Fiche méthodologique n^{o} 18

Déterminer des limites de fonctions réelles

Soit f une fonction réelle définie au voisinage de $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

1 Montrer que f n'a pas de limite en a

1.1 A l'aide des limites à gauche et à droite si $a \in \mathbb{R}$

Dans le cas où $a \in \mathbb{R}$, si $\lim_{x\to a} f(x)$ existe alors $\lim_{x\to a^-} f(x)$ et $\lim_{x\to a^+} f(x)$ existent et sont égales (à $\lim_{x\to a} f(x)$). En particulier, il suffit de montrer que la limite à droite ou la limite à gauche n'existe pas ou bien que ces deux limites sont différentes pour prouver que f n'a pas de limite en a.

Exercice d'application 1
Montrer que $x \mapsto \dfrac{1}{1+e^{1/x}}$ n'a pas de limite en 0.

1.2 En utilisant des suites

Si $\lim_{x\to a} f(x)$ existe alors pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ qui converge vers a, la suite $(f(u_n))_{n\geqslant 0}$ converge vers $\lim_{x\to a} f(x)$. Par contraposée, il suffit donc de trouver une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ qui converge vers a telle que la suite $(f(u_n))_{n\geqslant 0}$ diverge ou bien de trouver deux suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ qui convergent vers a telles que les suites $(f(u_n))_{n\geqslant 0}$ et $(f(v_n))_{n\geqslant 0}$ n'ont pas la même limite pour prouver que f n'a pas de limite en a.

Exercice d'application 2
Montrer que $x \mapsto \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite en 0.

2 Montrer que f a une limite en a

2.1 A l'aide des limites à gauche et à droite si $a \in \mathbb{R}$

Dans le cas où f n'est pas définie en a, il suffit de montrer que les limites à gauche et à droite existent et sont égales pour prouver que f a une limite en a, et dans ce cas $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x)$.

Attention : dans le cas où f est définie en a, il est nécessaire de vérifier de plus que $\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$ pour pouvoir conclure.

Exercice d'application 3
Montrer que $x \mapsto \cos\left(x\left|1+\dfrac{1}{x}\right|\right)$ a une limite en 0.

Exercice d'application 4
Étudier la limite en 0 de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(0) = 0$ et $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^\star$.

2.2 A l'aide des théorèmes généraux

Les théorèmes suivants permettent de justifier l'existence de la limite de f en a.

Théorème de la limite par encadrement. Si $g \leqslant f \leqslant h$ au voisinage de a où g et h sont deux fonctions réelles qui admettent des limites égales en a, alors $\lim_{x\to a} f(x)$ existe et $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} h(x)$.

Théorème de la limite par comparaison. Si $g \leqslant f$ (respectivement $f \leqslant h$) au voisinage de a où g (respectivement h) est une fonction réelle définie au voisinage de a telle que $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$ (respectivement $\lim_{x\to a} h(x) = -\infty$), alors $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ (respectivement $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$).

Théorème de la limite monotone. Si f est croissante (respectivement décroissante) sur son domaine de définition de la forme $]a,b[$ où $(a,b) \in (\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\})^2$, alors $\lim_{x\to a} f(x)$ et $\lim_{x\to b} f(x)$ existent. De plus :
- si f est minorée (respectivement majorée) alors $\lim_{x\to a} f(x) \in \mathbb{R}$, sinon $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ (respectivement $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$) ;
- si f est majorée (respectivement minorée) alors $\lim_{x\to b} f(x) \in \mathbb{R}$, sinon $\lim_{x\to b} f(x) = +\infty$ (respectivement $\lim_{x\to b} f(x) = -\infty$).

Remarque : le théorème de la limite monotone ne permet pas de déterminer la valeur de la limite dans le cas où elle est réelle, il justifie seulement son existence.

Exercice d'application 5
Montrer que $x \mapsto x\left\lfloor\dfrac{1}{x}\right\rfloor$ admet une limite en 0.

Exercice d'application 6
Montrer que $x \mapsto x + \cos(x)$ admet une limite en $+\infty$.

3 Étudier les limites d'une fonction implicite

Une fonction implicite est une fonction f dont l'image $y = f(x)$ de chaque élément x de son ensemble de définition est définie comme l'unique solution d'une équation du type $g_x(y) = 0$ où F est une fonction réelle de deux variables.

Le schéma classique d'étude d'une fonction implicite est le suivant :

1. Montrer que la fonction f est bien définie. Il s'agit de montrer que pour chaque élément x fixé, l'équation $g_x(y) = 0$ d'inconnue $y \in \mathbb{R}$ admet une unique solution.

