Fiche méthodologique n° 5

Étudier des suites réelles

1 Calculer le terme général d'une suite usuelle

Si une suite réelle (u_n) est définie par récurrence, on peut calculer tous ses termes les uns après les autres à partir d'un terme initial u_{n_0} donné. Mais cette méthode peut être très longue pour calculer un terme de rang beaucoup plus grand que le rang initial n_0.

Calculer le terme général de (u_n) consiste à exprimer directement u_n en fonction du rang n afin de surmonter ce problème.

Conseil. La relation de récurrence définissant une suite permet surtout de raisonner par récurrence. Dès qu'on connaît une propriété de la suite à démontrer (par exemple une majoration, une minoration ou sa monotonie), on peut la prouver par récurrence.

1.1 Suite arithmétique

Une suite (u_n) est arithmétique lorsqu'elle vérifie une relation de récurrence du type :

$$\forall n \geqslant n_0, \quad \boxed{u_{n+1} = u_n + r}$$

où $r \in \mathbb{R}$ est appelée la raison arithmétique de la suite. Son terme général est égal à :

$$\forall n \geqslant n_0, \quad \boxed{u_n = u_{n_0} + (n - n_0)r}.$$

Exercice d'application 1
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le n-ième entier impair positif.

Exercice d'application 2
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique telle que $u_{13} = 13^2$ et $u_{29} = 29^2$. Calculer le terme général de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1.2 Suite géométrique

Une suite (u_n) est géométrique lorsqu'elle vérifie une relation de récurrence du type :

$$\forall n \geqslant n_0, \quad \boxed{u_{n+1} = qu_n}$$

où $q \in \mathbb{R}$ est appelée la raison géométrique de la suite. Son terme général est égal à :

$$\forall n \geqslant n_0, \quad \boxed{u_n = u_{n_0} q^{n-n_0}}.$$

Exercice d'application 3
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 3$ et $\forall n \geqslant 0,\ u_{n+1} = u_n^2$. Justifier que les termes de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont strictement positifs puis calculer son terme général en considérant la suite auxiliaire $(v_n = \ln(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice d'application 4
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $u_0 = 3$ et $u_{n+1} - u_n \geqslant u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que les termes de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont supérieurs à ceux d'une suite géométrique $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont on calculera le terme général.

1.3 Suite arithmético-géométrique

Une suite (u_n) est arithmético-géométrique lorsqu'elle vérifie une relation de récurrence du type :

$$\forall n \geqslant n_0, \quad \boxed{u_{n+1} = qu_n + r}$$

où $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $r \in \mathbb{R}$ sont appelées les raisons de la suite. Pour calculer son terme général, on commence par chercher une suite constante vérifiant la même relation de récurrence, c'est-à-dire par résoudre l'équation $\alpha = q\alpha + r$ d'inconnue $\alpha \in \mathbb{R}$. Puis on remarque que la suite auxiliaire $(v_n = u_n - \alpha)$ est géométrique (de raison q) et on peut donc calculer son terme général. Enfin, on en déduit le terme général de $(u_n = v_n + \alpha)$.

Exercice d'application 5
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite arithmético-géométrique telle que $u_1 = 1$, $u_2 = 4$ et $u_3 = 9$. Calculer le terme général de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice d'application 6
Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \geqslant 0,\ u_{n+1} - u_n = \lambda u_n + 1$. Calculer le terme général de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction des valeurs de λ.

1.4 Suite récurrente linéaire d'ordre 2

Une suite (u_n) est récurrente linéaire d'ordre 2 lorsqu'elle vérifie une relation de récurrence double du type :

$$\forall n \geqslant n_0, \quad \boxed{u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n}$$

où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Attention. Pour qu'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 soit bien définie (c'est-à-dire pour pouvoir calculer tous ses termes), il est nécessaire de connaître deux termes initiaux.

Pour calculer son terme général, on commence par résoudre l'équation caractéristique associée d'inconnue $q \in \mathbb{C}$:

$$\boxed{q^2 = aq + b}.$$

On reconnaît une équation du second degré à coefficients réels. Il y a alors trois cas selon le signe du discriminant Δ.

— $\underline{\text{Si } \Delta > 0}$: l'équation caractéristique admet deux solutions réelles (distinctes) qu'on note q_1 et q_2. Alors il existe deux constantes $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ telles que :

$$\forall n \geqslant n_0, \quad \boxed{u_n = \lambda_1 q_1^{n-n_0} + \lambda_2 q_2^{n-n_0}}.$$

— $\underline{\text{Si } \Delta = 0}$: l'équation caractéristique admet une seule solution réelle (double) qu'on note q_0. Alors il existe deux constantes $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ telles que :

$$\forall n \geqslant n_0, \quad \boxed{u_n = \Big(\lambda + \mu(n-n_0)\Big) q_0^{n-n_0}}.$$

— $\underline{\text{Si } \Delta < 0}$: l'équation caractéristique admet deux solutions complexes conjuguées (distinctes) qu'on note $\rho e^{i\theta}$ et $\rho e^{-i\theta}$. Alors il existe deux constantes $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ telles que :

$$\forall n \geqslant n_0, \quad \boxed{u_n = \rho^{n-n_0}\Big(A\cos\big((n-n_0)\theta\big) + B\sin\big((n-n_0)\theta\big)\Big)}.$$

Conseil. Pour déterminer le couple de constantes (λ_1, λ_2), (λ, μ) ou (A, B) selon le cas considéré, il suffit d'utiliser deux termes initiaux de la suite puis de résoudre un système de deux équations à deux inconnues.

