Fiche méthodologique n° 16

Étudier la nature de suites réelles

1 Utiliser les théorèmes généraux

Les théorèmes suivants permettent d'étudier la nature d'une suite réelle. Il faut connaître leurs énoncés pour repérer rapidement lequel utiliser dans chaque situation.

Théorème de la limite par encadrement. Soit (u_n) une suite réelle telle que $a_n \leqslant u_n \leqslant b_n$ pour tout $n \geqslant n_0$ où (a_n) et (b_n) sont deux suites réelles qui convergent vers une même limite $\ell \in \mathbb{R}$. Alors (u_n) converge aussi vers ℓ.

Théorème de la limite par comparaison. Soit (u_n) une suite réelle telle que $a_n \leqslant u_n$ (respectivement $u_n \leqslant b_n$) pour tout $n \geqslant n_0$ où (a_n) (respectivement (b_n)) est une suite réelle qui tend vers $+\infty$ (respectivement vers $-\infty$). Alors (u_n) diverge aussi vers $+\infty$ (respectivement vers $-\infty$).

Théorème des suites extraites. Soit (u_n) une suite réelle. Alors (u_n) tend vers une limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ si et seulement si les deux suites extraites (u_{2k}) et (u_{2k+1}) tendent aussi vers la même limite ℓ.

Théorème de la limite monotone. Soit (u_n) une suite réelle croissante (respectivement décroissante). Si (u_n) est majorée (respectivement minorée) alors (u_n) est convergente, sinon (u_n) diverge vers $+\infty$ (respectivement vers $-\infty$).

Théorème des suites adjacentes. Soient (a_n) et (b_n) deux suites réelles telles que (a_n) est croissante, (b_n) est décroissante et $\lim_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = 0$. Alors (a_n) et (b_n) convergent vers une même limite.

Remarque. Les deux derniers théorèmes ne permettent pas de déterminer la valeur de la limite (dans le cas de convergence pour le théorème de la limite monotone).

Conseil. La contraposée du théorème de suites extraites fournit un critère simple pour justifier une divergence de deuxième espèce.

Exemple 1

Étudier la nature de la suite $\left(u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}\right)_{n\geqslant 1}$.

Solution. Soit $n \geqslant 1$. On a :

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ 0 < \sqrt{2} \leqslant \sqrt{n^2+1} \leqslant \sqrt{n^2+k} \leqslant \sqrt{n^2+n}$$

car la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. On obtient donc en passant à l'inverse puis en sommant sur k :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} = u_n \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}.$$

Or :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = 1.$$

D'après le théorème de la limite par encadrement, on en déduit que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 1. □

Exemple 2

Étudier la nature de la suite $\left(u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n!n}\right)_{n\geqslant 0}$.

Solution. Soit $n \geqslant 0$. On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} + \frac{1}{(n+1)!(n+1)} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} - \frac{1}{n!n} \\ &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!(n+1)} - \frac{1}{n!n} \\ &= \frac{n(n+1) + n - (n+1)^2}{(n+1)!n(n+1)} = \frac{-1}{(n+1)!n(n+1)} < 0. \end{aligned}$$

Donc $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante. De plus $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est positive (comme somme de réels positifs) donc minorée par 0. D'après le théorème de la limite monotone, on en déduit que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente. □

Exemple 3

Étudier la nature de la suite $\left(u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}\right)_{n\geqslant 1}$.

Solution. Soit $n \geqslant 1$. On a :

$$u_{2(n+1)} - u_{2n} = u_{2n+2} - u_{2n} = \frac{-1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} = \frac{-1}{(2n+1)(2n+2)} < 0$$

$$\text{et} \quad u_{2(n+1)+1} - u_{2n+1} = u_{2n+3} - u_{2n+1} = \frac{1}{2n+2} + \frac{-1}{2n+3} = \frac{1}{(2n+2)(2n+3)} > 0.$$

Donc $(u_{2n})_{n\geqslant 1}$ est décroissante et $(u_{2n+1})_{n\geqslant 1}$ et croissante. De plus :

$$\lim_{n\to+\infty}(u_{2n+1} - u_{2n}) = \lim_{n\to\infty} \frac{-1}{2n+1} = 0.$$

D'après le théorème des suites adjacentes, on en déduit que $(u_{2n})_{n\geqslant 1}$ et $(u_{2n+1})_{n\geqslant 1}$ convergent vers une même limite puis, d'après le théorème des suites extraites, que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge aussi vers cette limite. □

Exercice d'application 1

Étudier la nature de la suite $\left(u_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\ln(k)}\right)_{n\geqslant 2}$.

