Fiche méthodologique n° 9

Étudier globalement des fonctions réelles

1 Déterminer l'ensemble de définition d'une fonction

L'ensemble de définition d'une fonction réelle f est le plus grand ensemble $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$ tel que $f(x)$ soit bien défini pour tout $x \in \mathcal{D}_f$. Pour déterminer $\mathcal{D}_f$, il suffit d'écrire f comme le résultat de plusieurs opérations sur des fonctions usuelles dont on connait les ensembles de définition.
Attention. Il faut être très précis dans la description des opérations et des fonctions usuelles utilisées. Citer des opérations ou des fonctions non utilisées n'est pas pertinent.

1.1 Cas d'une somme ou d'un produit de fonctions

L'ensemble de définition d'une somme ou d'un produit de fonctions réelles est l'intersection des ensembles de définition des termes de la somme ou des facteurs du produit. Autrement dit, si f et g sont deux fonctions réelles, alors :

$$\mathcal{D}_{f+g} = \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g \quad \text{et} \quad \mathcal{D}_{fg} = \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g.$$

Exercice d'application 1
Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto \ln(x)\arccos(x) + \lfloor x \rfloor \sqrt{x}$.

1.2 Cas d'un quotient de fonctions

L'ensemble de définition d'un quotient de deux fonctions réelles est l'intersection des ensembles de définition du numérateur et du dénominateur ainsi que de l'ensemble des réels pour lesquels le dénominateur (est bien défini et) ne s'annule pas. Autrement dit, si f et g sont deux fonctions réelles, alors :

$$\mathcal{D}_{f/g} = \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g \cap \{x \in \mathcal{D}_g \mid g(x) \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in \mathcal{D}_f \text{ et } x \in \mathcal{D}_g \text{ et } g(x) \neq 0\}.$$

Exercice d'application 2
Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto \frac{\ln(x)}{2\sin(x)-1}$.

1.3 Cas d'une composée de fonctions

Si une fonction réelle f peut s'écrire comme la composée de $n \in \mathbb{N}^\star$ fonctions réelles $f_1, f_2, \ldots, f_n$, c'est-à-dire si $f = f_n \circ \cdots \circ f_2 \circ f_1$, alors son ensemble de définition est l'ensemble des valeurs de $x \in \mathbb{R}$ telles que $f_1(x)$ est bien défini, $f_2(f_1(x))$ est bien défini, $f_3(f_2(f_1(x)))$ est bien défini, … et $f_n(\ldots(f_2(f_1(x)))\ldots)$ est bien défini. Autrement dit :

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{f_n\circ\cdots\circ f_2\circ f_1} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in \mathcal{D}_{f_1} \text{ et } f_1(x) \in \mathcal{D}_{f_2} \text{ et } f_2(f_1(x)) \in \mathcal{D}_{f_3} \text{ et}\\ f_3(f_2(f_1(x))) \in \mathcal{D}_{f_4} \text{ et } \ldots \text{ et } f_{n-1}(\ldots(f_2(f_1(x)))\ldots) \in \mathcal{D}_{f_n}\}.\end{aligned}$$

Conseil. En pratique, après avoir «décomposé» la fonction en déterminant l'ensemble de définition de chaque fonction qui la compose (les $\mathcal{D}_{f_k}$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$), on étudie les domaines de définition de l'intérieur vers l'extérieur, c'est-à-dire qu'on cherche les valeurs de $x \in \mathbb{R}$ telles que $x \in \mathcal{D}_{f_1}$, puis telles que $f_1(x) \in \mathcal{D}_{f_2}$, puis telles que $f_2(f_1(x)) \in \mathcal{D}_{f_3}$, etc., enfin on prend l'intersection de tous les ensembles obtenus.

Exercice d'application 3
Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto \arctan\left(\sqrt{\frac{1}{x^2} - 1}\right)$.

2 Restreindre l'ensemble d'étude d'une fonction

Dans certains cas, il n'est pas nécessaire d'étudier une fonction réelle f sur tout son ensemble de définition $\mathcal{D}_f$: il suffit de restreindre son étude à un sous-ensemble de $\mathcal{D}_f$ puis de généraliser les résultats obtenus à tout $\mathcal{D}_f$ à l'aide des propriétés de f.

2.1 Cas d'une fonction paire ou impaire

Si $\mathcal{D}_f$ est symétrique, c'est-à-dire si $-x \in \mathcal{D}_f$ pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, et si f est paire ou impaire, c'est-à-dire si $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathcal{D}_f$ ou $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, alors il suffit d'étudier f sur $\mathcal{D}_f \cap [0, +\infty[$. Le comportement de f sur $\mathcal{D}_f \cap]-\infty, 0[$ s'obtient directement par symétrie.

Exercice d'application 4
Étudier les variations de la fonction $f : x \mapsto \frac{x^4+1}{x^2-1}$.

2.2 Cas d'une fonction périodique

Si l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ est invariant par translation de $T > 0$, c'est-à-dire si $x + T \in \mathcal{D}_f$ pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, et si f est T-périodique, c'est-à-dire si $f(x+T) = f(x)$ pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, alors il suffit d'étudier f sur $\mathcal{D}_f \cap [0, T[$ ou sur $\mathcal{D}_f \cap]-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$. Le comportement de f sur $\mathcal{D}_f \cap (]-\infty, 0[\cup [T, +\infty[)$ ou sur $\mathcal{D}_f \cap (]-\infty, -\frac{T}{2}] \cup]\frac{T}{2}, +\infty[)$ s'obtient directement par translation.
Conseil. On utilise l'ensemble $\mathcal{D}_f \cap]-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ lorsque la fonction f est également paire ou impaire afin de restreindre son étude à l'ensemble $\mathcal{D}_f \cap [0, \frac{T}{2}]$.

Exercice d'application 5
Étudier les variations de la fonction $f : x \mapsto e^{\sin(x/3)}$.