Fiche méthodologique n° 7

Étudier des applications

Soit $f : E \to F$ une application entre deux ensembles E et F.

1 Étudier l'injectivité et la surjectivité

1.1 À l'aide d'une équation

Pour étudier l'injectivité et la surjectivité de $f : E \to F$, il suffit d'étudier l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in E$ où $y \in F$ est un paramètre fixé.

— Si l'équation $f(x) = y$ admet au plus une solution pour tout $y \in F$ alors $f : E \to F$ est injective.

— Si l'équation $f(x) = y$ admet au moins une solution pour tout $y \in F$ alors $f : E \to F$ est surjective.

Réciproquement :

— S'il existe un exemple de $y \in F$ tel que $f(x) = y$ admet au moins deux solutions alors $f : E \to F$ n'est pas injective.

— S'il existe un exemple de $y \in F$ tel que $f(x) = y$ n'admet pas de solutions alors $f : E \to F$ n'est pas surjective.

Conseil. Cette méthode est efficace mais s'utilise seulement si on sait résoudre l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in E$.

Remarque. Si l'équation $f(x) = y$ admet exactement une solution pour tout $y \in F$ alors $f : E \to F$ est bijective (et réciproquement).

Exercice d'application 1
Étudier l'application $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, t \mapsto (t, -t)$.

Exercice d'application 2
Étudier l'application $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, (a, b) \mapsto (a + b, a - b, b - a)$.

Exercice d'application 3
Étudier l'application $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto z - \overline{z}$.

Exercice d'application 4
Étudier l'application $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*, z \mapsto e^z$.

1.2 À l'aide de la définition

Dans le cas où on ne sait pas résoudre l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in E$, on peut réutiliser les définitions.

— $f : E \to F$ est injective lorsque :

$$\boxed{\forall (x_1, x_2) \in E^2,\ f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2}.$$

On commence donc par fixer deux éléments quelconques de E, on suppose qu'ils ont même image par f puis on démontre que ces deux éléments sont égaux.

— $f : E \to F$ est surjective lorsque :

$$\boxed{\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ f(x) = y}.$$

On commence donc par fixer un élément quelconque de F puis on cherche (par analyse-synthèse) un antécédent dans E de cet élément par f

Réciproquement :

— Pour montrer que $f : E \to F$ n'est pas injective, il suffit de trouver deux éléments distincts de E qui ont même image par f.

— Pour montrer que $f : E \to F$ n'est pas surjective, il suffit de trouver un élément de F qui n'admet aucun antécédent dans E par f.

Exercice d'application 5
Étudier l'application $\Phi : \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}, g \mapsto g(0)$.

Exercice d'application 6
Étudier l'application $\Psi : \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, g \mapsto (\Psi(g) : x \mapsto g(2x))$.

Exercice d'application 7
Étudier l'application qui à une suite réelle $(u_n)_{n\geqslant 0}$ associe la suite réelle $(U_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $U_0 = 0$ et $\forall n \geqslant 1,\ U_n = u_{n-1}$.

Exercice d'application 8
Soit A une partie de E distincte de E, c'est-à-dire $A \subset E$ et $\exists e \in E,\ e \notin A$. Étudier l'application $\chi : \mathscr{P}(E) \to \mathscr{P}(E), B \mapsto A \cap B$.

1.3 Cas d'une fonction réelle d'une variable

Si f est une fonction réelle définie sur $D \subset \mathbb{R}$, il suffit de dresser le tableau des variations de f et d'en déduire l'image directe $f(D)$.

— Si f est strictement monotone sur D alors $f : D \to \mathbb{R}$ est injective.

— L'application $f : D \mapsto f(D)$ est surjective.

Ces deux résultats sont des cas particuliers du théorème de la bijection :

Si f est une fonction réelle <u>continue</u> et <u>strictement monotone</u> sur un <u>intervalle</u> I alors l'application $f : I \to f(I)$ est bijective et l'image directe $f(I)$ est un intervalle dont les bornes sont les limites de f aux bornes de I.