Exercice d'application 2
Étudier la nature de $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\exp(k)}\right)_{n\geqslant 0}$, $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\exp(k)+1}\right)_{n\geqslant 0}$ et $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\exp(k)-1}\right)_{n\geqslant 1}$.

Exercice d'application 3
Étudier la nature de la suite $\left(u_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k}{\ln(k)}\right)_{n\geqslant 2}$.

2 Étudier la nature d'une suite définie par récurrence

On considère une suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ définie par la donnée de son premier terme $u_{n_0} \in \mathbb{R}$ et une relation de récurrence du type :

$$\forall n \geqslant n_0,\ u_{n+1} = f(u_n)$$

où f est une fonction réelle définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

Pour étudier la nature de $(u_n)_{n\geqslant n_0}$, on commence par étudier les variations de f sur I ainsi que le signe de $g : x \mapsto f(x) - x$, puis on conjecture graphiquement des propriétés de $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ (monotonie, existence de majorant ou de minorant, etc.) qu'on démontre ensuite par récurrence, enfin on utilise les théorèmes généraux.
Attention. La suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ n'a pas forcément la même monotonie que la fonction f !

Dans le cas où on prouve une convergence à l'aide du théorème de la limite monotone ou du théorème des suites adjacentes (qui ne permettent donc pas de déterminer la valeur de la limite), on détermine $\ell = \lim_{n\to+\infty} u_n$ en passant à la limite quand $n \to +\infty$ dans la relation de récurrence. En effet, si $\lim_{x\to\ell} f(x) = f(\ell)$ (c'est-à-dire si f est continue en ℓ), alors :

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell) \quad \text{(par composition de limites)}$$

Ainsi, la limite de $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est solution de l'équation $f(\ell) = \ell$ qu'il suffit de résoudre.

Exercice d'application 4
Étudier la nature de la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \geqslant 0,\ u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$.

Exercice d'application 5
Étudier la nature de la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \geqslant 0,\ u_{n+1} = \frac{2}{2u_n+3}$ (on pourra étudier les suites extraites $(u_{2k})_{k\geqslant 0}$ et $(u_{2k+1})_{k\geqslant 0}$).

3 Etudier la nature d'une suite implicite

Une suite implicite est une suite réelle $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ dont chaque terme de rang $n \geqslant n_0$ est défini comme l'unique solution $x = u_n$ d'une équation du type :

$$f_n(x) = 0 \tag{E_n}$$

où f_n est une fonction réelle définie sur un intervalle $I_n \subset \mathbb{R}$.

Remarque. En général, on sait seulement prouver que (E_n) admet une unique solution sans pouvoir déterminer son expression en fonction de n.

Les différentes étapes pour étudier la nature de $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ sont les suivantes.

1. On montre que $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est bien définie, c'est-à-dire que chaque terme existe et qu'il n'y a pas d'ambiguïté dans sa définition. Pour cela, pour chaque rang $n \geqslant n_0$, on étudie les variations de f_n sur I_n, puis on utilise le théorème des valeurs intermédiaires pour montrer que (E_n) admet bien une unique solution.
2. On montre que $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est monotone. Pour cela, pour chaque rang $n \geqslant n_0$, on détermine le signe de $f_n(u_{n+1})$ (souvent en utilisant que $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$). Puis, en comparant $f_n(u_{n+1})$ et $0 = f_n(u_n)$, on peut en déduire une comparaison de u_n et u_{n+1} en utilisant les variations de f_n sur I_n obtenues au point précédent.
3. On montre que $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est convergente. Pour cela, d'après le théorème de la limite monotone, il suffit de minorer ou de majorer l'unique solution de (E_n) en utilisant les variations de f_n sur I_n.
   Attention. Le minorant ou le majorant obtenu ne doit pas dépendre de n !
4. On détermine la limite de $(u_n)_{n\geqslant 0}$. Pour cela, on pose $\ell = \lim_{n\to+\infty} u_n$, puis on passe à la limite quand $n \to +\infty$ dans (E_n). On obtient alors :

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(u_n) = \lim_{n\to+\infty} 0 = 0 \quad \text{(d'après } (\mathrm{E}_n)\text{)},$$

   où $\lim_{n\to+\infty} f_n(u_n)$ est une expression qu'on peut calculer en fonction de ℓ. Ainsi, la limite de $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est solution d'une équation qu'il suffit de résoudre.
   Attention. Il faut souvent distinguer plusieurs cas en fonction des différentes valeurs de ℓ pour le calcul de $\lim_{n\to+\infty} f_n(u_n)$ quand on passe à la limite dans (E_n).