Exercice d'application 7
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = u_1 = 1$ et $\forall n \geqslant 0,\ u_{n+2} = 6(u_{n+1} - 2u_n)$. Calculer le terme général de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice d'application 8
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite telle que $u_1 = 4$, $u_3 = 2$ et chacun de ses autres termes est la moyenne du terme suivant et du terme précédent (ainsi, $u_2 = (u_3 + u_1)/2 = 3$). Calculer le terme général de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice d'application 9
Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites définies par $a_0 = 1$, $b_0 = 0$ et :

$$\forall n \geqslant 0, \quad \begin{cases} a_{n+1} = 4a_n - b_n \\ b_{n+1} = 2a_n + b_n \end{cases}.$$

Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont récurrentes linéaires d'ordre 2 puis calculer leur terme général.

Exercice d'application 10
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite récurrente linéaire d'ordre 2 telle que $u_1 = -4$, $u_2 = 5$, $u_3 = 10$ et $u_4 = 7$. Calculer le terme général de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

2 Étudier une suite définie par récurrence

Pour étudier une suite réelle (u_n) non usuelle vérifiant une relation de récurrence du type :

$$\forall n \geqslant n_0, \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

où f est une fonction réelle, le principe général est de conjecturer des propriétés de la suite (par exemple une majoration, une minoration et sa monotonie) puis de démontrer ces propriétés par récurrence.

Pour établir ces conjectures, il suffit de calculer un nombre suffisant de premiers termes. Mais les calculs peuvent être longs et la moindre erreur va se répercuter dans les termes suivants.

Une autre méthode plus efficace consiste à représenter graphiquement les premiers termes de (u_n). Pour cela, on procède ainsi :

— on commence par étudier les variations de f (donc le signe de sa dérivée f') ;
— puis on étudie le signe de la fonction $x \mapsto f(x) - x$ afin de connaître la position relative de la courbe représentative de f par rapport à la droite d'équation $y = x$;
— on trace sur un même graphique la courbe représentative de la fonction f et la droite d'équation $y = x$ à l'aide des éléments précédents ;
— on place le point de coordonnées $(u_{n_0}, 0)$ sur le graphique ;
— en se déplaçant verticalement, on obtient à l'intersection de la courbe représentative de f le point de coordonnées $(u_{n_0}, f(u_{n_0})) = (u_{n_0}, u_{n_0+1})$;
— en se déplaçant horizontalement, on obtient à l'intersection de la droite d'équation $y = x$ le point de coordonnées (u_{n_0+1}, u_{n_0+1}) ;
— en se déplaçant verticalement, on obtient à l'intersection de la courbe représentative de f le point de coordonnées $(u_{n_0+1}, f(u_{n_0+1})) = (u_{n_0+1}, u_{n_0+2})$;
— en se déplaçant horizontalement, on obtient à l'intersection de la droite d'équation $y = x$ le point de coordonnées (u_{n_0+2}, u_{n_0+2}) ;
— en se déplaçant verticalement, on obtient à l'intersection de la courbe représentative de f le point de coordonnées $(u_{n_0+2}, f(u_{n_0+2})) = (u_{n_0+2}, u_{n_0+3})$;
— etc.

Ainsi, les abscisses des points obtenus sont égaux aux premiers terrmes de la suite : u_{n_0}, u_{n_0+1}, u_{n_0+2}, u_{n_0+3}, u_{n_0+4}, etc. Une observation graphique de ces abscisses permet de formuler des conjectures sur (u_n) qu'on démontre ensuite par récurrence.
Attention. La monotonie de la suite (u_n) n'est en général pas la même que la monotonie de la fonction f !
Conseil. Si f n'est pas définie sur $\mathbb{R}$, il faut démontrer (par récurrence) que chaque terme de (u_n) appartient à l'ensemble de définition de f pour justifier que la suite (u_n) est bien définie (c'est-à-dire qu'on peut calculer tous ses termes à l'aide de la relation de récurrence).

Exemple 1
Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \geqslant 0,\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n+3}$.

