Fiche méthodologique n° 3

Trigonométrer

1 Résoudre une équation trigonométrique

Pour résoudre une équation trigonométrique, on commence par simplifier afin de se ramener aux équations trigonométriques simples : $\cos(\theta) = x$, $\sin(\theta) = y$ ou $\tan(\theta) = t$ (où θ est l'inconnue et x, y et z sont des réels fixés). Puis, on résout ces équations trigonométriques simples en s'aidant du cercle trigonométrique. Si x, y ou z n'est pas une valeur remarquable, on utilise les fonctions trigonométriques réciproques.
Conseil. Faites des schémas du cercle trigonométrique !

Exercice d'application 1
Résoudre l'équation $5\cos(\theta) = 2(1 + \cos^2(\theta))$ d'inconnue $\theta \in \mathbb{R}$.

Exercice d'application 2
Résoudre l'équation $5\sin(\theta) = 6\sin^2(\theta) + 1$ d'inconnue $\theta \in \mathbb{R}$.

Exercice d'application 3
Soit $m \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation $\dfrac{2\sin(\theta) - (m+1)\cos(\theta)}{\sin(\theta) - \cos(\theta)} = 1$ d'inconnue $\theta \in \mathbb{R}$.

Exercice d'application 4
Résoudre l'équation $4\cos(3x + 2) = 1$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

2 Simplifier $a\cos(\theta) + b\sin(\theta)$

Toute expression de la forme $a\cos(\theta)+b\sin(\theta)$ (où a et b sont deux réels non nuls) peut s'écrire plus simplement sous la forme $\boxed{r\cos(\theta + \varphi)}$ (où r et φ sont deux réels). Pour cela, il suffit d'utiliser la formule d'addition du cosinus et le théorème de Pythagore.
Important. Il faut se rappeler de la forme $r\cos(\theta + \varphi)$ pour savoir comment partir !

Exemple 1
Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Simplifier $\cos(\theta) + \sqrt{3}\sin(\theta)$.

Solution. On cherche deux réels r et φ tels que $\cos(\theta)+\sqrt{3}\sin(\theta) = r\cos(\theta+\varphi)$. D'après la formule d'addition du cosinus, on a :

$$r\cos(\theta + \varphi) = r\Big(\cos(\theta)\cos(\varphi) - \sin(\theta)\sin(\varphi)\Big) = \underbrace{r\cos(\varphi)}_{=1}\cos(\theta) + \underbrace{(-r\sin(\varphi))}_{=\sqrt{3}}\sin(\theta).$$

Il suffit donc que $r\cos(\varphi) = 1$ et $r\sin(\varphi) = -\sqrt{3}$. De plus, on a d'après le théorème de Pythagore :

$$\Big(r\cos(\varphi)\Big)^2 + \Big(r\sin(\varphi)\Big)^2 = r^2\Big(\underbrace{\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)}_{=1}\Big) = r^2.$$

On en déduit que $r^2 = 1^2 + (-\sqrt{3})^2 = 4$. Il suffit par exemple de poser $r = 2$. On cherche donc un réel φ tel que $\cos(\varphi) = 1/2$ et $\sin(\varphi) = -\sqrt{3}/2$. D'après le cercle trigonométrique, il suffit par exemple de poser $\varphi = -\pi/3$. Finalement, on obtient que $\cos(\theta) + \sqrt{3}\sin(\theta) = 2\cos(\theta - \frac{\pi}{3})$. □

Exercice d'application 5
Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Simplifier $3\cos(\theta) + 4\sin(\theta)$.

Exercice d'application 6
Résoudre l'équation $\cos(\theta) + \sin(\theta) = \frac{1}{2}$ d'inconnue $\theta \in \mathbb{R}$.

Exercice d'application 7
Résoudre l'équation $2\cos(\theta) + 3\sin(\theta) = 4$ d'inconnue $\theta \in \mathbb{R}$.

3 Utiliser les formules de trigonométrie

Les formules de trigonométrie (théorèmes de Pythagore et de Thalès, formules d'addition et de duplication, etc.) permettent de simplifier d'autres types d'expressions trigonométriques.

