Fiche méthodologique n° 23

Manipuler des familles de vecteurs

1 Montrer qu'une famille est génératrice

Soient $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_p})$ une famille de vecteurs de $\mathbb{K}^n$ et F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$. Pour montrer que $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_p})$ engendre F, il suffit de prouver que chaque vecteur $\overrightarrow{v_j}$ appartient à F (donc $\text{Vect}(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_p}) \subset F$) et que chaque vecteur $\overrightarrow{v}$ de F peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_p}$ (donc $F \subset \text{Vect}(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_p})$). Pour le deuxième point, il suffit de prouver que l'équation $\sum_{j=1}^{p} \lambda_j \overrightarrow{v_j} = \overrightarrow{v}$ d'inconnue $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ admet au moins une solution. En égalisant chaque composante des deux membres de cette équation, cela revient à montrer qu'un système linéaire à n équations et p inconnues admet au moins une solution.

Exercice d'application 1
Montrer que l'hyperplan de $\mathbb{R}^4$ d'équation cartésienne $x + y - z + 2t = 0$ est engendré par les vecteurs suivants : $\overrightarrow{u} = (1, 0, 1, 0)$, $\overrightarrow{v} = (1, 1, 0, -1)$ et $\overrightarrow{w} = (2, -2, 2, 1)$.

2 Déterminer une famille génératrice

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.

2.1 Dans le cas d'une représentation paramétrique

Si F est défini par un système d'équations paramétriques, c'est-à-dire :

$$F = \left\{ \overrightarrow{v} = \left(\sum_{j=1}^{p} a_{1,j}\lambda_j, \sum_{j=1}^{p} a_{2,j}\lambda_j, \dots, \sum_{j=1}^{p} a_{n,j}\lambda_j \right), (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p \right\}$$

avec $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors

$$F = \text{Vect}(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_p}) \quad \text{où} \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, p\},\ \overrightarrow{v_j} = (a_{1,j}, a_{2,j}, \dots, a_{n,j}) \in \mathbb{K}^n.$$

La famille de vecteurs $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_p})$ est donc une famille génératrice de F.

Exercice d'application 2
Déterminer une famille génératrice du sous-espace de $\mathbb{R}^3$ de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = t + s \\ y = 3s - 5t \\ z = 2s \end{cases}, \quad (s, t) \in \mathbb{R}^2.$$

2.2 Dans le cas d'une représentation cartésienne

Si F est défini par un système d'équations cartésiennes, c'est-à-dire :

$$F = \left\{ \overrightarrow{v} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mid \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} b_{1,i}x_i = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} b_{2,i}x_i = 0 \\ \dots \\ \sum_{i=1}^{n} b_{p,i}x_i = 0 \end{cases} \right\}$$

avec $B = (b_{j,i}) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, alors on résout le système linéaire homogène à p équations et n inconnues $x_1, x_2, \dots, x_n$ à l'aide de la méthode du pivot de Gauss pour exprimer chaque composante x_i de $\overrightarrow{v}$ en fonction des inconnues auxiliaires vues comme paramètres. On obtient alors une représentation paramétrique de F. Puis on applique la méthode de la section précédente.

Exercice d'application 3
Déterminer une famille génératrice du sous-espace de $\mathbb{R}^4$ de représentation cartésienne :

$$\begin{cases} x + y + 2z - t = 0 \\ 2x - y + 3t = 0 \end{cases}.$$

3 Montrer qu'une famille est libre

Soit $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_p})$ une famille de vecteurs de $\mathbb{K}^n$.

3.1 A l'aide d'un système linéaire

Pour montrer que $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_p})$ est libre, il suffit de prouver que l'équation $\sum_{j=1}^{p} \lambda_j \overrightarrow{v_j} = \overrightarrow{0}$ d'inconnue $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ admet pour unique solution $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p = 0$. En égalisant chaque composante des deux membres de cette équation, cela revient à montrer qu'un système linéaire homogène à n équations et p inconnues admet une unique solution.

Exercice d'application 4
Montrer que les vecteurs de $\mathbb{R}^4$ suivants forment une famille libre : $\overrightarrow{u} = (1, 1, 1, 1)$, $\overrightarrow{v} = (1, 0, 2, -1)$ et $\overrightarrow{w} = (2, -1, 3, 0)$.

3.2 A l'aide du rang

Pour montrer que $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_p})$ est libre, il suffit de prouver que son rang est égal à p. En utilisant que

$$\text{Rg}\left(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_p}\right) = \text{rang}\left(\text{Mat}_{\mathcal{E}}\left(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_p}\right)\right)$$

où $\text{Mat}_{\mathcal{E}}\left(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_p}\right)$ est la matrice des coordonnées de $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_p})$ dans la base canonique $\mathcal{E}$ de $\mathbb{K}^n$, cela revient à calculer le rang d'une matrice à l'aide de la méthode du pivot de Gauss.