Exercice d'application 6
Étudier la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $\forall n \geqslant 1,\ nu_n + \ln(u_n) = 0$.

Exercice d'application 7
Montrer que pour chaque $n \geqslant 1$ l'équation $x^n + x^2 + 2x = 1$ admet une unique solution positive que l'on notera u_n, puis étudier la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$.

4 Comparer des suites

Pour comparer deux suites (a_n) et (b_n), où (b_n) est non nulle à partir d'un certain rang, il suffit d'étudier la limite du rapport $\frac{a_n}{b_n}$ quand $n \to +\infty$: si ce rapport tend vers 0 alors $a_n = o_{n\to+\infty}(b_n)$ et si ce rapport tend vers 1 alors $a_n \sim_{n\to+\infty} b_n$.

4.1 Utiliser le théorème des croissances comparées

Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $(q, r) \in \mathbb{R}^2$. On a quand $n \to +\infty$:

$$\begin{cases} 0 < \alpha < \beta \\ 1 < q < r \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\ln(n) = o(n^\alpha),\ n^\alpha = o(n^\beta),\ n^\beta = o(q^n),\ q^n = o(r^n),\ r^n = o(n!)}.$$

Exercice d'application 8
Calculer $\lim_{n\to+\infty} \frac{n!+\ln(n)}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.

Exercice d'application 9
Calculer $\lim_{n\to+\infty} n - \ln(n+1)$.

Exercice d'application 10
Calculer $\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^{42}}{n!}$.

4.2 Déterminer un équivalent simple

Pour déterminer un équivalent simple d'une suite réelle, il suffit d'écrire les termes de la suite sous forme factorisée puis d'utiliser les équivalents usuels suivants :

— si $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors on a quand $n \to +\infty$:

$$\boxed{\left(a_0 + a_1 u_n + a_2 u_n^2 + \cdots + a_p u_n^p\right) \sim a_p u_n^p}$$

$$\text{et} \quad \boxed{\frac{a_0 + a_1 u_n + a_2 u_n^2 + \cdots + a_p u_n^p}{b_0 + b_1 u_n + b_2 u_n^2 + \cdots + b_q u_n^q} \sim \frac{a_p}{b_q} u_n^{p-q}}$$

où $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, $(a_0, a_1, \ldots, a_p) \in \mathbb{R}^{p+1}$, $(b_0, b_1, \ldots, b_q) \in \mathbb{R}^{q+1}$ avec $a_p \neq 0$, $b_q \neq 0$.

— si $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$, alors on a quand $n \to +\infty$:

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}^\star, \quad \boxed{((1+u_n)^\alpha - 1) \sim \alpha u_n}$$

$$\boxed{\ln(1+u_n) \sim u_n, \quad (\exp(u_n) - 1) \sim u_n}$$

$$\text{et} \quad \boxed{(\cos(u_n) - 1) \sim -\frac{u_n^2}{2}, \quad \sin(u_n) \sim u_n, \quad \tan(u_n) \sim u_n}.$$

Remarque. On obtient en particulier que $(\sqrt{1+u_n} - 1) \sim \frac{u_n}{2}$ et on retrouve que $(1+u_n)^{-1} - 1 = \frac{1}{1+u_n} - 1 = \frac{-u_n}{1+u_n} = \frac{-1}{\frac{1}{u_n}+1} \sim \frac{-1}{\frac{1}{u_n}} = -u_n$.

Exercice d'application 11
Déterminer un équivalent simple de la suite définie par $u_n = 2 \times 5^n - 3^n$ pour tout $n \geqslant 0$.

Exercice d'application 12
Déterminer un équivalent simple de $\sqrt{n^2+2n+3} - \sqrt{n^2-1}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice d'application 13
Calculer $\lim_{n\to+\infty} n^2 \left(e^{1/n^2} - \cos(\frac{1}{n})\right)$.

Exercice d'application 14
Calculer $\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$.