

Formulaire de développements limités

1 Propriétés des développements limités

Soient $n \in \mathbb{N}$ et f une fonction réelle définie au voisinage de $a \in \mathbb{R}$.

- Si f admet un $DL_n(a)$ alors ce $DL_n(a)$ est unique.
- Si f admet un $DL_n(a)$ alors f admet un $DL_m(a)$ pour tout $m \leq n$.
- Si f est paire (resp. impaire) et f admet un $DL_n(0)$ alors tous les termes de degré impair (resp. pair) de son $DL_n(0)$ sont nuls.
- Si f admet un $DL_n(a)$ non nul alors f est équivalente au voisinage de a au terme non nul de plus petit degré de son $DL_n(a)$.
- f admet un $DL_0(a)$ si et seulement si f est continue en a ou admet un prolongement par continuité en a , et dans ce cas $f(a+h) = f(a) + o_{h \rightarrow 0}(1)$.
- f admet un $DL_1(a)$ si et seulement si f (ou son prolongement par continuité en a) est dérivable en a , et dans ce cas $f(a+h) = f(a) + f'(a)h + o_{h \rightarrow 0}(h)$.

2 Formule de Taylor-Young

Soit $n \in \mathbb{N}$. Si f est une fonction de classe \mathcal{C}^n sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, alors pour tout $a \in I$ la fonction f admet un $DL_n(a)$ et

$$\begin{aligned} f(a+h) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + o_{h \rightarrow 0}(h^n) \\ &= f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + \frac{f'''(a)}{6}h^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + o_{h \rightarrow 0}(h^n). \end{aligned}$$

3 Contre-exemples utiles

- $f : x \mapsto e^{-1/x^2}$ admet un prolongement par continuité (avec $f(0) = 0$) de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} et pour tout $n \in \mathbb{N}$ son $DL_n(0)$ est $f(x) = 0 + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$ mais $f \neq 0$. Ainsi, deux fonctions différentes peuvent avoir le même $DL_n(a)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- $f : x \mapsto x^3 \sin(1/x)$ admet un $DL_2(0)$ car $f(x) = o_{x \rightarrow 0}(x^2)$ et admet un prolongement par continuité (avec $f(0) = 0$) de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} mais qui n'est pas deux fois dérivable en 0. Ainsi, l'existence du $DL_2(a)$ n'implique pas l'existence de la dérivée deuxième en a (contrairement à l'existence du $DL_1(a)$ qui est équivalent à l'existence de la dérivée première en a), l'hypothèse de la formule de Taylor-Young est suffisante mais pas nécessaire pour justifier l'existence du $DL_n(a)$, et l'existence du $DL_n(a)$ n'implique pas l'existence du $DL_{n-1}(a)$ pour la dérivée.

4 Manipulation des petits o

Soit $n \in \mathbb{N}$.

- $\forall p > n, \quad h^p = o_{h \rightarrow 0}(h^n) \quad \text{et} \quad o_{h \rightarrow 0}(h^p) = o_{h \rightarrow 0}(h^n).$
- $o_{h \rightarrow 0}(h^n) + o_{h \rightarrow 0}(h^n) = o_{h \rightarrow 0}(h^n).$
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda \times o_{h \rightarrow 0}(h^n) = o_{h \rightarrow 0}(h^n).$
- $\forall k \in \mathbb{N}, \quad h^k \times o_{h \rightarrow 0}(h^n) = o_{h \rightarrow 0}(h^{k+n}) \quad \text{et} \quad o_{h \rightarrow 0}(h^k) \times o_{h \rightarrow 0}(h^n) = o_{h \rightarrow 0}(h^{k+n}).$
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad o_{h \rightarrow 0}\left(\lambda h^n + o_{h \rightarrow 0}(h^n)\right) = o_{h \rightarrow 0}(h^n).$

Attention : $o_{h \rightarrow 0}(h^n) - o_{h \rightarrow 0}(h^n) = o_{h \rightarrow 0}(h^n) !$

5 Opérations sur les développements limités

Soient $n \in \mathbb{N}$ et f, g deux fonctions réelles définies au voisinage de $a \in \mathbb{R}$.

