Fiche méthodologique n° 4

Manipuler des nombres complexes

1 Simplifier une expression de complexes

Les calculs algébriques avec des nombres complexes se mènent comme ceux avec des nombres réels : mêmes opérations et mêmes propriétés.

Quelques conseils :

- simplifier à l'aide de $\boxed{i^2 = -1}$ dès que possible ;
- regrouper les parties réelles entre elles et les parties imaginaires entre elles ;
- lorsqu'un complexe est au dénominateur d'une fraction, multiplier le numérateur et le dénominateur par le complexe conjugué afin de simplifier.

Exercice d'application 1
Calculer $P(-4+3i)$ où P est la fonction polynomiale définie par $P : x \mapsto x^3+6x^2+9x-8$.

Exercice d'application 2
Simplifier $\dfrac{(8-i)^2}{4+7i} - \dfrac{(4+7i)^2}{8-i}$.

Exercice d'application 3
Soit z un complexe. Montrer que les assertions suivantes sont deux à deux équivalentes :

$$«|z| < 1», \ «\mathrm{Re}\left(\frac{z+1}{z-1}\right) < 0», \ «z^2 + \overline{z}^2 > \left(z + \overline{z}\right)^2 - 2» \text{ et } «\mathrm{Im}\left(\frac{z+i}{1+iz}\right) > 0».$$

2 Déterminer un argument d'un complexe

Si un nombre complexe $z = a + ib$ est non nul (il suffit que $a \neq 0$ ou $b \neq 0$), on peut l'écrire sous forme exponentielle : $z = re^{i\theta}$ où $r = |z| = \sqrt{a^2+b^2}$ est le module et θ est un argument.

Attention. Il existe une infinité d'arguments qui sont tous de la forme $\theta + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$ est un entier quelconque. Il suffit d'en trouver un pour écrire z sous forme exponentielle.

2.1 À l'aide d'équations trigonométriques

La forme trigonométrique de $z = a+ib$ est $z = re^{i\theta} = r\cos(\theta)+ir\sin(\theta)$. En identifiant les parties réelle et imaginaire, il suffit donc de résoudre les équations trigonométriques $a = r\cos(\theta)$ et $b = r\sin(\theta)$ pour déterminer θ.

Conseil. Chacune des deux équations trigonométriques a deux infinités de solutions (qu'on obtient à l'aide du cercle trigonométrique). Le signe de la deuxième équation permet de déterminer dans quelle infinité de solutions appartient θ.

Exemple 1
Déterminer un argument du nombre complexe $z = 3 + 4i$.

Solution. On a $|z| = \sqrt{3^2+4^2} = 5$. On cherche un argument θ de z. Alors :

$$3 + 4i = 5e^{i\theta} = 5\cos(\theta) + 5\sin(\theta)i \quad \text{donc} \quad \begin{cases} \cos(\theta) &= 3/5 \\ \sin(\theta) &= 4/5 \end{cases}.$$

D'après le cercle trigonométrique, on a :

$$\cos(\theta) = \tfrac{3}{5} \iff \left(\exists k \in \mathbb{Z},\ \theta = \arccos\left(\tfrac{3}{5}\right) + 2k\pi \text{ ou } \theta = -\arccos\left(\tfrac{3}{5}\right) + 2k\pi\right).$$

Or $\sin(\theta) = \frac{4}{5} > 0$ donc $-\arccos(\frac{3}{5})$ n'est pas un argument de z mais $\arccos(\frac{3}{5})$ est un argument de z. Finalement, on a obtenu la forme exponentielle $3+4i = 5e^{i\arccos(3/5)}$. □

Exercice d'application 4
Écrire le nombre complexe $z = \dfrac{17-7i}{1+i}$ sous forme exponentielle .

Exercice d'application 5
Simplifier $\left(5\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{5}-i(1+\sqrt{15})}{\sqrt{5}+i}\right)^{42}$.

2.2 À l'aide d'une factorisation par l'angle moitié

Pour simplifier une expression de la forme $e^{i\alpha} + e^{i\beta}$ (où $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$), on peut «factoriser par l'angle moitié», c'est-à-dire par $e^{i(\alpha+\beta)/2}$ puis utiliser les formules d'Euler :

$$\boxed{\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}} \quad \text{et} \quad \boxed{\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}}.$$

Attention. Avec cette méthode, on aboutit parfois à une forme factorisée avec un «module» négatif (ce qui est absurde). Il suffit alors d'utiliser $-1 = e^{i\pi}$ pour obtenir la forme exponentielle.

Conseil. Cette méthode fonctionne aussi avec une expression de la forme $e^{i\alpha} - e^{i\beta}$.

Exemple 2
Déterminer un argument du nombre complexe $z = e^{i\pi/5} + e^{-i\pi/7}$.