Exercice d'application 5
Montrer que les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants forment une famille libre : $\overrightarrow{u} = (4,2,1)$, $\overrightarrow{v} = (1,0,1)$ et $\overrightarrow{w} = (0,-1,3)$.

4 Montrer qu'une famille est une base

Soient $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_p})$ une famille de vecteurs de $\mathbb{K}^n$ et F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$. Pour montrer que $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_p})$ est une base de F, il suffit de prouver d'une part que $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_p})$ engendre F et d'autre part que c'est une famille libre. De plus, si on connait la dimension de F alors il suffit de prouver seulement un des deux points précédents en vérifiant au préalable que $p = \dim(F)$ et que chaque vecteur $\overrightarrow{v_j}$ appartient à F. En pratique, il est souvent plus facile de prouver que la famille est libre plutôt qu'elle engendre F.

Exercice d'application 6
Montrer que les vecteurs suivants forment une base de l'hyperplan de $\mathbb{R}^3$ d'équation cartésienne $x+2y-4z=0$: $\overrightarrow{u} = (2,1,1)$ et $\overrightarrow{v} = (0,2,1)$.

5 Déterminer une base

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$. Pour déterminer une base de F, on commence par déterminer une famille $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_p})$ génératrice de F, puis on essaie de montrer que cette famille est libre. Si elle l'est, alors c'est une base.

Exercice d'application 7
Soit H un hyperplan de $\mathbb{K}^n$ d'équation cartésienne $\sum_{i=1}^n a_i x_i = 0$ où les scalaires $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ sont non tous nuls (on pourra par exemple supposer que $a_1 \neq 0$). Déterminer une base de H et en déduire la dimension de tout hyperplan de $\mathbb{K}^n$.

Si la famille $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_p})$ génératrice de F est liée, il suffit de déterminer des vecteurs de cette famille qui sont combinaisons linéaires des autres. En retirant ces vecteurs de la famille, on obtient une base de F.

5.1 A l'aide d'un système linaire

Si le système linéaire homogène à n équations et p inconnues obtenue à partir de l'équation $\sum_{j=1}^p \lambda_j \overrightarrow{v_j} = \overrightarrow{0}$ d'inconnue $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ admet une infinité de solutions, alors chaque vecteur $\overrightarrow{v_j}$ correspondant à une inconnue auxiliaire λ_j peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres (par exemple en posant $\lambda_j = 1$ et $\overrightarrow{v_j} = \sum_{k\neq j}(-\lambda_k)\overrightarrow{v_k}$). Les vecteurs correspondant aux inconnues principales forment une base de F.

Exercice d'application 8
Déterminer une base du sous-espace de $\mathbb{R}^4$ de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x_1 = r + 2s \\ x_2 = r + 3s - t \\ x_3 = r + 4s - 2t \\ x_4 = r + s + t \end{cases}, \ (r,s,t) \in \mathbb{R}^3.$$

5.2 A l'aide du rang

Si le rang de la famille $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_p})$ est strictement plus petit que p, alors les vecteurs correspondant aux colonnes ayant des pivots non nuls dans la matrice échelonnée obtenue à l'aide de la méthode du pivot de Gauss à partir de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_p})$ forment une base de F (où $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_p})$ est la matrice des coordonnées de $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_p})$ dans la base canonique $\mathcal{E}$ de $\mathbb{K}^n$).

Exercice d'application 9
Déterminer une base du sous-espace de $\mathbb{R}^5$ de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x_1 = q + 2r - s + t \\ x_2 = -q - r + 3s - t \\ x_3 = 2q + 3r - 4s + t \\ x_4 = r + 2s - t \\ x_5 = q + 3r + s - t \end{cases}, \ (q,r,s,t) \in \mathbb{R}^3$$

6 Calculer les coordonnées d'un vecteur dans une base

Soient $\overrightarrow{v}$ un vecteur d'un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{K}^n$ et $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_p})$ une base de F. Pour calculer les coordonnées de $\overrightarrow{v}$ dans la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_p})$, il suffit de résoudre l'équation $\sum_{j=1}^p \lambda_j \overrightarrow{e_j} = \overrightarrow{v}$ d'inconnue $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$. En égalisant chaque composante des deux membres de cette équation, cela revient à résoudre un système linéaire à n équations et p inconnues.

Exercice d'application 10
Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{v_1} = (1,0,1,0,1)$, $\overrightarrow{v_2} = (1,1,0,1,1)$ et $\overrightarrow{v_3} = (1,2,3,4,5)$ forment une base du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^5$ de représentation cartésienne :

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 4x_4 - 3x_5 = 0 \end{cases}$$

puis montrer que le vecteur $\overrightarrow{v} = (-5,0,-1,2,-1)$ appartient à ce sous-espace et calculer ses coordonnées dans la base $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3})$.