- Si f et g admettent un $DL_n(a)$ alors $f + g$ admet un $DL_n(a)$ obtenu en additionnant les $DL_n(a)$ de f et g .
- Si f et g admettent un $DL_n(a)$ alors $f \times g$ admet un $DL_n(a)$ obtenu en multipliant les $DL_n(a)$ de f et g .
- Si f admet un $DL_n(a)$ et g admet un $DL_n(f(a))$ alors $g \circ f$ admet un $DL_n(a)$ obtenu en composant les DL_n de f et g .
- Si f admet un $DL_n(a)$ et g admet un $DL_n(a)$ avec $g(a) \neq 0$ alors f/g admet un $DL_n(a)$ obtenu à l'aide de

$$\frac{f(a+h)}{g(a+h)} = \frac{f(a+h)}{g(a)} \times \frac{1}{1 + \left(\frac{g(a+h)-g(a)}{g(a)}\right)}$$
- Si f admet un $DL_n(a)$ et F est une primitive de f alors F admet un $DL_{n+1}(a)$ obtenu en primitivant le $DL_n(a)$ de f .
- Si f admet un $DL_n(a)$ et f' admet un $DL_{n-1}(a)$ alors le $DL_{n-1}(a)$ de f' s'obtient en dérivant le $DL_n(a)$ de f .

6 Liste de développements limités usuels

Soit $n \in \mathbb{N}$.

— Sommes des termes de suites géométriques :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$$

On obtient le $DL_n(0)$ de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ en reconnaissant la somme des termes d'une suite géométrique de raison x :

$$\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{x}{1-x} x^n = \frac{1}{1-x} + o_{x \rightarrow 0}(x^n).$$

De même pour le $DL_n(0)$ de $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ en reconnaissant la somme des termes d'une suite géométrique de raison $-x$, ou à l'aide du changement de variable $x \mapsto -x$ dans le $DL_n(0)$ de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$.

— Fonctions binomiales avec $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6} x^3 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$$

On obtient ce $DL_n(1)$ à l'aide de la formule de Taylor-Young avec $f : x \mapsto x^\alpha$ et donc $f^{(n)} : x \mapsto \left(\prod_{k=0}^{n-1} (\alpha - k)\right) x^{\alpha-n}$ (par récurrence). En particulier, on retrouve le $DL_n(0)$ de $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ si $\alpha = -1$ et on a si $\alpha = \frac{1}{2}$:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o_{x \rightarrow 0}(x^3)$$

— Fonction logarithme népérien :

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots + \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} + o_{x \rightarrow 0}(x^{n+1})$$

On obtient ce $DL_{n+1}(1)$ à l'aide de la formule de Taylor-Young avec $f : x \mapsto \ln(x)$ et donc $f^{(n+1)} : x \mapsto (-1)^n n! / x^{n+1}$ (par récurrence), ou par primitivation du $DL_n(0)$ de $x \mapsto \frac{1}{1+x}$.

— Fonction exponentielle naturelle :

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$$

On obtient ce $DL_n(0)$ à l'aide de la formule de Taylor-Young avec $f : x \mapsto \exp(x)$ et donc $f^{(n)} : x \mapsto \exp(x)$ (par récurrence).

— Fonctions trigonométriques :

$$\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + o_{x \rightarrow 0}(x^{2n+1})$$

$$\sin(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} + o_{x \rightarrow 0}(x^{2n+2})$$

On obtient le $DL_{2n+1}(0)$ de \cos et le $DL_{2n+2}(0)$ de \sin à l'aide de la formule de Taylor-Young car $\cos^{(n)} : x \mapsto \cos(x + n\frac{\pi}{2})$ et $\sin^{(n)} : x \mapsto \sin(x + n\frac{\pi}{2})$ (par récurrence).

$$\tan(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o_{x \rightarrow 0}(x^6)$$

On obtient le $DL(0)$ de \tan par quotient des $DL(0)$ de \sin et \cos car $\cos(0) \neq 0$ ou (méthode plus efficace) par primitivation successive de $\tan' : x \mapsto 1 + \tan^2(x)$ en partant de $\tan(x) = x + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$ (car $\tan(x) \sim_{x \rightarrow 0} x$ et \tan est impaire).

$$\arctan(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \dots + \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} + o_{x \rightarrow 0}(x^{2n+2})$$

On obtient ce $DL_{2n+2}(0)$ par primitivation du $DL_{2n+1}(0)$ de $\arctan' : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ obtenu à l'aide du changement de variable $x \mapsto x^2$ dans le $DL_n(0)$ de $x \mapsto \frac{1}{1+x}$.