Solution. On factorise par l'angle moitié $\left(\frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{7}\right)/2 = \frac{\pi}{35}$:

$$z = e^{i\pi/5} + e^{-i\pi/7} = e^{i\pi/35}\left(e^{i(\pi/5-\pi/35)} + e^{i(-\pi/7-\pi/35)}\right) = e^{i\pi/35}\left(e^{i6\pi/35} + e^{-i6\pi/35}\right)$$

$$= 2e^{i\pi/35}\left(\frac{e^{i6\pi/35}+e^{-i6\pi/35}}{2}\right) = 2e^{i\pi/35}\cos\left(\tfrac{6\pi}{35}\right) = \underbrace{2\cos\left(\tfrac{6\pi}{35}\right)}_{=|z|\ ?} e^{i\pi/35}.$$

Puisque $\frac{6\pi}{35} \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on a $2\cos\left(\frac{6\pi}{35}\right) > 0$ donc on a bien trouvé la forme exponentielle de z. Par conséquent, $\pi/35$ est un argument de z. □

Exercice d'application 6
Écrire le nombre complexe $z = e^{i7\pi/5} + e^{i\pi/5}$ sous forme exponentielle.

Exercice d'application 7
Soit $\theta \in]0, 2\pi[$. Simplifier l'expression $\dfrac{e^{i42\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1}$.

3 Trigonométrer à l'aide des complexes

Les nombres complexes sont très utiles pour simplifier des expressions trigonométriques.
Attention. Même si on utilise des nombres complexes dans les calculs, l'expression finale simplifiée ne doit plus contenir de nombres complexes lorsque l'expression trigonométrique initiale est réelle.

3.1 Linéariser $\cos^p(\theta)\sin^q(\theta)$

Pour «linéariser» une expression de la forme $\cos^p(\theta)\sin^q(\theta)$ (où p et q sont deux entiers naturels), c'est-à-dire pour l'écrire comme une somme sans exposants de cosinus et de sinus, il suffit d'utiliser les formules d'Euler.

Exemple 3
Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Linéariser $\cos(\theta)\sin^2(\theta)$.

Solution. On a d'après les formules d'Euler :

$$\begin{aligned}
\cos(\theta)\sin^2(\theta) &= \left(\tfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)\left(\tfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^2 \\
&= -\frac{1}{8}\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)\left(e^{i2\theta}-2+e^{-i2\theta}\right) \\
&= -\frac{1}{8}\left(e^{i3\theta}-2e^{i\theta}+e^{-i\theta}+e^{i\theta}-2e^{-i\theta}+e^{-i3\theta}\right) \\
&= -\frac{1}{8}\left(\left(e^{i3\theta}+e^{-i3\theta}\right)-\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)\right) \\
&= -\frac{1}{8}\Big(2\cos(3\theta)-2\cos(\theta)\Big) \\
&= -\frac{1}{4}\cos(3\theta)+\frac{1}{4}\cos(\theta).
\end{aligned}$$

□

Conseil. On peut vérifier ses résultats à l'aide de la parité des fonctions trigonométriques. Par exemple, dans l'exemple précédent, la fonction $\theta \mapsto \cos(\theta)\sin^2(\theta)$ est paire (car $\cos(-\theta)\sin^2(-\theta) = \cos(\theta)(-\sin(\theta))^2 = \cos(\theta)\sin^2(\theta)$). L'expression linéarisée doit donc aussi être paire (ce qui est bien le cas car la fonction cosinus est paire).

Exercice d'application 8
Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Linéariser $\cos^2(\theta)\sin(\theta)$.

Exercice d'application 9
Déterminer une primitive de la fonction $f : \theta \mapsto \sin^3(\theta)$.

3.2 Développer un produit de fonctions trigonométriques

Comme pour la linéarisation, pour développer un produit de fonctions trigonométriques, il suffit d'utiliser les formules d'Euler.

Exercice d'application 10
Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Écrire $\cos(\alpha)\cos(\beta)$ et $\sin(\alpha)\sin(\beta)$ comme une somme de cosinus et de sinus.

Exercice d'application 11
Déterminer une primitive de la fonction $f : x \mapsto \cos(2x+1)\sin(3x-1)$.

3.3 Factoriser une somme de fonctions trigonométriques

Inversement, pour factoriser une somme de fonctions trigonométriques, on peut factoriser par l'angle moitié.

Exemple 4
Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Factoriser $\cos(\alpha) + \cos(\beta)$.

Solution. On sait que $\cos(\alpha) + \cos(\beta)$ est la partie réelle de $e^{i\alpha} + e^{i\beta}$. Or on a en factorisant par l'angle moitié :

