Fiche méthodologique n° 17

Manipuler des polynômes réels

1 Identifier les coefficients de deux polynômes

Deux polynômes sont égaux si et seulement si leurs coefficients de même degré sont égaux entre eux.

Exercice d'application 1
Soit $(m,n) \in \mathbb{N}^2$. En considérant le polynôme $P : x \mapsto (x+1)^{m+n}$, démontrer l'identité de Vandermonde :

$$\forall k \in [\![0, m+n]\!],\ \sum_{\ell=0}^{k} \binom{m}{\ell}\binom{n}{k-\ell} = \binom{m+n}{k}.$$

Exercice d'application 2
Trouver des réels $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ et $(b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$ tels que :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \frac{1}{(x^2-1)^3} = \sum_{k=1}^{3} \left(\frac{a_k}{(x-1)^k} + \frac{b_k}{(x+1)^k} \right).$$

Exercice d'application 3
On considère l'équation différentielle suivante :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ y'''(t) + y''(t) + y'(t) - 3y(t) = t^2 e^t.$$

Trouver une solution particulière de la forme $y : t \mapsto P(t)e^t$ où P est un polynôme dont on commencera par déterminer le degré.

2 Montrer qu'un polynôme est nul

Un polynôme non nul de degré n admet au plus n racines. En particulier, un polynôme de degré n qui admet au moins $n+1$ racines (par exemple s'il en admet une infinité) est forcément le polynôme nul.

Exercice d'application 4
Soient a, b et c trois réels distincts deux à deux. Soient P et Q deux polynômes de degré 2 tels que $P(a) = Q(a)$, $P(b) = Q(b)$ et $P(c) = Q(c)$. Montrer que $P = Q$.

Exercice d'application 5
Soit P un polynôme tel que $P(x+1) = P(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En raisonnant par l'absurde, montrer que le degré de P n'est pas impair. En déduire que P est constant (indication : considérer P' et raisonner par disjonction de cas).

Exercice d'application 6
Soit $n \in \mathbb{N}$. On dit qu'un polynôme P vérifie la propriété $\mathscr{P}_n$ si $\deg(P) = n$ et $P(x) = \sqrt{x}$ pour tout $x \in [\![0, n]\!]$.

1. Montrer qu'il existe au plus un polynôme P qui vérifie la propriété $\mathscr{P}_n$.
2. Soit P_n un polynôme qui vérifie $\mathscr{P}_n$. Calculer $P_n(n+1)$ pour $n = 1$, 2 et 3.

3 Factoriser un polynôme

Un polynôme A est factorisable par un polynôme B s'il existe un polynôme Q tel que $A(x) = B(x)Q(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En particulier, si $\alpha \in \mathbb{R}$, on sait que A est factorisable par le polynôme $x \mapsto x - \alpha$ si et seulement si α est une racine de A, c'est-à-dire $A(\alpha) = 0$.

Exercice d'application 7
Factoriser les polynômes suivants :

$$P : x \mapsto x^5 - 3x^4 + 2x^3 - x^2 + 3x - 2 \quad \text{et} \quad Q : x \mapsto x^5 - 2x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 8x + 3.$$

Exercice d'application 8
Factoriser les polynômes $P : x \mapsto x^4 + 1$ et $Q : x \mapsto x^4 + x^2 + 1$.

4 Déterminer l'ordre de multiplicité d'une racine

On dit qu'un réel α est une racine d'ordre de multiplicité $m \geqslant 1$ d'un polynôme P lorsque :

$$P(\alpha) = P'(\alpha) = \cdots = P^{(m-1)}(\alpha) = 0 \quad \text{et} \quad P^{(m)}(\alpha) \neq 0.$$

Dans ce cas, P est factorisable par le polynôme $x \mapsto (x-\alpha)^m$ (mais pas par le polynôme $x \mapsto (x-\alpha)^{m+1}$).

Remarque. Si $m = 1$, on dit que α est une racine simple. Si $m \geqslant 2$, on dit que α est une racine multiple (double pour $m = 2$, triple pour $m = 3$, etc.).

Exercice d'application 9
Soit $n \geqslant 1$. Montrer que 1 est une racine de $P : x \mapsto nx^{n+2} - (n+2)x^{n+1} + (n+2)x - n$ et déterminer son ordre de multiplicité m. Puis calculer les coefficients de degré 0, 1, 2, $n-2$, $n-1$ et n du polynôme Q tel que $P(x) = (x-1)^m Q(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice d'application 10
Pour quelles valeurs du paramètre $a \in \mathbb{R}$ le polynôme $P : x \mapsto 3x^4 + ax^3 + 1$ admet-il une racine multiple ? Factoriser le polynôme P pour ces valeurs de a.