Fiche méthodologique n° 2

Résoudre des équations et des inéquations

1 Résoudre une équation

Résoudre une équation c'est déterminer l'ensemble des solutions, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs de l'inconnue pour lesquelles l'égalité entre les deux membres de l'équation est vérifiée.

1.1 Cas général

Afin de trouver toutes les solutions, sans en oublier ni obtenir de valeurs intruses, on raisonne par équivalences. À chaque étape de la résolution, il faut donc bien vérifier que les simplifications utilisées donnent des équations équivalentes. En particulier, si une équation implique une équation plus simple, il faut aussi vérifier la réciproque !

Quelques conseils :

— commencer par déterminer les valeurs de l'inconnue pour lesquelles l'équation est bien définie ;
— simplifier autant que possible ;
— essayer de se ramener à une équation ayant un second membre nul, puis factoriser (afin d'utiliser l'intégrité) ;
— raisonner par disjonction de cas si besoin (par exemple si l'équation comporte des valeurs absolues) ;
— changer d'inconnue si besoin.

Exercice d'application 1
Résoudre l'équation $\ln(x-1)+\ln(x-2)=\ln(2)$ d'inconnue réelle x.

Exercice d'application 2
Résoudre l'équation $|3x+6|=2x-1$ d'inconnue réelle x.

Exercice d'application 3
Résoudre l'équation $e^x-10e^{-x}=3$ d'inconnue réelle x.

Exercice d'application 4
Résoudre l'équation $x-\sqrt{x+2}=4$ d'inconnue réelle x.

1.2 Équation avec paramètres

Dans le cas où l'équation comporte un ou plusieurs paramètres, l'ensemble des solutions dépend de ces paramètres. Il est donc souvent nécessaire de raisonner par disjonction de cas en fonction des valeurs des paramètres.
Important. N'oubliez pas de rédiger une conclusion résumant l'ensemble des solutions obtenu dans chacun des cas.

Exercice d'application 5
Résoudre $mx^2+2x=1$ d'inconnue réelle x en fonction du paramètre $m\in\mathbb{R}$.

Exercice d'application 6
Résoudre $x^2=(1-m)(2x+1)$ d'inconnue réelle x en fonction du paramètre $m\in\mathbb{R}$.

1.3 Cas de plusieurs équations à plusieurs inconnues

Dans le cas de plusieurs équations à plusieurs inconnues, on peut raisonner par substitution : on utilise une équation pour exprimer une inconnue en fonction des autres, puis on reporte cette expression dans les autres équations. Les équations ainsi obtenues comportent donc une inconnue de moins. Il suffit ensuite de réitérer cette méthode jusqu'à se ramener à une équation n'ayant qu'une seule inconnue.
Important. Après avoir résolu l'équation finale à une seule inconnue, n'oubliez pas de reporter les valeurs solutions de cette inconnue dans les expressions utilisées afin de trouver les valeurs solutions des autres inconnues.

Exercice d'application 7
Trouver tous les couples de réels (a,b) tels que $a+b=6$ et $ab=4$.

Exercice d'application 8
Résoudre le système d'équations suivant d'inconnues réelles x, y et z :

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y=1+2xy+z(x+y) \\ (1+x^2)y^2+z^2+2yz+1=x^2+2(y+z) \end{cases}$$

2 Résoudre une inéquation

Comme pour les équations, on raisonne par équivalences pour résoudre des inéquations.

En plus des conseils pour résoudre les équations valables aussi pour les inéquations, on peut :

— utiliser la monotonie des fonctions usuelles ;
— utiliser un tableau de signes (après s'être ramené à une inéquation ayant un second membre nul) ;
— étudier une fonction.

Exercice d'application 9
Résoudre l'inéquation $|3x-2| = 2x+1$ d'inconnue réelle x.

Exercice d'application 10
Résoudre l'inéquation $\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2} < 3$ d'inconnue réelle x.

Exercice d'application 11
Résoudre l'inéquation $\ln(x+3) \geqslant \ln(2)+\ln(x+1)$ d'inconnue réelle x.

Exercice d'application 12
Résoudre l'inéquation $x^2+1 > \ln(x^2+1)$ d'inconnue réelle x.

Exercice d'application 13
Résoudre l'équation $\left\lfloor x+1+\sqrt{x+\frac{5}{16}}\right\rfloor = 1$ d'inconnue réelle x.

Exercice d'application 14
Résoudre l'inéquation $2m^2+(5-3x)m+x^2 > 3x-2$ d'inconnue réelle x en fonction du paramètre $m \in \mathbb{R}$.

Exercice d'application 15
Résoudre l'inéquation $\dfrac{2x+m}{x-3} \leqslant 1$ d'inconnue réelle x en fonction du paramètre $m \in \mathbb{R}$.