$$\begin{aligned}
e^{i\alpha}+e^{i\beta} &= e^{i(\alpha+\beta)/2}\Big(e^{i(\alpha-(\alpha+\beta)/2)}+e^{i(\beta-(\alpha+\beta)/2)}\Big) \\
&= e^{i(\alpha+\beta)/2}\Big(e^{i(\alpha-\beta)/2}+\underbrace{e^{i(\beta-\alpha)/2}}_{=e^{-i(\alpha-\beta)/2}}\Big) \\
&= e^{i(\alpha+\beta)/2}2\cos\left(\tfrac{\alpha-\beta}{2}\right) \quad \text{d'après les formules d'Euler.}
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha)+\cos(\beta) &= \mathrm{Re}\Big(e^{i\alpha}+e^{i\beta}\Big) = \mathrm{Re}\Big(2\cos\left(\tfrac{\alpha-\beta}{2}\right)e^{i(\alpha+\beta)/2}\Big) \\
&= \mathrm{Re}\Big(2\cos\left(\tfrac{\alpha-\beta}{2}\right)\left(\cos\left(\tfrac{\alpha+\beta}{2}\right)+i\sin\left(\tfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\right)\Big) \\
&= \mathrm{Re}\Big(2\cos\left(\tfrac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\tfrac{\alpha+\beta}{2}\right)+i2\cos\left(\tfrac{\alpha-\beta}{2}\right)\sin\left(\tfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\Big) \\
&= 2\cos\left(\tfrac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\tfrac{\alpha+\beta}{2}\right).
\end{aligned}$$

□

Exercice d'application 12
Résoudre l'équation $\sin(7\theta) = \sin(5\theta)$ d'inconnue $\theta \in \mathbb{R}$.

4 Résoudre une équation d'inconnue complexe

4.1 Équation du second degré à coeff. réels

La résolution de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ et de coefficients $a \neq 0$, b et c réels dépend du signe du discriminant $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$:

— si $\Delta > 0$ alors l'équation admet deux solutions réelles (distinctes) :

$$\boxed{z = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ou} \quad z = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}};$$

— si $\Delta = 0$ alors l'équation admet une seule solution réelle (double) :

$$\boxed{z = \frac{-b}{2a}};$$

— si $\Delta < 0$ alors l'équation admet deux solutions complexes conjuguées (distinctes) :

$$\boxed{z = \frac{-b+i\sqrt{|\Delta|}}{2a} \quad \text{ou} \quad z = \frac{-b-i\sqrt{|\Delta|}}{2a}}.$$

Exercice d'application 13
Résoudre l'équation $z^2 - 2mz + m = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ en fonction de $m \in \mathbb{R}$.

Conseil. On peut vérifier ses résultats à l'aide de la propriété suivante :

$$\boxed{\Big(z_1 \text{ et } z_2 \text{ sont les solutions de } z^2 - Sz + P = 0\Big) \iff \Big(z_1 + z_2 = S \text{ et } z_1 \times z_2 = P\Big)}$$

Exercice d'application 14
Trouver tous les couples de complexes (z, w) tels que $z + w = 4$ et $zw = 5$.

Exercice d'application 15
Trouver une équation du second degré à coefficients réels dont $3 - 2i$ est l'une des solutions.

4.2 Équation $z^2 = a$ avec $a \in \mathbb{C}$

Pour résoudre l'équation $z^2 = a$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ et de coefficient $a \in \mathbb{C}$, il suffit d'utiliser la forme exponentielle.
Attention. Vérifiez toujours qu'un nombre complexe est non nul avant de l'écrire sous forme exponentielle. Si besoin, raisonnez par disjonction de cas.
Attention. Puisqu'il existe une infinité d'arguments pour chaque nombre complexe non nul, on ne peut pas identifier les arguments de deux nombres complexes égaux (contrairement au module et aux parties réelle et imaginaire).

Exemple 5
Résoudre l'équation $z^2 = 3 + 4i$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Solution. D'après l'exemple 1, on a la forme exponentielle $3+4i = 5e^{i\arccos(3/5)}$. D'autre part, $z = 0$ n'est pas solution de l'équation, donc on peut écrire l'inconnue $z \neq 0$ sous forme exponentielle : $z = re^{i\theta}$ où $r = |z| > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ est un argument de z. Ainsi :

$$\begin{aligned} z^2 = 3+4i &\iff \left(re^{i\theta}\right)^2 = 5e^{i\arccos(3/5)} \\ &\iff r^2 e^{i2\theta} = 5e^{i\arccos(3/5)} \\ &\iff \left(r^2 = 5 \quad \text{et} \quad \exists k \in \mathbb{Z},\ 2\theta = \arccos\left(\tfrac{3}{5}\right) + 2k\pi\right) \\ &\iff \left(r = \sqrt{5} \quad \text{et} \quad \exists k \in \mathbb{Z},\ \theta = \tfrac{1}{2}\arccos\left(\tfrac{3}{5}\right) + k\pi\right). \end{aligned}$$

D'après le cercle trigonométrique, on obtient deux solutions distinctes :

$$z = \sqrt{5}e^{i\arccos(3/5)/2} \quad \text{ou} \quad z = \sqrt{5}e^{i(\arccos(3/5)/2+\pi)} = -\sqrt{5}e^{i\arccos(3/5)/2}.$$

□

Exercice d'application 16
Écrire les solutions de l'équation $\dfrac{z}{7+i} = \dfrac{1+7i}{z}$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ sous forme algébrique.

Exercice d'application 17
Écrire les solutions de l'équation $z^8 + z^4 + 1 = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ sous forme algébrique.