2. Montrer que la fonction f est monotone. Il suffit de poser $x_1 < x_2$ et de déterminer le signe de $g_{x_1}(f(x_2))$ en utilisant que $g_{x_2}(f(x_2)) = 0$. En effet, en comparant $g_{x_1}(f(x_2))$ et $0 = g_{x_1}(f(x_1))$ on pourra en déduire une comparaison de $f(x_1)$ et $f(x_2)$ en utilisant les variations de la fonction g_{x_1}.
3. Montrer que la fonction f admet des limites aux bornes de son ensemble de définition. Il suffit de minorer ou majorer l'unique solution $y = f(x)$ de chaque équation $g_x(y) = 0$ puis d'utiliser le théorème de la limite monotone. *Attention* : le minorant ou le majorant obtenu ne doit pas dépendre de x.
4. Déterminer la limite de la fonction f en a. Il suffit de poser $\ell = \lim_{x\to a} f(x)$ puis de passer à la limite quand $x \to a$ dans la relation $g_x(f(x)) = 0$. *Attention* : il y a souvent plusieurs cas possibles à étudier pour le calcul de $\lim_{x\to a} g_x(f(x))$ en fonction des différentes valeurs de ℓ.

Exercice d'application 7
Pour tout $x > 0$, justifier que l'équation $y = e^{-xy}$ d'inconnue $y \in \mathbb{R}$ admet une unique solution qu'on notera $f(x)$. Déterminer les limites de f en 0 et $+\infty$.

4 Calculer la limite de f en a

Le plus souvent, pour justifier l'existence de la limite de f en a, il suffit de la calculer.

Exercice d'application 8
Montrer que $x \mapsto \dfrac{\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2+1}}{x}$ admet une limite en 0.

Exercice d'application 9
Montrer que $x \mapsto \arctan\left(\sqrt{1+\ln(x)}\right)$ admet une limite en $+\infty$.

4.1 À l'aide du théorème des croissances comparées

On a pour tous réels $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que $0 < \alpha < \beta$:

$$\boxed{\ln(x) = \underset{x\to+\infty}{o}(x^\alpha), \quad x^\alpha = \underset{x\to+\infty}{o}(x^\beta), \quad x^\beta = \underset{x\to+\infty}{o}(\exp(x))}.$$

Exercice d'application 10
Calculer la limite de $x \mapsto \dfrac{x^{42}}{2^x}$ en $+\infty$.

Exercice d'application 11
Calculer la limite de $x \mapsto x\,(\ln(x))^{42}$ en 0.

4.2 En utilisant des équivalents usuels

— On a quand $x \to +\infty$:

$$\boxed{\left(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_px^p\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} a_px^p}$$

$$\text{et} \quad \boxed{\frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_px^p}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_qx^q} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{a_p}{b_q}x^{p-q}}$$

où $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, $(a_0, a_1, \ldots, a_p) \in \mathbb{R}^{p+1}$, $(b_0, b_1, \ldots, b_q) \in \mathbb{R}^{q+1}$ avec $a_p \neq 0$, $b_q \neq 0$.

— On a quand $x \to 0$:

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}^\star, \quad \boxed{((1+x)^\alpha - 1) \underset{x\to0}{\sim} \alpha x}$$

$$\boxed{\ln(1+x) \underset{x\to0}{\sim} x, \quad (\exp(x) - 1) \underset{x\to0}{\sim} x}$$

$$\text{et} \quad \boxed{(\cos(x) - 1) \underset{x\to0}{\sim} -\frac{x^2}{2}, \quad \sin(x) \underset{x\to0}{\sim} x, \quad \tan(x) \underset{x\to0}{\sim} x}.$$

Remarque : on obtient en particulier que $(\sqrt{1+x} - 1) \sim_{x\to0} \frac{x}{2}$ et on retrouve que $(1+x)^{-1} - 1 = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-1}{\frac{1}{x}+1} \sim \frac{-1}{\frac{1}{x}} = -x$.

Conseil : dans le cas où $a \neq 0$ et $a \neq +\infty$, on se ramène aux équivalents usuels ou au théorème des croissances comparées à l'aide de changements de variable.

Exercice d'application 12
Calculer la limite de $x \mapsto \dfrac{e^x - 1}{\sin^3(x)}\left(\sqrt{\cos(x)} - 1\right)$ en 0.

Exercice d'application 13
Calculer la limite de $x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{1 - \sqrt{x}}$ en 1.

Exercice d'application 14
Calculer la limite de $x \mapsto (\sin(x))^{\tan(x)}$ en $\frac{\pi}{2}$.

Exercice d'application 15
Calculer la limite de $x \mapsto \left(\cos\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)\right)^x$ en $+\infty$.