sont de la forme :

$$\boxed{y : t \mapsto y_{\mathrm{H}}(t) + y_{\mathrm{P}}(t)}$$

où y_{H} est une solution quelconque de l'équation différentielle homogène associée et y_{P} est une solution particulière fixée de l'équation différentielle totale (avec second membre). Pour résoudre une équation différentielle linéaire, il suffit donc de déterminer une seule solution particulière à laquelle on ajoute n'importe quelle solution de l'équation différentielle homogène associée.

Conseil. Il est plus facile de commencer par résoudre l'équation différentielle homogène associée avant de chercher une solution particulière.

2.1 En trouvant une solution particulière évidente

En observant l'équation différentielle, il est parfois possible de trouver rapidement une solution particulière évidente.

C'est par exemple le cas lorsque le second membre est constant. Il existe alors une solution particulière constante (dont les dérivées successives sont nulles).

Exercice d'application 6
Résoudre l'équation différentielle $4f+f''=4f'+1$ de conditions initiales $f'(0)=f(0)=1$.

Exercice d'application 7
Trouver toutes les fonctions y dérivables sur $]0,+\infty[$ telles que $\forall t>0,\ y(t)=1+ty'(t)$.

2.2 En cherchant une solution particulière d'une forme donnée

Pour déterminer une solution particulière dont la forme est donnée, il suffit de raisonner par analyse-synthèse en reportant cette forme dans l'équation différentielle.

Conseil. Lorsqu'on cherche une forme polynomiale, on peut commencer par déterminer le degré du polynôme avant de chercher ses coefficients.

Exercice d'application 8
Résoudre $\forall t\in\mathbb{R},\ y'(t)+y''(t)=2y(t)+t^2$ en cherchant une solution particulière polynomiale.

Exercice d'application 9
Soit $f:x\mapsto x\cos(x)$. Résoudre l'équation différentielle $g+g'=f$ en cherchant une solution particulière de la forme $h:x\mapsto P(x)\cos(x)+Q(x)\sin(x)$ où P et Q sont deux fonctions polynomiales.

Exercice d'application 10
Trouver toutes les fonctions f deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que $f(0)=f'(0)=1$ et $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=f''(x)+xe^x$. On cherchera une solution particulière de la forme $x\mapsto P(x)e^x$ où P est une fonction polynomiale.

2.3 À l'aide de la méthode de variation de la constante

Dans le cas d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1, on peut chercher une solution particulière de la même forme que celle des solutions de l'équation différentielle homogène associée en remplaçant la constante par une fonction à déterminer.

Plus précisément, pour résoudre l'équation différentielle :

$$y'(t)+a(t)y(t)=b(t)$$

où $a:t\mapsto a(t)$ et $b:t\mapsto b(t)$ sont deux fonctions continues sur un intervalle I, il suffit de résoudre l'équation différentielle homogène associée dont les solutions sont de la forme :

$$y_{\mathrm{H}}:t\mapsto \lambda e^{-A(t)}$$

où $\lambda\in\mathbb{R}$ est une constante quelconque et $A:t\mapsto A(t)$ est une primitive fixée de a sur I, puis de chercher une solution particulière de la forme :

$$\boxed{y_{\mathrm{P}}:t\mapsto \lambda(t)e^{-A(t)}}$$

où $\lambda:t\mapsto\lambda(t)$ est une fonction dérivable à déterminer.

Pour déterminer la fonction λ, il suffit de reporter la forme de la solution particulière y_{P} dans l'équation différentielle. Après simplifications, on obtient alors l'expression de $\lambda'(t)$ dont il suffit de déterminer une primitive pour trouver $\lambda(t)$.

Exercice d'application 11
Trouver toutes les fonctions f dérivables sur $]0,+\infty[$ telles que $f(x)+xf'(x)=x^2e^x$ pour tout $x>0$.

Exercice d'application 12
Résoudre $2y+3y'+4\cos=0$ de condition initiale $y(0)=0$.

2.4 À l'aide du principe de superposition

Lorsque le second membre de l'équation différentielle linéaire est égale à une somme de fonctions simples, on peut chercher une solution particulière de chaque équation différentielle obtenue en remplaçant le second membre par chacune des fonctions simples, puis de faire la somme des solutions particulières obtenues. D'après le principe de superposition, la somme de ces solutions particulières est bien une solution particulière de l'équation différentielle initiale.

Exercice d'application 13
Résoudre l'équation différentielle : $\forall t\in\mathbb{R},\ y(t)+2y'(t)=1+t^2+\sin(t)+e^{2t}$.