**Fiche méthodologique n° 21**

# Utiliser la structure d'espace vectoriel

Soient $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^\star$. On rappelle que $\mathbb{K}^n$ est muni d'une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel, c'est-à-dire de deux opérations, la multiplication des vecteurs de $\mathbb{K}^n$ par des scalaires de $\mathbb{K}$ et l'addition de vecteurs de $\mathbb{K}^n$, qui vérifient les propriétés usuelles.

## 1 Montrer qu'une partie de $\mathbb{K}^n$ est un sous-espace vec.

On dit qu'une partie $F \subset \mathbb{K}^n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ lorsque :

$$\overrightarrow{0} \in F \quad \text{et} \quad \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \in F^2,\ \lambda\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} \in F.$$

Dans ce cas, toute combinaison linéaire de vecteurs de $F$ appartient aussi à $F$ :

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \forall(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p,\ \forall(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \ldots, \overrightarrow{x_p}) \in F^p,\ \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \overrightarrow{x_k} \in F.$$

**Exercice d'application 1**
Montrer que $F = \{(a, b, c, d, e) \in \mathbb{R}^5 \,|\, a + 2b + 3c + 2d + e = 0 \text{ et } a + c + e = b + d\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^5$ puis déterminer une représentation paramétrique de $F$.

**Exercice d'application 2**
Montrer que $F = \{(w + iz, iw, z) \,|\, (w, z) \in \mathbb{C}^2\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^3$.

**Exercice d'application 3**
Pour quelles valeurs du paramètre $t \in \mathbb{R}$, l'ensemble suivant est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ ? Pour ces valeurs, déterminer une représentation cartésienne de $F_t$.

$$F_t = \{(r - s, s - t, t - r, r + s + t) \,|\, (r, s) \in \mathbb{R}^2\}.$$

## 2 Manipuler des combinaisons linéaires

Une combinaison linéaire de $p \in \mathbb{N}$ vecteurs $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \ldots, \overrightarrow{x_p}$ de $\mathbb{K}^n$ est un vecteur de la forme :

$$\sum_{k=1}^{p} \lambda_k \overrightarrow{x_k} = \lambda_1\overrightarrow{x_1} + \lambda_2\overrightarrow{x_2} + \cdots + \lambda_p\overrightarrow{x_p}$$

où $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ sont des scalaires. On dit que les vecteurs $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \ldots, \overrightarrow{x_p}$ sont liés ou linéairement dépendants lorsqu'il existe une combinaison linéaire de ces vecteurs égale au vecteur nul $\overrightarrow{0}$ avec des coefficients $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ non tous nuls :

$$\exists(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p \setminus \{(0, 0, \ldots, 0)\},\ \sum_{k=1}^{p} \lambda_k\overrightarrow{x_k} = \overrightarrow{0}.$$

*Remarque.* Si au moins un des vecteurs $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \ldots, \overrightarrow{x_p}$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire des autres, alors ces vecteurs sont liés. En effet, si on a par exemple :

$$\overrightarrow{x_i} = \lambda_1\overrightarrow{x_1} + \cdots + \lambda_{i-1}\overrightarrow{x_{i-1}} + \lambda_{i+1}\overrightarrow{x_{i+1}} + \cdots + \lambda_p\overrightarrow{x_p}$$

alors $\sum_{k=1}^{p} \lambda_k\overrightarrow{x_k} = \overrightarrow{0}$ en posant $\lambda_i = -1 \neq 0$.

**Exercice d'application 4**
Les vecteurs $\overrightarrow{z_1} = (1, i, 1, i)$, $\overrightarrow{z_2} = (i, 1, i, 1)$ et $\overrightarrow{z_3} = (1, 1, i, i)$ sont-ils liés ? Les vecteurs $\overrightarrow{w_1} = (1, i, i, 1)$ et $\overrightarrow{w_2} = (i, i, 1, 1)$ sont-ils des combinaisons linéaires de $\overrightarrow{z_1}$, $\overrightarrow{z_2}$ et $\overrightarrow{z_3}$ ?

## 3 Étudier un sous-espace vectoriel engendré

Le sous-espace vectoriel engendré par $p \in \mathbb{N}$ vecteurs $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \ldots, \overrightarrow{x_p}$ de $\mathbb{K}^n$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de ces vecteurs :

$$\mathrm{Vect}(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \ldots, \overrightarrow{x_p}) = \left\{\sum_{k=1}^{p} \lambda_k\overrightarrow{x_k} \mid (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p\right\}.$$

$\mathrm{Vect}(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \ldots, \overrightarrow{x_p})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$, c'est même le plus petit qui contient les vecteurs $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \ldots, \overrightarrow{x_p}$ (autrement dit : tout sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ qui contient ces vecteurs contient aussi tout l'ensemble $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \ldots, \overrightarrow{x_p})$).

Pour prouver qu'une partie $F \subset \mathbb{K}^n$ est engendrée par $p \in \mathbb{N}$ vecteurs $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \ldots, \overrightarrow{x_p}$ de $\mathbb{K}^n$, il suffit donc de démontrer que $F = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \ldots, \overrightarrow{x_p})$ par double inclusion. Pour montrer que $F \subset \mathrm{Vect}(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \ldots, \overrightarrow{x_p})$, il suffit de montrer que tout vecteur de $F$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire de $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \ldots, \overrightarrow{x_p}$. Pour montrer que $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \ldots, \overrightarrow{x_p}) \subset F$, il suffit de montrer que $F$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ qui contient les vecteurs $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \ldots, \overrightarrow{x_p}$.

**Exercice d'application 5**
Soient $\overrightarrow{u} = (1, 1, 1, 1)$, $\overrightarrow{v} = (1, 2, 3, 4)$ et $\overrightarrow{w} = (0, 1, 0, -1)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^4$. Déterminer une représentation cartésienne de $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$.

**Exercice d'application 6**
Montrer que $F = \{(a, b, c, d, e) \in \mathbb{R}^5 \,|\, a + 2b + 3c = 4d + 5e \text{ et } a - b - c = d - e\}$ est engendré par les vecteurs $\overrightarrow{u_1} = (1, 4, -3, 0, 0)$, $\overrightarrow{u_2} = (2, 1, 0, 1, 0)$ et $\overrightarrow{u_3} = (1, 2, 0, 0, 1)$.