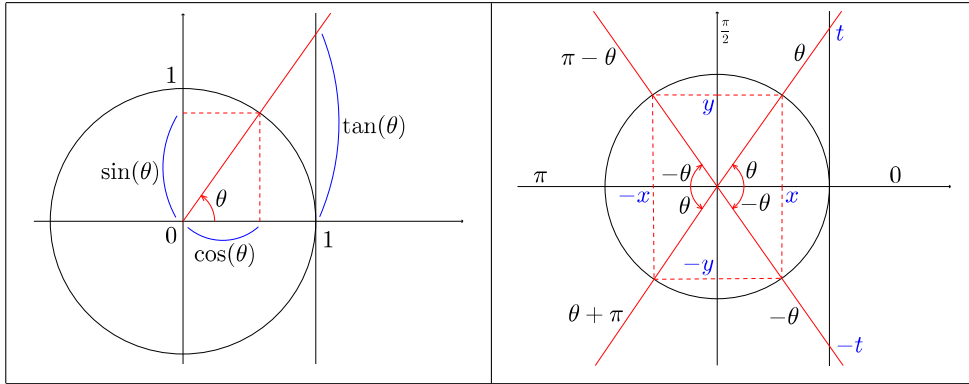


Formulaire de trigonométrie

1 Le cercle trigonométrique



— Ensemble de définition de la fonction tangente :

$$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right[$$

— Théorèmes de Pythagore et de Thalès :

$$\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1 \quad \text{et} \quad \tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$$

par conséquent :

$$1 + \tan^2(\theta) = \frac{1}{\cos^2(\theta)}$$

— Périodicités :

$$\cos(\theta + 2\pi) = \cos(\theta), \quad \sin(\theta + 2\pi) = \sin(\theta) \quad \text{et} \quad \tan(\theta + \pi) = \tan(\theta)$$

— Décalages :

$$\cos(\theta + \pi) = -\cos(\theta) \quad \text{et} \quad \sin(\theta + \pi) = -\sin(\theta)$$

— Parités :

$$\cos(-\theta) = \cos(\theta), \quad \sin(-\theta) = -\sin(\theta) \quad \text{et} \quad \tan(-\theta) = -\tan(\theta)$$

— Symétries :

$$\cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta), \quad \sin(\pi - \theta) = \sin(\theta) \quad \text{et} \quad \tan(\pi - \theta) = -\tan(\theta)$$

2 Valeurs remarquables

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(\theta)$	$\frac{\sqrt{4}}{2} = 1$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2} = 0$
$\sin(\theta)$	$\frac{\sqrt{0}}{2} = 0$	$\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2} = 1$
$\tan(\theta)$	$\frac{0}{1} = 0$	$\frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2} = 1$	$\frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}$	

3 Formules d'addition et de duplication

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta) \\ \sin(\alpha + \beta) &= \cos(\alpha) \sin(\beta) + \sin(\alpha) \cos(\beta) \end{aligned}$$

par conséquent :

$$\begin{aligned} \cos(2\theta) &= \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1 = 1 - 2\sin^2(\theta) \\ \sin(2\theta) &= 2\cos(\theta) \sin(\theta) \end{aligned}$$

et :

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha) \tan(\beta)} \quad \text{donc} \quad \tan(2\theta) = \frac{2 \tan(\theta)}{1 - \tan^2(\theta)}$$

4 Fonctions trigonométriques réciproques

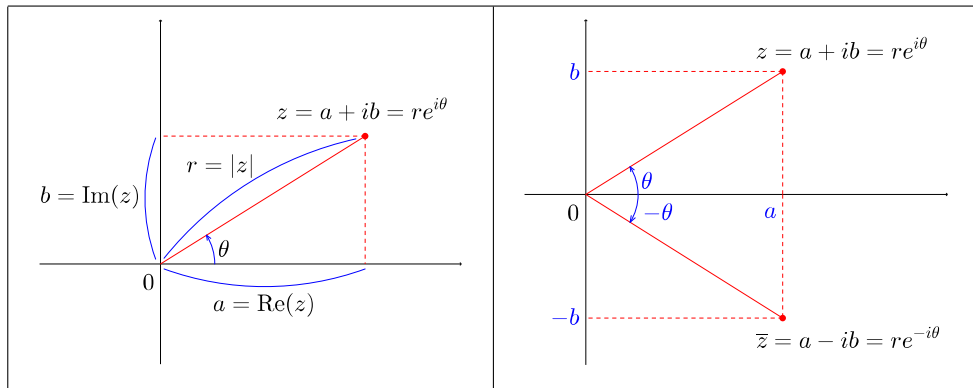
— Définitions :

$$\begin{aligned} \forall x \in [-1, 1], \arccos(x) &= \text{l'unique } \theta \in [0, \pi] \text{ tel que } \cos(\theta) = x \\ \forall y \in [-1, 1], \arcsin(y) &= \text{l'unique } \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \text{ tel que } \sin(\theta) = y \\ \forall t \in \mathbb{R}, \arctan(t) &= \text{l'unique } \theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\text{ tel que } \tan(\theta) = t \end{aligned}$$