Solution. On pose la fonction $f : x \mapsto \sqrt{2x+3}$ qui est définie sur $[-\frac{3}{2}, +\infty[$ et dérivable sur $]-\frac{3}{2}, +\infty[$. On a :

$$\forall x > -\frac{3}{2}, \quad f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x+3}} = \frac{1}{\sqrt{2x+3}} > 0.$$

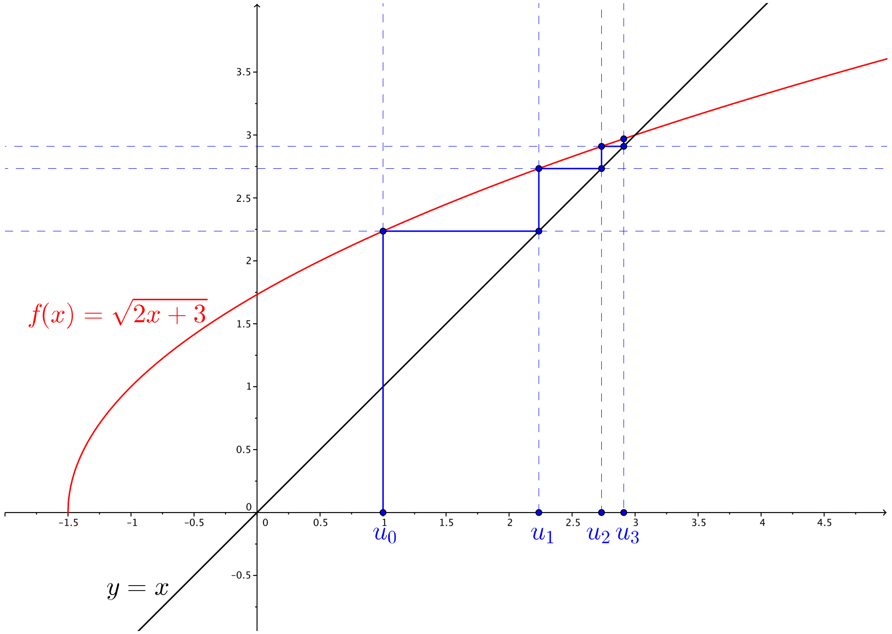
Donc f est strictement croissante sur $[-\frac{3}{2}, +\infty[$. De plus :

$$f(x) - x \geqslant 0 \iff \sqrt{2x+3} \geqslant x.$$

On raisonne par disjonction de cas.
<u>1^er^ cas</u> : $x \in [-\frac{3}{2}, 0[$, alors $x < 0 \leqslant \sqrt{2x+3}$ donc $f(x) - x \geqslant 0$.
<u>2^e^ cas</u> : $x \in [0, +\infty[$, alors on peut appliquer la fonction carrée qui est strictement croissante sur $[0, +\infty[$:

$$f(x) - x \geqslant 0 \iff 2x+3 \geqslant x^2 \iff \underbrace{x^2 - 2x - 3}_{=(x+1)(x-3)} \leqslant 0 \iff x \in \underbrace{[-1,3] \cap [0,+\infty[}_{=[0,3]}.$$

<u>Conclusion</u>. La courbe représentative de f est au-dessus de la droite d'équation $y = x$ sur $[-\frac{3}{2}, 0[\cup [0,3] = [-\frac{3}{2}, 3]$, et donc en-dessous sur $[3, +\infty[$. On peut maintenant représenter graphiquement les premiers termes de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (voir ci-dessous).



On conjecture que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 3, minorée par $u_0 = 1$ et strictement croissante. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose l'assertion $P(n)$: «$1 \leqslant u_n < u_{n+1} < 3$» et on raisonne par récurrence.
<u>Initialisation</u>. On a $u_0 = 1$ et $u_1 = f(u_0) = \sqrt{2 \times 1 + 3} = \sqrt{5}$. Or $2 < \sqrt{5} < 3$ (car $4 < 5 < 9$ et la fonction racine carrée est strictement croissante) donc $1 \leqslant u_0 < u_1 < 3$. On a bien montré que $P(0)$ est vraie.
<u>Hérédité</u>. On fixe $n \in \mathbb{N}$ et on suppose que $P(n)$ est vraie, donc que $1 \leqslant u_n < u_{n+1} < 3$. Puisque f est strictement croissante, on a :

$$\underbrace{f(1)}_{=\sqrt{5}>1} \leqslant \underbrace{f(u_n)}_{=u_{n+1}} < \underbrace{f(u_{n+1})}_{=u_{n+2}} < \underbrace{f(3)}_{=\sqrt{2\times3+3}=3} \quad \text{donc} \quad \underbrace{1 \leqslant u_{n+1} < u_{n+2} < 3}_{P(n+1)}.$$

On a bien montré que $P(n) \implies P(n+1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
<u>Conclusion</u>. D'après le principe de récurrence, on en déduit que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par conséquent, on a démontré que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 3, minorée par 1 et strictement croissante. En particulier, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bien définie car $2u_n + 3 \geqslant 0$ (autrement dit $u_n \in [-\frac{3}{2}, +\infty[$ puisque $u_n \geqslant 1$) pour tout $n \in \mathbb{N}$. □

Exercice d'application 11

Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_1 = 2$ et $\forall n \geqslant 1,\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + 3}{4}$.

Exercice d'application 12

Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \geqslant 0,\ u_{n+1} = \dfrac{1}{1+u_n}$.