Exercice d'application 8
Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Écrire $\cos(5\theta)$ comme une expression polynomiale de $\cos(\theta)$.

Exercice d'application 9
Soit $\theta \in]-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}[$. Écrire $\tan(3\theta)$ en fonction de $\tan(\theta)$.

Exemple 2
Soit $\theta \in]-\pi, \pi[$. Écrire $\cos(\theta)$ en fonction de $t = \tan(\theta/2)$.

Solution. On a d'après la formule de duplication du cosinus :

$$\cos(\theta) = \cos\left(2\tfrac{\theta}{2}\right) = 2\cos^2\left(\tfrac{\theta}{2}\right) - 1.$$

De plus, on a d'après les théorèmes de Pythagore et de Thalès :

$$1 + \tan^2\left(\tfrac{\theta}{2}\right) = 1 + \frac{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$\text{donc} \quad \cos^2\left(\tfrac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{1 + \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{1}{1 + t^2}.$$

On en déduit que :

$$\cos(\theta) = \frac{2}{1+t^2} - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

$\square$

Exercice d'application 10
Soit $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Écrire $\sin(\theta)$ et $\tan(\theta)$ en fonction de $t = \tan(\theta/2)$.

Exemple 3
Calculer $\cos(\pi/8)$.

Solution. On a d'après la formule de duplication du cosinus :

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(2\frac{\pi}{8}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) - 1 = \quad \text{donc} \quad \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{2+\sqrt{2}}{4}.$$

On en déduit que $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ est égal à $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ ou égal à $-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$. Or $\frac{\pi}{8} \in]0, \frac{\pi}{2}[$ donc $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0$. Par conséquent $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$. $\square$

Exercice d'application 11
Calculer $\cos(\pi/12)$, $\sin(\pi/12)$ et $\tan(\pi/12)$.

4 Manipuler les fonctions trig. réciproques

Les fonctions trigonométriques réciproques servent principalement à résoudre des équations trigonométriques lorsque les valeurs ne sont pas remarquables. Mais leurs définitions permettent aussi de trouver d'autres formules de trigonométrie.

Exemple 4
Soit $x \in [-1, 1]$. Montrer que $\arccos(-x) = \pi - \arccos(x)$.

Solution. Par définition, $\arccos(-x)$ est l'unique angle $\theta \in [0, \pi]$ tel que $\cos(\theta) = -x$. On pose $\theta = \pi - \arccos(x)$. Vérifions que $\theta \in [0, \pi]$ et $\cos(\theta) = -x$. On sait que $\arccos(x) \in [0, \pi]$ (par définition de $\arccos(x)$), par conséquent :

$$0 \leqslant \arccos(x) \leqslant \pi \quad \text{donc} \quad 0 \geqslant -\arccos(x) \geqslant -\pi \quad \text{donc} \quad \pi \geqslant \underbrace{\pi - \arccos(x)}_{=\theta} \geqslant 0.$$

Donc $\theta \in [0, \pi]$. De plus, on a d'après la formule d'addition du cosinus :

$$\begin{aligned}
\cos(\theta) &= \cos\Big(\pi - \arccos(x)\Big) \\
&= \underbrace{\cos(\pi)}_{=-1}\cos(-\arccos(x)) - \underbrace{\sin(\pi)}_{=0}\sin(-\arccos(x)) \\
&= -\cos(-\arccos(x)) \\
&= -\cos(\arccos(x)) \quad \text{car la fonction cosinus est paire.}
\end{aligned}$$

Or $\cos(\arccos(x)) = x$ (par définition de $\arccos(x)$) donc $\cos(\theta) = -x$. Finalement, on a montré que $\theta \in [0, \pi]$ et $\cos(\theta) = -x$. D'après la définition de $\arccos(-x)$, on en déduit que $\theta = \arccos(-x)$. Par conséquent, $\pi - \arccos(x) = \arccos(-x)$. $\square$

Exercice d'application 12
Soit $x \in [-1, 1]$. Montrer que $\arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$.