— Résolution des équations trigonométriques :

$$\begin{aligned} \cos(\theta) = x &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, \left(\theta = \arccos(x) + 2k\pi \text{ ou } \theta = -\arccos(x) + 2k\pi \right) \\ \sin(\theta) = y &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, \left(\theta = \arcsin(y) + 2k\pi \text{ ou } \theta = \pi - \arcsin(y) + 2k\pi \right) \\ \tan(\theta) = t &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, \theta = \arctan(t) + k\pi \end{aligned}$$

Formulaire de nombres complexes



1 Forme algébrique dans \mathbb{C}

— Écriture algébrique :

$$z = a + ib \quad \text{où} \quad \begin{cases} a = \operatorname{Re}(z) \text{ est la partie réelle} \\ b = \operatorname{Im}(z) \text{ est la partie imaginaire} \end{cases}$$

$$z + w = [\operatorname{Re}(z) + \operatorname{Re}(w)] + [\operatorname{Im}(z) + \operatorname{Im}(w)]i$$

$$z \times w = [\operatorname{Re}(z)\operatorname{Re}(w) - \operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w)] + [\operatorname{Re}(z)\operatorname{Im}(w) + \operatorname{Im}(z)\operatorname{Re}(w)]i$$

en particulier : $i^2 = -1$

— Conjugaison : $\overline{a + ib} = a - ib$

$$z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z), \quad z - \bar{z} = 2i\operatorname{Im}(z), \quad \overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w} \quad \text{et} \quad \overline{z \times w} = \bar{z} \times \bar{w}$$

— Module : $|a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} \quad \text{donc} \quad \frac{1}{z} = \frac{1 \times \bar{z}}{z \times \bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

$$|z + w| \leq |z| + |w| \quad \text{et} \quad |z \times w| = |z| \times |w| \quad \text{et} \quad |\bar{z}| = |z|$$

2 Formes trigonométrique et exponentielle dans \mathbb{C}^*

— Le cercle unité (trigonométrique) : $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$

$$|e^{i\theta}| = 1, \quad \overline{e^{i\theta}} = \frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}, \quad -e^{i\theta} = e^{i(\theta+\pi)} \quad \text{et} \quad e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha}e^{i\beta}$$

— Formules d'Euler :

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

— Factorisation par l'angle moitié :

$$e^{i\alpha} + e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)/2}(\dots + \dots) = 2\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)e^{i(\alpha+\beta)/2}$$

$$e^{i\alpha} - e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)/2}(\dots - \dots) = 2i\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)e^{i(\alpha+\beta)/2}$$

— Formule de Moivre :

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = (e^{i\theta})^n = e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

— Écriture exponentielle :

$$z = re^{i\theta} \quad \text{où} \quad \begin{cases} r = |z| \text{ est le module} \\ \theta \text{ est un argument de } z \neq 0 \end{cases}$$

en particulier : $1 = e^{i0}$, $i = e^{i\pi/2}$ et $-1 = e^{i\pi}$

3 Résolution des équations du 2^e degré à coeff. réels

— Équation : $(E) \quad az^2 + bz + c = 0 \quad \text{où} \quad \begin{cases} a \neq 0, b \text{ et } c \text{ sont des coefficients réels} \\ z \text{ est une inconnue complexe} \end{cases}$

— Discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac$

— Résolution :

si $\Delta > 0$ alors (E) admet deux solutions réelles :

$$z = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ou} \quad z = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

si $\Delta = 0$ alors (E) admet une seule solution réelle (double) :

$$z = \frac{-b}{2a}$$

si $\Delta < 0$ alors (E) admet deux solutions complexes conjuguées :

$$z = \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a} \quad \text{ou} \quad z = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$$

— Somme et produit des solutions :

$$(z_1 \text{ et } z_2 \text{ sont les solutions de } z^2 - Sz + P = 0) \iff (z_1 + z_2 = S \text{ et } z_1 \times z_2 = P)$$