Exercice d'application 9
Étudier l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^3 + 6x^2 + 9x + 5$.

Exercice d'application 10
Montrer que la fonction $f : x \mapsto e^x + e^{-x}$ réalise une surjection de son ensemble de définition vers un ensemble à déterminer, et étudier son injectivité.

Exercice d'application 11
Montrer que la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2+1} - x$ réalise une bijection de son ensemble de définition vers un ensemble à déterminer.

Exercice d'application 12
Étudier l'application $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \setminus \{1\}, x \mapsto (x+2)/(x-1)$.

2 Déterminer une bijection réciproque

2.1 À l'aide d'une équation

Si $f : E \to F$ est bijective, sa bijection réciproque est l'application $f^{-1} : F \to E$ qui associe à chaque élément de $y \in F$ son unique antécédent dans E par f, c'est-à-dire la seule solution de l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in E$.

Exercice d'application 13
Montrer que l'application $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (3x + 2y, 4x + 3y)$ est bijective et déterminer sa bijection réciproque.

Exercice d'application 14
Montrer que l'application $h : \mathbb{C} \setminus \{1\} \to \mathbb{C} \setminus \{i\}, z \mapsto (1 + iz)/(z - 1)$ est bijective et déterminer sa bijection réciproque.

Exercice d'application 15
Soit $\alpha \in \mathbb{R}^\star$. Montrer que l'application $f : \mathbb{R}_+^\star \to \mathbb{R}_+^\star, x \mapsto x^\alpha$ est bijective et déterminer sa bijection réciproque.

2.2 En tant qu'application inverse

Dans le cas où on ne sait pas résoudre l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in E$, on peut chercher (par analyse-synthèse) l'application inverse, c'est-à-dire une application $g : F \to E$ telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_F$.

Exercice d'application 16
On considère l'application χ qui à une partie de E associe son complémentaire dans E. Calculer $\chi \circ \chi$ et en déduire que l'application $\chi : \mathscr{P}(E) \to \mathscr{P}(E)$ est bijective.

Exercice d'application 17
Montrer que l'application $\Psi : \mathbb{R}^\mathbb{R} \to \mathbb{R}^\mathbb{R}, g \mapsto (\Psi(g) : x \mapsto g(x + 1))$ est bijective et déterminer sa bijection réciproque.

2.3 En reconnaissant une composition de plusieurs bijections

Si $f : E \to F$ peut s'écrire comme la composée de plusieurs applications bijectives, de la forme $f = f_n \circ \cdots \circ f_2 \circ f_1$ (où $n \geqslant 2$), alors $f : E \to F$ est bijective et sa bijection réciproque $f^{-1} : F \to E$ s'obtient à l'aide de la formule :

$$\boxed{\Big(f_n \circ \cdots \circ f_2 \circ f_1\Big)^{-1} = f_1^{-1} \circ f_2^{-1} \circ \cdots \circ f_n^{-1}}.$$

Attention. Pour chaque $k \in [\![1, n]\!]$, il est nécessaire de déterminer l'ensemble de départ E_k et d'arrivée F_k de l'application $f_k : E_k \to F_k$ et de justifier qu'elle est bijective.

Exercice d'application 18
Montrer que la fonction $f : x \mapsto (\pi - 2\arctan(x))/(\pi + 2\arctan(x))$ réalise une bijection sur son ensemble de définition dont on déterminera l'ensemble d'arrivée et sa bijection réciproque.

Exercice d'application 19
Montrer que la fonction $f : x \mapsto 2\arccos(x-1)/(\pi + \arccos(x-1))$ réalise une bijection sur son ensemble de définition dont on déterminera l'ensemble d'arrivée et sa bijection réciproque.

Exercice d'application 20
Montrer que la fonction $f : x \mapsto \sqrt{e^x - e^{-x}}$ réalise une bijection sur son ensemble de définition dont on déterminera l'ensemble d'arrivée et sa bijection réciproque.